arXiv:2611.29508v1 [math.RA] 22 Nov 2026

平坦代数的高阶相干性

Alexander Pavlov MikhailDusman

摘要

我们建立了交换基环上平坦代数的高阶相干性结果。若 K 是诺特环，且一个 K-平坦代数 A 存在长度为 n 的 A^{e}-分解，其中 n 次数处为投射项，较低次数处为平坦项，那么 A 的任意直积的右平坦维数至多为 $n-1$，且 A 是左强 n-相干的。一个投射的 n 次相对 bar 正合核给出相应的双侧结论。若 K 是相干环，且 A 是 K-平坦且相对拟自由的，那么 A 是左、右强 2-相干的。与此相反，我们构造了一个可数交换环 k，它对每个 $n \geq 2$ 都是强 n-相干的，而单变量多项式代数 $k[z]$ 忠实平坦且相对拟自由于 k 之上，却对每个有限 q 都不满足强 q-相干性。显式模见证了每个正次数上的失败。这些结果确立了相干基环上的相干性传递，并表明对于每个 $n \geq 2$，类似的高次数传递都会失败，即使经过任意固定的有限平移也是如此。

1 引言

设 K 是一个交换环， A 是一个含幺 K-代数。其包络代数为 $A^{\mathrm{e}} = A \otimes_K A^{\mathrm{op}}$，其相对微分双模为

$$\Omega^1_{A/K} = \ker\bigl(A \otimes_K A \xrightarrow{\mu} A\bigr), \qquad \mu(a \otimes b) = ab.$$

遵循 Cuntz–Quillen 拟自由框架的相对版本， [6], 代数 A是相对于 K 拟自由的，若$\Omega^1_{A/K}$ 作为左 A^{e}-模是投射的。出发点是 Bondal–Zhdanovskiy 的以下定理 [3]。

定理。设 K 是一个交换诺特环，且 A 是一个 K-平坦、相对拟自由的K-代数。那么 A 是左相干且右相干的。

对于整数 $n \geq 0$ 和环 R，若一个模存在一个延伸至次数 n的部分有限自由分解，则它属于 $\mathrm{FP}_n(R)$。若它在每个次数都有有限秩自由分解，则属于 $\mathrm{FP}_\infty(R)$。若环 R 满足：对左模，$\mathrm{FP}_n(R) = \mathrm{FP}_\infty(R)$，则称其为强左 n-相干的；强右 n-相干性定义类似。若两种条件均成立，则称其为 R 强 n-相干的。对于交换环，强 0-相干性即诺特性，强 1-相干性即普通相干。这些概念启发我们对前述定理作如下推广。

猜想 SC_n。 对于每个 $n \geq 0$，如果 K 是交换的强 n-相干环，且 A 是一个 K-平坦的相对拟自由 K-代数，那么 A 是左、右强 $(n+1)$-相干的。

我们的第一个主要结果确定了所提出的关于相干性和
强相干 n相干基环。

*2020*年数学主题分类。 主要分类 16P70；次要分类 13E15、13D02、16E40。关键词和短语。 凝聚环、强 n-相干环、相对拟自由代数、FP-内射模、多项式代数、平方零扩张。

定理 1.1. 以下陈述成立。

(i) 设 K 是交换相干环， A 是一个 K-平坦的相对拟自由K代数。那么 A 是左、右强 2-相干的。

(ii) 存在一个可数交换环 k ，对于每个$n \geq 2$，它都是强 n-相干的，然而多项式代数 $A = k[z]$ 对于任何有限q都不是强 q-相干的。代数 A 是 k上的自由忠实平坦代数，作为k代数是有限表示的，并且满足

$$\Omega^1_{A/k} \cong A^{\mathrm{e}}, \qquad \mathrm{pd}_{A^{\mathrm{e}}} A = 1.$$

对于每个 $q \geq 1$ ，都显式构造了一个 A模，属于 $\mathsf{FP}_q(A)|\mathsf{FP}_{q+1}(A)$。

第 (i) 部分是定理 4.7；它在底环相干的原始相对拟自由假设下确立了(SC_1)。第 (ii) 部分是定理 4.13。其中唯一的多项式例子否定了(SC_n)，对每个 $n \geq 2$ 均如此；更进一步，在该范围内，任何一致有限相干度平移也都不成立。

注记 1.2. 诺特情形和相干情形中的一步偏移是最佳的。在诺特基环上，相对拟自由代数可能在左右两侧都不是诺特的。在定理 1.1*(i)*， A 可能在左右两侧都不是相干的。

若 K 是诺特的（0-相干），那么我们将运用乘积–Tor 方法和 FP-内射模，给出 Bondal–Zhdanovskiy 定理的两种新证明。

我们的第二个主要结果给出了一个关于诺特基环上双模分解的高阶相干性判据。

定理 1.3. 设 K 是交换诺特的， A 是一个 K-平坦的 K-代数，并且 $n \geq 1$。假设存在一个 A^{e}-模的正合列

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

其中 P_n 是投射的， P_0、……、 P_{n-1} 是平坦的。那么，对于任意集合 I，右 A-模 A^I 满足$\mathrm{fd}_A(A^I) \leq n-1$，并且 A 是左强 n-相干的。

定理 1.3 由定理 3.6 中的乘积–Tor 界和定理3.7中的高阶相干性判据推出。定理 3.8 给出了它的双侧特例：当 n阶相对 bar 正合核是 A^{e}-投射的时， A 是左右强 n-相干的，并且 A 的副本的乘积在两侧的平坦维数均至多为 $n-1$ 。

附录给出了反例中用到的无限变量单项式 Betti 数计算。

2 关于 n-相干性的预备知识

2.1 有限表示、稳定化与正合核比较

全文中，环均为含幺结合环，模均为含幺模，而 k-代数指结构映射 $k \to A$ 具有中心像的含幺代数。除非另有说明，在左侧论证中，模均为左模。

定义 2.1。 设 R 是一个环，且 $n \geq 0$。若存在正合列，则左 R-模 M 称为有限 n-表示的

$$F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

其中每个 F_i 都是有限生成自由左 R-模。我们记作 $M \in \mathsf{FP}_n(R)$。

因此，$\mathsf{FP}_0(R)$ 由有限生成模组成，而 $\mathsf{FP}_1(R)$ 由有限呈模组成。这些类构成一个递降链

$$\mathsf{FP}_0(R) \supseteq \mathsf{FP}_1(R) \supseteq \mathsf{FP}_2(R) \supseteq \cdots .$$

记$\mathsf{FP}_\infty(R)$ 表示在每个次数上都存在由有限生成自由模构成的投射分解的模。等价地，$\mathsf{FP}_\infty(R) = \bigcap_{m\geq 0} \mathsf{FP}_m(R)$；例如参见 [4]。

定义 2.2。 对于 $n \geq 0$，环 R 左 n-相干，如果

$$\mathsf{FP}_n(R) \subseteq \mathsf{FP}_{n+1}(R).$$

右侧 n-相干性使用右模来定义。如果环同时具有左 n-相干性和右 n-相干性，则称其为 n-相干。

我们将 强左 n-相干作为左 n-相干的同义词，右侧同理。

对于 $n = 0$ ，这就是左诺特性；对于 $n = 1$ ，这就是通常的左相干性。下面的定理将一步条件与任意长度的有限分解联系起来。

定理 2.3。 对于任意环 R 和 $n \geq 0$，以下条件在固定的一侧上等价：

(i) R 是强 n-相干的；

(ii) $\mathsf{FP}_n(R)$是厚子类；

(iii) $\mathsf{FP}_n(R) = \mathsf{FP}_\infty(R)$.

证明。 这是 [4, 定理 2.4]。回想一下，“厚子类”是指对直和项封闭，并满足短正合列的三取二性质。 □

注 2.4。 对于交换环 R，强 0-相干性等价于诺特性。事实上，如果每个有限生成模都是有限表示的，那么每个循环模R/I 都是有限表示的，因此每个理想 I 都是有限生成的。反向结论是通常的诺特论证。强 1-相干性就是普通相干性。

以下比较适用于任意结合环上的短正合列。

引理 2.5。 设 B 是任意环，并令

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

是左 B-模的正合列。对于任意 $m \geq 1$，若 $P \in \mathsf{FP}_m(B)$，则

$$M \in \mathsf{FP}_m(B) \quad \textit{if and only if} \quad L \in \mathsf{FP}_{m-1}(B).$$

证明。 这是 Bravo–Pérez [4, 定理 1.5 的第 (1) 和 (3) 部分], 中给出的短正合序列有限性比较，它记录了任意结合环上这三个模的有限表示的最大次数之间的不等式。 □

2.2 Bennis n-平坦性与高阶 Chase 判据

高阶 Chase 判据可自然地用 Bennis 的 n-平坦性概念来表述；该概念通过有限 n-表示模来检验最高 Tor 群。该定义不同于名称相似的 FP_n-平坦性条件。

定义 2.6。 对于 $n \geq 1$，如果右 R-模 P 按照 Bennis 所采用的意义是 n-平坦的，则

$$\operatorname{Tor}_n^R(P, F) = 0 \qquad (F \in \mathsf{FP}_n(R)).$$

Bennis n-平坦性使用 Tor_n 对 FP_n进行检验，而 Bravo–Pérez 的惯例中，FP_n-平坦性使用 Tor_1 对同一检验类进行检验。为区分这两个概念，我们使用“Bennis n-平坦”这一说法。

有限表示可由以下积–张量检验刻画。

引理 2.7. 设 R 为一个环，且 K 为有限生成左 R-模。假设对于每个集合 I，典范映射

$$\theta_{I,K} : R^I \otimes_R K \longrightarrow K^I, \qquad (r_i)_{i\in I} \otimes x \longmapsto (r_i x)_{i\in I},$$

