s维豪斯多夫零测理想的基数不变量与 s 无关

Tatsuya Goto

2026年11月24日

arXiv:2611.29506v1 [math.LO] 22 Nov 2026

摘要

对于 $0<s<1$，令 $\mathcal{N}^s$ 表示 s 维豪斯多夫测度为零的集合所构成的理想。我们证明，对于所有 $0<s,\ t<1$，都有 $\mathrm{cov}(\mathcal{N}^s)=\mathrm{cov}(\mathcal{N}^t)$，且 $\mathrm{non}(\mathcal{N}^s)=\mathrm{non}(\mathcal{N}^t)$。证明使用了 Ren 和 Wang 对 Furstenberg 集猜想的解答。这回答了 Shelah–Stepr$\bar{}$ans 和 Elekes–Stepr$\bar{}$ans 提出的未决问题。

1 引言

稀疏理想 $\mathcal{M}$、勒贝格零理想 $\mathcal{N}$以及由贝尔空间的紧子集生成的理想 K_σ 的四个基数不变量 add、cov、non 和 cof 已得到广泛研究 [Bla10]。人们对研究这三种理想以外的其他理想也日益感兴趣。

豪斯多夫测度和维数用于量化勒贝格零集的大小 [Mat95]。对于每个 $0<s<1$，都可以考虑 s 维豪斯多夫零理想 $\mathcal{N}^s$。以下结果已为人所知。

(1) 对任意 $0<s<1$，$\mathrm{add}(\mathcal{N}^s)=\mathrm{add}(\mathcal{N})$。cof 也有同样的结论（Fremlin [Fre08, 534B]）。(2) 以下情形是一致的：对于所有 $0<s<1$，$\mathrm{non}(\mathcal{N}^s)<\mathrm{non}(\mathcal{N})$（Shelah–Stepr$\bar{}$ans [SS05]，Goto 给出了一个简化证明 [Got25]）。(3) 以下情形是一致的：对于所有 $0<s<1$，$\mathrm{cov}(\mathcal{N})<\mathrm{cov}(\mathcal{N}^s)$（Elekes–Stepr$\bar{}$ans [ES19, 推论 3.3]）。

Shelah–Stepr$\bar{}$ans 曾询问，对于某个$0<s<t<1$ [，$\mathrm{non}(\mathcal{N}^s)<\mathrm{non}(\mathcal{N}^t)$ 是否可能成立（见1]SS05，问题 7）。类似地，Elekes–Stepr$\bar{}$ans 曾询问，对于某个 $0<s<t<1$ [，$\mathrm{cov}(\mathcal{N}^t)<\mathrm{cov}(\mathcal{N}^s)$ 是否可能成立（见4]ES19，问题 5）。本文对这两个问题均给出否定答案。

设 X 是一个度量空间，$A\subseteq X$，且 $s,\ \delta>0$。A 的 s维豪斯多夫测度的 δ-近似定义为

$$\mathcal{H}^s_\delta(A)=\inf\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{diam}(C_n)^s:\ A\subseteq\bigcup_{n\in\omega}C_n,\ \begin{array}{c}C_n\subseteq X\quad(n\in\omega),\\(\forall n)\big(\mathrm{diam}(C_n)\leqslant\delta\big)\end{array}\right\}.$$

A 的 s维豪斯多夫测度定义为

$$\mathcal{H}^s(A)=\lim_{\delta\to0}\mathcal{H}^s_\delta(A).$$

A 的豪斯多夫维数定义为

$$\dim_{\mathrm{H}}(A)=\sup\{s:\mathcal{H}^s(A)=\infty\}=\inf\{s:\mathcal{H}^s(A)=0\}.$$

最后一个等式众所周知，且很容易证明。

我们赋予康托空间 2^ω 以下度量

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & \text{if } x=y,\\ 2^{-\min\{n:x(n)\neq y(n)\}} & \text{otherwise.}\end{cases}$$

对于 $0<s<1$，令 $\mathcal{N}^s$ 为康托空间 2^ω 中 s维豪斯多夫测度为零的子集所构成的理想。令 HDZ 为 2^ω 中豪斯多夫维数为零的子集所构成的理想。

