arXiv:2611.29511v1 [math.NT] 22 Nov 2026

特征 $p>0$ 下有理函数域上的 Kato-Milne 上同调

AHMED LAGHRIBI 和 TRISHA MAITI

Abstract. 设 $\mathcal{F}$ 是特征为 $p>0$ 的域。在本文中，我们描述一元有理函数域 $\mathcal{F}(x)$ 的 Kato-Milne 上同调，其中 x 是 $\mathcal{F}$ 上的变量。特别地，我们将 Milnor-Scharlau 正合列 [12, 定理 5.2] 推广到特征 p。作为该正合列的应用，我们进一步得到特征 p下的范数定理 [16, 定理 A.3] 。

1. Introduction

米尔诺提出的著名结果 [15, 定理 5.3] 描述了非退化双线性形式 $W(F(x))$ 的维特群，其中 F 是一个特征不为 2 的域。通过在 [2, 定理 6.2], 中证明一个类似的正合列，Aravire 和 Jacob 描述了 $W_q(F(x))$ 上非奇异二次型的维特群，其中 F 的特征为 2。由于 $W_q(F(x))$ 与 Kato-Milne 上同调 $H_2^{m+1}(F(x))$ 通过加藤同构 [11, 等式 (1.2)], 相关联，我们已经在特征 2, [12, 定理 5.2]下，将 Aravire-Jacob 的正合列推广到了 Kato-Milne 上同调的情形。本文将 [11] 和 [12] 的工作推广到特征$p>0$。更确切地说，我们将证明定理 1.1，它是关于正特征下一元有理函数域的 Kato-Milne 上同调群的一种局部-整体原理。与特征 2 的情形相比，区别在于转移映射 s_q^* 的定义，其中 $q\in F[x]$ 是首一不可约多项式， F 是特征为 p 的域。由于特征 $p>2$ 下不存在加藤同构 [11, 等式 (1.2)] ，我们无法像特征 2 的情形那样使用沙劳转移来定义 s_q^*。为解决这一问题，当 q 可分时，我们将考虑迹映射 $\mathrm{Tr}: F(q)\to F$ 来构造 s_q^*；对于不可分多项式，则将使用 [3, 命题 3.4] 中构造的转移 $s_{F(q)/F}\colon \Omega^m_{F(q)}\to\Omega^{m-1}_F$。建立这些转移映射还需要进行其他关键计算，例如引理 7.1 和 7.2。我们首先介绍一些关于微分形式和 Kato-Milne 上同调的预备定义。

设 F 是一个特征为 $p>0$ 的域，Ω^1_F 是由符号 $\mathrm{d}a$ （ $a\in F$）生成的 F-向量空间，并满足以下关系：对所有 a、 $b\in F$，$\mathrm{d}(a+b)=\mathrm{d}a+\mathrm{d}b$，且 $\mathrm{d}(ab)=a\mathrm{d}b+b\mathrm{d}a$。对任意正整数 m，令 $\Omega^m_F:=\wedge^m\Omega^1_F$ 为 Ω^1_F的第 m 次外积。我们取 $\Omega^0_F=F$和 $\Omega^m_F=0$ 作为 $m<0$。集合 Ω^m_F称为

对所有 $m\in\mathbb{Z}$，m-微分形式在 F 上的空间。现在，微分算子 $\mathrm{d}:\Omega^{m-1}_F\to\Omega^m_F$定义为

$$\mathrm{d}(a\mathrm{d}a_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}a_{m-1})=\mathrm{d}a\wedge\mathrm{d}a_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}a_{m-1}.$$

若某个 $m\in\mathbb{Z}$ 使得 m-微分形式属于 $\mathrm{d}(\Omega^{m-1}_F)$，则称其为恰当形式。设 $\mathcal{B}:=\{e_i\mid i\in I\}$ 是 F 的 p-基，其中 I 是一个有序集。这意味着集合 $\{\prod_{i\in I}e_i^{\epsilon_i}\mid \epsilon_i\in\{0,\ldots,p-1\}$，且对于几乎所有 $i\in I\}$， $\epsilon_i=0$ 是 F 的一个 F^p-基。考虑映射集 $\Sigma_{m,\ F}=\{\sigma\colon\ \{1,\ldots,m\}\to I\mid \sigma(j)<\sigma(k)$, 其中 $j<k\}$. 众所周知, $\left\{\mathrm{d}_{e_\sigma}^{e_\sigma}:=\mathrm{d}^{e_{\sigma(1)}}\wedge\mathrm{d}^{e_{\sigma(2)}}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}_{e_{\sigma(m)}}^{e_{\sigma(m)}}\mid\sigma\in\Sigma_{m,\ F}\right\}$ 是 Ω^m_F 的一个 F-基。对于固定的 p-基 $\mathcal{B}$，我们[1]

定义 Artin-Schreier 算子 $\wp\colon \Omega_F^m \to \Omega_F^m$ 如下：

$$\wp\left(\sum_\sigma c_\sigma \frac{\mathrm{d}e_\sigma}{e_\sigma}\right) = \sum_\sigma (c_\sigma^p - c_\sigma)\frac{\mathrm{d}e_\sigma}{e_\sigma}.$$

对于 $m=0$，该算子与通常的 Artin-Schreier 映射 $\wp$ 一致：$F \to F, x \mapsto x^p - x$ 对所有 $x \in F$ 均成立。根据 Cartier 的一个结果，如果改变 F 的 p-基，$\wp$ 的像会相差一个恰当形式。因此，映射 $\wp : \Omega_F^m \to \Omega_F^m / \mathrm{d}\Omega_F^{m-1}$ 由下式给出

$$\wp\left(\sum_\sigma c_\sigma \frac{\mathrm{d}e_\sigma}{e_\sigma}\right) = \sum_\sigma (c_\sigma^p - c_\sigma)\frac{\mathrm{d}e_\sigma}{e_\sigma} + \mathrm{d}\Omega_F^{m-1}$$

不依赖于 F 的 p-基。该映射的余核称为 F 上的 Kato-Milne 上同调群（次数为 m），记为 $H_p^{m+1}(F)$。此外，令 $\nu_F(m)$ 表示映射 $\wp$ 的核。显然，我们有

$$H_p^{m+1}(F) = \Omega_F^m / \left(\mathrm{d}\Omega_F^{m-1} + \wp(\Omega_F^m)\right)$$

其中，$\wp$ 是相对于 F 的一个固定 p-基的 Artin-Schreier 算子。

令 $v\colon F \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ 为 F 上的离散赋值，并以 q 为一致化元。我们分别用 F 和 K 表示 F 的剩余域和完备化。令 $\{e_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ 为 F 的一个 p-基，并令 $\{f_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ 为 K 的一个子集，其中每个 f_i 都是 e_i 的一个提升。根据定理 10.6，存在一个 Teichmüller 提升 $\alpha : F \to K$，使得对所有 $i \in \mathcal{I}$，均有 $\alpha(e_i) = f_i$。现在我们定义群

$$W_1(H_p^{m+1}(K)) := \operatorname{coker}(\alpha' : H_p^{m+1}(\overline{F}) \to H_p^{m+1}(K))$$

其中 α' 由 Teichmüller 提升 α 诱导。此外，由推论 10.10 可知，群 $W_1(H_p^{m+1}(K))$ 与所选择的 Teichmüller 提升无关。令 $\beta_1 : H_p^{m+1}(F) \to H_p^{m+1}(K)$ 为由包含映射 $F \to K$ 诱导的映射，并令 $\beta_2 : H_p^{m+1}(K) \to W_1(H_p^{m+1}(K))$ 为投影映射。那么，（第二）剩余映射 $\partial_v : H_p^{m+1}(F) \to W_1(H_p^{m+1}(K))$ 定义为

$$\partial_v := \beta_2 \circ \beta_1.$$

现在令 $\overline{F} = \mathcal{F}(x)$ 为域 $\mathcal{F}$ 上特征 $p > 0$ 为的一个变量 x 的有理函数域。令 F_q 和 $\overline{F_q}$ 分别为 F 的剩余域和关于 q- 进赋值的完备化，其中 $q = 1/x$ 或 $q \in \mathcal{F}[x]$ 为首一不可约多项式。由定理 4.6 可知，群 $H_p^m(F_q)$ 同构于 $W_1(H_p^{m+1}(F_q))$ 的商群。令 $t_q^* : H_p^m(F_q) \to H_p^m(\mathcal{F})$ 为由 $\mathrm{Tr}_* : \Omega_{\overline{F_q}}^{m-1} \to \Omega_{\mathcal{F}}^{m-1}$ 诱导的映射，该映射对于 q 可分时按 [1, 推论 2.9] 中的定义给出；对于 q 不可分时，则由 $^{S}F_q/\mathcal{F} : \Omega_{F_q}^{m-1} \to \Omega_{\mathcal{F}}^{m-1}$ 所定义的转移映射 [3] 诱导。现在我们将转移映射定义为 $s_q^* : W_1(H_p^{m+1}(F_q)) \to H_p^m(\mathcal{F})$，即复合映射 $W_1(H_p^{m+1}(F_q)) \to H_p^m(F_q) \xrightarrow{t_q^*} H_p^m(\mathcal{F})$（详见定义 6.5）。最后，我们的主要结果如下：

定理 1.1。设 $\mathcal{F}$ 是一个特征为 $p > 0$ 的域，且 $F = \mathcal{F}(x)$ 是变量 x 上关于 $\mathcal{F}$ 的有理函数域。则下列序列是正合的：

$$0 \to H_p^{m+1}(\mathcal{F}) \xrightarrow{i} H_p^{m+1}(F) \xrightarrow{\oplus_q \partial_q} \oplus_q W_1(H_p^{m+1}(F_q)) \xrightarrow{\oplus s_q^*} H_p^m(\mathcal{F}) \to 0$$

其中，i 由包含映射 $\mathcal{F} \to F$ 诱导，q 遍历 $1/x$ 以及 $\mathcal{F}[x]$ 上的首一不可约多项式。此外，∂_q 是关于 q- 进赋值的第二剩余映射。

为证明此定理，我们沿用 [11] 和 [12]中的相同方法。下面概述本文其余部分的安排。第2节中，我们将群 $W_1(H_p^{m+1}(F))$分解为所需的形式，其中 F 是一个完备赋值域。为此，我们通过证明引理 2.3 和引理 2.6，将 [11, 引理 2.3] 和 [2, 命题 1.5] 推广到特征 p 。接着，在第3节中，我们定义滤过 $L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset H_p^{m+1}(\mathcal{F}(x))$以及 $H_p^{m+1}(\mathcal{F}(x))$的若干子群 S_q（见定义 3.3），使得 $H_p^{m+1}(\mathcal{F}(x)) = \sum_q (S_q + S_q \wedge \mathrm{d}_x^x)$，其中 q 遍历 $\mathcal{E}$上的首一不可约多项式。为确立 $S_q \wedge \mathrm{d}_q^q$ 与 $S_q \wedge \mathrm{d}_x^x$ 之间所需的关系，我们证明引理 3.5，将 [2, 引理 2.6] 推广到特征 p。引理 3.5 中的这些关系以及定理 4.2 给出的 $W_1(H_p^{m+1}(F_q))$的分解，诱导出以下正合列

$$0 \to L_0 \xrightarrow{i_1} H_p^{m+1}(\mathcal{F}(x)) \xrightarrow{\oplus \partial_q} \oplus_q W_1(H_p^{m+1}(F_q)) \to 0 \tag{1}$$

其中 i_1 是包含映射， q 遍历 $\mathcal{F}[x]$ 的首一不可约多项式（定理 4.6）。然后，利用 $W_1(H_p^{m+1}(F_{1/x}))$的分解，我们得到定理 4.7 中的下列正合列

$$0 \to H_p^{m+1}(\mathcal{F}) \xrightarrow{i_2} L_0 \xrightarrow{\partial_{1/x}} W_1(H_p^{m+1}(F_{1/x})) \xrightarrow{\eta} H_p^m(\mathcal{F}) \to 0 \tag{2}$$

其中 i_2 由包含映射诱导，且 $\eta(\varphi) = \varphi'$，这来自定理 2.7。
由 (1) 和 (2)，我们得到定理 4.3，它将 Kato-Milne 上同调框架下的 [14, 定理 5.3] 推广至

为引入转移映射 s_q^*，我们先在定理 5.2 中建立 $W_1(H_p^{m+1}(F_q))$的另一种分解，将 [12, 定理 2.3] 推广至特征 p。在第7节中，我们证明 $H_p^{m+1}(\mathcal{F}(x))$的互反律，即对于所有 $\varphi \in H_p^{m+1}(\mathcal{F}(x))$，都有 $\oplus_q(s_q^* \circ \partial_q)(\varphi) = 0$ 。因此，$\mathrm{Im}(\oplus \partial_q^*) \subset \ker(\oplus_q s_q^*)$。反向结论可由直接计算得到，这就证明了定理 1.1。最后，作为定理 1.1 的一个应用，我们证明了特征 p 下 Kato-Milne 上同调的范数定理（定理 9.6）。由于论证与论文 [11] 和 [12], 中的论证类似，我们省略了大部分证明。

2. The group $W_1(H_p^{m+1}(F))$

设 F 是一个特征为 p 的域，其中 $B := \{t_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ 是一个 p-基，且 $\mathcal{I}$ 是一个有序集。设 $T := \oplus_{|\mathcal{I}|}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ，其字典序如下定义：对于任意 $I = (I_i)_{i\in\mathcal{I}}$ 和 $J = (J_i)_{i\in\mathcal{I}} \in T$，若存在某个 $j \in \mathcal{I}$ 使得 $I_j < J_j$ ，并且对所有 $i > j$ 都有 $I_i = J_i$ ，则称 $I < J$ 。对于每个 $I \in T$，记号 t^I 表示元素 $\prod_{i\in\mathcal{I}} t_i^{I_i}$。因此，每个元素 $f \in F$ 都可以唯一地写成

$$f = \sum_{I\in T} t^I f_I^p,$$

其中，对于几乎所有的 $I \in T$，都有 $f_I \in F$ 和 $f_I = 0$ 。

在本节余下部分中，我们假设 F p 特征的完备赋值域，其赋值为 v： $F \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ ，其中 π 是一致化元。我们分别用记号 A_F和 F 表示 F的赋值环和剩余域。令 $\{t_i \mid i \in \mathcal{J}\} \subset A_F$满足 $\{t_i \mid i \in \mathcal{J}\}$是 F 的一个 p-基。由 [19, 备注 1.1.1.12.]， $\{t_i \mid i \in \mathcal{I}\}$将是 F的一个 p-基，其中 $\mathcal{I} = \mathcal{J} \cup \{\infty\}$且 $t_\infty = \pi$。$\mathcal{J}$上的序扩张到 $\mathcal{I}$，并且对所有 $i \in \mathcal{J}$，有 $i < \infty$。由定理 10.6，存在唯一的提升单同态 α： $F \to F$，使得对所有 $i \in \mathcal{J}$， $\alpha(t_i) = t_i$。对于所有 $I = (I_i)_{i\in\mathcal{I}} \in T := \oplus_{|\mathcal{I}|}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，我们有 $v(t^I) = I_\infty$。对于任意 $I \in T$和 $m \in \mathbb{N}_0$，我们定义

$\tilde{}$ $\tilde{}$ $- -$ $\_I$:
$= \{i \in \mathcal{I} \mid I_i \neq 0\}$, $l(I) := \mathrm{Max} I$， 以及 $(T)_m := \{I \in T \mid I_i \in \{0, 1\}$， 对所有 $i \in \mathcal{I}$和 $|I| = m\}$成立。令 T: $= \oplus_{|\mathcal{J}|}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \subset T$。则对于任意 $m \in \mathbb{N}_0$，有 $(T)_m \subset (T)_{m_0}$。此外，若 $F \subset F$，则对所有 $i \in \mathcal{J}$，取 $t_i = t_i$。

定义 2.1。令 F 为上述完备赋值域，且满足 $F \subset F$。于是，我们将由以下元素生成的 $H_p^{m+1}(F)$ 的子群 $\mathcal{R}$ 定义为

$$\sum_{I\in(T)_m} \sum_{J\in T|l(J)\notin \tilde{I}} t^J r_{I,J}^p \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}$$

其中 $r_{I,\ J} \in \pi^{-1}F[\pi^{-1}]$ 且 $\mathrm{d}_{t_I}^{t_I}$表示满足 $\tilde{I} = \{i_1, \ldots, i_m\}$和 $i_1 < \ldots < i_m$的元素 $\mathrm{d}\frac{t_{i_1}}{t_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\frac{t_{i_m}}{t_{i_m}} \in \Omega_F^m$。

注 2.2. *(1)* 若 $a \in F$且 $v(a) > 0$，则由亨泽尔引理 $a \in \wp(F)$：$= \{x^p - x \mid x \in F\}$。*(2)* 若 $v(a) < 0$，则 $a \notin \wp(F)$ 在下列条件之一成立时成立：*(i)* $v(a)$ 不能被 p 整除。*(ii)* a 的首项系数不属于 F^p。因此， $\mathcal{R}$ 的生成元的可分部分不属于 $\wp(F)$。

引理 2.3. 设 $\{t_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ 是 F的一个 p-基。那么，每个元素 $\varphi \in H_p^{m+1}(F)$ 都可以表示如下：

$$\varphi = \sum_{I\in(T)_m} A_I \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}$$

其中$A_I = \sum_{J=0 \text{ or } l(J)\notin\tilde{I}} t^J r_{I,\ J}^p$满足$r_{I,\ J} \in F$且$r_{I,\ J} = 0$对几乎所有的 I， J。