是单射的。那么 K 是有限表示的。

证明。这是有限表示的积–张量刻画：参见 Bennis [2,引理 2.4，等价条件 (1)–(2)，以及 $n = 1$]，该结果适用于任意结合环。由于 K 是有限生成的，典范映射 $R^I \otimes_R K \to K^I$ 是满射；因此，结合假设的单射性可知它是同构，正如所引判据所要求的那样。 □

高次数形式由 Bennis 的广义 Chase 判据给出。

命题 2.8。 设 R 为一个环，并设 $n \geq 1$。假设对于每个集合 I 以及每个$M \in \mathsf{FP}_n(R)$ 都有

$$\operatorname{Tor}_n^R(R^I, M) = 0, \tag{2.1}$$

其中，R^I 是正则右 R-模的若干副本的直积。于是，R 是左 n-相干的。

证明。 应用 Bennis [2, 定理 2.6 中蕴含 (2)⇒(1)]的部分，令 $\mathcal{X}$ 等于所有左 R-模组成的类。在这一特化下，一个 n-$\mathcal{X}$-平坦右模恰好是满足以下条件的右模：对每个 $M \in \mathsf{FP}_n(R)$，都有 $\operatorname{Tor}_n^R(P, M) = 0$。因此，对所有 R^I的假设性消失正是所引用定理中的条件 (2)，其结论是左强 n-相干性。 □

2.3 终端 syzygy 与单积检验

一个足够大的 基数的直积能够检测出与所有直积相同的 Tor 消失 .

引理 2.9。 设 B 为任意环，设 $r \geq 1$，且 M 为左 B-模。假设存在一个正合列

$$0 \longrightarrow Z_r \xrightarrow{\iota} F_{r-1} \longrightarrow F_{r-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

其中所有 F_j 均为 B上的平坦模。那么对于每个右 B-模 P，都存在一个自然同构

$$\operatorname{Tor}_r^B(P, M) \simeq \ker\bigl(P \otimes_B Z_r \xrightarrow{1\otimes\iota} P \otimes_B F_{r-1}\bigr). \tag{2.2}$$

当 $r = 1$时，中间项不存在。

证明。 这是利用平坦分解对 Tor 进行维数平移计算的常用方法；参见 Weibel [9, 引理 3.2.8 及其证明]。 $r = 1$ 步将 $\operatorname{Tor}_1^B(P, M)$ 与 $P \otimes_B Z_1 \to P \otimes_B F_0$ 的核相识别，而平坦项给出的连续连接同构则导出 $r > 1$的所示公式。 □

下一个引理将所有乘积的张量映射的单射性归结为一个具有指定基数的单个积。

引理 2.10。 设 B 是一个含幺环， W 是一个右 B-模， $f : Z \to F$ 是左 B-模之间的一个同态。固定一个无限基数 $\kappa \geq |W|$。以下条件等价：

(i) 对于每个集合 I，映射 $W^I \otimes_B Z \xrightarrow{1\otimes f} W^I \otimes_B F$ 是内射的；

(ii) 对于基数为 κ 的指标集合，同一映射是内射的。

证明。 只需论证从 (ii) 到 (i) 的蕴含关系。假设对于某个集合 I，一个非零元素

$$w = \sum_{\ell=1}^{s} p_\ell \otimes z_\ell \in W^I \otimes_B Z$$

经 $1 \otimes f$ 映射为零。该和是有限的，并且每个 p_ℓ 都是一个函数 $I \to W$。定义

$$\phi : I \to W^s, \qquad \phi(i) = (p_1(i), \ldots, p_s(i)), \qquad J = \phi(I).$$

于是 $|J| \leq |W|^s \leq \kappa$。对于每个 $j \in J$，选取 $i_j \in I$ 使得 $\phi(i_j) = j$。定义右 B-线性映射

$$u : W^J \to W^I, \quad u(q)(i) = q(\phi(i)), \qquad v : W^I \to W^J, \quad v(p)(j) = p(i_j).$$

它们满足 $vu = 1_{W^J}$。令 $q_\ell(j) = p_\ell(i_j)$。则 $u(q_\ell) = p_\ell$，因此

$$w = (u \otimes 1_Z)w', \qquad w' = \sum_{\ell=1}^{s} q_\ell \otimes z_\ell \in W^J \otimes_B Z.$$

由于 u 有一个左逆， $u \otimes 1_Z$ 是分裂单射；因此 $w' \neq 0$。对$u \otimes 1_F$作同样的观察可知，$(1 \otimes f)(w') = 0$。

选取一个单射 $J, \to \kappa$。通过零延拓，可将 W^J 实现为 W^κ的一个直和项。张量保持这一分裂性，因此非零核元素 w' 在 $W^\kappa \otimes_B Z \to W^\kappa \otimes_B F$的核中诱导出一个非零元素。这与 (ii) 矛盾。因此 (i) 成立。 □

定理 2.11。 设 B为任意环，且 W为一个右 B-模。固定一个基数 $\kappa \geq \max\{\aleph_0, |W|\}$。设 $r \geq 1$，并设 M 具有一个长度为 r 的平坦分解片段，如引理 2.9中所述。以下各条件等价：

(i) $\operatorname{Tor}_r^B(W^I, M) = 0$ *for every set* I*;*

(ii) $\operatorname{Tor}_r^B(W^\kappa, M) = 0$。

证明。 应用末端 syzygy 公式，引理 2.9，对 $P = W^I$。引理 2.10随后表明，所得张量核对每个 I 都消失，当且仅当它对 I 基数为 κ时消失。

□

推论 2.12。 设 R 是任意含幺环， $r \geq 1$，且 $\kappa_R = \max\{\aleph_0, |R|\}$。那么 R 是左强相干的，当且仅当

$$\operatorname{Tor}_r^R(R^{\kappa_R}, M) = 0 \qquad \textit{for every } M \in \mathsf{FP}_r(R).$$

右模的右侧对应结论也成立。

证明。 每个 $M \in \mathsf{FP}_r(R)$ 都有一个有限自由 r-表示。它的 r次正合核嵌入次数为 $r-1$的有限自由模中，因此引理 2.9 可用于 $B = W = R$。定理 2.11将每个 R^I 的消失归结为所展示的单个积。最后，Bennis 的高阶 Chase 判据 [2, 定理 2.6] 将这种普遍消失刻画为左强 r-相干性。右侧的证明将 R 替换为 R^{op}，其基数相同。

□

2.4 FP_n-内射性

强 n-相干性也有 Ext-理论刻画。在本小节中，模均指任意含幺结合环 R 上的左模。

定义 2.13. 对于 $n \geq 0$，或 $n = \infty$，令

$$\mathcal{I}_n(R) = \{E \in R\text{-Mod} : \operatorname{Ext}^1_R(F, E) = 0 \text{ for every } F \in \mathsf{FP}_n(R)\}.$$

$\mathcal{I}_n(R)$ 中的对象称为 FP_n-内射。

在次数为零时，$\mathcal{I}_0(R)$ 由内射模组成：Baer 判别准则通过循环模 R/J 来检验单射性，而这些循环模都是有限生成的。类 $\mathcal{I}_1(R)$ 由通常所说的***FP*-内射模**，即绝对纯模组成。类$\mathcal{I}_\infty(R)$ 通常称为绝对干净模类。由于 $\mathsf{FP}_n(R)$ 类随 n 增大而递减，相对内射对象类则递增：

$$\mathcal{I}_0(R) \subseteq \mathcal{I}_1(R) \subseteq \mathcal{I}_2(R) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{I}_\infty(R).$$

这些定义和约定与 Bravo–Pérez 的定义 3. [4, 相符1]。与 Bennis 在小节 2.2中的平坦性不同，此处的条件针对每个 Ext^1 值 n进行检验。

定理 2.14. 设 R 是任意含幺结合环，且 $n \geq 1$。以下条件对于左 R-模等价：

(i) R 是左强 n-相干的；

(ii) $\mathcal{I}_n(R) = \mathcal{I}_{n+1}(R)$;

(iii) $I_n(R)$是余解的；

(iv) 对于任意 $F \in \mathsf{FP}_n(R)$ 和 $E \in I_n(R)$，对任意 $q \geq$都有 $\operatorname{Ext}^q_R(F, E) = 0$ 2.