我们的主要工具是 K. Ren 和 H. Wang 对富斯滕贝格集猜想的证明 [RW23, 定理 1.1]。

令 $0<s\leqslant 1$ 且 $0<t\leqslant 2$。若存在空间 $\mathcal{A}(2,1)$（欧几里得平面中仿射直线的空间）的子集 L，使得 $\dim_{\mathrm{H}}^{\mathcal{A}(2,1)}(L)\geqslant t$，并且对每个 $\ell\in L$都有 $\dim_{\mathrm{H}}(E\cap\ell)\geqslant s$，则集合 $E\subseteq\mathbb{R}^2$ 称为一个 (s,t)-富斯滕贝格集。Ren 和 Wang 定理指出：

$$\dim_{\mathrm{H}}(E)\geqslant\min\left\{s+t,\frac{3s+t}{2},s+1\right\}.$$

Intu换言之，与许多直线有较大交集的平面集本身也必须很大 .

在这里，我们为 $\mathcal{A}(2,1)$ 配备如下度量

$$d(\ell,\ell')=\sin\theta+|p-p'|,$$

与 [Mat95] 的第 3.16 节中相同。这里，$\theta\in[0,\pi/2]$ 是两条直线之间的较小夹角，而 p，p' 分别是两条直线上距离原点最近的点。映射

$$T:[0,1]^2\to\mathcal{A}(2,1),\qquad T(u,v)=\ell_{u,v},\tag{1}$$

是双利普希茨的 [DOV22，第 6 节1], 其中

$$\ell_{u,v}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y=\frac{u}{2}x+\frac{v}{2}\right\}.$$

利用对富斯滕贝格集的维数估计，Y. Wang 证明了一个零一律：每个图灵理想 $\mathcal{I}\subseteq 2^\omega$ 都满足 $\dim_{\mathrm{H}}\mathcal{I}\in\{0,1\}$ [Wan26，推论 1.2]。我们主要结果中关于 non 的断言也可直接由 Wang 定理推出。

最后，我们回顾理想的四个基数不变量的定义。设理想$\mathcal{I}$ 定义在集合 X上：

(1) add($\mathcal{I}$)，即 $\mathcal{I}$的可加性，是满足$\bigcup F\notin\mathcal{I}$的族 $F\subseteq\mathcal{I}$ 的最小基数。(2) cov($\mathcal{I}$)，即 $\mathcal{I}$ 的覆盖数，是满足 $\bigcup F=X$的族 $F\subseteq\mathcal{I}$ 的最小基数。(3) non($\mathcal{I}$)，即 $\mathcal{I}$的一致数，是满足$A\notin\mathcal{I}$的集合 $A\subseteq X$ 的最小基数。(4) cof($\mathcal{I}$)，即 $\mathcal{I}$的共尾性，是满足如下条件的族 $F\subseteq\mathcal{I}$ 的最小基数：对每个 $A\in\mathcal{I}$，都有一个 $B\in F$ 使得 $A\subseteq B$。

$2\,\mathrm{non}(\mathcal{N}^s)=\mathrm{non}(\mathcal{N}^t)$

定理 2.1。设 $0<s<1$。则$\mathrm{non}(\mathcal{N}^s)=\mathrm{non}(\mathsf{HDZ})$。

证明。 由于 HDZ $\subseteq\mathcal{N}^s$，不等式 non(HDZ) $\leqslant$non($\mathcal{N}^s$) 显然成立。我们证明反向不等式。取 $A\notin$ HDZ，使得 $|A|=$ non(HDZ)，并令 $I(A)$ 为由 A 生成的图灵理想。对于每个实数 x，至多有可数多个实数图灵可归约到 x。因此 $|I(A)|=|A|=$non(HDZ)。根据 Wang 定理， $I(A)$ 的豪斯多夫维数为 1。因此 $I(A)\notin\mathcal{N}^s$，从而

$$\mathrm{non}(\mathcal{N}^s)\leqslant|I(A)|=\mathrm{non}(\mathsf{HDZ}).$$

□

3 $\mathrm{cov}(\mathcal{N}^s) = \mathrm{cov}(\mathcal{N}^t)$

定义 $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为

$$\Phi(s) = \min\left\{\frac{5}{4}s, \frac{1+s}{2}\right\}.$$

对于 $E \subseteq \mathbb{R}^2$ 和 $0 < s \leqslant 1$，令

$$P_s(E) = \{(u,v) \in [0,1]^2 : \dim_{\mathrm{H}}(E \cap \ell_{u,v}) \geqslant s\}.$$