证明。由于 $\{t_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ 是 p的-基 F，群 $H_p^{m+1}(F)$由以下元素加法生成： 元素 $t^J r_{I,\ J}^p \mathrm{d}_{t_I}^{t_I}$，其中 $I \in (T)_m$, $J \in T$且 $r_{I,\ J} \in F$。若 $J = 0$或 $l(J) \notin \tilde{I}$，则结论成立。~设 $J \neq 0$满足 $l(J) = i_l$ 且对某个 $r \in \{1, \ldots, p-1\}$有 $J_{i_l} = p - r$。若 $i_l \in I$，则有：

$$\begin{aligned}
t^J r_{I,J}^p \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} &= t^J r_{I,J}^p \frac{\mathrm{d}t_{i_1}}{t_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}t_{i_l}}{t_{i_l}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}t_{i_m}}{t_{i_m}} \\
&= \frac{t^J r_{I,J}^p}{r^p} \frac{\mathrm{d}t_{i_1}}{t_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}t_{i_l}^r}{t_{i_l}^r} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}t_{i_m}}{t_{i_m}} \quad (\text{since } r^p = r \text{ and } \frac{\mathrm{d}t_{i_l}^r}{t_{i_l}^r} = r\frac{\mathrm{d}t_{i_l}}{t_{i_l}}) \\
&= t^J a_{I,J}^p \frac{\mathrm{d}t_{i_1}}{t_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}(t_{i_l}^r t^J)}{t_{i_l}^r t^J} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}t_{i_m}}{t_{i_m}} \quad (\text{where } a_{I,J} = \frac{r_{I,J}}{p}) \\
&= \sum_{k\in\tilde{J}\notin\tilde{I}} t^J a_{I,J}^p \frac{\mathrm{d}t_{i_1}}{t_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}t_k^{J_k}}{t_k^{J_k}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}t_{i_m}}{t_{i_m}} \\
&= \sum_{k\in\tilde{J}\notin\tilde{I}} t^J (J_k a_{I,J})^p \frac{\mathrm{d}t_{i_1}}{t_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}t_k}{t_k} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}t_{i_m}}{t_{i_m}} \\
&= \sum_{I'\in(T)_m|l(J)\notin\tilde{I}'} t^J a_{I',J}^p \frac{\mathrm{d}t_{I'}}{t_{I'}}
\end{aligned}$$

~ ~ ~其中 $I' = \{i_1, \ldots, i_{l-1}, i_{l+1}, \ldots, i_m\} \cup \{k\}$对 $k \in J \notin I$成立。此外，$a_{I',\ J} = c_k J_k a_{I,\ J}$，其中$c_k = 1$ 或 -1。因此，$a_{I',\ J} = c_{I',\ J} r_{I,\ J}$对某个 $c_{I',\ J} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$成立。由此引理得证。□

以下注记是前一个引理的直接推论。

注 2.4。 设 $\{t_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ 是 F 的一个 p-基，并且 $A = \sum_{I \in T\ ()_m} \sum_{J \in T|l\ J()\in \tilde{I}} t^J r_I^p\ ,\ {}_J \mathrm{d}\frac{t_I}{t_I} \in H_p^{m+1}(F)$。

然后，重复引理 *2.3* 的证明， A 可以分解为

$$\sum_{I' \in (T)_m} \sum_{J \in T|l(J) \notin \tilde{I}'} t^J r_{I',J}^p \frac{\mathrm{d}t_{I'}}{t_{I'}}$$

其中 $r_{I',\ J} = c_{I',\ J} r_{I,\ J}$ 对于某个 $c_{I',\ J} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$。

现在我们将 [2, 引理 1.4] 的结果推广到特征 $p >$下的 Kato-Milne 上同调 $0.$

引理 2.5。 设 $\{t_i \mid i \in \mathcal{I}\}$是 F的 p-基。如果 $\varphi = \sum_{I \in\ (T)\ _m} a_I \mathrm{d}\frac{t_I}{t_I} = 0 \in H_p^{m+1}$（$F$），则对于所有 $I \in$ （T）$_m$，有

$$a_I \in \wp(F) + \sum_{J \in T|\tilde{J} \cap \tilde{I} \neq \emptyset} t^J F^p.$$

˜证明。 设 $\mathcal{I}' := \{i \in \mathcal{I} \mid i \in I$ 以及 $a_I \neq 0\}$，其中 $a_I \neq 0\}$ 是 $\mathcal{I}$的有限子集。现在我们固定一个元素$K \in (T)_m$，使得 $a_K \neq 0$。令 $K = \{K_1, \ldots, K_m\}$ 满足 $K_1 < \ldots < K_m$。我们定义域扩张 ˜ $L := F(\sqrt[p]{t_i} \mid i \in \mathcal{I}' \setminus K)$。于是有

$$\varphi_L = a_K \frac{\mathrm{d}t_K}{t_K} = 0 \in H_p^{m+1}(L)$$

令 $\mathcal{I}''$ 为一个有序集，其元素是 $\mathcal{I}$的元素，并按以下方式排序 g

$$i < j, \quad \text{for all } i \in \mathcal{I} \setminus (\mathcal{I}' \setminus \tilde{K}),\ j \in \mathcal{I}' \setminus \tilde{K}$$

在其他情况下， $\mathcal{I}''$ 中的序与 $\mathcal{I}$中的序相同。因此， $\{t_i' \mid i \in \mathcal{I}''\}$ 是 L的一个 p-基，其中$t_i' = t_i$对所有 $i \in \mathcal{I}\setminus(\mathcal{I}' \setminus \tilde{K})$成立，且 $t_i' = \sqrt[p]{t_i}$对所有$i \in \mathcal{I}' \setminus \tilde{K}$成立。由于 $a_K \frac{\mathrm{d}t_K}{t_K} = a_K \mathrm{d}\frac{t_K'}{t_K'} = 0 \in H_p^{m+1}(L)$，由 [1, 命题 3.3] 可得

$$a_K = \wp(u) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p-1} M_{i,j} (t_{K_i}')^j \in L$$

其中 $u \in L$ 和 $M_{i,\ j} \in L^p(t_r' \mid r < K_i \in \mathcal{I}'') \subset F$。由于对所有 i 和 $L^p \subset F$， $t_{K_i}' = t_{K_i} \in F$ 均成立，我们˜有 $u \in F$。由于 $L^p = F^p(t_i \mid i \in \mathcal{I}' \setminus K)$，可得

$$a_K \in \wp(F) + \sum_{J \in T|\tilde{J} \cap \tilde{K} \neq \emptyset} t^J F^p$$

至此，引理得证。 □

下面的引理将 [2, 命题 1.5] 推广到特征$p > 0$下的 Kato-Milne 上同调。

引理 2.6. 设 v： $F \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ 是一个赋值，且 F 是完备的，并设 $\{t_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ 是一个 p-基。令 $F \subset F$ 为剩余域， π 为 F的一致化元。假设

$$\varphi = \sum_{I \in (T)_m} A_I \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} = 0 \in H_p^{m+1}(F)$$

其中 $A_I = \sum_{J \in T} \sum_{()\notin \tilde{I}} \frac{t^J a_r^p}{r \geq 1\ \pi^{pr}}\ ,\ {}_{I\ J}$,以及 $a_{r,I,J} \in F$. 此外，对于几乎所有的 I、 J、 r，都有 $a_{r,I,\ J} = 0$ 。于是$_{I\ J}$ $\overline{A_I} = 0$ 对所有 I 都成立。

证明。令 $S := \{I \in (T)_m \mid A_I \neq 0\} \subset T$ 并假设 S 非空。令 M 为 S相对于由 T诱导的序的最大元素。现在我们可以写成 $A_M = \sum A_{M,J,J\in T(J)\notin \tilde{M}}$

其中

$$A_{M,J} = \sum_{r\geq 1} \frac{t^J a_{r,M,J}^p}{\pi^{pr}}, \quad \text{where } a_{r,M,J} \in \overline{F}. \tag{3}$$

由于 $A_M \neq 0$，存在一个元素 $J \in T$ 使得 $l(J) \notin M$ 并且 $A_{M,\ J} \neq 0$。我们定义 $\{t'_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 的一个新子集，使得 F 满足 $t'_{l(J)} = t^J$，并且对于所有 $i \neq l(J) \in \mathcal{I}$均有 $t'_i = t_i$。于是，集合 $\{t'_i \mid i \in \mathcal{I}\}$是 F的一个 p-基。由于 $l(J) \notin \tilde{M}$，我们有 $\mathrm{d}\frac{t'_M}{t'_M} = \mathrm{d}\frac{t_M}{t_M}$。令 $K \in (T)_m$ 满足 $l(J) \in \tilde{K}$。则 $\tilde{K} = \{l(J)\} \cup \tilde{Q}$，其中 $Q \in (T)_{m-1}$。现在在 $H_p^{m+1}(F)$ 中，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}t'_K}{t'_K} &= c_K \frac{\mathrm{d}t'_Q}{t'_Q} \wedge \frac{\mathrm{d}t'_{l(J)}}{t'_{l(J)}} \quad (\text{where } c_K \in \{-1, 1\}) \\
&= c_K \frac{\mathrm{d}t_Q}{t_Q} \wedge \frac{\mathrm{d}t^J}{t^J} \\
&= \sum_{j\in\tilde{J}} c_K J_j \frac{\mathrm{d}t_Q}{t_Q} \wedge \frac{\mathrm{d}t_j}{t_j} \quad (\text{where } J_j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \\
&= J_{l(J)} \frac{\mathrm{d}t_K}{t_K} + \sum_{j\in\tilde{J}\setminus(\tilde{Q}\cup\{l(J)\})} a_{L_j} \frac{\mathrm{d}t_{L_j}}{t_{L_j}} \quad (\text{where } L_j \in (T)_m \text{ and } \tilde{L}_j = \tilde{Q} \cup \{j\},\ a_{L_j} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \\
&= J_{l(J)} \frac{\mathrm{d}t_K}{t_K} + \sum_{j\in\tilde{J}\setminus\tilde{K}} a_{L_j} \frac{\mathrm{d}t'_{L_j}}{t'_{L_j}} \quad (\text{since } l(J) \notin \tilde{L}_j) \\
&= J_{l(J)} \frac{\mathrm{d}t_K}{t_K} + \sum_{\substack{j\in\tilde{J}\setminus\tilde{K} \\ L_j<K}} a_{L_j} \frac{\mathrm{d}t'_{L_j}}{t'_{L_j}}.
\end{aligned}$$

最后一个等式成立是因为 $L_j = Q \cup \{j\}$，并且对于所有 $j \in J \setminus K$都有 $j < l(J)$。因此，

$$\frac{\mathrm{d}t_K}{t_K} = b_K \frac{\mathrm{d}t'_K}{t'_K} + \sum_{\substack{j\in\tilde{J}\setminus\tilde{K} \\ L_j<K}} b_{L_j} \frac{\mathrm{d}t'_{L_j}}{t'_{L_j}}, \tag{4}$$

其中 $b_K, b_{L_j} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$。因此，我们在 $H_p^{m+1}(F)$ 中得到

$$\varphi = \sum_{I\in(T)_m} A_I \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} = \sum_{I<M\in(T)_m} A_I \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} + A_M \frac{\mathrm{d}t_M}{t_M} = \sum_{I<M\in(T)_m} A'_I \frac{\mathrm{d}t'_I}{t'_I} + A_M \frac{\mathrm{d}t'_M}{t'_M} \quad (\text{by } (4))$$

其中 $A'_I \in F$。根据引理 2.5，关于 F 的 $\{t'_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ 的 p-基，我们有

$$A_M \in \wp(F) + \sum_{\substack{I\in T \\ \tilde{I}\cap\tilde{M}\neq\emptyset}} {t'}^I F^p.$$

现在，${t'}^I = t^J$，如果 $\tilde{I} = \{l(J)\}$ 且 $I_{l(J)} = 1$，但随后 $\tilde{I} \cap \tilde{M} = \emptyset$。因此，

$$A_{M,J} \in \wp(F) - \sum_{\substack{K\neq J\in T \\ l(K)\notin\tilde{M}}} A_{M,K} + \sum_{\substack{I\in T\mid I\neq J \\ I\neq 0}} t^I F^p.$$

由于 $-1=(-1)^p\in F^p$，我们有

$$A_{M,J}\in\wp(F)+\sum_{\substack{I\in T\mid I\neq J\\ I\neq 0}} t^I F^p. \tag{5}$$

根据 $A_{M,J}$ 的表达式 (3)，我们有 $v(A_{M,J})=s<0$。现在，$p\mid s$ 当且仅当 $J_\infty=0$。对于任意 $K\in T$，令 K' 表示 T 中满足对所有 $i\neq\infty\in\mathcal{I}$ 和 $K'_\infty=0$ 均有 $K'_i=K_i$ 的元素。由 (3)，我们有

$$\overline{\pi^{-s}A_{M,J}}\in t^{J'}\overline{F}^p. \tag{6}$$

由 (5)，我们有 $A_{M,J}=\wp(u)+\sum_{I\in T\mid I\neq J} t^I b_{I,J}^p$，其中 $u\in F$ 且 $b_{I,J}\in F_{I\neq 0}$。因此，

$$\overline{\pi^{-s}A_{M,J}}\in\begin{cases}\overline{F}^p+\sum\limits_{\substack{I\in T,I\neq J\\ I\neq 0,I_\infty=0}} t^I\overline{F}^p & \text{when } p\mid s,\\ \sum\limits_{\substack{I\in T\mid I'\neq J'\\ I_\infty=J_\infty\neq 0}} t^{I'}\overline{F}^p & \text{when } p\nmid s.\end{cases}$$

由于 $\{t_i\mid i\neq\infty\in\mathcal{I}\}$ 是 F 的一个 p-基，且 $p^{-s}A_{M,J}$ 的上述两个表达式不同，$\overline{A_{M,J}}=0$。因此，对所有 I，$a_I=0$，这就证明了该引理。

□

下面的定理描述了群 $W_1(H_p^{m+1}(F))$，其中 F 是特征为 p 的完备赋值域。

定理 2.7。设 F是一个特征为 $p>0$的域，且 $v\colon F\to\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$是一个赋值，并且$F$是完备的。设 F和 π分别是 F的剩余域和一致化元。若 $F\subset F$，则任意形式 $\varphi\in H_p^{m+1}(F)$ 都可以表示为

$$\varphi=\varphi_1+\psi+\varphi_2\wedge\frac{\mathrm{d}\pi}{\pi}$$

其中 $\varphi_1\in H_p^{m+1}(F)$、$\psi=\sum_{I\in T()_m}\sum_{J\in T\mid l\ (J)\notin\check{I}} t^J r_I^p$、$\varphi_2\in H_p^m(F)$和 $\mathrm{d}t_I=t_I$，其中 $r_{I,J}\in\pi^{-1}\underline{F}[\pi^{-1}]$。

此外，对于每个 I、J，φ_1、φ_2 和 $r_{I,J}$ 都是唯一的。例如，存在一个分裂正合列：

$$0\to H_p^{m+1}(\overline{F})\to H_p^{m+1}(F)\to\mathcal{R}\oplus H_p^m(\overline{F})\wedge\frac{\mathrm{d}\pi}{\pi}\to 0$$

证明。类似于 [11, 定理 2.5]。 □

注 2.8. 设 $v\colon F\to\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$是一个赋值，使得 F是完备的，并令 F为 F的剩余域。根据定理 *2.7*，我们有以下分裂正合列：

$$0\to H_p^{m+1}(\overline{F})\xrightarrow{i_1}H_p^{m+1}(F)\xrightarrow{\partial_v}W_1(H_p^{m+1}(F))\to 0$$

其中 i_1 由 *Teichm¨uller* 提升诱导，∂_v 是第二剩余映射。

3. The filtration of $H_p^{m+1}(\mathcal{F}(x))$

在本文余下部分，设 $\mathcal{F}$ 是一个特征为 p 的域，其一组 p-基为 $\{t_i\mid i\in\mathcal{I}\}$，其中 $\mathcal{I}$ 是一个有序集；设 $F=\mathcal{F}(x)$ 是 $\mathcal{F}$ 上关于变量 x 的有理函数域。分别记 F 关于 q-进赋值的完备化和剩余域为 F_q 和 F_q，其中 $q=1/x$ 或 $q\in\mathcal{F}[x]$ 是首一不可约多项式。现在我们定义一个滤过 $(L_d)_{d\in\mathbb{N}}$

如在 [11, 第 3] 节对 $p=2$ 所做的那样，定义 $H_p^{m+1}(\mathcal{F}(x))$ 的滤过。对于任意正整数 d，我们定义集合 $\mathcal{F}[x]_{<d}:=\{f\in\mathcal{F}[x]\mid \deg f<d\}$ 和 $\mathcal{F}[x]_{\leq d}:=\{f\in\mathcal{F}[x]\mid \deg\ f\leq d\}$。

定义3.1。*(1)* 对于 $d\in\mathbb{N}_0$，令 L_d 为 H_p^{m+1}（$\mathcal{F}$（x））中由以下形式生成的子群

$$\frac{h}{u^e}\frac{\mathrm{d}f_1}{f_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}f_m}{f_m}$$

其中 $h\in\mathcal{F}[x]$、$e\geq 0$ 以及 u、$f_i\in\mathcal{F}[x]_{\leq d}\setminus\{0\}$。

(2) 令 L_0 为 H_p^{m+1}（$\mathcal{F}$（x））中由以下形式生成的子群

$$h\frac{\mathrm{d}c_1}{c_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}c_{m-1}}{c_{m-1}}\wedge\frac{\mathrm{d}f_m}{f_m}$$

其中 $c_i\in\mathcal{F}^*$ 和 $f_m\in\mathcal{F}^*\cup\{x\}$。此外，当 $f_m\in F^*$（分别为$f_m=x$）时，$h\in\mathcal{F}[x]$（分别为 $h\in x\mathcal{F}[x]$）。

显然，$(L_d)_{d\in\mathbb{N}}$ 是 $H_p^{m+1}(\mathcal{F}(x))$ 的子群递增链，并满足 $H_p^{m+1}(\mathcal{F}(x))=\cup_{d\in\mathbb{N}}L_d$。为证明后续结果，我们需要以下关系：

$$\frac{\mathrm{d}(a+b)}{a+b}=\frac{a}{a+b}\frac{\mathrm{d}a}{a}+\frac{b}{a+b}\frac{\mathrm{d}b}{b}\in\Omega_F^1 \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}a^r}{a^r}=r\frac{\mathrm{d}a}{a} \tag{8}$$

其中 $r\in\mathbb{Z}$ 和 a、$b\in F^*$ 满足 $a+b\neq 0$。以下引理证明，对于任意次数为 d的首一不可约多项式 $q\in\mathcal{F}[x]$，第二剩余映射 ∂_q 可以扩展到 L_d/L_{d-1}。

引理 3.2. 设 $q\in\mathcal{F}[x]$是次数为 d的首一不可约多项式，v_q 是 $\mathcal{F}(x)$的 q-进赋值。设 $s, r_1, \ldots, r_m\in\mathcal{F}(x)$。

(1) 若对所有 $i=1,\ldots,m$，有 $v_q(s)\geq 0$且 $v_q(r_i)=0$，则

$$\partial_q\left(s\frac{\mathrm{d}r_1}{r_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}r_m}{r_m}\right)=0$$

(2) 对任意 $\varphi\in L_{d-1}$，我们有 $\partial_q(\varphi)=0$。因此，∂_q 可扩张到 L_d/L_{d-1}。