在 ***(iii)*** 中，余解意味着，该类包含所有内射模，并且对于其对象之间的单态射，其扩张和余核运算是封闭的。

证明。 这是 Bravo–Pérez [4, 定理 5.5], 针对上述四个条件的特例。该定理对任意结合环均成立，并且分别适用于任一侧。 □

特别地，取 $n = 1$ 便得到下文所使用的二阶相干性判据：

$$R \text{ is left coherent} \quad \text{if and only if} \quad \operatorname{Ext}^2_R(F, E) = 0 \quad (F \in \mathsf{FP}_1(R),\ E \in \mathcal{I}_1(R)). \tag{2.3}$$

引理 2.15。 设 R 是任意结合环，且 $n \geq 0$。假设

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow I \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

是正合的，且 I 内射。若 $E \in I_n(R)$，则 $C \in I_{n+1}(R)$。更一般地，经过 j 次连续的内射余零化子后，一个 FP_n-内射模会变为 FP_{n+j}-内射模。若 R 是强 n-相干的，且 $n \geq 1$，则这些余零化子均已属于 $I_n(R)$。

证明。 取 $F \in \mathsf{FP}_{n+1}(R)$ 以及短正合列 $0 \to \Omega F \to P \to F \to 0$ 其中 P 有限自由。根据有限维 syzygy 比较，引理 2.5，模 ΩF 属于 $\mathsf{FP}_n(R)$。两个长正合Ext 序列给出

$$\operatorname{Ext}^1_R(F, C) \cong \operatorname{Ext}^2_R(F, E) \cong \operatorname{Ext}^1_R(\Omega F, E) = 0.$$

这证明了第一个断言，迭代即可证明第二个断言。对于强 n-相干 R，前面的定理给出对所有 $j \geq 0$ 均有$\mathcal{I}_n(R) = \mathcal{I}_{n+j}(R)$，这就证明了最后一个断言。 □

阶梯结构给出了任意环中余余核包含于$\mathcal{I}_{n+1}(R)$ 的结论。强n-相干性要求反向包含$\mathcal{I}_{n+1}(R)$ $\subseteq \mathcal{I}_n(R)$，如定理 2.14所述。

命题 2.16. 设 $K \to A$ 是含幺环同态，且 A 作为右K-模是平坦的。对于每个 $r \geq 0$，包括 $r = \infty$，标量限制都将 $I_r(A)$ 映入 $I_r(K)$。若 K 是左强 m-相干的，且 $r \geq m$，则标量限制将 $I_r(A)$ 映入 $I_m(K)$。

证明. 设 $X \in$ 是 $\mathrm{FP}_r(K)$，且 $E \in \mathcal{I}_r(A)$。取一个在K上的投射分解 $P_\bullet \to X$ 。由于 A 是右 K-平坦的，复形 $A \otimes_K P_\bullet \to A \otimes_K X$ 是由投射左 A-模构成的正合复形。因此，逐次应用诱导–限制伴随可得自然同构

$$\mathrm{Ext}^q_A(A \otimes_K X, E) \cong \mathrm{Ext}^q_K(X, E) \qquad (q \geq 0).$$

对 X 的有限 r-表示在与 A张量后仍是有限 r-表示。因此，$A \otimes_K X \in$ 是 $\mathrm{FP}_r(A)$，且次数一处的同构证明了限制后 $E \in \mathcal{I}_r(K)$。若 K 是强 m-相干的，则只要 $r \geq m$，$\mathrm{FP}_m(K)$ $= \mathrm{FP}_\infty(K) = \mathrm{FP}_r(K)$，因此$\mathcal{I}_r(K) = \mathcal{I}_m(K)$。 □

特别地，如果 K 是诺特的且 A 是右 K-平坦的，那么每个 FP-内射 A-模限制后都是内射 K-模。

3 Hi由投射相对双模的 syzygie 得到的更高相干性 s

3.1 相对双模与巴分解

设 k 为交换环，且 A 为 k-代数。记

$$A^{\mathrm{e}} = A \otimes_k A^{\mathrm{op}}$$

为包络代数。左 A^{e}-模等同于 A-双模：$(a \otimes b^{\mathrm{op}})$ 通过左乘 a 和右乘 b作用。

3.1.1 相对巴复形

对于 $q \geq 0$,

$$B_q(A/k) = A^{\otimes_k (q+2)}.$$

The 两个外侧张量因子提供 A-双模结构。bar 微分为

$$d_q(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{q+1}) = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j a_0 \otimes \cdots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_{q+1},$$

且增广映射 $B_0(A/k) = A \otimes_k A \to A$ 是乘法。增广正合列

$$\cdots \longrightarrow B_2(A/k) \longrightarrow B_1(A/k) \longrightarrow B_0(A/k) \longrightarrow A \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

是正合的。可以直接利用通常的收缩同伦验证正合性，该收缩同伦由插入单位元 $1 \in A$ 得到。

定义 3.1. 对于 $n \geq 1$，第 n 个相对 bar 正合核为

$$\Omega^n_{\mathrm{bar}}(A/k) = \begin{cases} \ker(B_0(A/k) \to A), & n = 1, \\ \ker(B_{n-1}(A/k) \to B_{n-2}(A/k)), & n \geq 2. \end{cases}$$

因此，$\Omega^1_{\mathrm{bar}}(A/k)$ 是通常的相对非交换一形式双模 $\Omega^1_{A/k}$ 。

引理 3.2。 假设 A 作为 k-模是平坦的。那么每个 $B_q(A/k)$ 都是平坦的左A^{e}-模。

证明。 存在一个 A^{e}-线性同构

$$B_q(A/k) \cong A^{\mathrm{e}} \otimes_k A^{\otimes_k q}, \tag{3.2}$$

其中 A^{e} 作用于第一个因子。由于 A是 k-平坦的，其有限张量幂 $A^{\otimes_k q}$ 是 k-平坦的。

设 $X \to Y$ 是右 A^{e}-模之间的一个单态射。在（3.2）下，与$B_q(A/k)$ 上的张量 A^{e} 可视为对底层 k-模与 $A^{\otimes_k q}$进行张量：

$$X \otimes_{A^{\mathrm{e}}} B_q(A/k) \cong X \otimes_k A^{\otimes_k q}.$$

后一个函子保单态射，因为 $A^{\otimes_k q}$ 是 k-平坦的。因此， $B_q(A/k)$ 是A^{e}-平坦的。

□

因此，若 $\Omega^n_{\mathrm{bar}}(A/k)$ 在 A^{e}上是投射的，则截断 bar 序列

$$0 \longrightarrow \Omega^n_{\mathrm{bar}}(A/k) \longrightarrow B_{n-1}(A/k) \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_0(A/k) \longrightarrow A \longrightarrow 0 \tag{3.3}$$

是一个长度为 n 的 A^{e}-平坦分解，其最左端项是投射的。该论证使用了中间 bar 项的平坦性；它们的投射性是一个更强的条件，可能需要额外的假设，例如适当的 k-投射性。

3.2 诺特基环上的两个乘积引理

引理 3.3. 设 k 是一个交换诺特环，并设 $(F_i)_{i\in I}$ 是一个平坦k-模族。令 $F = \prod_{i\in I} F_i$。则：

(a) F 在 k上是平坦的；

(b) 对于每个 k-模 M，典范映射

$$\lambda_M : F \otimes_k M \longrightarrow \prod_{i\in I}(F_i \otimes_k M) \tag{3.4}$$

是内射的。

证明. (a)部分是 Chase 乘积平坦性定理 [5, 定理 2.1]；另见 [8, 代数，命题 10.90.6，标签 05CZ]。对于 (b) 部分，将诺特有限呈性质 [8, 代数，引理 10.31.4，标签 00FP], 、有限呈模的乘积—张量同构 [8, 代数，命题 10.89.3，标签 059K], 以及 (a) 部分的平坦性结合起来。□

引理 3.4. 设 k 是交换诺特的，设 A 是 k-平坦的，设 M 是左 A-模，且设 P 是投射左 A^{e}-模。对于任意集合 I，由坐标投影 $A^I \to A$ 诱导的映射

$$\Phi_P : (A^I \otimes_k M) \otimes_{A^{\mathrm{e}}} P \longrightarrow \prod_{i\in I}((A \otimes_k M) \otimes_{A^{\mathrm{e}}} P), \tag{3.5}$$

是内射的。

证明。 首先假设 P 是自由的，即 $P = (A^{\mathrm{e}})^{(J)}$。于是（3.5）变为

$$\bigoplus_{j\in J}(A^I \otimes_k M) \longrightarrow \prod_{i\in I}\bigoplus_{j\in J}(A \otimes_k M).$$

它分解为

$$\bigoplus_{j\in J}(A^I \otimes_k M) \longrightarrow \bigoplus_{j\in J}\prod_{i\in I}(A \otimes_k M) \longrightarrow \prod_{i\in I}\bigoplus_{j\in J}(A \otimes_k M). \tag{3.6}$$

由引理 3.3(b) 应用于平坦 k-模 A可知，第一个箭头是单射。第二个箭头的单射性纯粹基于集合论：直和中的元素只有有限个非零的 j-坐标；如果它的所有 i-坐标像都为零，那么这有限个分量也都为零。因此，对于自由 P，(3.5) 是单射。

对于一般的投射 P，取一个分裂单态射 P，$\to (A^{\mathrm{e}})^{(J)}$。与任意右 A^{e}-模作张量会保留分裂单态射，而分裂单态射的乘积是单态射。将 3.5) 对 P 的情形与已证明的自由情形进行比较，即可得出 P 的单射性。

□

3.3 相对 Tor 与双边 bar 复形

下一个引理借助双边 bar 复形比较相对 Tor。

对于右 A-模 N 和左 A-模 M， k-模 $N \otimes_k M$ 通过以下方式成为右A^{e}-模

$$(n \otimes m) \cdot (a \otimes b^{\mathrm{op}}) = na \otimes bm. \tag{3.7}$$

引理 3.5。设 k 是交换的， A 是 k-平坦的， N 是一个右 A-模，且作为 k 上的模是平坦的，而 M 是一个左 A-模。那么对每个 $q \geq 0$，都有一个自然同构

$$\mathrm{Tor}_q^{A^{\mathrm{e}}}(N \otimes_k M, A) \cong \mathrm{Tor}_q^A(N, M). \tag{3.8}$$

证明。使用 的相对 bar 分解（3.1），将其视为左 A^{e}-模。由引理3.2，它是一个平坦分解。在次数 q 上，有一个自然同构

$$(N \otimes_k M) \otimes_{A^{\mathrm{e}}} B_q(A/k) \xrightarrow{\sim} N \otimes_k A^{\otimes_k q} \otimes_k M, \tag{3.9}$$