Lemma 3.1. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^2$ 和 $0 < s \leqslant 1$。如果 $\dim_{\mathrm{H}}(P_s(E)) \geqslant 2s$，则 $\dim_{\mathrm{H}}(E) \geqslant 2\Phi(s)$。

Proof. 利用式 (1) 中的映射 T，令 $L = T[P_s(E)]$。于是， L 证明 E 是一个 $(s, 2s)$- 富斯滕贝格集。根据任–王定理,

$$\dim_{\mathrm{H}}(E) \geqslant \min\left\{3s, \frac{3s+2s}{2}, s+1\right\} = \min\left\{\frac{5s}{2}, s+1\right\} = 2\Phi(s).$$

□

Theorem 3.2. 对于所有 $0 < s, t < 1$，我们有 $\mathrm{cov}(\mathcal{N}^s) = \mathrm{cov}(\mathcal{N}^t)$。

Proof. 只需考虑情形 $0 < s < t < \Phi(s)$。事实上，一旦该情形下的结论得到证明，对于任意 $0 < s < t < 1$，我们可以选取有限个点$s = s_0 < \cdots < s_m = t$，使得 $s_{i+1} < \Phi(s_i)$。将该等式应用于每一对相邻点，即可得到 s 和 t的等式。这里用到了以下事实：对于每个 $0 < s < 1$， $\Phi(s) - s > 0$。

假设 $\kappa = \mathrm{cov}(\mathcal{N}^t) < \mathrm{cov}(\mathcal{N}^s)$。选取一个序列 $\langle A_\alpha : \alpha < \kappa\rangle$ 使得$A_\alpha \in \mathcal{N}^t$ 且 $\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha = 2^\omega$。

为了从康托空间过渡到欧几里得平面，定义 $g\colon 2^\omega \to [0,1]^2$ 为

$$g(x) = \left(\sum_{n\in\omega} \frac{x(2n)}{2^{n+1}}, \sum_{n\in\omega} \frac{x(2n+1)}{2^{n+1}}\right).$$

考察该映射的赫尔德性质，我们得到

$$\dim_{\mathrm{H}} g[A] = 2\dim_{\mathrm{H}} A \quad (A \subseteq 2^\omega),$$
$$\dim_{\mathrm{H}} g^{-1}[B] = \tfrac{1}{2}\dim_{\mathrm{H}} B \quad (B \subseteq [0,1]^2).$$

对于每个 $\alpha < \kappa$，令 $E_\alpha = g[A_\alpha]$ 且

$$P_\alpha = \{(u,v) \in [0,1]^2 : \dim_{\mathrm{H}}(E_\alpha \cap \ell_{u,v}) \geqslant s\}.$$

我们有 $\dim_{\mathrm{H}}(E_\alpha) \leqslant 2t < 2\Phi(s)$。根据引理 3.1 的逆否命题，$\dim_{\mathrm{H}}(P_\alpha) < 2s$。因此 $\mathcal{H}^s(g^{-1}[P_\alpha]) = 0$。由于 $\kappa < \mathrm{cov}(\mathcal{N}^s)$，可得

$$\bigcup_{\alpha<\kappa} g^{-1}[P_\alpha] \neq 2^\omega.$$

Hen因此存在一个 $x^* \in 2^\omega$，使得对于每个 $\alpha < \kappa$， $g(x^*) \notin P_\alpha$。记 $g(x^*) = (u^*, v^*)$。

Put

$$B_\alpha = \left\{x \in [0,1] : \left(x, \frac{u^*}{2}x + \frac{v^*}{2}\right) \in E_\alpha\right\}.$$

由于 $(u^*, v^*) \notin P_\alpha$ 且从 $\ell_{u^*,\, v^*}$ 到 x-轴的投影是利普希茨的，我们有 $\dim_{\mathrm{H}}(B_\alpha) < s$。另一方面，集合 E_α $(\alpha < \kappa)$ 覆盖 $[0,1]^2$, ，因此集合 $B_\alpha(\alpha < \kappa)$ 覆盖 $[0,1]$。为了对 $\kappa < \mathrm{cov}(\mathcal{N}^s)$ 导出矛盾，我们回到康托空间。定义 $h\colon 2^\omega \to [0,1]$ 为

$$h(x) = \sum_{n\in\omega} \frac{x(n)}{2^{n+1}}.$$

再次考虑赫尔德性质可得

$$\dim_{\mathrm{H}} h[A] = \dim_{\mathrm{H}} A \quad (A \subseteq 2^{\omega}),$$
$$\dim_{\mathrm{H}} h^{-1}[B] = \dim_{\mathrm{H}} B \quad (B \subseteq [0,1]).$$