证明. 这与引理 3.4]类似。 □

定义 3.3. 对于任意首一不可约多项式 $q\in\mathcal{F}[x]$，令 S_q 为 $H_p^{m+1}(\mathcal{F}(x)$的子群) 生成元 由这些元素生成

$$\frac{h}{q^e}\frac{\mathrm{d}c_1}{c_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}c_m}{c_m},\quad where\ h\in\mathcal{F}[x],\ e\geq 0\ and\ c_i\in\mathcal{F}^*.$$

以下引理描述了群 L_d（对于 $d\geq 1$）的一些生成元。

引理 3.4. *(1)* 对任意正整数 d，有 $L_d=\sum_{\text{次数 }q\leq d}\left(S_q+S_q\wedge\mathrm{d}_x^{\ x}\right)$，其中 $S_q\wedge\mathrm{d}x^{\ x}$是由以下元素生成的 $H_p^{m+1}(\mathcal{F}(x))$ 子群：

$$\frac{h}{q^e}\frac{\mathrm{d}c_1}{c_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}c_{m-1}}{c_{m-1}}\wedge\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

其中 $h\in\mathcal{F}[x]$、$c_i\in\mathcal{F}$ 和 $e\geq 0$。

(2) $H_p^{m+1}(\mathcal{F}(x))=\sum_q\left(S_q+S_q\wedge\mathrm{d}_x^{\ x}\right)$，其中 q 遍历所有在$\mathcal{F}$上的首一不可约多项式。

(3) 对每个 $d \geq 1$，我们都有 $L_d = \sum_{\text{次数}\, q=d} \left(S_q + S_q \wedge \mathrm{d}\underline{\frac{x}{x}}\right) + L_{d-1}$。

证明。 这与 [11,引理 3.6]类似。 □

记号： 设 $q = \sum_{j=0}^{d} q_j x^{d-j} \in \mathcal{F}[x]$ 是一个次数为 d的首一不可约多项式。由于$\{t_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ 是 $\mathcal{F}$的一个 p-基，因此对于某个q_j，有$q_j = \sum_{I \in T} t^I q_j^{p^I}, I \in \mathcal{F}$，其中 $T = \oplus_{|\mathcal{I}|}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.~设 $\mathcal{I}'$: $= \{i \in \mathcal{I} \mid \exists I \in T$ 满足 $i \in I$ 且$q_{j,I} \neq 0$，其中 $j\}$。定义 T的子集$T_1 := \oplus_{|\mathcal{I}'|}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 。若 $\mathcal{I}' = \emptyset$，则取 $T_1 := \{0\} \subset T$。若 $\mathcal{I}' \neq \emptyset$，则取$\mathcal{I}' := \{j_1, \ldots, j_n\} \subset \mathcal{I}$，其中 $j_1 < j_2 < \ldots < j_n$。于是，对所有 $j \in \{0, \ldots, d\}$，有:

$$q_j = \sum_{K \in T_1} t^K q_{j,K}^p \quad \text{for some } q_{j,K} \in \mathcal{F} \tag{9}$$

其中

$$t^K = \begin{cases} t_{j_1}^{K_1} \ldots t_{j_n}^{K_n} & \text{if } \mathcal{I}' \neq \emptyset \\ 1 & \text{if } \mathcal{I}' = \emptyset. \end{cases}$$

现在， T_1 按字典序排列，与 T相同。对于所有 $K \in T_1$，我们定义

$$Q_K = \sum_{j=0}^{d} (d-j) t^K q_{j,K}^p x^{d-j} \in \mathcal{F}[x]. \tag{10}$$

设 M为F_q上的矩阵，其第（$\overline{I}, J$）项对所有 $I, J \in T_1$均为$\overline{Q}_{I-J}$。我们证明，只要 q 可分， M就可逆。

引理 3.5。 设 T 为一个含有 p^n 个元素的交换群，其中 $n \in \mathbb{N}$为某个数；设 Q_K 为特征 p的域的元素，其中 $K \in T$。设 M为 p^n 阶矩阵，其第(I, J)项对所有 $I, J \in T$均为 Q_{I-J}。若$\sum_{K \in T} Q_K \neq 0$，则 M 可逆。

证明。 该引理在 $p = 2$的情形下已于 [2, 引理 2.6] 中证明。设 $p > 2$。若 $n = 0$，则该引理显然成立。设 $n \in \mathbb{N}_0$ 且 $\mathcal{T}$:$= \{\sigma : T \to T$ 为一个双射$\}$。于是，我们有

$$\det M = \sum_{\sigma \in \mathcal{T}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{I \in T} Q_{I-\sigma(I)}.$$

令 K 为 T 中的任意元素。令 f_K: $T \to T$ 满足对所有 $I \in T$，均有 $f_K(I) = I - K$。显然，对所有 $K \in T$，均有 $f_K \in \mathcal{T}$。此外，

$$\prod_{I \in T} Q_{I-f_K(I)} = (Q_K)^{p^n}. \tag{11}$$

We 定义一个作用 Φ: $T \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$，使得 $\Phi(J, \sigma) = \sigma^J$，其中 σ^J: $T \to T$ 是一个映射定义 d by

$$\sigma^J(I) = \sigma(I - J) + J, \quad \text{for all } I \in T.$$

由于 T 是交换的， Φ 是一个作用。现在，对任意 $\sigma \in \mathcal{T}$ 和 $J \in T$，我们有

$$\prod_{I \in T} Q_{I-\sigma^J(I)} = \prod_{I \in T} Q_{I-\sigma(I-J)-J} = \prod_{I \in T} Q_{I-J-\sigma(I-J)} = \prod_{L \in T} Q_{L-\sigma(L)}. \tag{12}$$

设 σ 是 $\mathcal{T}$ 的一个元素，使得对所有 $J \in T$ 都有 $\sigma^J = \sigma$。那么

$$\begin{aligned} \sigma^J(J) = \sigma(J), \text{ for all } J \in T &\iff \sigma(0) + J = \sigma(J), \text{ for all } J \in T \\ &\iff \sigma = f_{-\sigma(0)} \in \mathcal{T}. \end{aligned}$$

设 $\sigma \in \mathcal{T}$ 满足对每个 $K \in T$ 都有 $\sigma \neq f_K$。那么， σ 的轨道有 p^r 个元素，其中某个 $r \geq 1$。此外， $\sigma^J = {f_J}^{-1} \circ \sigma \circ f_J$，因此对所有 $J \in T$，$\mathrm{sgn}(\sigma^J) = \mathrm{sgn}(\sigma)$。于是，

$$\begin{aligned}\sum_{\varphi \in \mathrm{orbit}(\sigma)} \mathrm{sgn}(\varphi) \prod_{I \in T} Q_{I-\varphi(I)} &= p^r \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{I \in T} Q_{I-\sigma(I)} \quad \text{(by (12))} \\ &= 0.\end{aligned}$$

由于 $f_K \circ f_0 \circ f_K = f_{2K}$ 对所有 $K \in T$均成立，我们有 $\mathrm{sgn}(f_0) = \mathrm{sgn}(f_{2K})$ 对所有 $K \in T$均成立。由于 T 的基数与 2 互质，下面的同态是双射：

$$\Psi : T \to T, \quad \Psi(K) = 2K, \quad \text{for all } K \in T.$$

因此，对于所有 $K \in T$，$\mathrm{sgn}(f_0) = \mathrm{sgn}(f_K)$。此外，在作用 Φ 下， f_K 的轨道对于所有$K \in T$均为 $\{f_K\}$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\det M &= \mathrm{sgn}(f_0) \sum_{K \in T} (Q_K)^{p^n} \quad \text{(by (11))} \\ &= \mathrm{sgn}(f_0) \left(\sum_{K \in T} Q_K \right)^{p^n}.\end{aligned}$$

因此，当且仅当 $\sum_{K \in T} Q_K \neq 0$时， M 可逆。 □

推论 3.6。设 $q \neq x$ 是 $\mathcal{F}$上的次数为 d 的首一不可约多项式。若 q 可分，则第 9 页定义的矩阵 M 在 F_q上可逆。

证明。假设 M 不可逆。根据引理 3.5，我们有 $\sum_{K \in T_1} Q_K = 0 \in F_q$。由于 x 是 F_q中的单位，我们有

$$\sum_{K \in T_1} \sum_{j=0}^{d-1} \overline{(d-j) t^K q_{j,k}^p x^{d-j-1}} = 0 \in \overline{F}_q$$

$$\sum_{K \in T_1} \sum_{j=0}^{d-1} (d-j) t^K q_{j,k}^p x^{d-j-1} = 0 \in \mathcal{F}[x] \quad (\text{since } \deg q = d)$$

因此，对于所有满足 $p \nmid d-j$ 的 $j \in \{0, \ldots, d-1\}$，我们得到 $\sum_{K \in T_1} t^K q_{j,\ K}^p = 0 \in \mathcal{F}$。因此，对于所有满足 $p \nmid d-j$ 的 $j \in \{0, \ldots, d-1\}$，我们有 $q_{j,\ K} = 0$，因为 $\{t_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ 是 $\mathcal{F}$ 的一个 p-基。现在，由 (9) 可知，对于所有满足 $p \nmid d-j$ 的 $j \in \{0, \ldots, d-1\}$，都有 $q_j = 0$。这与 q 的可分性矛盾。因此， M 在 F_q 上可逆。□

引理 3.7。设 $\mathcal{F}$ 是一个域， $\{t_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ 是其一个 p-基，且 q 是 $\mathcal{F}$ 上的首一不可约不可分多项式。那么，存在一个元素 $l \in \mathcal{I}$，使得 $\{t_i \mid i \neq l \in \mathcal{I}\} \cup \{x\}$ 是 F_q 的一个 p-基，并且 $\frac{\partial q}{\partial t_l} \neq 0 \in F_q$。

证明。我们令 $q = \sum_{j=0}^{d} q_j x^{d-j} \in \mathcal{F}[x]$，其中 $q_0 = 1$。令 $\mathcal{I}'$ 和 T_1 如第 9 页所定义。由于 q不可分，因此 p整除 d，并且对于所有满足 $p \nmid j$的 $j \in \{0, \ldots, d\}$，都有 $q_j = 0$。因此， $\mathcal{I}' \neq \emptyset$，否则 q将是可约的。由 (9)，对于所有 $j \in \{0, \ldots, d\}$，我们有

$$q_j = \sum_{K \in T_1} t^K q_{j,K}^p \quad \text{for some } q_{j,K} \in \mathcal{F}.$$

令 K为包含 $\{t_i \mid i \in \mathcal{I}'\}$和 $\{q_{j,K} \mid j \in \{0,\dots,d\},\ K \in T_1\}$的 $\mathcal{F}$的最小子域。于是， p-形式[6] $\otimes_{i\in\mathcal{I}'}\langle\langle t_i\rangle\rangle$在 $K(q) := K[x]/(q)$上是各向同性的。由 [5, 推论 4.10], ，存在某个 $l \in \mathcal{I}'$使得 $t_l \in K(q)^p(t_i \mid i \in \mathcal{I}' \setminus \{l\})$。由于 $K(q) \subset F_q$，集合 $S := \{t_i \mid i \in \mathcal{I} \setminus \{l\}\} \cup \{x\}$在 F_q^p上生成 F_q。由于 $l \in \mathcal{I}'$并且对于所有满足 $p \nmid d-j$的 j都有 $q_j = 0$，我们有$\frac{\partial q}{\partial t_l} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial q_j}{\partial t_l} x^{d-j} \neq 0 \in F_q$。现在只需证明 S在 F_q上是 p-线性无关的。为此，我们区分 $\mathcal{I}$为有限和非有限的两种情形。

情形 1. 假设 $\mathcal{I}$是有限的。现在我们写作 $q = f(x^{p^n})$，其中 $n \geq 1$和 f是 $\mathcal{F}$上的首一可分不可约多项式。设 α是 q在 $\mathcal{F}$的代数闭包中的一个根，并且 $a = \alpha^{p^n}$。那么$F_q \simeq \mathcal{F}(\alpha) = K'(\alpha)$，其中 $K' = \mathcal{F}(a)$。由于 $K'/\mathcal{F}$是可分的，由 [1, 引理 2.1]可知， $\{t_i \mid i \in \mathcal{I}\}$是 K'的 p-基。因此，对唯一的 $a_I \in K'$，有 $a = \sum_{I\in T} t^I a_I^p$，其中 $T = \oplus_{|\mathcal{I}|}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$。令 $B := \{i \in \mathcal{I} \mid \exists I \in T$满足 $i \in I$且 $a_I \neq 0\}$。由于 $\sqrt[p]{a} \notin K'$，我们有 $B \neq \emptyset$。令 k为 B的任意元素。于是，集合 $\{t_i \mid i \in \mathcal{I} \setminus \{k\}\} \cup \{a\}$在 K'上是 p-线性无关的。否则，存在 $\mathcal{I} \setminus \{k\}$的一个子集 C，使得 p形式 $\otimes_{i\in C}\langle\langle t_i\rangle\rangle \otimes \langle\langle a\rangle\rangle$在 K'上是各向同性的。若$C = \emptyset$，则 p形式 $\langle\langle a\rangle\rangle$在 K'上是各向同性的。于是由 [5, 推论 4.10], 可得 $\sqrt[p]{a} \in K'$，这与假设矛盾。因此， $C \neq \emptyset$。接着由引理 10.13， $a \in K'^p(t_i \mid i \in \mathcal{I} \setminus \{k\})$，这与 $k \in B$矛盾。由于 $\mathcal{I}$是有限集，$\{t_i \mid i \in \mathcal{I} \setminus \{k\}\} \cup \{a\}$是 K'的一个 p-基，因为它的基数与 K'的 p-基 $\{t_i \mid i \in \mathcal{I}\}$相同。因此，$\{t_i \mid i \in \mathcal{I} \setminus \{k\}\} \cup \{\alpha\}$是 $K'(\alpha) = \mathcal{F}(\alpha)$的$p$-基。由于 $\mathcal{I}$是有限的，且 $S = \{t_i \mid i \in \mathcal{I} \setminus \{l\}\} \cup \{x\}$是$F_q$的一个 p-生成集，所以 S是 F_q的 p-基。

情形 2。 假设 $\mathcal{I}$是无限的。对于 $\mathcal{I}$的任意有限子集 $\mathcal{J}$，定义 $T_{\mathcal{J}} := \oplus_{|\mathcal{J}|}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$。对于每个 $I \in T_{\mathcal{J}}$，令 t^I表示元素 $\prod_{i\in\mathcal{J}} t_i^{I_i}$，其中 I_i是 I的各个分量。假设S在 F_q上是 p-相关的。那么，存在一个有限子集 $M \subset \mathcal{I} \setminus \{l\}$，使得 $\{t_i \mid i \in M'\}$在 F_q上是 p-相关的，其中 $M' = M \cup \{i_x\}$和 $t_{i_x} = x$。于是，存在 $f_J \in \mathcal{F}[x]_{<d}$个不全为零的多项式，使得

$$\sum_{J\in T_{M'}} \overline{f_J^p t^J} = 0 \in \overline{F}_q. \tag{13}$$

令 G为 $\mathcal{F}$的一个子域，包含 K和 $\{t_i \mid i \in M\}$，使得 G具有有限的 p-基，并且对所有 $J \in T_{M'}$都有 $f_J \in G[x]$。由于 $\{t_i \mid i \in M \cup \mathcal{I}'\}$在 G上是 p-无关的，因此它可以扩充为 G的一个有限 p-基（记为）B。由于 $K(q) \subset G(q) := G[x]/(q)$，我们有 $t_l \in G(q)^p(t_j \mid j \in \mathcal{I}' \setminus \{l\})$。由于 G具有有限的p-基，根据第一种情形可知， $\{t \mid t \in B \setminus \{t_l\}\} \cup \{x\}$是 $G(q)$的一个 p-基。因此，$\{t_i \mid i \in M'\}$在 $G(q)$上是 p-无关的。于是，由（13）可得，对所有 $J \in T_{M'}$都有 $f_J = 0 \in G[x] \subset \mathcal{F}[x]$，这与我们的假设矛盾。因此， $S := \{t_i \mid i \neq l \in \mathcal{I}\} \cup \{x\}$是 F_q的一个 p-基。引理得证。□

定义 3.8。 如果 q 是不可分的，那么根据引理 *3.7*，存在某个 $l \in \mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$，使得 $\{t_i \mid i \in \mathcal{I} \setminus \{l\}\} \cup \{x\}$是 F_q的 p-基。不妨取 $l = j_n$。现在我们定义由以下形式生成的子群 $\tilde{S}_q \subset H_p^{m+1}(\mathcal{F}(x))$

$$\frac{h}{q^s}\frac{\mathrm{d}t_{i_1}}{t_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}t_{i_m}}{t_{i_m}}$$

其中 $\{t_{i_1},\dots,t_{i_m}\} \subset \{t_i \mid i \in (\mathcal{I} \setminus \{j_n\}) \cup \{i_x\}\}$对所有 $i \in \mathcal{I} \setminus \{j_n\}$和 $t_{i_x} = x$，均有 $i < i_x$。此外， $h \in \mathcal{F}[x]$和 $s \geq 0$。

[6]我们将 [5]称为 p-形式的定义。

下面的命题描述了 $S_q \wedge \mathrm{d}_q^q$、$\tilde{S}_q \wedge \mathrm{d}_q^q$ 和 $S_q \wedge \mathrm{d}_x^x$ 之间的关系。

命题 3.9。设 q 是 $\mathcal{F}$ 上的首一不可约多项式。则有：
(1) $S_q + S_q \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q} + L_0 \wedge \mathrm{d}x \subset S_q + S_q \wedge \frac{\mathrm{d}x}{x} + L_0 \wedge \mathrm{d}x$。*(2)* 若 q 可分，则 $S_q + S_q \wedge \frac{\mathrm{d}x}{x} + L_0 \wedge \mathrm{d}x = S_q + S_q \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q} + L_0 \wedge \mathrm{d}x$。*(3)* 若 q 不可分，则 $S_q + S_q \wedge \mathrm{d}x + L_0 + L_0 \wedge \mathrm{d}x = \tilde{S}_q + \tilde{S}_q \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q} + L_0 + L_0' \wedge \mathrm{d}x$。

证明。(1) 设 $q = \sum_{i=0}^{d} q_i x^{d-i} \in \mathcal{F}[x]$，其中 $q_0 = 1$。现在，$S_q \wedge \mathrm{d}_q^q$ 的加法生成元为 $\frac{h}{q^s}\mathrm{d}\frac{c_1}{c_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\frac{c_{m-1}}{c_{m-1}} \wedge \mathrm{d}_q^q$，其中 $h \in \mathcal{F}[x]$、$s \geq 0$ 和 $c_i \in \mathcal{F}$。根据关系式 (7)，我们有：

$$\frac{h}{q^s}\frac{\mathrm{d}c_1}{c_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}c_{m-1}}{c_{m-1}} \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q} = \sum_{j=0}^{d} \frac{q_j h x^{d-j}}{q^{s+1}} \frac{\mathrm{d}c_1}{c_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}c_{m-1}}{c_{m-1}} \wedge \frac{\mathrm{d}(q_j x^{d-j})}{q_j x^{d-j}} \in H_p^{m+1}(\mathcal{F}(x))$$