由下式给出

$$(n \otimes m) \otimes (a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_q \otimes a_{q+1}) \longmapsto na_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_q \otimes a_{q+1}m.$$

A^{e} 的平衡关系正是使这个公式定义良好所需的条件。在这些同构下，bar 微分变为通常的双边 bar 微分。

剩下要证明所得复形计算的是 $\mathrm{Tor}_*^A(N, M)$。增广的右 A-模 bar 复形

$$\cdots \longrightarrow N \otimes_k A \otimes_k A \longrightarrow N \otimes_k A \longrightarrow N \longrightarrow 0 \tag{3.10}$$

是正合的；标准的收缩同伦通过插入 A 的单位元来定义。它的次数-q 项形式如下

$$(N \otimes_k A^{\otimes_k q}) \otimes_k A.$$

由于 N 和 A 是 k-平坦的，系数 $N \otimes_k A^{\otimes_k q}$ 是 k-平坦的。因此，这个次数为 q 的项是一个平坦的右 A-模：将左 A-模与它做张量积，等同于先遗忘到 k，再与一个 k-平坦模做张量积。因此，(3.10) 是 N的一个平坦右 A-分解。将它在 A 上与 M 做张量积，恰好得到 (3.9) 右侧的复形。因此，其同调为 $\mathrm{Tor}_*^A(N, M)$，从而证明了 (3.8)。

□

3.4 基于双模分解的高阶乘积–Tor 消失

对于 $n \geq 1$，考虑一个 A-双模的正合列

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0, \tag{3.11}$$

其中 P_n 作为一个 A^{e}-模是投射的，并且 $P_0, \ldots, P_{n-1}$ 作为 A^{e}-模是平坦的。长度为 A^{e} 的投射 n -分解满足这些假设。截断的相对 bar 分解（3.3）也满足这些假设，只要其第 n 个相对 bar 正合核是投射的，这由引理 3.2可知。

定理 3.6. 设 k 是一个交换诺特环，设 A 是一个 k-平坦 k-代数，并设 $n \geq 1$。假设 A 具有如下形式的正合 A^{e}-模分解 (3.11)，其中 P_n是投射的，且 $P_0, \ldots, P_{n-1}$ 是平坦的。那么，对每个集合 I，

$$\mathrm{fd}_A(A^I) \leq n-1 \tag{3.12}$$

对于视为右 A-模的 A^I 。等价地，

$$\mathrm{Tor}_q^A(A^I, M) = 0 \qquad \textit{for every left } A\textit{-module } M \textit{ and every } q \geq n. \tag{3.13}$$

证明。 固定一个集合 I 和一个左 A-模 M，并记

$$N = A^I.$$

由于 A 是 k-平坦的，且 k 是诺特的，引理 3.3(a) 表明 N 是 k-平坦的。因此引理 3.5 适用于 N。

将分解3.11）左张量积上右侧 A^{e}-模 $N \otimes_k M$。由于这些 P_j是 A^{e}-平坦的，所得复形的同调计算出

$$\mathrm{Tor}_*^{A^{\mathrm{e}}}(N \otimes_k M, A),$$

根据引理3.5，这自然同构于$\mathrm{Tor}_*^A(N,\ M)$。

由于该分解在次数 $> n$ 上没有项，我们立即得到

$$\mathrm{Tor}_q^A(N, M) = 0 \qquad (q > n). \tag{3.14}$$

剩下只需证明在顶次数 $q = n$ 上的消失。

对于每个 $i \in I$，令 $\pi_i \colon N = A^I \to A$ 为坐标投影。映射 $\pi_i \otimes \mathrm{id}_M$给出从复形到

$$(N \otimes_k M) \otimes_{A^{\mathrm{e}}} P_\bullet$$

到以 $i \in I$ 为指标的复形直积

$$(A \otimes_k M) \otimes_{A^{\mathrm{e}}} P_\bullet.$$

在次数 n处，这个态射恰好是

$$(N \otimes_k M) \otimes_{A^{\mathrm{e}}} P_n \longrightarrow \prod_{i \in I} ((A \otimes_k M) \otimes_{A^{\mathrm{e}}} P_n), \tag{3.15}$$

根据引理3.4 ，它是单射，因为 P_n 是投射的。

设 z是源复形中的一个 n-循环。由于次数 $n+1$处没有项，证明 H_n 为零等价于证明 $z = 0$。对于每个 i， z 的像 z_i 是 i目标复形中的一个 n-循环。其同调类属于

$$\mathrm{Tor}_n^{A^{\mathrm{e}}}(A \otimes_k M, A) \cong \mathrm{Tor}_n^A(A, M) = 0,$$

其中该同构由引理3.5 给出，且 $N = A$。同样，次数 n处没有进入的微分，因此同调群为零迫使循环 z_i 本身为零。因此， z 在（3.15）下的像为零。（3.15）的单射性给出 $z = 0$。

$\mathrm{Hence}\, \mathrm{Tor}_n^A(N,\ M) = 0$。结合 (3.14)，可证明 (3.13)，从而得到 (3.12)。 □

3.5 高阶相干定理

定理 3.7。 设 k 是一个交换诺特环，设 A 是一个 k-平坦 k-代数，并设$n \geq 1$。若 A 具有一个如下形式的正合 A^{e}-模分解：(3.11) 其中项 P_n 是投射的，且各项 P_0、……、P_{n-1} 均为平坦的，则 A 是左 n-相干的。

证明。 定理 3.6给出

$$\operatorname{Tor}_n^A(A^I, M) = 0$$

对每个集合 I 以及每个左 A-模 M，因此特别地，对每个 $M \in \mathsf{FP}_n(A)$。命题 2.8 进而给出左 n-相干性。 □

下面的定理将乘积–Tor 估计应用于截断相对 bar 复形。其情形 $n = 1$ 给出诺特基底相干性结论。

定理 3.8。 设 k 是交换诺特环， A 是一个 k-平坦的 k-代数，并设$n \geq 1$。若

$$\Omega^n_{\mathrm{bar}}(A/k)$$

作为左 A^{e}-模是投射的，则 A 是左、右 n-相干的。事实上，对每个集合 I，

$$\operatorname{fd}_A(A^I) \leq n - 1$$

并且在相反侧，

$$\operatorname{fd}_{A^{\mathrm{op}}}({}^I A) \leq n - 1.$$

证明。 由引理 3.2，截断 bar 序列（3.3）是一个长度为 A^{e} 的精确 n -模消解，其次数 n 上有一个投射项，而较低次数上有平坦项。定理3.7和定理 3.6因此给出了左侧结论。

对于右侧结论，将相同的论证应用于 A^{op}。环 A^{op} 是k-平坦的。此外， A^{op} 的相对巴复形可由 A 的相对巴复形通过反转双模作用得到。该操作是A 与 A^{op} 的双模范畴之间的一个等价，并且保持投射模。因此，只要 A 的 n阶相对 bar 正合核是投射的， A^{op} 的 n阶相对 bar 正合核也就是投射的。将左侧结论应用于 A^{op} ，即可证明 A 的右侧 n-相干性以及相应的平坦维数界。 □

推论 3.9。 设 k 为交换诺特环，设 A 为 k-平坦的，并设 $n \geq 1$。如果

$$\operatorname{pd}_{A^{\mathrm{e}}} A \leq n,$$

那么 A 是左、右 n-相干的。若 $1 \leq d = \operatorname{pd}_{A^{\mathrm{e}}} A < \infty$，则$A$ 的任意多个副本的直积，其右、左平坦维数均至多为 $d - 1$，并且对每个 $m \geq d$， A 都是 m-相干的。

证明。 一个投射 A^{e}-分解 A长度至多为 n 可通过补入零模，得到一个长度为n A^{e}的模分解，其中次数 n 处的项是投射模，而较低项是平坦模。应用定理 3.6 和 3.7，再对 A^{op}应用同样的论证。对于$m \geq d$，强 d-相干性蕴含 $\mathsf{FP}_d = \mathsf{FP}_\infty$ ，因而 $\mathsf{FP}_m = \mathsf{FP}_\infty$。 □

4 所提更高阶相干性传递的精确边界

4.1 通过直积讨论 SC_0 的情形

定理 4.1. 设 K 为交换诺特环，且 A 为 K-平坦且相对拟自由。那么 A 是左相容且右相容的。

证明. 对每个集合 I， K-模 A^I 都是平坦的。事实上，第 3 节中证明的诺特积平坦性引理适用于平坦 K-模的乘积。由于 $\Omega^1_{A/K}$ 作为 A^e上的模是投射的，序列

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{A/K} \longrightarrow A \otimes_K A \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

是一个双模分解，其最左端项是投射模。相对积 Tor 定理（定理3.6）在次数一时给出

$$\operatorname{Tor}_1^A(A^I, M) = 0 \qquad \text{for every left } A\text{-module } M \text{ and every } I.$$

因此，正则右 A-模的任意直积都是平坦的。Chase 积判别准则蕴含左相干性。对 A^{op} 应用同样的论证可得右相干性。 □

4.2 通过 FP-内射模处理 SC_0 的情形

引理 4.2。 设 A 是交换环 K 上的相对拟自由模。若左 A-模 E 作为 K-模是内射的，则存在正合列

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(A, E) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(\Omega^1_{A/K}, E) \longrightarrow 0$$

其中右侧的两个模是左 A-模，且均为内射模。因此 $\operatorname{id}_A(E) \leq 1$。

证明。 利用 $a \mapsto a \otimes 1$， $\Omega^1_{A/K}$ 的定义双模列作为左 A-模的序列分裂。因此，应用 $\operatorname{Hom}_A(-, E)$ 可得所示短正合列，其中左 A-作用由自变量上的右乘给出。通过求值可将中间项识别为余诱导模 $\operatorname{Hom}_K(A, E)$；其作用为 $(a\varphi)(b) = \varphi(ba)$。根据诱导–余诱导伴随，

$$\operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{Hom}_K(A, E)) \cong \operatorname{Hom}_K(M, E).$$