现在 $\bigcup_{\alpha<\kappa} h^{-1}[B_\alpha] = 2^{\omega}$，而对于每个 $\alpha < \kappa$，$\dim_{\mathrm{H}}(h^{-1}[B_\alpha]) < s$。这与$\kappa < \mathrm{cov}(\mathcal{N}^s)$矛盾，从而完成证明。□

4 non($\mathcal{N}^s$) = non($\mathcal{N}^t$) 再探

定理 2.1 也可以利用任–王定理证明。

定理 4.1。对于所有 $0 < s,\ t < 1$，我们有 $\mathrm{non}(\mathcal{N}^s) = \mathrm{non}(\mathcal{N}^t)$。

证明。和之前一样，只需考虑 $0 < s < t < \Phi(s)$ 的情形。选取 $X \subseteq 2^{\omega}$，使得 $X \notin \mathcal{N}^s$ 且 $|X| = \mathrm{non}(\mathcal{N}^s)$。利用前一个证明中的映射 $g\colon 2^{\omega} \to [0,1]^2$ 和 $h\colon 2^{\omega} \to [0,1]$，令

$$E = \left\{ \left(x, \frac{u}{2}x + \frac{v}{2} \right) : x \in h[X],\ (u,v) \in g[X] \right\}.$$

由 $g[X]$ 参数化的直线族的豪斯多夫维数至少为 $2s$，且每条直线都包含 $h[X]$ 的一个双利普希茨像。由引理 3.1，$\dim_{\mathrm{H}}(E) \geqslant 2\Phi(s)$。令 $Y = g^{-1}[E]$。于是 $\dim_{\mathrm{H}}(Y) \geqslant \Phi(s) > t$，且 $|Y| = |X|$。尽管 g 不是单射，但其至多为四对一。因此，

$$\mathrm{non}(\mathcal{N}^t) \leqslant |Y| = |X| = \mathrm{non}(\mathcal{N}^s).$$

□

生成式人工智能声明

在准备本文期间，作者使用 OpenAI ChatGPT 和 Codex（模型为 gpt-6.2-astra 和 gpt-6.2-sol）协助进行文献检索、证明的发现与发展、语言编辑以及 LaTeX 起草。作者独立检查、审阅并修订了所有 AI 辅助材料，并对论文内容承担全部责任。

参考文献

[Bla10] Andreas Blass.《连续统的组合基数特征》。集合论手册。Matthew Foreman 和 Akihiro Kanamori 编。多德雷赫特：施普林格，2010 年，第 395–489 页。[DOV22] Damian Dąbrowski、Tuomas Orponen 和 Michele Villa。《正交投影的可积性及其在福斯滕伯格集中的应用》。数学进展407 (2022)，第 108567 页。[ES19] Márton Elekes 和 Juris Stepr¯ans。《关于豪斯多夫测度的集合论问题》。美国数学会会刊147.4 (2019)，第 1709–1717 页。[Fre08] David H. Fremlin。《测度论》。集合论测度论，第一、二部分。第 5 卷。科尔切斯特：Torres Fremlin，2008 年。[Got25] Tatsuya Goto。《与豪斯多夫测度相关的基数不变量》。数理逻辑档案64 (2025)，第 935–956 页。

[Mat95] Pertti Mattila。《欧几里得空间中的集合与测度几何：分形与可整流性》。剑桥高级数学研究 44。剑桥：剑桥大学出版社，1995 年。[RW23] Kevin Ren 和 Hong Wang。《平面中的富斯滕贝格集估计》。arXiv:2308.08819v3 (2025)。2023 年。[SS05] Saharon Shelah 和 Juris Stepr¯ans。《比较不同测度下零测集的一致性不变量》。数学进展192.2 (2005)，第 403–426 页。[Wan26] Yi Wang。《实数域二进交错封闭子环的零一律》。arXiv:2608.18955v2。2026 年。