利用关系式 (8)，我们得到：

$$\frac{h}{q^s}\frac{\mathrm{d}c_1}{c_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}c_{m-1}}{c_{m-1}} \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q} \equiv \sum_{j=0}^{d} \frac{(d-j)q_j h x^{d-j}}{q^{s+1}} \frac{\mathrm{d}c_1}{c_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}c_{m-1}}{c_{m-1}} \wedge \frac{\mathrm{d}(q_j x)}{q_j x} \pmod{S_q}$$

由于 $q_j = \sum_{K \in T_1} t^K q_{j,K}^p$，我们有：

$$\frac{h}{q^s}\frac{\mathrm{d}c_1}{c_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}c_{m-1}}{c_{m-1}} \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q} \equiv \sum_{K \in T_1} \sum_{j=0}^{d} \frac{(d-j)t^K q_{j,K}^p h x^{d-j}}{q^{s+1}} \frac{\mathrm{d}c_1}{c_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}c_{m-1}}{c_{m-1}} \wedge \frac{\mathrm{d}(t^K x)}{t^K x} \pmod{S_q}$$

利用 (10) 中 Q_K 的表达式，我们得到：

$$\frac{h}{q^s}\frac{\mathrm{d}c_1}{c_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}c_{m-1}}{c_{m-1}} \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q} \equiv \sum_{K \in T_1} \frac{Q_K h}{q^{s+1}} \frac{\mathrm{d}c_1}{c_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}c_{m-1}}{c_{m-1}} \wedge \frac{\mathrm{d}(t^K x)}{t^K x} \pmod{S_q} \tag{14}$$

由于 $t^K \in \mathcal{F}$，由 (14) 可知 $S_q \wedge \mathrm{d}q \subset S_q + S_q \wedge \mathrm{d}x$。因此，命题 (1) 得证。

(2) 类似于 [11,命题 3.9，(2)]。我们需要使用关系式 (14)。
(3) 令 $q = \sum_{i=0}^{d} q_i x^{d-i} \in \mathcal{F}[x]$ 是次数为 d 的首一不可约不可分多项式。于是，$p \mid d$, $q_0 = 1^{p-1}$且 $q_i = 0$ 对所有满足 $p \nmid d-i$ 的 $i \in \{1, \ldots, d\}$ 都成立。现在我们写作 $q_i = \sum q_{i,s} t_{j_n}^s$，其中某个 $q_{i,s} \in \mathcal{F}^p(t_k \mid k \in \mathcal{I}' \setminus \{j_n\})$ 对所有 $i \in \{0, \ldots, d\}$ 都成立。因此

$$q_{i,s} = \sum_{K \in T_1,\, K_{j_n}=0} q_{i,s,K}^p t^K,$$

其中，对于所有的 i 和 s，都有 $q_{i,s,K} \in \mathcal{F}$。现在，对于每个满足 $K_{j_n} = 0$ 的 $K \in T_1$，我们定义

$$\mathcal{Q}_K = \sum_{i=0}^{d} \sum_{s=1}^{p-1} s t_{j_n}^{s-1} q_{i,s,K}^p t^K x^{d-i} \in \mathcal{F}[x] \tag{15}$$

对满足 $K_{j_n}=0$ 的 $K\in T_1$ 求和，得到

$$\sum_{K\in T_1,\,K_{j_n}=0}\overline{\mathcal{Q}_K}=\sum_{K\in T_1,\,K_{j_n}=0}\sum_{i=0}^{d}\sum_{s=1}^{p-1}\overline{st_{j_n}^{s-1}q_{i,s,K}^{p}t^{K}x^{d-i}}=\sum_{i=0}^{d}\overline{\frac{\partial q_i}{\partial t_{j_n}}x^{d-i}}=\overline{\frac{\partial q}{\partial t_{j_n}}}\neq 0\in\overline{F}_q.$$

令 M 为 p^{n-1} 阶矩阵，其 $(I,\ J)$ 项为 $\mathcal{Q}_{I-J}t_{j_n}$，对所有 $I,\ J\in\overline{\mathcal{I}}T_1$ 且 $I_{j_n}=J_{j_n}=0$ 均成立。于是，由引理 3.5，M 在 F_q 上可逆。

现在我们需要重复 [11，命题 3.9，（3）] 的证明。首先进行一些计算。**计算：** 令 $\mathrm{d}_{t_I}^{t_I}$ 表示元素 $\mathrm{d}_{t_{i_1}}^{t_{i_1}}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}_{t_{i_{m-1}}}^{t_{i_{m-1}}}$，其中 $\tilde{I}=\{i_1,\ldots,i_{m-1}\}\subset\mathcal{I}\setminus\{j_n\}$ 且 $i_1<\ldots<i_{m-1}$。令 $e\geq 0$ 和 $h_L\in\mathcal{F}[x]$，对满足 $L_{j_n}=0$ 的 $L\in T_1$ 均成立。由 (7)，我们有：

$$\begin{aligned}
\frac{h_L}{q^e}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}\wedge\frac{\mathrm{d}(t^Lq)}{t^Lq}&=\sum_{i=0}^{d}\frac{h_Lq_ix^{d-i}}{q^{e+1}}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}\wedge\frac{\mathrm{d}(t^Lq_i)}{t^Lq_i}\quad(\text{since } q_i=0 \text{ for } p\nmid d-i)\\
&=\sum_{i=0}^{d}\sum_{s=0}^{p-1}\frac{h_Lq_{i,s}t_{j_n}^{s}x^{d-i}}{q^{e+1}}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}\wedge\frac{\mathrm{d}(t^Lq_{i,s}t_{j_n}^{s})}{t^Lq_{i,s}t_{j_n}^{s}}\quad(\text{using } q_i=\sum_{s=0}^{p-1}q_{i,s}t_{j_n}^{s})\\
&\equiv\sum_{i=0}^{d}\sum_{s=1}^{p-1}\frac{h_Lq_{i,s}t_{j_n}^{s}x^{d-i}}{q^{e+1}}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}\wedge\frac{\mathrm{d}(t^Lq_{i,s}t_{j_n}^{s})}{t^Lq_{i,s}t_{j_n}^{s}}\quad(\mathrm{mod}\ \tilde{S}_q)\\
&\equiv\sum_{i=0}^{d}\sum_{s=1}^{p-1}\frac{sh_Lq_{i,s}t_{j_n}^{s}x^{d-i}}{q^{e+1}}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}\wedge\frac{\mathrm{d}(t^Lq_{i,s}t_{j_n})}{t^Lq_{i,s}t_{j_n}}\quad(\mathrm{mod}\ \tilde{S}_q)\quad(\text{using (8)})
\end{aligned}$$

由于 $q_{i,\ s}=\sum_{K\in T_1,\ K_{j_n}=0}q_{i,\ s,\ K}^{p}t^{K}$，我们有：

$$\begin{aligned}
\frac{h_L}{q^e}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}\wedge\frac{\mathrm{d}(t^Lq)}{t^Lq}&\equiv\sum_{i=0}^{d}\sum_{s=1}^{p-1}\sum_{K\in T_1,\,K_{j_n}=0}\frac{sh_Lq_{i,s,K}^{p}t^{K}t_{j_n}^{s}x^{d-i}}{q^{e+1}}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}\wedge\frac{\mathrm{d}(t^{K+L}t_{j_n})}{t^{K+L}t_{j_n}}\quad(\mathrm{mod}\ \tilde{S}_q)\\
&=\sum_{K\in T_1,\,K_{j_n}=0}\frac{\mathcal{Q}_Kh_Lt_{j_n}}{q^{e+1}}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}\wedge\frac{\mathrm{d}(t^{K+L}t_{j_n})}{t^{K+L}t_{j_n}}\quad(\text{by (15)})
\end{aligned}$$

现在重复 [11, 命题 3.9（3）的证明，], 即可证明结论（3）。 □

4. Milnor's exact sequence

若 $q=1/x$ 或 q 是 $\mathcal{F}$上的首一不可约可分多项式，则由 [1,引理 2.1] 可知，集合 $\{t_i\mid i\in\mathcal{I}\}$ 是 F_q的 p-基，而 $\{t_i\mid i\in\overline{\mathcal{I}}\}\cup\{q\}$ 是 F_q的 p-基。若 q不可分，则沿用定义 3.8 中的记号，集合 $\{t_i\mid i\neq j_n\in\overline{\mathcal{I}}\}\cup\{x\}$ 是 F_q的 p-基。因此，当 q不可分时，$\{t_i\mid i\neq j_n\in\mathcal{I}\}\cup\{x,q\}$ 是 F_q的 p-基。现在我们固定一些与 $\mathcal{F}$、F_q 和 F_q的这些 p-基相关的记号。

定义 4.1。*(1)* 设 $T:=\oplus_{|\mathcal{I}|}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，使得 $\{t^I\mid I\in T\}$ 是 $\mathcal{F}$的一个 $\mathcal{F}^p$-基，它来自固定的 $\mathcal{F}$的 p-基 $\{t_i\mid i\in\mathcal{I}\}$。

(2) 设 $T_q:=\oplus_{|\mathcal{I}|}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，使得 $\{t^I\mid I\in T_q\}$ 是 F_q 的一个 F_q^p-基；若 q 可分，则该基来自 p-基 $\{t_i\mid i\in\mathcal{I}\}$（分别为 $\{t_i\mid i\neq j_n\in\mathcal{I}\}\cup\{x\}$）；若 q 不可分，则来自 $q=1/x$（分别为 q）。

(3) 设 $T_q := \oplus_{|\mathcal{I}|+1}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，使得 $\{t^I \mid I \in T_q\}$ 是 F_q 的一个 F_q^p-基；若 q 可分，则该基来自p-基 $\{t_i \mid i \in \mathcal{I}\} \cup \{q\}$（分别为 $\{t_i \mid i \neq j_n \in \mathcal{I}\} \cup \{x, q\}$）；若 q 不可分，则来自 $q = 1/x$（分别为 q）。

现在我们来描述 $W_1(H_p^{m+1}(F_q))$ 群，其中 $q \in \mathcal{F}[x]$ 为首一不可约多项式或 $q = 1/x$。

定理 4.2。*(1)* 设 q 是次数为 d 的首一不可约多项式，定义在 $\mathcal{F}$ 上。那么，每个元素 $\varphi \in W_1(H_p^{m+1}(F_q))$ 都可以分解为 $\varphi = \psi + \varphi' \wedge \mathrm{d}_q^{\,q}$，其中 $\varphi' \in H_p^m(\mathcal{F}(q))$ 且

$$\psi = \sum_{I \in (T_q)_m} \sum_{J \in T_q,\, l(J) \notin \tilde{I}} t^J u_{I,J}^p \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}$$

其中 $u_{I,\,J} = \sum_{l \geq 1} \overline{u_{l,\,I,\,J}^{\,q}}$，$u_{l,\,I,\,J} \in \mathcal{F}[x]_{\leq d-1}$，且 $\mathcal{F}(q) := \mathcal{F}[x]/(q)$。此外，对于每个 φ，$u_{l,\,I,\,J}$ 和 φ' 都是唯一的。这里，$(T_q)_m = \{I \in T_q \mid I_i \in \{0,1\},\ |I| = m\}$ 对于 $m \in \mathbb{N}_0$。

(2) 若 $q = 1/x$，则每个元素 $\varphi \in H_p^{m+1}(F_{1/x})$ 都可以分解为 $\varphi = \psi - \varphi' \wedge \mathrm{d}x/x$，其中 $\varphi' \in H_p^m(\mathcal{F})$ 且

$$\psi = \sum_{I \in (T_{\frac{1}{x}})_m} \sum_{J \in T_{\frac{1}{x}},\, l(J) \notin \tilde{I}} t^J u_{I,J}^p \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}, \quad u_{I,J} \in x\mathcal{F}[x]$$

其中 $u_{I,J}$ 和 φ' 对每个 φ都是唯一的。

证明。(1) 这与 [11, 定理 4.2]类似。这里需要使用定理 2.7，而不是 [11, 定理 2.5]。为证明唯一性，我们使用定义 10.12 中的剩余映射 ζ 和 χ_q。

(2) 由于 $\overline{F}_{1/x} \simeq \mathcal{F} \subset F_{1/x}$ 且 $\mathrm{d}(1/x)/(1/x) = -\mathrm{d}x/x$，结论 (2) 是定理 2.7 的直接推论。□

利用上述分解，我们引入米尔诺分裂 $\tau_q : W_1(H_p^{m+1}(F_q)) \to L_d/L_{d-1}$。对于任意次数为 d 且 $g \in \mathcal{F}[x]$的首一不可约多项式 q，我们用 g 表示次数为 $\leq d-1$ 且满足 $g \equiv g \pmod{q}$ 的唯一多项式。

定理 4.3。设 $q \in \mathcal{F}[x]$ 是一个次数为 d的首一不可约多项式。根据定理 *4.2*，每个元素 $\varphi \in W_1(H_p^{m+1}(F_q))$ 都可以唯一分解为

$$\varphi = \psi + \varphi' \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q},$$

其中

$$\psi = \sum_{I \in (T_q)_m} \sum_{J \in T_q,\, l(J) \notin \tilde{I}} t^J r_{I,J}^p \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}$$

使得 $r_{I,\,J} \in q^{-1}\mathcal{F}[x]_{<d}[q^{-1}]$ 且 $\varphi' \in H_p^m(\mathcal{F}(q))$。此外，$\varphi'$ 在 $\mathcal{F}(q)$ 上是唯一的。令

$$\varphi' = \sum_i \overline{r}_i \frac{\mathrm{d}\overline{s}_{i_1}}{\overline{s}_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}\overline{s}_{i_{m-1}}}{\overline{s}_{i_{m-1}}}$$

使得 $r_i,\ s_{i_j} \in \mathcal{F}[x]_{\leq d-1}$。于是我们有一个同态 $\tau_q : W_1(H_p^{m+1}(F_q)) \to L_d/L_{d-1}$，其定义为

$$\tau_q(\varphi) = \psi + \sum_i r_i \frac{\mathrm{d}s_{i_1}}{s_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}s_{i_{m-1}}}{s_{i_{m-1}}} \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q} + L_{d-1}$$

证明。只需证明映射 η_q：$H_p^m(\mathcal{F}(q)) \to L_d/L_{d-1}$，其定义为

$$\eta_q\left(\sum_i \overline{r}_i \frac{\mathrm{d}\overline{s}_{i_1}}{\overline{s}_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}\overline{s}_{i_{m-1}}}{\overline{s}_{i_{m-1}}}\right) = \sum_i r_i \frac{\mathrm{d}s_{i_1}}{s_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}s_{i_{m-1}}}{s_{i_{m-1}}} \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q} + L_{d-1}$$

定义良好，其中 s_i、$r_{i_j} \in \mathcal{F}[x]_{<d}$。由 [11, 引理 4.4], 可得

$$H_p^m(\mathcal{F}(q)) \simeq \mathcal{F}(q) \otimes \underbrace{\mathcal{F}(q)^* \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}(q)^*}_{m-1 \text{ times}} / J$$

其中 J 是由以下元素生成的子群:

(1) $(\overline{r^p - r}) \otimes \overline{s_1} \otimes \ldots \otimes \overline{s_{m-1}}$，其中 r、$s_i \neq 0 \in \mathcal{F}[x]_{<d}$,

(2) $\overline{r} \otimes \overline{r} \otimes \overline{s}_2 \otimes \ldots \otimes \overline{s}_{m-1}$,

(3) $\overline{r} \otimes \overline{s}_1 \otimes \ldots \otimes \overline{s_{m-1}}$，其中 $s_i \equiv s_j$ 对某个 $i \neq j$ 成立。

Let $\zeta_q : \mathcal{F}(q) \times \underbrace{\mathcal{F}(q)^* \times \ldots \times \mathcal{F}(q)^*}_{m-1} \to L_d/L_{d-1}$ be defined by

$$\zeta_q(\overline{r} \times \overline{s}_1 \times \ldots \times \overline{s}_{m-1}) = r\frac{\mathrm{d}s_1}{s_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}s_{m-1}}{s_{m-1}} \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q} + L_{d-1}.$$

现在，利用与 [11, 引理 4.5], 中相同的论证，我们证明 ζ_q 关于每个象限都是线性的。因此，我们导出同态

$$\zeta_q' : \mathcal{F}(q) \otimes \underbrace{\mathcal{F}(q)^* \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}(q)^*}_{m-1} \to L_d/L_{d-1}$$

定义在生成元上

$$\zeta_q'(\overline{r} \otimes \overline{s}_1 \otimes \ldots \otimes \overline{s}_{m-1}) = r\frac{\mathrm{d}s_1}{s_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}s_{m-1}}{s_{m-1}} \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q} + L_{d-1}.$$

显然，$\zeta_q'(x) = 0$，其中 x 是 J 中类型（2）或（3）的生成元。对于类型（1）的生成元，令 $r^p = f$，其中 r、$f \in \mathcal{F}[x]_{<d}$。因此，对于某个 $h \in \mathcal{F}[x]$，有 $r^p = f + qh$。所以，我们得到:

$$\begin{aligned}
\zeta_q'((\overline{r^p} - \overline{r}) \otimes \overline{s}_1 \otimes \ldots \otimes \overline{s}_{m-1}) &= (f - r)\frac{\mathrm{d}s_1}{s_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}s_{m-1}}{s_{m-1}} \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q} + L_{d-1} \\
&= (r^p - r - qh)\frac{\mathrm{d}s_1}{s_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}s_{m-1}}{s_{m-1}} \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q} + L_{d-1} \\
&= (-qh)\frac{\mathrm{d}s_1}{s_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}s_{m-1}}{s_{m-1}} \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q} + L_{d-1}
\end{aligned}$$

取 $A=-\frac{\mathrm{d}s_1}{s_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\frac{s_{m-1}}{s_{m-1}}$和 $q=\sum_{i=0}^{d}q_ix^{d-i}$，得到

$$\begin{aligned}\zeta_q'((\overline{r}^p-\overline{r})\otimes\overline{s}_1\otimes\ldots\otimes\overline{s}_{m-1})&=\sum_{i=0}^{d}hq_ix^{d-i}A\wedge\frac{\mathrm{d}(q_ix^{d-i})}{q_ix^{d-i}}+L_{d-1}\quad(\text{by (7)})\\&=\sum_{i=0}^{d}\left(hq_ix^{d-i}A\wedge\frac{\mathrm{d}q_i}{q_i}\right)+\sum_{i=0}^{d-1}\left(h(d-i)q_ix^{d-i}A\wedge\frac{\mathrm{d}x}{x}\right)+L_{d-1}\\&=0\end{aligned}$$