右端函子在 M 中是正合的，因此 $\operatorname{Hom}_K(A, E)$ 是内射的。由于 $\Omega^1_{A/K}$是一个 A^e-投射自由双模的直和项，$\operatorname{Hom}_A(\Omega^1_{A/K}, E)$ 是若干个 $\operatorname{Hom}_A(A^e, E) \cong \operatorname{Hom}_K(A, E)$ 的乘积的直和项。内射模的乘积和直和项仍为内射模，故得证。

□

定理 4.3. 在定理 *4.1*的假设下， A 是左相干且右相干的 $t.$

证明。 设 E 是一个 FP-内射左 A-模。由命题 2.16，取 $m = 0$和 $r = 1$，可知其限制到诺特环 K 上是内射的。引理 4.2 给出 内射维数$_A(E) \leq 1$。特别地，对于每个有限表示左 $\operatorname{Ext}^2_A(F, E) = 0$-模 A，都有 F。判据 (2.3) 证明了左相干性。对 A^{op} 作同样的论证即可证明右相干性。

□

注 4.4。定理 4.1 和定理 4.3 中相干度偏移一是最佳的。它们的假设允许 A 在左右两侧均不具备强 0-相干性（诺特性）。令 k 为一个域，并取自由结合代数 $A = kx、 y$，这是 [3, 第 4] 节中的一个例子。 $x、 y$ 中的字构成 A 的一个 k-基，因此 A 是 k-平坦的。从 A 到任意 A-双模的导子由其在 x 和 y 上的任意取值决定。因此，$\Omega^1_{A/k}$ 关于 A^e 在 $dx、 dy$ 上是自由的。

对于 $n \geq 0$，令 $L_n = \sum_{i=0}^{n} Ayx^i$。这个左理想由以以下任一项结尾的字张成：$y、 yx、$ ……、 yx^n。字 yx^{n+1} 不含这些后缀，因此它属于 L_{n+1}，但不属于 L_n。因此， A 不具有左诺特性。字反转是 A 的一个反自同构，并给出一个严格递增的右理想链。因此，相干代数 A 在左右两侧都不具有强 0-相干性。

4.3 SC_1 情形：相对平坦维数平移一步

引理 4.5。 设 A 是 K 上相对拟自由的。每个左 A-模 M 都有一个自然的正合列

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{A/K} \otimes_A M \longrightarrow A \otimes_K M \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

最左项是 $A \otimes_K M^{(J)}$ 的一个直和项，其中 J 为某个集合。

证明。 双模正合列 $0 \to \Omega^1_{A/K} \to A \otimes_K A \to A \to 0$ 通过截面 $a \mapsto 1 \otimes a$ 分裂为右 A-模的序列。对 A 张量 M，得到正合列。一个 A^e-投射模是 $(A^e)^{(J)}$ 的直和项；沿右侧 A 作用与 M 张量后，这给出 $(A^e \otimes_A M)^{(J)} \cong A \otimes_K M^{(J)}$ 的一个直和项。 □

定理 4.6。 假设 A 是 K-平坦且相对拟自由的。若 N 是右 A-模，且 $\mathrm{fd}_K N \le d$，则 $\mathrm{fd}_A N \le d+1$。相应的断言在相反侧也成立。

证明。 平坦诱导将 $\mathrm{Tor}_i^A(N, A \otimes_K X)$ 与 $\mathrm{Tor}_i^K(N, X)$ 等同，对每个 K-模 X 均成立。事实上，对 X 的投射 K 解消进行诱导，并逐次数使用自然的张量伴随。因此，当 $i > d$ 时，$\mathrm{Tor}_i^A(N, A \otimes_K M)$ 消失。由前面的引理，$\mathrm{Tor}_i^A(N, \Omega^1_{A/K} \otimes_A M)$ 也同样消失：它是 $A \otimes_K M^{(J)}$ 对应 Tor 群的一个直和项，而后者在 $i > d$ 时也消失。相对诱导解消的 Tor 长正合列表明，对于任意 M，当 $i > d+1$ 时，$\mathrm{Tor}_i^A(N, M) = 0$。这证明了平坦维数界。 □

定理 4.7。 若 K 是交换相干的，且 A 是 K-平坦且相对拟自由的，则 A 是左、右强 2-相干的。

证明。 由 Chase 乘积定理，平坦 K-模的任意直积都是平坦的。因此，每个乘积 A^I 都是 K-平坦的。一步平坦维数偏移给出 $\mathrm{fd}_A(A^I) \le 1$，因此 $\mathrm{Tor}_2^A(A^I, F) = 0$ 对每个左 A-模 F 都成立。Bennis 的强2-相干判据 [2,定理 2.3 和 2.6] 蕴含 A 是左强2-相干的。对 A^{op} 应用同样的论证。 □

注 4.8。定理 4.7 中相干度偏移一个次数是尖锐的。其假设允许 A 不满足强 1-相干性（普通相干）。取 Soublin 例子，回顾见 [3, 第 4] 节。可数乘积 $K = \prod_{n \ge 1} \mathbb{Q}[[u, v]]$ 是相干的，而 $A = K[t]$ 不相干。代数 A 在 K 上关于 t 的幂是自由的。在 $A^e \cong K[t, s]$ 下，乘法映射 $A^e \to A$ 将 s 映至 t，其核为 $(t - s)\,K[t, s]$。由于 $s - t$ 在 s 中是首一的，乘以 $t - s$ 将 A^e 与该核等同。因此， A 是相对于 K 拟自由的，并满足定理 4.7 的假设。它是强 2-相干的，但不满足强 1-相干性。

4.4 局部平方零机制与坏环的忠实恢复

在余下的构造中，所有环都是交换环。局部平方零构造与 Bakkari–Mahdou [1] 的平凡扩张例子有关。环 B 由 B-模 E 作平凡扩张 $B \ltimes E$，其加法群为 $B \oplus E$，乘法为 $(b, e)(b', e') = (bb', be' + b'e)$。理想 $0 \ltimes E$ 是平方零的。

引理 4.9。 设 $(B, \mathfrak{n})$ 为局部环，令 $\kappa = B/\mathfrak{n}$，并设 E 是无限维的 κ-向量空间，通过 $B \to \kappa$ 视为一个 B-模。则 $k = B \ltimes E$ 是局部的且非相干，并且每个 $\mathrm{FP}_2(k)$-模都是有限自由模。因此，对于任意 $n \ge 2$，k 都是强 n-相干的。

证明。 k 的极大理想是 $\mathfrak{r} = \mathfrak{n} \ltimes E$。理想 $J = 0 \ltimes E$ 湮灭 $\mathfrak{r}$。对于 $M \in \mathsf{FP}_2(k)$，取一个极小有限自由覆盖 $k^a \twoheadrightarrow M$；其核 $N \subseteq \mathfrak{r}^a$ 是有限表示的。为证明这个特定覆盖的核具有上述性质，将它与 M的任意一个固定有限 2-表示中的有限自由覆盖应用 Schanuel 引理进行比较。取一个核为有限生成的极小有限自由覆盖 $k^b \twoheadrightarrow N$，记其核为 $H \subseteq \mathfrak{r}^b$。由于 $JN = 0$，我们有 $E^b = Jk^b \subseteq H$。投影 $\mathfrak{r}^b = \mathfrak{n}^b \oplus E^b \to E^b$ 是 k-线性的，因为 $\mathfrak{n}E = 0$。由于 H 是有限生成的，其像在 κ上是有限维的，但它包含 E^b。因此 $b = 0$，故 $N = 0$ 且 $M \cong k^a$。最后，对于非零的 $e \in E$，$(0, e)$ 的湮灭子是 $\mathfrak{r}$。其在投影 $\mathfrak{r} \to E$ 下的像在 κ上是无限维的，因此 $\mathfrak{r}$ 不是有限生成的。在凝聚环中，单个元素的湮灭子都是有限生成的，因此该环非凝聚。

□

引理 4.10。 设 $R \to T = R/I$ 是交换环的满同态，并且具有 $T \in \mathsf{FP}_\infty(R)$。对于每个 T-模 M 以及每个 $j \geq 0$， $M \in \mathsf{FP}_j(T)$ 当且仅当$M \in \mathsf{FP}_j(R)$。因此， R 的强 j-相干性蕴含 T的强 j-相干性。

证明。在 T 上以及在 R上，有限生成性是等价的。对于 $j \geq 1$，取一个核为 N的满同态 $T^a \twoheadrightarrow M$。由于 $T^a \in \mathsf{FP}_\infty(R)$，基本的短正合列有限性规则（已在第 2 节中证明）表明，当且仅当 $N \in \mathsf{FP}_{j-1}(R)$时， $M \in \mathsf{FP}_j(R)$。在 T 上同样成立，因为 T^a 是有限自由的。对 j 进行归纳法即可证明该等价性。若 R是强 j-相干的，且 $M \in \mathsf{FP}_j(T)$，则 $M \in \mathsf{FP}_\infty(R)$，从而 $M \in \mathsf{FP}_\infty(T)$，这就证明了最后一个断言。由非零因子作商满足该假设，因为它在 R上具有一个两项有限自由分解。