因此 $\zeta_q'(J)=0$。所以，ζ_q'可以在 $\mathcal{F}(q)\otimes\mathcal{F}(q)^*\otimes\ldots\otimes\mathcal{F}(q)^*/J$ 上延拓。由于 $H_p^m(\mathcal{F}(q))\simeq_{m-1\text{ 乘以}}\mathcal{F}(q)\otimes\mathcal{F}(q)^*\otimes\ldots\otimes\mathcal{F}(q)^*/J$，映射 η_q定义良好。因此，τ_q定义良好，且它是一个$_{m-1\text{ 乘法群}}$同态。由此，定理得证。

□

引理 4.4。设 $q=\sum_{i=0}^{d}q_ix^{d-i}$ 是一个在 $\mathcal{F}$上次数为 d 的首一不可约多项式。

(1) 若 q 可分，则 $S_q+S_q\wedge\mathrm{d}\frac{q}{q}+L_{d-1}\subset\mathrm{Im}(\tau_q)$。*(2)* 若 q 不可分，则 $\tilde{S}_q+\tilde{S}_q\wedge\mathrm{d}\frac{q}{q}+L_{d-1}\subset\mathrm{Im}(\tau_q)$。

证明。这与 [11, 引理 4.7]类似。我们必须用注 2.4 代替 [11, 注 2.4]。 □

现在我们证明，米尔诺分裂$\bigoplus\tau_q$与第二留数$_{\text{次数 }q=d}$映射$\bigoplus\partial_q$互为逆映射。$_{\text{次数 }q=d}$

定理 4.5。对于任意正整数 d，米尔诺分裂$\bigoplus_{\text{次数}\,q=d}\tau_q:\bigoplus_{\text{次数}\,q=d}W_1(H_p^{m+1}(F_q))\to$

L_d/L_{d-1} 是一个同构。

证明。重复 [11, 引理 4.8], 的证明，我们可以证明：若 q, q' 是 $\mathcal{F}$上两个不同的次数为 d的首一不可约多项式，则对所有 $\varphi\in W_1(H_p^{m+1}(F_q))$，$\partial_{q'}\circ\tau_q(\varphi)=0$。显然，对所有 $\varphi\in W_1(H_p^{m+1}(F_q))$，$\partial_q\circ\tau_q(\varphi)=\varphi$。因此，我们有

$$\bigoplus_{\deg q=d}\partial_q\circ\bigoplus_{\deg q=d}\tau_q=\mathrm{Id}$$

证明$\bigoplus\tau_q$的单射性。然后重复 [11, 定理 4.9]$^{\deg q=d}$的证明，并利用$_{\deg\,q=d}$引理 3.4、4.4 和命题 3.9，证明该映射的满射性。□

现在我们得到以下短正合列。

定理 4.6. 短序列 $0\to L_0\xrightarrow{i_1}H_p^{m+1}(\mathcal{F}(x))\xrightarrow{\oplus\partial_q}\bigoplus W_1(H_p^{m+1}(F_q))\to 0$是$_q$正合的，其中 i_1 是包含映射，q 遍历 $\mathcal{F}$ 上所有首一不可约多项式。证明。这与 [11,定理 4.15]类似。

□

根据定理 4.2 对群 of $W_1(H_p^{m+1}(F_{1/x}))$ 的分解，我们得到以下结果。

定理 4.7. 以下序列

$$0 \to H_p^{m+1}(\mathcal{F}) \xrightarrow{i_2} L_0 \xrightarrow{\partial_{1/x}} W_1(H_p^{m+1}(F_{\frac{1}{x}})) \xrightarrow{\eta} H_p^m(\mathcal{F}) \to 0$$

是正合的，其中 i_2 由包含映射 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}(x)$，$\eta(\varphi) = \varphi'$ 诱导，而 φ' 来自定理 4.2(2) 中所述的 φ 的分解。

证明。回忆 $F = \mathcal{F}(x)$。令 $v_x\colon F \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ 为 x-进赋值，并令 $H_p^{m+1}(F)'$ 为由元素 $a\frac{\mathrm{d}b_1}{b_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\frac{b_m}{b_m}$ 生成的 $H_p^{m+1}(F)$ 的子群，其中 $b_i \in F^*$ 且 $a \in F$ 满足 $v_x(a) \geq 0$。令 $\beta_x\colon H_p^{m+1}(F)' \to H_p^{m+1}(\mathcal{F})$ 为定义 10.12 中定义的剩余映射。对于任意 $a \in \mathcal{F}$ 和 $b_i \in \mathcal{F}^*$，有

$$\begin{aligned}\beta_x \circ i_2\left(a\frac{\mathrm{d}b_1}{b_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}b_m}{b_m}\right) &= \beta_x\left(a\frac{\mathrm{d}b_1}{b_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}b_m}{b_m}\right)\\ &= a\frac{\mathrm{d}b_1}{b_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}b_m}{b_m} \in H_p^{m+1}(\mathcal{F}).\end{aligned}$$

$$\beta_x \circ i_2 = \mathrm{Id}.$$

因此，同态 i_2 是单射。根据定理 4.2 (2)，映射 η 是满射。重复 [11, 定理 4.16], 的证明，我们可以证明任意元素 $\varphi \in L_0$ 都可以分解为 $\varphi = \varphi_1 + \psi$，其中 $\varphi_1 \in H_p^{m+1}(\mathcal{F})$，并且

$$\psi = \sum_{I \in (T_{\frac{1}{x}})_m} \sum_{J \in T_{\frac{1}{x}},\, l(J) \notin \tilde{I}} t^J r_{I,J}^p \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}, \quad r_{I,J} \in x\mathcal{F}[x].$$

根据定理 4.2 (2)，形式 ψ 是唯一的。因此，$\mathrm{Im}(i_2) = \ker(\partial_{1/x})$，且 $\mathrm{Im}(\partial_{1/x}) = \ker(\eta)$。由此定理得证。□

现在我们在 Kato-Milne 上同调的框架下证明特征 p 中的 Milnor 正合列。

定理 4.8. 设 $\mathcal{F}$ 是特征 p 的域，且 $F = \mathcal{F}(x)$ 是变量 x 上的有理函数域，其中 $\mathcal{F}$ 是基域。那么，下列短正合列是正合的：

$$0 \to H_p^{m+1}(\mathcal{F}) \xrightarrow{i} H_p^{m+1}(F) \xrightarrow{\oplus_q \partial_q \oplus \partial'_{1/x}} \oplus_q W_1(H_p^{m+1}(F_q)) \oplus \left(W_1(H_p^{m+1}(F_{\frac{1}{x}}))/H_p^m(\mathcal{F}) \wedge \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) \to 0,$$

其中，i 由包含映射 $\mathcal{F} \to F$ 诱导，q 遍历 $\mathcal{F}[x]$ 的所有首一不可约多项式。此外，$\partial'_{1/x}$ 是 $\partial_{1/x}$ 与投影映射的复合。

证明. 由于 $i = i_1 \circ i_2$，其中 i_1、i_2 分别来自定理 4.6 和定理 4.7，且 i_1、i_2 均为单射，因此 i 是单射。此外，我们有

$$\begin{aligned}\ker(\oplus_q \partial_q \oplus \partial'_{1/x}) = \ker(\oplus_q \partial_q) \cap \ker \partial'_{1/x} &= L_0 \cap \ker \partial'_{1/x} \quad (\text{by Theorem 4.6})\\ &= \mathrm{Im}(i_2) \quad (\text{by Theorem 4.7})\\ &= \mathrm{Im}(i).\end{aligned}$$

现在我们证明 $\oplus_q \partial_q \oplus \partial'_{1/x}$ 是满射。令 (u, v) 为 $\oplus_q W_1(H_p^{m+1}(F_q)) \oplus \left(W_1(H_p^{m+1}(F_{\frac{1}{x}}))/H_p^m(\mathcal{F}) \wedge \frac{\mathrm{d}x}{x}\right)$ 中的任意元素，其中 $u \in \oplus_q W_1(H_p^{m+1}(F_q))$ 且 $v \in W_1(H_p^{m+1}(F_{\frac{1}{x}}))$。由定理 4.6，存在元素 $\varphi \in H_p^{m+1}(F)$，使得

$$\bigoplus_{q \in A} \partial_q(\varphi) = u$$

其中 A 是 $\mathcal{F}[x]$ 的首一不可约多项式集合。根据定理 4.2 (2)，v 可写为 $v = v' - v''$，使得 $v'' \in H_p^m(\mathcal{F}) \wedge \mathrm{d}x/x$，并且

$$v' = \sum_{I \in (T_{\frac{1}{x}})_m} \sum_{J \in T_{\frac{1}{x}}, l(J) \notin \tilde{I}} t^J r_{I,J}^p \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}, \quad r_{I,J} \in x\mathcal{F}[x].$$

令 $\partial_{1/x}(\varphi) = v_1 - v_2$，其中 $v_2 \in H_p^m(\mathcal{F}) \wedge \mathrm{d}\frac{x}{x}$ 且

$$v_1 = \sum_{I \in (T_{\frac{1}{x}})_m} \sum_{J \in T_{\frac{1}{x}}, l(J) \notin \tilde{I}} t^J u_{I,J}^p \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}, \quad u_{I,J} \in x\mathcal{F}[x].$$

由定理 4.7，存在一个元素 $\varphi' \in L_0$，使得 $\partial_{1/x}(\varphi') = v' - v_1$。现在我们有

$$\partial'_{1/x}(\varphi' + \varphi) = \overline{\partial_{1/x}(\varphi' + \varphi)} = \overline{v' - v_2} = \overline{v'} = \overline{v}.$$

由于 $\varphi' \in L_0$，由定理 4.6 可得 $\bigoplus_{q \in A} \partial_q(\varphi') = 0$。
因此，我们有 $\bigoplus_{q \in A} \partial_q \oplus \partial'_{1/x}(\varphi + \varphi') = (u, v)$，如所需。 □

5. A decomposition of $W_1(H_p^{m+1}(F_q))$

令 $\overline{T}_q$ 和 T_q 如定义 4.1 中所定义，其中 $q = 1/x$ 或 $q \in \mathcal{F}[x]$ 是首一不可约多项式。对于任意元素 $I \in T_q$，记号 I_∞ 表示 I 的第 q 个分量。现在 $T_q \subset T_q$，且对于 $m \geq 1$，我们有

$$(\overline{T}_q)_m := \{I \in (T_q)_m \mid I_\infty = 0\} \quad (T_q)_m \setminus (\overline{T}_q)_m := \{I \in (T_q)_m \mid I_\infty = 1\}.$$

考虑以下定义 $(\overline{T}_q)_m$ 中引入的 pag第 3 节，而不调用 g 一致化元。

对于任意首一不可约多项式 q（在 $\mathcal{F}$ 上），令 L_q/F_q 为有限可分非分歧扩张。根据 [17, 第 5], 章，q-进赋值可以唯一地扩张到 L_q，并且 L_q关于此赋值是完备域。令 L_q 为 L_q的剩余域。那么，L_q/F_q是可分扩张。根据 [2, 引理 3.1]，$\{t^I \mid I \in T_q\}$ 是 L_q 的一个 L_q^p-基，而$\{t^I \mid I \in T_q\}$是 L_q的一个 L_q^p -基。从现在起，g 表示次数为 $< d$ 的唯一多项式，使得 $g \equiv g$（模 q），其中 $g \in \mathcal{F}[x]$ 且 $\deg q = d$。利用这些记号，我们证明以下命题：

命题 5.1。设对于次数为 d 的首一不可约多项式 $q \in \mathcal{F}[x]$，L_q 和 L_q 如上所述。设 $\varphi \in H_p^{m+1}(L_q)$ 满足

$$\varphi = \sum_{K \in (T_q)_m \setminus (\overline{T}_q)_m} a_K \frac{\mathrm{d}t_K}{t_K} + \sum_{L \in (\overline{T}_q)_m} a_L \frac{\mathrm{d}t_L}{t_L},$$

其中

- *For all* $K \in (T_q)_m \setminus (\overline{T}_q)_m$, *we have* $a_K = \sum_{J \in \overline{T}_q, l(J) \notin \tilde{K}} \sum_{r \geq 1} \overline{\frac{t^J v_{r,K,J}^p}{q^{pr}}} \in F_q$ *for* $v_{r,K,J} \in \mathcal{F}[x]_{<d}$,
- *For* $L \in (\overline{T}_q)_m$, *we have*

$$a_L = \sum_{J \in \overline{T}_q} \sum_{\substack{r \geq 1 \\ p \nmid r}} \overline{\frac{t^J u_{r,L,J}^p}{q^r}} + \sum_{J \in \overline{T}_q, l(J) \notin \tilde{L}} \sum_{r \geq 1} \overline{\frac{t^J v_{r,L,J}^p}{q^{pr}}} \in F_q,$$

对于 $u_{r,\,L,\,J}$、$v_{r,\,L,\,J} \in \mathcal{F}[x]_{<d}$,

使得对于几乎所有的 r、 I、 J，均有 $u_{r,\ I,\ J} = v_{r,\ I,\ J} = 0$ 。若 $\varphi = 0 \in H_p^{m+1}$（$L_q$），则对于所有的 K、 $L \in$（T_q）$_m$，均有 $a_K = a_L = 0 \in F_q$。

证明。 与引理 2.6 的证明相同。 □

现在我们证明 $W_1(H_p^{m+1}(F_q))$ 的所需分解，以便在下一节定义转移映射 s_q^*。

定理 5.2。 设 $q \in \mathcal{F}[x]$ 是一个次数为 $d \geq 1$ 的首一不可约多项式。那么，任意元素$\varphi \in W_1(H_p^{m+1}(F_q))$ 都可以分解为：

$$\varphi = \sum_{K \in (T_q)_m \setminus (\overline{T}_q)_m} a_K \frac{\mathrm{d}t_K}{t_K} + \sum_{L \in (\overline{T}_q)_m} a_L \frac{\mathrm{d}t_L}{t_L} + \varphi' \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q},$$

其中

(1) $\varphi' \in H_p^m(\mathcal{F}(q))$ 是唯一的。

(2) *For all* $K \in (T_q)_m \setminus (\overline{T}_q)_m$, *we have* $a_K = \sum_{J \in \overline{T}_q,\, l(J) \notin \tilde{K}} \sum_{r \geq 1} \frac{\overline{t^J v_{r,K,J}^p}}{q^{pr}}$ *with* $v_{r,K,J} \in \mathcal{F}[x]_{<d}$.

(3) 对于所有 $L \in (\overline{T}_q)_m$，我们有

$$a_L = \sum_{J \in \overline{T}_q} \sum_{\substack{r \geq 1 \\ p \nmid r}} \frac{\overline{t^J u_{r,L,J}^p}}{q^r} + \sum_{J \in \overline{T}_q,\, l(J) \notin \tilde{L}} \sum_{r \geq 1} \frac{\overline{t^J v_{r,L,J}^p}}{q^{pr}}$$

和$u_{r,L,J}$， $v_{r,L,J} \in \mathcal{F}[x]_{<d}$。此外， a_K和 a_L是唯一的。因此，$u_{r,I,J}$， $v_{r,I,J}$ 对于所有的 r、 I 和 J，它们都是唯一的。

证明。 **分解的存在性**。 令 $\alpha : F_q \to F_q$ 为一个 Teichmüller 提升映射，使得

(1) for q separable: $\alpha(\bar{t}_i) = t_i$ for all $i \in \mathcal{I}$,

(2) for q inseparable: $\alpha(\bar{t}_i) = t_i$ for all $i \in \mathcal{I} \setminus \{j_n\}$ and $\alpha(\overline{x}) = x$.

由于 $\alpha(\overline{F}_q) \subset F_q$ 是 F_q 的剩余域，由定理 2.7 可知，任意元素 $\varphi \in W_1(H_p^{m+1}(F_q))$ 都可以唯一地表示为 $\varphi = \psi + \varphi_2 \wedge \mathrm{d}_q^q$，其中 $\varphi_2 \in H_p^m(\alpha(F_q))$，并且 —

$$\psi = \sum_{I \in (T_q)_m} \sum_{J \in T_q,\, l(J) \notin \tilde{I}} t^J r_{I,J}^p \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \quad \text{with } r_{I,J} \in q^{-1}\alpha(\overline{F}_q)[q^{-1}].$$

由于 $t^J r_{I,J}^p = l \sum_{i=1}^{\alpha}(g_i)\, q^i$，其中 $g_i \in \mathcal{F}[x]$ 和 $\alpha(g_i) = \sum_{j \geq 0} g_{i,j} q^j$ 对于某个 $g_{i,j} \in \mathcal{F}[x]_{<d}$，我们有

$$\psi = \sum_{I \in (T_q)_m} \sum_{l \leq i} \frac{g_{l,I}}{q^l} \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}, \quad \text{for some } g_{l,I} \in \mathcal{F}[x]_{<d} \quad \text{and } i \in \mathbb{Z}.$$

我们分两步证明该分解。

步骤 1： 现在证明，对于任意 $f \in \mathcal{F}[x]$, $I \in (T_q)_m$ 和 $l \in \mathbb{Z}$，在 $H_p^{m+1}(F)$ 中有：

$$\frac{f}{q^l} \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} = \sum_{K \in (T_q)_m \setminus (\overline{T}_q)_m} a_K \frac{\mathrm{d}t_K}{t_K} + \sum_{L \in (\overline{T}_q)_m} a_L \frac{\mathrm{d}t_L}{t_L} + \sum_{M \in (T_q)_m} f_M \frac{\mathrm{d}t_M}{t_M} \tag{16}$$

其中 $f_M \in \mathcal{F}[x]$ 和 a_K, a_L 如定理 5.2 中所定义。

若 $l \leq 0$，则显然成立。假设对于某个整数 $l \geq 1$，所有 $i < l$ 都满足 (16)。现在我们证明 (16) 对 l成立。对于任意 $f \in \mathcal{F}[x]$，存在 $f_J \in \mathcal{F}[x]_{<d}$ 和 $k \in \mathcal{F}[x]$，使得:

$$f = \sum_{J \in \overline{T}_q} t^J f_J^p + qk. \tag{17}$$

根据 $p \mid l$ 或 $p \nmid l$，分为两种情况。

(i) 令 $l = pr - j$，其中 $j \in \{1, \ldots, p-1\}$ 和 $r \geq 1$。现在利用 (17)，我们得到

$$\frac{f}{q^l}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} = \sum_{J \in \overline{T}_q} \frac{t^J f_J^p}{q^l}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} + \frac{k}{q^{l-1}}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} = \sum_{\substack{J' \in T_q \\ t^{J'} = t^J q^j}} \frac{t^{J'} f_J^p}{q^{pr}}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} + \frac{k}{q^{l-1}}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}.$$

根据注 2.4，我们用 I' 替换 I，使得 $l(J') \notin I'$。由于 $J'_\infty = j \neq 0$，元素 $I' \in (T_q)_m$。因此我们有:

$$\begin{aligned}
\frac{f}{q^l}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} &= \sum_{I' \in (\overline{T}_q)_m} \sum_{\substack{J' \in T_q \\ t^{J'} = t^J q^j}} \frac{t^{J'} f_{I',J}^p}{q^{pr}}\frac{\mathrm{d}t_{I'}}{t_{I'}} + \frac{k}{q^{l-1}}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \quad (\text{for some } f_{I',J} \in \mathcal{F}[x]_{<d}) \\
&= \sum_{I' \in (\overline{T}_q)_m} \sum_{J \in \overline{T}_q} \frac{t^J f_{I',J}^p}{q^l}\frac{\mathrm{d}t_{I'}}{t_{I'}} + \frac{k}{q^{l-1}}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \\
&= \sum_{I' \in (\overline{T}_q)_m} \sum_{J \in \overline{T}_q} \frac{\overline{t^J f_{I',J}^p}}{q^l}\frac{\mathrm{d}t_{I'}}{t_{I'}} + \sum_{I' \in (\overline{T}_q)_m} \sum_{J \in \overline{T}_q} \frac{h_{I',J}}{q^{l-1}}\frac{\mathrm{d}t_{I'}}{t_{I'}} + \frac{k}{q^{l-1}}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}
\end{aligned}$$

其中 $t^J f_{I',\,J}^p = \overline{t^J f_{I',\,J}^p} + q h_{I',\,J}$和 $h_{I',\,J} \in \mathcal{F}[x]$。根据归纳假设，右侧的和具有我们所需的形式。

(ii) 令 $l = pr$，其中 r 为某个正整数。再次由 (17) 可得

$$\begin{aligned}
\frac{f}{q^l}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} &= \sum_{J \neq 0 \in \overline{T}_q} \frac{t^J f_J^p}{q^{pr}}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} + \frac{f_0}{q^r}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} + \frac{k}{q^{l-1}}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \\
&= \sum_{I' \in (T_q)_m} \sum_{J \in \overline{T}_q,\, l(J) \notin \tilde{I}} \frac{t^J f_{I',J}^p}{q^{pr}}\frac{\mathrm{d}t_{I'}}{t_{I'}} + \left(\frac{f_0}{q^r} + \frac{k}{q^{l-1}}\right)\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \quad (\text{by Remark (2.4)}) \\
&= \sum_{I' \in (T_q)_m} \sum_{J \in \overline{T}_q,\, l(J) \notin \tilde{I}} \frac{\overline{t^J f_{I',J}^p}}{q^{pr}}\frac{\mathrm{d}t_{I'}}{t_{I'}} + \sum_{I' \in (T_q)_m} \sum_{J \in \overline{T}_q,\, l(J) \notin \tilde{I}} \frac{h_{I',J}}{q^{l-1}}\frac{\mathrm{d}t_{I'}}{t_{I'}} + B
\end{aligned}$$

其中 $f_{I',\,J} \in \mathcal{F}[x]_{<d}$, $h_{I',\,J} \in \mathcal{F}[x]$ 以及 $B = \overline{\frac{f_0}{q^r}} + \overline{\frac{k}{q^{l-1}}}$。此外，$t^J f_{I',\,J}^p = t^J f_{I',\,J}^p + q h_{I',\,J}$。右侧的第一项和符合我们所需的形式，另外两项和根据归纳假设也符合要求的形式。因此，任意多项式 f, $I \in (T_q)_m$ 以及 $l \in \mathbb{Z}$ 都满足 (16)。根据注 2.2,

我们有

$$\varphi = \sum_{K\in(T_q)_m\setminus(\overline{T}_q)_m} a_K \frac{\mathrm{d}t_K}{t_K} + \sum_{L\in(\overline{T}_q)_m} a_L \frac{\mathrm{d}t_L}{t_L} + \sum_{M\in(T_q)_m} f_M \frac{\mathrm{d}t_M}{t_M} + \varphi_2 \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q} \in W_1(H_p^{m+1}(F_q)),$$

其中 $f_M \in \mathcal{F}[x]_{<d}$ 和 $\varphi_2 \in H_p^m(\alpha(F_q))$。然后，重复定理 2.3 第 2], 步中 [12, 的论证，元素 $\varphi \in W_1(H_p^{m+1}(F_q))$ 可表示为

$$\varphi = \sum_{K\in(T_q)_m\setminus(\overline{T}_q)_m} a_K \frac{\mathrm{d}t_K}{t_K} + \sum_{L\in(\overline{T}_q)_m} a_L \frac{\mathrm{d}t_L}{t_L} + \varphi' \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q}$$

其中 $\varphi' \in H_p^m(\mathcal{F}(q))$。

分解的唯一性：
这与定理 2.3] 中关于唯一性的部分类似。我们必须使用命题 5.1，而不是命题 2.2]。□

6. Introducing the transfer map s_q^*

若 $q \in \mathcal{F}[x]$ 是首一不可约不可分多项式，且 $I \in T_q$，则记号 I_x 表示 I 的第 x 个分量。现在，我们根据首一不可约多项式 $q \in \mathcal{F}[x]$ 的可分性，定义 $H_p^{m+1}(\mathcal{F}(x))$ 的一些子群。

定义 6.1 (**可分情形**)。令 q 为首一不可约可分多项式，且 r 为正整数。

(i) 对于 $p \nmid r$，令 $S'_{q,\,r}$ 为由形式 $t^J s_r^p,\quad {}_{I\,J},\ \mathrm{d}\dfrac{t_I}{t_I}$ 生成的 $S_q + S_q \wedge \mathrm{d}\dfrac{q}{q^r}$ 的子群，其中 $I \in (T_q)_m$、$J \in T_q$ 和 $s_{r,\,I,\,J} \in \mathcal{F}[x]_{<d}$。

(ii) 对于 $p \mid r$，令 $S'_{q,r}$ 为由形式 $t^J s_r^p,\ {}_{I\,J},\ d\dfrac{t_I}{t_I}, t^{J'} s_r^p,\ {}_{I'\,J'},\ dt_{I'} \wedge d\dfrac{q}{q^r}$ 生成的 $S_q + S_q \wedge d\dfrac{q}{q}$ 的子群，其中 $I \in (T_q)_m$、$I' \in (T_q)_{m-1}$ 和 $J, J' \in T_q$ 满足 $l(J) \notin \tilde{I}$, $l(J') \notin \tilde{I}'$ 以及 $s_{r,I,J}$, $s_{r,I',J'} \in \mathcal{F}[x]_{<d}$。

定义 6.2 (**不可分情形**)。设 q 为首一不可约不可分多项式，且r 为正整数。

(i) 若 $p \nmid r$，则定义子群：

- $S'_{q,\,r} \subset \tilde{S}_q + \tilde{S}_q \wedge \mathrm{d}\dfrac{q}{q}$ 由形式 $t^J s_r^p,\quad {}_{I\,J},\ \mathrm{d}\dfrac{t_I}{t_I}$ 生成，其中 $I \in (T_q)_m$，$J \in T_q$ 以及 $s_{r,\,I,\,J} \in \mathcal{F}[x]_{<d}$。
- $S^0_{q,\,r} \subset S'_{q,\,r}$ 由形式 $t^J s_r^p,\quad {}_{I\,J},\ \mathrm{d}\dfrac{t_I}{t_I}$ 生成，其中 $J \in T_q$，$s_{x,\,I,\,J} \in \mathcal{F}[x]_{<d}$ 以及 $I \in (T_q)_m$ 满足 $I_x = 0$。

(ii) 若 $p \mid r$，则我们定义子群：

- $S'_{q,r} \subset \tilde{S}_q + \tilde{S}_q \wedge \underline{d}_q^q$ 由形式 $t^J s_r^p$，$_{I\,J}$，$d_{t_I}^{t_I}$，$\overline{t^{J'} s_r^p}$，$_{I'\,J'}$，$\overline{d\, t_{I'}} \wedge \underline{d}_q^q$ 生成，其中 $I \in \tilde{}\ \_\ \tilde{}(T_q)_m$，$I' \in (T_q)_{m-1}$ 且 $J, J' \in T_q$ 满足 $l(J) \notin I$，$l(J') \notin I'$ 以及 $s_{r,I,J}$，$s_{r,I',J'} \in \mathcal{F}[x]_{<d}$。
- $S^0_{q,r} \subset S'_{q,r}$ 由形式 $t^J s_r^p$，$_{I\,J}$，$d_{t_I}^{t_I}$ 和 $\overline{t^{J'} s_r^p}$，$_{I'\,J'}$，$d\, t_{I'} \wedge \underline{d}_q^q$ 生成，其中 $J, J' \in T_q$ 且 $I \in \tilde{}\ \_\ \tilde{}(T_q)_m$，$I' \in (T_q)_{m-1}$，其中 $I_x = I'_x = 0$ 满足 $l(J) \notin I$，$l(J') \notin I'$。此外，$s_{r,I,J}$，$s_{r,I',J'} \in \mathcal{F}[x]_{<d}$。

定义 6.3。对于任意首一不可约多项式 q，我们定义子群 $U_q := \sum_{r\geq 1} S'_{q,\,r} \subset H_p^{m+1}(F)$。若 q 不可分，则定义 $U_q^0 := \sum_{r\geq 1} S^0_{q,\,r}$。

U_q和 U_q^0分别是 U_q和 U_q^0在 $W_1(H_p^{m+1}(F_q))$中的像。

现在我们建立 U_q、$S_q \wedge \mathrm{d}_x^x$ 之间的一些关系。

Le引理 6.4. 设 q 是 $\mathcal{F}$上的首一不可约多项式。那么，我们有如下结论：

(i) 如果 q 可分，那么 $S_q + S_q \wedge \mathrm{d}q^q \subseteq U_q + L_0 + L_0 \wedge \mathrm{d}_q^q$。

(ii) 如果 q 可分，那么 $S_q + S_q \wedge \mathrm{d}x^x \subseteq U_q + L_0 + L_0 \wedge \mathrm{d}x^x \pm L_0 \wedge \mathrm{d}_q^q$。

(iii) 如果 q 不可分，那么 $\tilde{S}_q + \tilde{S}_q \wedge \mathrm{d}q^q \subseteq U_q + L_0 + L_0 \wedge \mathrm{d}x^x \pm L_0 \wedge \mathrm{d}q^q \pm L_0 \wedge \mathrm{d}x^x \wedge \mathrm{d}_q^q$。

(iv) 如果 q 不可分，则 $S_q + S_q \wedge \mathrm{d}x^x \subseteq U_q + L_0 + L_0 \wedge \mathrm{d}x^x \pm L_0 \wedge \mathrm{d}q^q \pm L_0 \wedge \mathrm{d}x^x \wedge \mathrm{d}_q^q$。

(v) 群 $U_q = \oplus_{r\geq 1} S'_{q,\,r}$ 和 $U_q^0 = \oplus_{r\geq 1} S^0_{q,\,r}$ 是直和。

(vi) 将 $H_p^m(\mathcal{F}(q)) \wedge \mathrm{d}_q^q$ 视为 $H_p^{m+1}(\mathcal{F}(x))$的子群，我们得到

$$W_1(H_p^{m+1}(F_q))/\overline{U}_q \simeq H_p^m(\mathcal{F}(q)) \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q}.$$

证明。这与 [12, 引理 3.4]类似。我们需要使用命题 3.9、公式 (16) 和定理 5.2。□

现在我们定义一些用于定义转移映射 s_q^*的映射。

(1) 对于任意首一不可约多项式 q，令 $\theta_q : W_1(H_p^{m+1}(F_q)) \to H_p^m(\mathcal{F}(q))$ 为如下定义的映射：对于任意 $\varphi \in W_1(H_p^{m+1}(F_q))$，$\theta_q(\varphi)$ 是 $H_p^m(\mathcal{F}(q))$ 中满足 $\varphi \equiv \theta_q(\varphi) \wedge \mathrm{d}_q^q$ (模 U_q) 的唯一元素。

此外，我们将 $\theta_{1/x} := \eta$ 定义为定理 4.7 中所定义的内容。

(2) 现在我们定义映射 $t_q^* : H_p^m(\mathcal{F}(q)) \to H_p^m(\mathcal{F})$，它取决于 q 是否可分。

- 若 q 是可分的，则取 $t_q^* := \mathrm{Tr}_*$，它由 [1, 推论 2.9] 定义，并由通常的迹映射诱导。

• 设 q 是不可分的。则 $q = f(x^{p^r})$，其中 $r \geq 1$ 且 $f(y) \in \mathcal{F}[y]$ 是首一不可约可分多项式。设 $K := \mathcal{F}(f)$ 且 $g = x^{p^r} - y \in K[x]$。现在，由 $\zeta(c) = c$ 定义的映射 $\zeta\colon \mathcal{F}(q) \to K(g)$ 对所有 $c \in \mathcal{F}$ 以及 $\zeta(x) = x$ 成立，是一个域同构。于是，我们取

$$t_q^* := t_f^* \circ s_* \circ \zeta^*$$

其中 $s_*\colon H_p^m(K(g)) \to H_p^m(K)$ 是命题 3.4]，中定义的转移映射，而 $\zeta^*\colon H_p^m(\mathcal{F}(q)) \to H_p^m(K(g))$ 是由 ζ 诱导的。

• 若 $q = 1/x$，则我们将 $t_q^*\colon H_p^m(\mathcal{F}) \to H_p^m(\mathcal{F})$ 视为恒等映射。

最后，我们可以定义转移映射 s_q^*。

定义 6.5 (**转移映射**)。*(i)* 若 q 可分或 $1/x$，则转移映射 $s_q^*\colon W_1(H_p^{m+1}(F_q)) \to H_p^m(\mathcal{F})$ 定义如下：$s_q^*(\varphi) = t_q^*(\theta_q(\varphi))$ 对所有 $\varphi \in W_1(H_p^{m+1}(F_q))$ 均成立。

(ii) 若 q 不可分，则根据定理 *5.2*，我们将 $\varphi - \theta_q(\varphi) \wedge \mathrm{d}_q^{\,q}$ 模 U_q^0 分解如下：

$$\sum_{\substack{I\in(\overline{T}_q)_m\\ I_x=1}}\sum_{J\in\overline{T}_q}\sum_{\substack{i\geq 1\\ p\nmid i}}\frac{\overline{t^J u_{i,I,J}^p}}{q^i}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} + \sum_{\substack{I\in(\overline{T}_q)_m\\ I_x=1}}\sum_{\substack{J\in\overline{T}_q\\ l(J)\notin\bar{I}}}\sum_{i\geq 1}\frac{\overline{t^J v_{i,I,J}^p}}{q^{pi}}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}$$
$$+\sum_{\substack{I\in(\overline{T}_q)_{m-1}\\ I_x=1}}\sum_{\substack{J\in\overline{T}_q\\ l(J)\notin\bar{I}}}\sum_{i\geq 1}\frac{\overline{t^J s_{i,I,J}^p}}{q^{pi}}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}\wedge\frac{\mathrm{d}q}{q},$$

其中 $u_{i,\,I,\,J}$，$v_{i,\,I,\,J}$，$s_{i,\,I,\,J} \in \mathcal{F}[x]_{<d}$ 均唯一。对于满足 $I_x = 1$ 的每个 $I \in (T_q)_m$，我们定义 $I' \in (\overline{T}_q)_{m-1}$，使得 $t^I = t^{I'}x$。现在我们定义转移映射 $s_q^*\colon W_1(H_p^{m+1}(F_q)) \to H_p^m(\mathcal{F})$ 如下：

$$s_q^*(\varphi) = -\sum_{\substack{I\in(\overline{T}_q)_m\\ I_x=1}}\sum_{J\in\overline{T}_q}\sum_{\substack{i\geq 1\\ p\nmid i}}\frac{\left(\overline{t^J u_{i,I,J}^p}\right)_c}{q_c^i}\frac{\mathrm{d}t_{I'}}{t_{I'}} - \sum_{\substack{I\in(\overline{T}_q)_m\\ I_x=1}}\sum_{\substack{J\in\overline{T}_q\\ l(J)\notin\bar{I}}}\sum_{i\geq 1}\frac{\left(\overline{t^J v_{i,I,J}^p}\right)_c}{q_c^{pi}}\frac{\mathrm{d}t_{I'}}{t_{I'}}$$
$$+\sum_{\substack{I\in(\overline{T}_q)_{m-1}\\ I_x=1}}\sum_{\substack{J\in\overline{T}_q\\ l(J)\notin\bar{I}}}\sum_{i\geq 1}\frac{\left(\overline{t^J s_{i,I,J}^p}\right)_c}{q_c^{pi}}\frac{\mathrm{d}t_{I'}}{t_{I'}}\wedge\frac{\mathrm{d}q_c}{q_c} + t_q^*(\theta_q(\varphi))$$

其中 h_c 表示任意多项式 $h \in \mathcal{F}[x]$ 的常数部分。

7. The reciprocity law for $L_0 + L_0 \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q}$

设 $q = \sum_{i=0}^d q_i x^{d-i}$ 是 $\mathcal{F}$ 上的一个次数为 d 的首一不可约多项式。我们用 x 表示域 $\mathcal{F}(q)$ 和 $\mathcal{F}(x)$ 中的元素。现在我们定义 $\gamma_i \in \mathcal{F}$，使得对所有 $i \geq 0$，

$$x^{d+i-1} = \gamma_i x^{d-1} + g_i \in \mathcal{F}(q)$$

其中 $g_i \in \mathcal{F}[x]_{\leq d-2}$ 唯一，且对所有 $i < 0$，都有 $\gamma_i = 0$。显然，$\gamma_0 = 1$ 且 $\gamma_1 = -q_1$。重复 [12, 第 4]，节中的论证，我们得到

$$\gamma_i = -\sum_{k=1}^d q_k \gamma_{i-k}, \quad \text{for all } i \geq 1. \tag{18}$$

由 (18) 可得关系式

$$(1+q_1x^{-1}+\ldots+q_dx^{-d})(1+\gamma_1x^{-1}+\gamma_2x^{-2}+\ldots)=1\in\mathcal{F}(x)_{1/x}. \tag{19}$$