□

引理 4.11. 设 $R \to S$ 是交换环的忠实平坦同态。若 S 是强 j-相干的，则对任意 $j \geq 0$， R也具有这一性质。

证明。 设 $M \in \mathsf{FP}_j(R)$，并选取一个有限 j-表示 $F_j \to \cdots \to F_0 \to M \to 0$。其第 j个正合核 $Z_j = \ker(F_{j-1} \to F_{j-2})$（其中 $Z_0 = M$）是有限生成的。由平坦性，$S \otimes_R M \in \mathsf{FP}_j(S)$；强 j-相干性保证 $S \otimes_R Z_j$ 有限表示。有限表示可沿忠实平坦映射下降，因此 Z_j 在 R 上有限表示。于是，原有限部分分解可再延伸一个有限自由项； $M \in \mathsf{FP}_{j+1}(R)$。（对于 $j = 0$，直接使用有限生成性下降。）

□

引理 4.12. 对于任意非零局部交换环$(D, \mathfrak{m})$，令 $B = D[t]_{(\mathfrak{m},t)}$， $E = (B/(\mathfrak{m}, t)B)^{(\mathbb{N})}$， $k = B \ltimes E$，以及 $s = (t, 0) \in k$。则

$$C = k[s^{-1}] \cong B[t^{-1}],$$

且 $D \to C$ 是忠实平坦的。每个$\mathsf{FP}_2(k)$-模都是有限自由的。若对于某个 $q \geq 0$， D 不是强相干的q，那么 C 也不是强相干的 q。

证明。 由于 $tE = 0$，局部化会消去 E 并将 C 与 $B[t^{-1}]$等同。映射 $D \to C$ 是平坦的，因为它是先作多项式扩张，再作局部化得到的。每个素理想 $\mathfrak{p} \subseteq D$ 都提升到$\mathfrak{p}D[t] \subseteq (\mathfrak{m}, t)$，且该素理想不包含 t。因此它在两次局部化后仍然存在，并收缩为$\mathfrak{p}$。诱导映射 $\operatorname{Spec} C \to \operatorname{Spec} D$是满射，由此可得忠实平坦性。其余断言由引理 4.9和4.11得出。

□

4.5 T反例：一个多项式变量击败每一种有限平移

定理 4.13。 存在一个可数交换环 k，以及一个可数、忠实 k平坦、相对拟自由的 k-代数 $A = k[z]$，使得

(i) $\mathsf{FP}_2(k)$ 中的每个模都是有限自由的，因此对所有 $n \geq 2$， k 都是强相干的，但 k 不相干；

(ii) A 是一个单变量多项式代数，作为 a k-模是自由的，且作为 k-代数是有限表示的；

(iii) $\Omega^1_{A/k} \cong A^e$ 和 $\mathrm{pd}_{A^e} A = 1$;

(iv) A 对于任意有限的 q都不是强 q-相干的。

更准确地说，对于每个 $q \geq 1$，在$\mathsf{FP}_q(A)|\mathsf{FP}_{q+1}(A)$中存在一个明确定义的 A-模。

证明。 我们使用 Bravo–Pérez 的二次单项式环 [4, 例 1。3]。附录 A通过单项式 Tor 递归计算其奇异关系。固定 $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ 并定义

$$R = \frac{\mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots]}{(x_j x_{j+1},\ x_1 y_1,\ y_1 y_i \ :\ i, j \geq 1)}, \qquad \mathfrak{m} = (x_i, y_i : i \geq 1), \quad D = R_{\mathfrak{m}}.$$

定理A.10 给出

$$N_q = (x_q)D \in \mathsf{FP}_q(D) \setminus \mathsf{FP}_{q+1}(D) \qquad (q \geq 1).$$

特别地， D 对于所有有限的 q都不满足强 $q \geq 1$-相干性。令 $B = D[t]_{(\mathfrak{m}D,t)}$，取 $E = \mathbb{F}^{(\mathbb{N})}$，其中 B 通过其剩余域作用， $k = B \ltimes E$， $s = (t,\ 0)$，并令 $C = k[s^{-1}]$。引理 4.9 证明了 k 对于所有 n都满足强 $n \geq 2$-相干性。根据引理 4.12， $D \to C$ 是忠实平坦的，并且$C = B[t^{-1}]$。

设 $A = k[z]$。它是 k 上的自由且忠实平坦模。包络代数为 $A^e \cong k[z, w]$；乘法的核为 $(z-w)k[z, w]$。由于首一多项式 $z-w$在 $k[z, w]$ 中是非零因子，乘法给出 $\Omega^1_{A/k} \cong A^e$。 A 的两项自由双模分解表明 $\mathrm{pd}_{A^e} A \leq 1$，且等式如下成立。若 A 是 $P = A^e = k[z, w]$ 上的投射模，则满射 $P \to A$ 的核 $I = (z-w)P$将是一个直和项理想，因此对于某个幂等元 $e \in P$，有 $I = eP$。但 $(1-e)(z-w) = 0$，且 $z-w$ 是正则的，所以 $e = 1$。这将推出 $I = P$，与非零商 A 矛盾。因此， A 不是 A^e 上的投射模，其投射维数恰好为一。

设 $f = sz - 1 \in A$。尽管 s 是零因子，它本身却是非零因子：若$f \sum_{i=0}^{m} a_i z^i = 0$，比较系数首先得到 $a_0 = 0$，继而依次得到 $a_i = s a_{i-1} = 0$。商 $A/(f)$ 是 $k[s^{-1}] \cong C$；由于 f 是正则的，它属于 $\mathsf{FP}_\infty(A)$。若 A 对某个有限 q是强q-相干的，引理 4.10 将推出 C 是强 q-相干的。随后，忠实平坦下降引理 4.11 将推出 D 是强 q-相干的，这与前述显式模 N_q矛盾。

对每个 $q \geq 1$，令 $M_q = C \otimes_D (x_q)D$，并将其视为通过 $A \twoheadrightarrow C$作用的 A-模。忠实平坦性保留它们的有限 q-表示，并反映其无法拥有 $(q+1)$-表示这一事实（对末端轮应用有限表示下降）。因此， $M_q \in \mathsf{FP}_q(C) \setminus \mathsf{FP}_{q+1}(C)$，而引理 4.10 给出 $M_q \in \mathsf{FP}_q(A) \setminus \mathsf{FP}_{q+1}(A)$。可数性来自变量、域 $\mathbb{Q}$、多项式代数、商、有限次局部化以及可数直和 E的可数性。

□

二次单项式代数：线性性、贝蒂数与奇异关系

设 $\mathbb{F}$ 是一个域， V 是任意集合， Γ 是以 V 为顶点、允许存在自环的无向图。若 $\{u,\ v\}$ 是一条边，则记为 $u \sim v$，其中允许 $u = v$。令

$$R = \mathbb{F}[V]/(uv : u \sim v), \qquad R_+ = \bigoplus_{j \geq 1} R_j,$$

其中每个变量的次数均为一。因此， R 是一个连通的非负分次交换 $\mathbb{F}$-代数，且具有 $R_0 = \mathbb{F}$；它可能有无限多个生成元。在上述表达式中，记号 $\mathbb{F}[V]$ 表示以集合 V 为变量的多项式代数，也就是其有限变量子代数的直并。对于 $S \subseteq V$，记

$$I_S = (v : v \in S) \subseteq R, \qquad Q_S = R/I_S, \qquad N(v) = \{w \in V : w \sim v\}.$$

集合 $N(v)$ 可能是无限的。我们通过增广映射将 $\mathbb{F} = R/R_+$ 视为右 R-模。分次移位记作 $M(-1)$，因此 $(M(-1))_d = M_{d-1}$。

For 一个分次左 R-模 M，其 分次贝蒂数和总贝蒂数在 R
are

$$\beta_{i,j}^R(M) = \dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Tor}_i^R(\mathbb{F}, M)_j, \qquad \beta_i^R(M) = \dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Tor}_i^R(\mathbb{F}, M) \quad (i \geq 0).$$

这些维数可能是无限基数。

引理 A.1。 对于每个 $S \subseteq V$ 和 $v \in S$，若 $J = S \setminus \{v\}$ 且 $T = J \cup N(v)$，则乘以 v 给出一个分次 R-模的正合列

$$0 \longrightarrow Q_T(-1) \xrightarrow{\cdot v} Q_J \longrightarrow Q_S \longrightarrow 0. \tag{1}$$

证明。 不被边单项式 uw 整除的单项式构成 R 的一个 $\mathbb{F}$-基。在 Q_J 中，剩余的单项式恰好是不含任何来自 J 的变量的可容许单项式。乘以 v 会使这样的单项式变为零，当且仅当它含有因子 $w \in N(v)$；若乘积非零，则不同的单项式有不同的乘积。因此， v 在 Q_J 中的湮灭子由 $N(v)$ 的像生成，等价地

$$(I_J :_R v) = I_{J \cup N(v)} = I_T.$$

乘以 v 所得的像为 vQ_J，其余核为 $Q_J/vQ_J = Q_S$。这个移位使乘法映射成为次数为零的齐次映射。这些观察给出（1）。 □

引理 A.2. 若 V 有限，则对每个 $S \subseteq V$ 和每个 $i \geq 0$,

$$\operatorname{Tor}_i^R(\mathbb{F}, Q_S)_j = 0 \qquad \textit{whenever } j \neq i. \tag{2}$$

证明. 我们对同调次数 i使用归纳法。当 $i = 0$时，$\operatorname{Tor}_0^R(\mathbb{F}, Q_S) = \mathbb{F} \otimes_R Q_S = \mathbb{F}$，集中在零次上。