由于 $q=x^d(1+q_1x^{-1}+\ldots+q_dx^{-d})$，由 (19) 可得

$$q^{-1}=x^{-d}(1+\gamma_1x^{-1}+\gamma_2x^{-2}+\ldots)\in\mathcal{F}(x)_{1/x}. \tag{20}$$

引理 7.1。设 $q=\sum_{i=0}^{d}q_ix^{d-i}$ 是一个次数为 d 的首一不可约可分多项式。则

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}(q)/\mathcal{F}}(x^j)=\sum_{i=0}^{d-1}(d-i)q_i\gamma_{j-i}\ \ for\ all\ j\geq 0.$$

证明。设 $\mathrm{Tr}^{\mathcal{F}(q)/\mathcal{F}}(x^j)=S_j$ 对所有 $j\geq 0$ 成立。我们对 j 使用归纳法证明此引理。对于 $j=0$，有

$$S_0=d=\sum_{i=0}^{d-1}(d-i)q_i\gamma_{0-i}$$

对于 $j=1$，容易看出 $S_1=-q_1=\sum_{i=0}^{d-1}(d-i)q_i\gamma_{1-i}$。

设 $k\geq 2$ 为一个整数，并假设对所有 $0\leq j<k$，$S_j=\sum_{i=0}^{d-1}(d-i)q_i\gamma_{j-i}$。我们分 $k\leq d$ 和不分两种情形讨论。

情形 1 假设 $k\leq d$。根据牛顿恒等式 [15, 命题 12。6], 我们有

$$\begin{aligned}
S_k&=-\sum_{j=1}^{k-1}q_jS_{k-j}-kq_k\\
&=-\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=0}^{d-1}(d-i)q_jq_i\gamma_{k-j-i}-kq_k\quad\text{(by induction hypothesis)}\\
&=-\sum_{j=1}^{k-1}dq_jq_0\gamma_{k-j}-\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-1}(d-i)q_jq_i\gamma_{k-j-i}-kq_k\quad\text{(since for } i>k-1,\ \gamma_{k-j-i}=0)\\
&=d(\gamma_k+q_k)+\sum_{i=1}^{k-1}(d-i)q_i\gamma_{k-i}-kq_k\quad\text{(using (18) and } k-1\geq k-i \text{ for } 1\leq i\leq k-1)\\
&=\sum_{i=0}^{k}(d-i)q_i\gamma_{k-i}=\sum_{i=0}^{d-1}(d-i)q_i\gamma_{k-i}.
\end{aligned}$$

情形 2 假设 $k>d$。再次利用牛顿恒等式，我们有

$$\begin{aligned}
S_k&=-\sum_{j=1}^{d}q_jS_{k-j}\\
&=-\sum_{j=1}^{d}\sum_{i=0}^{d-1}(d-i)q_jq_i\gamma_{k-j-i}\quad\text{(by induction hypothesis)}\\
&=\sum_{i=0}^{d-1}(d-i)q_i\gamma_{k-i}\quad\text{(by (18))}.
\end{aligned}$$

因此，根据归纳假设，对于所有 $j \geq 0$，我们有 $\mathrm{Tr}^{\mathcal{F}(q)/\mathcal{F}}(x^j) = \sum_{i=0}^{d-1}(d-i)q_i\gamma_{j-i}$。 □

以下引理对于证明引理 7.5 的互反律至关重要。

Lemma 7.2. 设 $q = \sum_{i=0}^{d} q_i x^{d-i}$ 是次数为 d的首一不可约多项式。那么，我们有 e

$$t_q^*\left(ax^j\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}\wedge\frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = -a\sum_{i=1}^{d}\gamma_{j-i}q_i\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}\wedge\frac{\mathrm{d}q_i}{q_i},$$

其中 $a \in \mathcal{F}$、 $j \geq 1$ 和 $I \in (T)_{m-2}$。

证明。 我们根据 q 是否可分，分两种情况证明此引理。

(1) 假设 q 可分，并令 $K := \mathcal{F}(q)$。令 $\mathrm{Tr} : \Omega_K^m \to \Omega_{\mathcal{F}}^m$ 为由迹映射 $\mathrm{Tr}^{K/\mathcal{F}}$诱导的映射，该迹映射定义于 [1, 第 2]节。首先，我们计算 $\mathrm{Tr}(ax^{j-1}\mathrm{d}x)$。由于$q = \sum_{i=0}^{d} q_i x^{d-i}$，我们有 $\sum_{i=0}^{d} q_i x^{d-i} = 0 \in K$。因此，得到

$$\sum_{i=1}^{d} x^{d-i}\mathrm{d}q_i + \sum_{k=0}^{d-1}(d-k)q_k x^{d-k-1}\mathrm{d}x = 0 \in \Omega_K^1,$$

因此

$$\mathrm{d}x = -\left(\sum_{k=0}^{d-1}(d-k)q_k x^{d-k-1}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{d} x^{d-i}\mathrm{d}q_i\right).$$

由于 q是可分的，存在 $l_r \in \mathcal{F}$，使得对于 $r \in \{0, \ldots, d-1\}$，

$$\left(\sum_{k=0}^{d-1}(d-k)q_k x^{d-1-k}\right)\left(\sum_{r=0}^{d-1} l_r x^r\right) = 1 \in K. \tag{21}$$

现在我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(ax^{j-1}\mathrm{d}x) &= \mathrm{Tr}\left(-a\sum_{i=1}^{d}\sum_{r=0}^{d-1} l_r x^{d+r+j-i-1}\mathrm{d}q_i\right)\\ &= -a\sum_{i=1}^{d}\mathrm{Tr}_{K/\mathcal{F}}\left(\sum_{r=0}^{d-1} l_r x^{d+r+j-i-1}\right)\mathrm{d}q_i.\end{aligned}$$

我们断言，对于 $j \geq 1$ 和 $1 \leq i \leq d$，有 $\mathrm{Tr}_{K/\mathcal{F}}\left(\sum_{r=0}^{d-1} l_r x^{d+r+j-i-1}\right) = \gamma_{j-i}$。事实上，一方面我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{K/\mathcal{F}}\left(\sum_{r=0}^{d-1} l_r x^{d+r+j-i-1}\right) &= \sum_{r=0}^{d-1}\sum_{k=0}^{d-1}(d-k)l_r q_k\gamma_{d+r+j-i-1-k} \quad \text{(by Lemma 7.1)}\\ &= \sum_{k=0}^{d-1}\sum_{r=\mu_k}^{d-1}(d-k)l_r q_k\gamma_{d+r+j-i-1-k} \quad (\text{since } \gamma_i = 0 \text{ for } i<0)\end{aligned}$$

其中 $\mu_k = \mathrm{Max}\{0, k+1+i-d-j\}$。

另一方面，将（21）的两边分别乘以 $x^{d+j-i-1}$ （对于 $j \geq 1$ 和 $1 \leq i \leq d$），我们得到

$$\sum_{k=0}^{d-1}\sum_{r=0}^{d-1}(d-k)l_r q_k x^{d+(d+r+j-i-1-k)-1} = x^{d+j-i-1} \in K.$$

由此可得

$$\sum_{k=0}^{d-1}\sum_{r=\mu_k}^{d-1}(d-k)l_rq_kx^{d+(d+r+j-i-1-k)-1}+G_{i,j}=x^{d+j-i-1}\in K,$$

其中 $G_{i,\ j}\in\mathcal{F}[x]_{\le d-2}$。由于 $\gamma_l=0$ 对于 $l<0$，我们得到

$$\sum_{k=0}^{d-1}\sum_{r=\mu_k}^{d-1}(d-k)l_rq_k\gamma_{d+r+j-i-1-k}x^{d-1}+G'_{i,j}=\gamma_{j-i}x^{d-1}+H_{i,j}\in K,$$

其中 $G'_{i,\ j}$，$H_{i,\ j}\in\mathcal{F}[x]_{\le d-2}$。由于 $\{1,x,\dots,x^{d-1}\}$ 是 K的一个 $\mathcal{F}$-基，对于 $j\ge 1$ 和 $1\le i\le d$，我们有

$$\sum_{k=0}^{d-1}\sum_{r=\mu_k}^{d-1}(d-k)l_rq_k\gamma_{d+r+j-i-1-k}=\gamma_{j-i}\in\mathcal{F}.$$

因此，$\mathrm{Tr}_{K/\mathcal{F}}\left(\sum_{r=0}^{d-1}l_rx^{d+r+j-i-1}\right)=\gamma_{j-i}$。于是，$\mathrm{Tr}(ax^{j-1}\mathrm{d}x)=-a\sum_{i=1}^{d}q_i\gamma_{j-i}\,\mathrm{d}\frac{q_i}{q_i}$。最后得到

$$\begin{aligned}t_q^*\left(ax^j\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}\wedge\frac{\mathrm{d}x}{x}\right)&=\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}\wedge\mathrm{Tr}\left(ax^{j-1}\mathrm{d}x\right)\quad\text{(by [1, Proposition 2.4])}\\&=-a\sum_{i=1}^{d}q_i\gamma_{j-i}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}\wedge\frac{\mathrm{d}q_i}{q_i}.\end{aligned}$$

(2) 假设 q是不可分的。那么 $q=f(x^{p^r})$，其中 $r\ge 1$且 $f(y)\in\mathcal{F}[y]$是次数为 $n\ge 1$的可分多项式。因此，$\deg q=d=np^r$。我们写作 $f(y)=\sum_{i=0}^{n}f_iy^{n-i}$，其中 $f_i\in\mathcal{F}$。于是，对于所有 $i\in\{0,1,\dots,n\}$，$f_i=q_{p^ri}$；对于所有满足 $p^r\nmid l$的 l，$q_l=0$。我们用 y表示 $\mathcal{F}(f):=\mathcal{F}[y]/(f)$ 中的元素。对于任意非负整数 i，我们定义 $\gamma_i^f\in\mathcal{F}$为

$$y^{n+i-1}=\gamma_i^fy^{n-1}+G_i\in\mathcal{F}(f)$$

其中 $G_i\in F[y]_{\le n-2}$是唯一的。此外，对所有 $i<0$，我们取 $\gamma_i^f=0$。

断言。我们有，对所有 $i\in\mathbb{Z}$，$\gamma_i^f=\gamma_{ip^r}$；并且对满足 $p^r\nmid i$的所有 i，$\gamma_i=0$。

对于 $i\le 0$，断言的第一部分显然成立。设它对某个$s\ge 1$所对应的所有 $i\le s-1$ 都成立。由 (18)，我们有

$$\begin{aligned}\gamma_s^f&=-\sum_{i=1}^{n}f_i\gamma_{s-i}^f\\&=-\sum_{i=1}^{n}q_{ip^r}\gamma_{(s-i)p^r}\quad\text{(by induction hypothesis)}\\&=-\sum_{k=1}^{np^r}q_k\gamma_{sp^r-k}\quad\text{(since } q_l=0\text{ for } p^r\nmid l\text{ and } k=ip^r\text{)}\\&=\gamma_{sp^r}\quad\text{(by (18))}.\end{aligned}$$

此外，第二个断言对所有 $i \leq 1$ 都成立。假设对于满足 $p^r \nmid j$ 的所有 $j < i$， $\gamma_j = 0$ 都成立，其中 i 是满足 $p^r \nmid i$ 的正整数。现在我们有

$$\gamma_i = -\sum_{l=1}^{d=np^r} q_l \gamma_{i-l} = 0 \quad \text{(by induction hypothesis and } q_l = 0 \text{ for } p^r \nmid l\text{)}.$$

设 $g = x^{p^r} - y \in \mathcal{F}(f)[x]$。令 $s_* \colon H_p^m(K(g)) \to H_p^m(K)$ 为 [3,命题 3.4] 中定义的映射，其中 $K = \mathcal{F}(f)$。现在 $\mathcal{F}(q) \simeq K(g)$。对于 $a \in \mathcal{F}$和 $I \in (T)_{m-2}$，我们先计算如下:

$$\begin{aligned} s_*\left(ax^j \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = s_*\left(a^{p^r} x^{jp^r} \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) &= s_*\left(a^{p^r} y^j \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) \\ &= a^{p^r} y^j \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}y}{y} \quad \text{(by [3, Proposition 3.4])}. \end{aligned}$$

因此，我们有

$$s_*\left(ax^j \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = \begin{cases} ay^{(j/p^r)} \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}y}{y} & \text{if } p^r \mid j, \\ 0 & \text{if } p^r \nmid j. \end{cases}$$

若 $p^r \mid j$，则根据 t_q^* 的定义，我们有

$$\begin{aligned} t_q^*\left(ax^j \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) &= t_f^*\left(ay^{(j/p^r)} \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}y}{y}\right) \\ &= -a \sum_{i=1}^{n} f_i \gamma^f_{(j/p^r)-i} \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}f_i}{f_i} \quad \text{(by (i))} \\ &= -a \sum_{i=1}^{n} q_{ip^r} \gamma_{j-ip^r} \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}q_{ip^r}}{q_{ip^r}} \quad \text{(since } f_i = q_{ip^r} \text{ and } \gamma_i^f = \gamma_{ip^r}\text{)} \\ &= -a \sum_{k=1}^{np^r} q_k \gamma_{j-k} \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}q_k}{q_k} \quad \text{(since } q_l = 0 \text{ for } p^r \nmid l \text{ and } k = ip^r\text{)}. \end{aligned}$$

因此，对于所有 $j \geq 1$、 $a \in \mathcal{F}$ 和 $I \in (T)_{m-2}$，我们有

$$\begin{aligned} t_q^*\left(ax^j \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) &= \begin{cases} -a \sum_{i=1}^{d} q_i \gamma_{j-i} \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}q_i}{q_i} & \text{if } p^r / j \\ 0 & \text{if } p^r \nmid j \end{cases} \\ &= -a \sum_{i=1}^{d=np^r} q_i \gamma_{j-i} \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}q_i}{q_i} \quad \text{(since } q_l = \gamma_l = 0 \text{ for } p^r \nmid l\text{)}. \end{aligned}$$

□

引理 7.3。设 $q = \sum_{i=0}^{d} q_i x^{d-i}$ 是次数为 d 的首一不可约不可分多项式。那么，对于所有 $a \in \mathcal{F}$ 以及 $I \in (T)_{m-2}$，有 $t_q^*\left(a \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = a \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}q_d}{q_d}$。

证明。由于 q 是不可分的，我们将 $q = f(x^{p^r})$ 写成某个可分多项式 $f(y) \in \mathcal{F}[y]$。令 $K = \mathcal{F}(f)$ 和 $g = x^{p^r} - y \in K[x]$。根据定义，

$$\begin{aligned} t_q^*\left(a\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) &= t_f^*\left(s_*\left(\zeta^*\left(a\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}x}{x}\right)\right)\right) \\ &= t_f^*\left(s_*\left(a\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}x}{x}\right)\right) \\ &= t_f^*\left(a\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}y}{y}\right) \quad \text{(by [3, Proposition 3.4, (ii)])} \\ &= a\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}q_d}{q_d} \quad \text{(by [1, Lemma 2.5, Proposition 2.4]).} \end{aligned}$$

□

现在，对于所有 $\varphi \in L_0 \wedge \mathrm{d}_q^q$ 以及任意首一不可约多项式 q，我们计算 $s_{1/x}^*(\partial_{1/x}(\varphi))$。

引理 7.4。设 $q = \sum_{i=0}^d q_i x^{d-i}$ 是 $\mathcal{F}$ 上次数为 d 的首一不可约多项式。*(i)* 若 $\varphi = ax^j \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \mathrm{d}_q^q \in H_p^{m+1}(\mathcal{F}(x))$，其中 $j \geq 0$，$I \in (T)_{m-1}$，则

$$s_{1/x}^* \circ \partial_{1/x}(\varphi) = -\sum_{i=0}^{d-1}(d-i)aq_i\gamma_{j-i}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}.$$

特别地，若 q 不可分，则 $s_{1/x}^* \circ \partial_{1/x}(\varphi) = 0$。

(ii) 若 $\varphi = ax^j \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}_q^q \in H_p^{m+1}(\mathcal{F}(x))$，其中 $j \geq 1$ 且 $I \in (T)_{m-2}$，则

$$s_{1/x}^* \circ \partial_{1/x}(\varphi) = \sum_{i=1}^{d} aq_i\gamma_{j-i}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}q_i}{q_i}.$$

证明。(i) 由 (7)，我们在 $H_p^{m+1}(\mathcal{F}(x))$ 中有：

$$\begin{aligned} \varphi = ax^j\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q} &= \sum_{i=0}^{d}\frac{aq_ix^{j+d-i}}{q}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}(q_ix^{d-i})}{q_ix^{d-i}} \\ &= \sum_{i=0}^{d}\frac{aq_ix^{j+d-i}}{q}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}q_i}{q_i} + \sum_{i=0}^{d-1}\frac{(d-i)aq_ix^{j+d-i}}{q}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}x}{x} \end{aligned}$$

T然后，通过重复引理 4.3 的证明 (i)，并使用 (20)，我们可以证明该引理。

如果 q 不可分，那么 $d = np^r$ 对某些正整数 n、r 成立。我们已经在引理 7.2 中证明，对于所有满足 $p^r \nmid i$ 的 $i \in \{0, \ldots, d\}$，都有 $q_i = \gamma_i = 0$。因此 $s_{1/x}^* \circ \partial_{1/x}(\varphi) = 0$。

(ii) 这与引理 4.3 的 (ii) 类似。

□

引理 7.5. 设 $q = \sum_{i=0}^d q_i x^{d-i}$ 是一个次数为 d的首一不可约多项式。那么我们有：*(i)* $\sum_{q'} s_{q'}^*(\partial_{q'}(\varphi)) = 0$ 对所有 $\varphi \in L_0 + L_0 \wedge \mathrm{d}_q^q$ 均成立，其中 q' 遍历 $1/x$ 以及系数属于 $\mathcal{F}$的首一不可约多项式。*(ii)* 若 q 不可分，则对所有 $\varphi \in L_0 \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}_q^q$，均有 $\sum_{q'} s_{q'}^*(\partial_{q'}(\varphi)) = 0$。

证明. (i) 回顾一下， L_0 由以下两个形式 $ax^i \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}$ 和 $bx^j \mathrm{d}\frac{t_J}{t_J} \wedge \mathrm{d}\frac{x}{x}$ 生成，其中 $i \geq 0, j \geq 1, I \in (T)_m$ 且 $J \in (T)_{m-1}$。设 $\varphi = ax^i \mathrm{d}\frac{t_I}{t_I} \in L_0$ 是第一类生成元。根据引理 3.2，对于任意首一不可约多项式 q'，我们有 $\partial_{q'}(\varphi) = 0$。根据定理 4.7，

$$s^*_{1/x}(\partial_{1/x}(\varphi)) = 0 \quad (\text{since } s^*_{1/x} = \eta)$$