固定 $i \geq 1$，并假设对每个变量子集，该断言在次数 $i-1$ 时成立。通过对 $|S|$使用归纳法，证明它在次数 i 成立。当 $S = \varnothing$ 时，有 $Q_S = R$，因此 $\operatorname{Tor}_i^R(\mathbb{F}, Q_S) = 0$。对于非空的 S，取 $v \in S$ 并采用引理 J，T 中的记号。引理 A.1中对应于（1）的分次 Tor 长正合列包含

$$\operatorname{Tor}_i^R(\mathbb{F}, Q_J) \longrightarrow \operatorname{Tor}_i^R(\mathbb{F}, Q_S) \longrightarrow \operatorname{Tor}_{i-1}^R(\mathbb{F}, Q_T(-1)).$$

根据对 $|S|$ 的归纳法，第一项集中在内次数 i。第三项集中在次数 i，因为

$$\operatorname{Tor}_{i-1}^R(\mathbb{F}, Q_T(-1)) \cong \operatorname{Tor}_{i-1}^R(\mathbb{F}, Q_T)(-1)$$

而外层归纳法表明，$\operatorname{Tor}_{i-1}^R(\mathbb{F}, Q_T)$ 集中在次数 $i-1$。因此，中间项在次数 i之外的齐次分量均为零。至此，两重归纳均告完成。 □

引理 A.3。 设 $H = \mathbb{F} \oplus H_+$ 是任意带增广的结合 $\mathbb{F}$-代数。对 $i \geq 0$ 置

$$P_i(H) = H_+^{\otimes_{\mathbb{F}} i} \otimes_{\mathbb{F}} H.$$

这些是自由右 H-模。对于 $P_0(H) = H$，定义 $d_0 = \epsilon\colon\ H \to \mathbb{F}$，并且对于 $i \geq 1$,

$$d_i([a_1|\cdots|a_i] \otimes h) = \sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{j-1}[a_1|\cdots|a_j a_{j+1}|\cdots|a_i] \otimes h + (-1)^{i-1}[a_1|\cdots|a_{i-1}] \otimes a_i h.$$

那么 $P_\bullet(H) \to \mathbb{F}$ 是增广模 $\mathbb{F}$的自由右 H-分解。

证明。 这是增广模的标准化 bar 分解，以右模的形式写出。由 Weibel [9, 第 8.6.12 节和习题 8.64], 应用于相反代数并特化到增广映射 $H \to \mathbb{F}$。

□

引理 A.4. 设 $R = \mathbb{F}[V]/(uv\colon\ u \sim v)$，其中 V任意且 $S \subseteq V$。对于有限子集$U \subseteq V$，令

$$R_U = \mathbb{F}[U]/(uv : u \sim v,\ u, v \in U), \qquad Q_{S,U} = R_U/(S \cap U).$$

那么，对于每个 $i \geq 0$，都存在分次 $\mathbb{F}$-向量空间之间的自然同构

$$\operatorname{Tor}_i^R(\mathbb{F}, Q_S) \cong \varinjlim_{U \subseteq V,\ U\ finite} \operatorname{Tor}_i^{R_U}(\mathbb{F}, Q_{S,U}). \tag{3}$$

证明。可容许单项式基表明，过渡映射 $R_U \to R_W$ 和$Q_{S,\ U} \to Q_{S,\ W}$ 对于 $U \subseteq W$ 是内射的。它们还表明

$$R = \bigcup_U R_U, \quad R_+ = \bigcup_U (R_U)_+, \quad Q_S = \bigcup_U Q_{S,U}.$$

张量引理 A.3的分解与 Q_S。由此得到的计算 $\operatorname{Tor}_i^R(\mathbb{F}, Q_S)$的链复形各项为

$$C_i(R, Q_S) = R_+^{\otimes_{\mathbb{F}} i} \otimes_{\mathbb{F}} Q_S.$$

典型的链是有限个纯张量之和。每个这样的张量中的每个因子都是单项式的有限$\mathbb{F}$-线性组合，因此只涉及有限个变量。所以该链已经属于

$$C_i(R_U, Q_{S,U}) = (R_U)_+^{\otimes_{\mathbb{F}} i} \otimes_{\mathbb{F}} Q_{S,U}$$

对于某个有限的 U。bar 微分只使用乘法，而乘法与所有包含映射可交换。因此

$$C_\bullet(R, Q_S) = \varinjlim_U C_\bullet(R_U, Q_{S,U})$$

作为 $\mathbb{F}$-向量空间上的分次复形。

同调与这个滤过并可交换：如果一个循环在并中成为边界，那么它就是某个链的边界，而该链只涉及有限个变量，因此这个边界链和该循环都属于某个共同的有限阶段。同样，并中的每个循环都出现在某个有限阶段。因此，在每个内次数上，循环模边界与该并可交换。在每个阶段应用引理 A.3 即可证明（3）。

□

定理 A.5。 对于任意（可能无限的）变量集 V、每个变量子集$S \subseteq V$ 以及每个 $i \geq 0$,

$$\operatorname{Tor}_i^R(\mathbb{F}, Q_S)_j = 0 \qquad (j \neq i). \tag{4}$$

证明。 对每个有限的 $U \subseteq V$，引理 A.2 应用于 R_U和 $S \cap U$，可得$\operatorname{Tor}_i^{R_U}(\mathbb{F},\ Q_{S,\ U})$集中在次数 i。等式（3）是分次向量空间的同构，因此在取滤过并之后仍有相同的集中性。

□

定理 A.6。 令 $S \subseteq V$ 并考虑分次 R-模 $Q_S = R/I_S$。其前两个总贝蒂数为

$$\beta_0^R(Q_S) = 1, \qquad \beta_1^R(Q_S) = |S|. \tag{5}$$

若 $v \in S$，置 $J = S \setminus \{v\}$，且 $T = J \cup N(v)$。对于每个 $i \geq 1$，都有一个分次 $\mathbb{F}$-向量空间的短正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}_i^R(\mathbb{F}, Q_J) \longrightarrow \operatorname{Tor}_i^R(\mathbb{F}, Q_S) \longrightarrow \operatorname{Tor}_{i-1}^R(\mathbb{F}, Q_T)(-1) \longrightarrow 0. \tag{6}$$

因此，这三个 R-模的总贝蒂数满足

$$\beta_i^R(Q_S) = \beta_i^R(Q_J) + \beta_{i-1}^R(Q_T) \qquad (i \geq 1). \tag{7}$$

式 (7) 中的求和是基数加法；群和维数可能是无限的。

证明。 我们首先计算模 Q_S 的初始贝蒂数。由于 $I_S \subseteq R_+$，增广映射给出 $\mathbb{F} \otimes_R Q_S \cong \mathbb{F}$。因此 $\beta_0^R(Q_S) = 1$。

将 $\mathbb{F} \otimes_R -$ 应用于定义正合列

$$0 \longrightarrow I_S \longrightarrow R \longrightarrow Q_S \longrightarrow 0.$$

由于 R 在自身上是自由的，并且映射 $\mathbb{F} \otimes_R I_S \to \mathbb{F} \otimes_R R$ 为零，相关的 Tor 长正合列给出

$$\operatorname{Tor}_1^R(\mathbb{F}, Q_S) \cong \mathbb{F} \otimes_R I_S \cong I_S/R_+I_S.$$

理想 I_S 由 S中的一次变量生成。这些变量的类构成 I_S/R_+I_S的一个 $\mathbb{F}$-基：它们能够张成该空间，因为 I_S 中的每个其他单项式都含有R_+中的一个因子；由于定义性的单项式关系都是二次的，它们彼此独立。因此，$\operatorname{Tor}_1^R(\mathbb{F}, Q_S) \cong \mathbb{F}^{(S)}(-1)$以及 $\beta_1^R(Q_S) = |S|$。

现在固定 $v \in S$。根据引理 A.1，

$$0 \longrightarrow Q_T(-1) \longrightarrow Q_J \longrightarrow Q_S \longrightarrow 0$$

是正合的。其分次 Tor 长正合列包含

$$\begin{aligned} \operatorname{Tor}_i^R(\mathbb{F}, Q_T)(-1) \longrightarrow \operatorname{Tor}_i^R(\mathbb{F}, Q_J) \longrightarrow \operatorname{Tor}_i^R(\mathbb{F}, Q_S) \\ \longrightarrow \operatorname{Tor}_{i-1}^R(\mathbb{F}, Q_T)(-1) \longrightarrow \operatorname{Tor}_{i-1}^R(\mathbb{F}, Q_J). \end{aligned}$$

定理 A.5 将未移位群 $\operatorname{Tor}_h^R(\mathbb{F}, Q_U)$ 置于内次数 h，对于每个变量子集 U。因此，上面显示的两个外部映射均为零：在每种情况下，其源都集中在比目标高一个内次数上。由正合性得到（6）。对（$\mathbb{F}$-维数取值于（6）可得（7）。这对无限维向量空间仍然成立，因为向量空间的正合列可分裂，且维数作为基数相加。 □

对于一个顶点集合 S，令$\mathcal{B}_d(S)$表示距离 d 不超过 S的 Γ中的顶点集合。环不会改变距离。按照约定$\mathcal{B}_d(\varnothing) = \varnothing$。下面的引理利用这一图论条件来界定模 Q_S的贝蒂数。

Le引理 A.7. 设 $S \subseteq V$ 是有限的且 $i \geq 1$。若 $B_{i-1}(S)$ 是有限的，则 $\beta_i^R(Q_S)$ 是有限的 $te.$

证明。 对 i归纳，并在 i 固定时，对有限基数 $|S|$归纳。对于 $i = 1$，公式（5）给出$\beta_1^R(Q_S) = |S| < \infty$。对于 $i \geq 2$，情形 $S = \varnothing$ 满足 $Q_S = R$ 且 $\beta_i^R(Q_S) = 0$。

假设 $S \neq \varnothing$ 并选取 $v \in S$。令 $J = S \setminus \{v\}$ 且 $T = J \cup N(v)$。于是

$$\mathcal{B}_{i-1}(J) \subseteq \mathcal{B}_{i-1}(S), \qquad \mathcal{B}_{i-2}(T) \subseteq \mathcal{B}_{i-1}(S).$$

特别地， T是有限的，因为 $i - 1 \geq 1$。内层归纳法给出 $\beta_i^R(Q_J)$， $< \infty$外层归纳法给出 $\beta_{i-1}^R(Q_T)$。 $< \infty$递推关系（7）现在推出 $\beta_i^R(Q_S)$。 $< \infty$。 □

Let

$$R = \frac{\mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots]}{(x_j x_{j+1},\ x_1 y_1,\ y_1 y_i \ :\ i, j \geq 1)}, \qquad \mathfrak{m} = R_+, \qquad D = R_{\mathfrak{m}}. \tag{8}$$

对于每个 $i \geq 1$，都有图边$x_j - x_{j+1}$、 $x_1 - y_1$和 $y_1 - y_i$，包括 y_1处的环。不存在其他边。特别地，

$$N(x_1) = \{x_2, y_1\}, \quad N(x_r) = \{x_{r-1}, x_{r+1}\}\ (r \geq 2), \quad N(y_1) = \{x_1, y_1, y_2, y_3, \ldots\}. \tag{9}$$

命题 A.8. 对每个 $r \geq 1$，令 $S^{(0)} = N(x_r)$，并令 $M_r = Q_{S^{(0)}} = R/I_{N(x_r)}$。则

$$\beta_j^R(M_r) < \infty \quad (0 \leq j \leq r), \qquad \beta_{r+1}^R(M_r) = \aleph_0. \tag{10}$$

证明。集合 $S^{(0)}$ 是有限的。若 $r = 1$，它包含 y_1，而每个满足 $i \geq 2$ 的 y_i 距离为 1。若 $r \geq 2$，则从 $S^{(0)}$ 到 y_1 的最短路径为

$$x_{r-1}, x_{r-2}, \ldots, x_1, y_1,$$

含有 $r-1$ 条边，并且每个满足 $i \geq 2$ 的 y_i 距离恰为 r。由于每个 x_j 都只有有限个邻居，半径为 $r-1$ 的球 $\mathrm{B}_{r-1}(S^{(0)})$ 是有限的。引理 A.7 证明了 $\beta_r^R(M_r) < \infty$；其较小半径的版本表明，对于 $1 \leq j < r$，$\beta_j^R(M_r) < \infty$，而 $\beta_0^R(M_r) = 1$。

对于第一个无限贝蒂数，递归地构造

$$S^{(a)} = (S^{(a-1)} \setminus \{v_a\}) \cup N(v_a).$$

对于 $r \geq 2$，选择由 r 顶点组成的序列

$$v_1 = x_{r-1},\ v_2 = x_{r-2},\ \ldots,\ v_{r-1} = x_1,\ v_r = y_1;$$

对于 $r = 1$，只选择 $v_1 = y_1$。在每一步中，$v_a \in S^{(a-1)}$：前一次替换沿链引入下一个变量，而在 x_1 处的替换引入 y_1。所有 $S^{(a)}$ 对于 $a < r$ 都是有限的，因为每个 $N(x_j)$ 都是有限的。但 $S^{(r)}$ 包含无限集合$N(y_1)$。

依次应用（7），并保留其第二个加项，得到

$$\beta_{r+1}^R(M_r) \geq \beta_r^R(Q_{S^{(1)}}) \geq \cdots \geq \beta_1^R(Q_{S^{(r)}}) = |S^{(r)}| = \aleph_0.$$

中的单项式总集合 R 是可数的，因此引理 A.3 中的条复形的每一项都是可数生成的 $\mathbb{F}$-向量空间。因此，相关的 Tor 群的维数均不大于 $\aleph_0$，最终的贝蒂数恰好为$\aleph_0$。

□

引理 A.9。设 $H = \bigoplus_{j \geq 0} H_j$ 是域上的非负分次代数，具有 $H_0 = \mathbb{F}$，生成元可能有无限多个。任何由次数有下界的分次 H-模生成的模都有一个分次自由分解 $F_\bullet$，其矩阵的元素属于 H_+。对于这样的分解，

$$\mathrm{Tor}_i^H(\mathbb{F}, M) \cong \mathbb{F} \otimes_H F_i$$

作为分次向量空间，F_i 在每个次数上的齐次自由直和项个数等于相应的分次 *Tor* 维数。

证明。Reyes– Rogalski 在 [7, 第 2.1 节（引理 2.2] 之前）确立了具有有限维零次部分的代数上有界下方分次模的极小分次投射分解的存在性。此处 $H_0 = \mathbb{F}$，因此分次投射项都是分次自由的。极小性表明，它们的齐次直和项与分次 Tor 群相对应；参见 [7,引理 2.6 及其证明]。

□

定理 A.10。 对于 R 和 D 如 (8)所述，且对每个 $r \geq 1$,

$$(x_r)D \in \mathsf{FP}_r(D) \qquad and \qquad (x_r)D \notin \mathsf{FP}_{r+1}(D). \tag{11}$$

更确切地说,

$$\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Tor}_j^D(\mathbb{F}, (x_r)D) < \infty \quad (0 \leq j \leq r), \qquad \dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Tor}_{r+1}^D(\mathbb{F}, (x_r)D) = \aleph_0. \tag{12}$$

证明。 与引理中相同的单项式基论证A.1 给出

$$\operatorname{ann}_R(x_r) = I_{N(x_r)}.$$

因此，乘以 x_r 诱导出分次同构

$$(x_r) \cong Q_{N(x_r)}(-1). \tag{13}$$

命题 A.8 和引理 A.9 表明 (x_r) 具有一个分次自由分解，其截至同调次数 r 的各项均为有限秩，而次数 $r+1$ 的项必然具有可数无穷秩。特别地，$(x_r) \in \mathsf{FP}_r(R)$。

将前 $r+1$ 项在 $\mathfrak{m}$ 处局部化，得到 $(x_r)D$的有限自由部分分解，因此 $(x_r)D \in \mathsf{FP}_r(D)$。由平坦局部化及恒等式 $R/\mathfrak{m} = \mathbb{F}$,

$$\operatorname{Tor}_j^D(\mathbb{F}, (x_r)D) \cong D \otimes_R \operatorname{Tor}_j^R(\mathbb{F}, (x_r)) \cong \operatorname{Tor}_j^R(\mathbb{F}, (x_r)). \tag{14}$$

最后一个同构成立，因为右侧的每个 Tor 群都是 $\mathbb{F}$-向量空间，并且 $R \setminus \mathfrak{m}$ 中的每个元素在其上均可逆。由命题 12推出等式（A.8）。

最后，假设 $(x_r)D$ 在非分次模范畴中存在一个截至次数 $r+1$ 的有限自由部分分解。将该部分分解在更高次数处扩展为一个（可能无限生成的）自由分解。与 $\mathbb{F}$张量积后，向量空间 $\operatorname{Tor}_{r+1}^D(\mathbb{F},(x_r)D)$将是某个有限 $\mathbb{F} \otimes_D D^{a_{r+1}}$ 的子商 a_{r+1}，因此是有限维的。这与（12）矛盾。因此，正如（$(x_r)D$ 在普通的非分次模范畴中不满足 FP_{r+1} ，如（11）所述。

□

致谢

本研究得到俄罗斯联邦科学与高等教育部（Goszadaniye）075-00337-20-03、项目编号 075-00141-26-00 的资助。

参考文献

[1] C. Bakkari 和 N. Mahdou，《论弱相干环》，《落基山数学杂志》44 (2014)，第 3 期，743–752，doi:10.1216/RMJ-2014-44-3-743。[2] D. Bennis，n-X-相干环，《国际代数电子期刊》7 (2010)，128–139，https://arxiv.org/abs/1001.4404。[3] A. Bondal 和 I. Zhdanovskiy，《相对拟自由代数的相干性》，《欧洲数学杂志》1 (2015)，第 4 期，695–703，doi:10.1007/s40879-015-0081-1。[4] D. Bravo 和 M. A. Pérez，《有限性条件与余扭对》，《纯粹与应用代数杂志》221 (2017)，第 6 期，1249–1267，doi:10.1016/j.jpaa.2016.09.008。[5] S. U. Chase，《模的直积》，《美国数学会汇刊》97 (1960)，457–473，doi:10.1090/S0002-9947-1960-0120260-3。

[6] J. Cuntz 和 D. Quillen，代数扩张与非奇异性，美国数学会杂志 **8** (1995)，第 2 期，251–289，doi:10.1090/S0894-0347-1995-1303029-0。[7]M. L. Reyes 和 D. Rogalski，分次扭曲 *Calabi–Yau* 代数是广义 *Artin–Schelter* 正则的，名古屋数学杂志 **245**(2022)，100–153，doi:10.1017/nmj.2020.32。[8] Stacks Project 作者，*Stacks Project*，https://stacks.math.columbia.edu/。[9]C. A. Weibel，同调代数导论，剑桥高等数学研究丛书，第 38 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1994，doi:10.1017/CBO9781139644136。

Alexander Pavlov 国立高等经济大学，莫斯科 莫斯科物理技术学院abpavlov@hse.ru

Mikhail Dusman 莫斯科物理技术学院
dusman.ma@phystech.edu