令 $\varphi = bx^j \frac{\mathrm{d}t_J}{t_J} \wedge \mathrm{d}\frac{x}{x}$ 为 L_0 的第二类生成元。由引理 3.2， $\partial_{q'}(\varphi) = 0$ 对所有首一不可约多项式 $q' \neq x$ 均成立。由于 $j \geq 1$， $\partial_x(\varphi) = 0$。由定理 4.7，我们有：

$$s^*_{1/x}(\partial_{1/x}(\varphi)) = 0.$$

因此我们得到

$$\sum_{q'} s^*_{q'}(\partial_{q'}(\varphi)) = 0, \quad \text{for all } \varphi \in L_0.$$

此外， $L_0 \wedge \mathrm{d}q/q$ 由形式 $ax^i \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \mathrm{d}q/q$ 和 $bx^j \mathrm{d}\frac{t_J}{t_J} \wedge \mathrm{d}x/x \wedge \mathrm{d}q/q$ 生成，其中 $i \geq 0$、$j \geq 1$、$I \in (T)_{m-1}$ 以及 $J \in (T)_{m-2}$。令 $\varphi = ax^i \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \mathrm{d}q/q$ 为 $L_0 \wedge \mathrm{d}q/q$ 的第一类生成元。由引理 3.2， $\partial_{q'}(\varphi) = 0$ 对任意首一不可约多项式 $q' \neq q$ 均成立。现在我们有

$$\begin{aligned} s^*_q(\partial_q(\varphi)) &= t^*_q\left(ax^i \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}\right) \\ &= \begin{cases} a\sum_{k=0}^{d-1}(d-k)q_k\gamma_{i-k}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}, & \text{if } q \text{ is separable (by Lemma 7.1)} \\ 0, & \text{if } q \text{ is inseparable (by [3, Proposition 3.4])} \end{cases} \\ &= -s^*_{1/x}(\partial_{1/x}(\varphi)), \quad \text{(by Lemma 7.4)} \end{aligned}$$

令 $\varphi = bx^j \frac{\mathrm{d}t_J}{t_J} \wedge \mathrm{d}x/x \wedge \mathrm{d}q/q$ 为 $L_0 \wedge \mathrm{d}q/q$ 的第二类生成元。由引理 3.2， $\partial_{q'}(\varphi) = 0$，对于任意首一不可约多项式 $q' \neq q$， x。由于 $j \geq 1$， $\partial_x(\varphi) = 0$。此外，

$$\begin{aligned} s^*_q(\partial_q(\varphi)) &= t^*_q\left(bx^j \frac{\mathrm{d}t_J}{t_J} \wedge \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) \\ &= -b\sum_{i=1}^{d} \gamma_{j-i} q_i \frac{\mathrm{d}t_J}{t_J} \wedge \frac{\mathrm{d}q_i}{q_i} \quad \text{(by Lemma 7.2)} \\ &= -s^*_{1/x}(\partial_{1/x}(\varphi)) \quad \text{(by Lemma 7.4)} \end{aligned}$$

因此，对于所有 $\varphi \in L_0 + L_0 \wedge \mathrm{d}q/q$，我们有 $\sum_{q'} s^*_{q'}(\partial_{q'}(\varphi)) = 0$。

(ii)这与 [12, 引理 4.4 的 (ii)] 类似。我们需要使用引理 7.3，而不是 [12, 引理 4.2 的 (iii)]。□

8. Milnor-Scharlau's exact sequence

这里我们在特征 p 下，以 Kato-Milne 上同调群的概念证明 Milnor-Scharlau 正合列。为此，我们将互反律推广到 $H^{m+1}_p(\mathcal{F}(x))$。

定理 8.1。对于任意微分形式 $\varphi \in H^{m+1}_p(\mathcal{F}(x))$，有 $\sum_q s^*_q(\partial_q(\varphi)) = 0$，其中 q 取遍 $1/x$ 以及 $\mathcal{F}$ 上的所有首一不可约多项式。

证明。根据引理 3.4、6.4、7.5 和定义 6.3，只需证明

$$\sum_q s^*_q(\partial_q(\varphi)) = 0$$

其中 φ 是 $S'_{f,r}$ 的一个生成元，如定义 6.1、6.2 所述，其中 $r \in \mathbb{N}_0$ 和 f 是 $\mathcal{F}$上的首一不可约多项式。我们分 4 种情况证明。

(i) 令 $\varphi = \frac{t^J s_{r,I,J}^p}{f^r} \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \in S'_{f,r}$，其中 $J \in T_f$，$r \geq 1$、$s_{r,I,J} \in \mathcal{F}[x]_{<\deg f}$以及 $I \in (T_f)_m$ 使得$t^I \in \mathcal{F}$。此外，当 $p \mid r$时，$l(J) \notin \tilde{I}$。重复定理 5.1 的证明，(i)], 我们证明

$$\sum_q s_q^*(\partial_q(\varphi)) = 0.$$

(ii) 令 $\varphi = \frac{t^J s_{r,I,J}^p}{f^r} \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \mathrm{d}f^f \in S'_{f,r}$，其中 $p \mid r$、$s_{r,I,J} \in \mathcal{F}[x]_{<\deg f}$以及 $I \in (T_f)_{m-1}$使得$t^I \in \mathcal{F}$。此外，$J \in T_f \subset T_f$使得 $l(J) \notin \tilde{I}$。重复定理 5.1 的证明，(ii)],我们证明

$$\sum_q s_q^*(\partial_q(\varphi)) = 0.$$

(i) 和 (ii) 中的元素生成 U_f（当 f 可分时）以及 U_f^0（当 f 不可分时）。现在我们检查 $U_f \setminus U_f^0$ 的剩余生成元（当 f 不可分时）。

(iii) 设 $\varphi = \frac{t^J s_{r,I,J}^p}{f^r} \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \mathrm{d}x^x \in S'_{f,r}$，其中 $J \in T_f, r \geq 1, s_{r,I,J} \in \mathcal{F}[x]_{<\deg f}$ and $I \in (T_f)_{m-1}$，使得 $t^I \in \mathcal{F}$。若 p/r，则 $l(J) \notin \tilde{I'}$，其中 $t^{I'} = t^I x$。由引理 3.2，$\partial_q(\varphi) = 0$ 对除f、x和 $1/x$之外的所有 q 均成立。由于 $\deg(t^J s_{r,I,J}^p) < \deg(f)$，由注 2.2可知 $\partial_{1/x}(\varphi) = 0$。现在我们有 $t^J s_{r,I,J}^p = (t^J s_{r,I,J}^p)_c + u \in \mathcal{F}((x))$，其中 $v_x(u) \geq 1$，且 h_c表示多项式 $h \in \mathcal{F}[x]$的常数项。因此，我们有

$$\begin{aligned} s_x^*(\partial_x(\varphi)) = s_x^* \left(\frac{\left(\overline{t^J s_{r,I,J}^p}\right)_c}{f_c^r} \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}x}{x} \right) &= \frac{\left(\overline{t^J s_{r,I,J}^p}\right)_c}{f_c^r} \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \\ &= -s_f^*(\partial_f(\varphi)) \quad (\text{by 定义 6.5 (ii)}) \end{aligned}$$

因此我们得到 $\sum_q s_q^*(\partial_q(\varphi)) = 0$。

(iv) 设 $\varphi = \frac{t^J s_{r,I,J}^p}{f^r} \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \mathrm{d}x^x \wedge \mathrm{d}f^f \in S'_{f,r}$，其中 $p \mid r$、$s_{r,I,J} \in \mathcal{F}[x]_{<\deg f}$以及 $I \in (T_f)_{m-2}$满足$t^I \in \mathcal{F}$。此外，$J \in T_f$满足 $l(J) \notin \tilde{I'}$，其中 $t^{I'} = t^I x$。如同第 (iii) 部分，对于除 f 和 x 之外的所有 q，我们有 $\partial_q(\varphi) = 0$。设 $f = \sum_{i=0}^d f_i x^{d-i}$，其中 $f_0 = 1$。令 h 表示多项式 $t^J s_{r,I,J}^p$，其次数为 $\leq d-1$。于是由 (7) 得到

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{i=0}^{d} \frac{h f_i x^{d-i}}{f^{r+1}} \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}x}{x} \wedge \frac{\mathrm{d}f_i}{f_i} \\ &= -\sum_{i=1}^{d} \frac{h f_i x^{d-i}}{f^{r+1}} \frac{\mathrm{d}t_I}{t_I} \wedge \frac{\mathrm{d}f_i}{f_i} \wedge \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad (\text{as } f_0 = 1). \end{aligned}$$

因此，我们有：

$$s_x^*(\partial_x(\varphi)) = s_x^*\left(-\frac{h_c f_d}{f_d^{r+1}}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}\wedge\frac{\mathrm{d}f_d}{f_d}\wedge\frac{\mathrm{d}x}{x}\right) \quad (\text{since } v_x\left(\frac{hf_i x^{d-i}}{f^{r+1}}\right)\geq 1,\ \text{for}\ \ i<d).$$
$$= -\frac{h_c}{f_d^r}\frac{\mathrm{d}t_I}{t_I}\wedge\frac{\mathrm{d}f_d}{f_d} = -s_f^*(\partial_f(\varphi)).$$

最后我们得到 $\sum_q s_q^*(\partial_q(\varphi)) = 0$，由此证明了该定理。 □

最后，我们得以证明本文的主要结果。

定理 8.2. 设 $\mathcal{F}$ 是特征为 p 的域，且 $F=\mathcal{F}(x)$ 是变量 x上的有理函数域，其中 $\mathcal{F}$。那么有以下正合列：

$$0\to H_p^{m+1}(\mathcal{F})\xrightarrow{i}H_p^{m+1}(F)\xrightarrow{\oplus\partial_q}\bigoplus_q W_1(H_p^{m+1}(F_q))\xrightarrow{\oplus s_q^*}H_p^m(\mathcal{F})\to 0$$

其中，i 由包含映射 $\mathcal{F}\to F$诱导。此外，q 遍历 $1/x$ 以及 $\mathcal{F}$上的首一不可约多项式。

证明。映射 $i=i_1\circ i_2$，其中 i_1、i_2 分别来自定理 4.6 和定理 4.7。由于 i_1、i_2 是单射，因此 i是单射。此外，由定理 4.6 和定理 4.7 可得

$$\ker(\oplus\partial_q)=\mathrm{Im}(i_2)=\mathrm{Im}(i).$$

由定理 4.7，映射 $s_{1/x}^*$ 是满射，因此 $\oplus s_q^*$ 是满射。根据前一定理，$\mathrm{Im}(\oplus\partial_q)\subset\ker(\oplus s_q^*)$。现在重复定理 [12, 定理 5.2], 的证明，即可证明 $\ker(\oplus s_q^*)\subset\mathrm{Im}(\oplus\partial_q)$。至此定理得证。□

9. Norm Theorem

这里我们旨在给出定理 8.2 在 Kato-Milne 上同调概念下关于特征 $p>0$ 中范数定理的一个应用。现在我们定义微分形式的双曲性和范数，这些概念由 Mukhija [16, 定义 A.1、A.2] 引入。

定义 9.1. 设 F 是一个特征为 p 的域，且 $w\in\Omega_F^m$ 是一个微分形式。若 w满足 $w=0\in H_p^{m+1}(F)$，即 $w\in\wp(\Omega_F^m)+\mathrm{d}\Omega_F^{m-1}$，则称其为双曲的。

该定义将非奇异二次型的维特群 $W_q(F)$ 与 Kato-Milne 上同调 $H_p^{m+1}(F)$ 联系起来。现在我们将范数的概念推广到微分形式。设 $c\in F^*$和 φ 是 F上的非奇异二次型。若 c 满足 $\varphi\simeq c\varphi$，则称 c 是 φ 的范数；也就是说，二次型 $\langle 1,c\rangle_b\otimes\varphi$是双曲的，其中 $\langle 1,c\rangle_b$是 F-双线性型 X^2+cY^2。对于 $p=2$，由加藤同构 [16, 公式 (17)] 可知，$\langle 1,c\rangle_b\in I(F)/I^2(F)$ 对应于$\mathrm{d}_c^c\in\nu_F(1)$。这启发了下面的定义。

定义 9.2. 设 $c\in F^*$ 和 $w\in\Omega_F^m$。若元素 c满足 $w\wedge\mathrm{d}_c^c\in\Omega_F^{m+1}$ 是双曲的，则称 c为 w的范数。

设 F是特征为 p的域，K/F是有限扩张。记号 $H_p^{m+1}(K/F)$表示群 $\ker(i:\ H_p^{m+1}(F)\to H_p^{m+1}(K))$，其中 i 由包含映射 $F\to K$诱导。下面的定理将 [16, 定理 A.16] 推广到特征 p。

定理 9.3。设 K/F 是一个域扩张，使得 $p\nmid[K:\ f]$。则群 $H_p^{m+1}(K/F)=0$。

证明。设 $w \in \Omega_F^m$ 是一个微分形式，使得 $w \in H_p^{m+1}(K/F)$。由于 $p \nmid [K:\ F]$，扩张 K/F 是可分的。应用转移映射 Tr_*： $H_p^{m+1}(K) \to H_p^{m+1}(F)$（定义于 [1, 第 2], 节），我们得到 $\mathrm{Tr}_*(w_K) = 0 \in H_p^{m+1}(F)$。由于 $\mathrm{Tr}_*(w_K) = [K:\ F]w$ 且 $p \nmid [K:\ F]$，我们有 $w = 0 \in H_p^{m+1}(F)$。□

范数定理最初由 Knebusch 针对双线性形式提出，其内容如下：若$\mathcal{F}$是任意特征的域，且 $q \in \mathcal{F}[x_1, \ldots, x_n]$ 是n 变量上的范数化不可约多项式，那么双线性型 B 在 $\mathcal{F}$ 上各向异性，当且仅当它在 $\mathcal{F}(q)$ 上变为代谢的， $B \simeq qB$ 在 $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$上，其中 $\mathcal{F}(q)$ 是 $\mathcal{F}[x_1, \ldots, x_n]/(q)$的商域， [9, 定理 4.2]。由此，我们得到特征不等于 2 时二次型的范数定理。之后，Baeza 证明了特征 2, [4] 下非奇异二次型的范数定理。随后，第一作者 [10] 和 Hoffman [5] 独立证明了特征 2 下奇异二次型的范数定理。最后，第一作者与 Mukhija 在 [13]中证明了特征 2 下半奇异二次型的范数定理。利用 Aravire、Laghribi 和 O'Ryan 为纯不可分扩张定义的转移以及定义 9.1、9.2, Mukhija [16, 定理 A.3]在不可分多项式的情形下证明了 Kato-Milne 上同调中的范数定理。最近，通过证明 Milnor-Scharlau 正合列，我们证明了特征 2 下任意范数化不可约多项式对应的 Kato-Milne 上同调范数定理， [11, 定理 5.8]。现在我们旨在证明该定理适用于任意正特征 p。首先，在下面的定理中，我们讨论单变量首一不可约多项式的情形，然后在定理 9.6 中处理一般情形。

定理 9.4. 设 $\mathcal{F}$ 是特征为 p 的域， $F = \mathcal{F}(x)$ 且 $w \in \Omega_{\mathcal{F}}^m$。设 $q \in \mathcal{F}[x]$ 是一个首一不可约多项式。则以下命题等价：*(1)* w 在 $\mathcal{F}(q)$上是双曲的。*(2)* q 是 w_F 的范数。

证明. (2)⇒ (1)：令 $H_p^{m+1}(F)'$ 为 $H_p^{m+1}(F)$ 由元素 $a\, {}^{\mathrm{d}b_1}_{b_1} \wedge \ldots \wedge {}^{b_m}_{\mathrm{d}b_m}$ 生成的子群，其中 $b_i \in F^*$ 和 $a \in F$ 满足 $v_q(a) \geq 0$。令 β: $H_p^{m+2}(F)' \to H_p^{m+1}(\mathcal{F}(q))$ 为定义 10.12 中关于 q-进赋值定义的映射。若 q 是 w_F 的范数，则有：

$$\beta\left(w_F \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q}\right) = w_{\mathcal{F}(q)} = 0.$$

因此， w 在 $\mathcal{F}(q)$ 上是双曲的。

(1)⇒ (2)：设 w 在 $\mathcal{F}(q)$ 上是双曲的。若 $p \nmid \deg q$，则由定理 9.3 可得$w = 0 \in H_p^{m+1}(\mathcal{F})$。因此， $w_F \wedge {}^{q}_{\mathrm{d}q} = 0 \in H_p^{m+2}(F)$。
设 $\deg q = pr$，其中 $r \geq 1$。由于 $w = 0 \in H_p^{m+1}(\mathcal{F}(q))$，由 Teichm¨uller 提升可得 $w = 0 \in H_p^{m+1}(F_q)$。因此

$$\partial_q\left(w_F \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q}\right) = 0.$$

此外，对于任意首一不可约多项式 $q' \neq q$，我们有

$$\partial_{q'}\left(w_F \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q}\right) = 0 \quad \text{(by Lemma 3.2)}$$

pr pr现在我们写作
$q = \sum q_i x^{pr-i} \in \mathcal{F}[x]$，其中 $q_0 = 1$。因此 $q = x^{pr}y$，其中 $y = \sum q_i x^{-i}$。所以，
$i=0$ $i=0$在 $H_p^{m+2}(F_{1/x})$中有：

$$\begin{aligned} w \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q} = w \wedge \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \sum_{i=0}^{pr} \frac{q_i x^{-i}}{y} w \wedge \frac{\mathrm{d}(q_i x^{-i})}{q_i x^{-i}} \\ &= \frac{q_0}{y} w \wedge \frac{\mathrm{d}q_0}{q_0} \quad (\text{since } v_{1/x}(q_i x^{-i}/y) \geq 1 \text{ for all } i \geq 1) \\ &= 0 \quad (\text{since } q_0 = 1) \end{aligned}$$

因此，$\partial_{1/x}\left(w_F \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q}\right) = 0$。所以，$w_F \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q} \in \ker(\oplus_{q'} \partial_{q'})$，其中 q' 遍历 $1/x$ 以及 $\mathcal{F}$上的首一不可约多项式。根据定理 8.2，$w_F \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q} = i(\alpha)$ 对某个 $\alpha \in H_p^{m+2}(\mathcal{F})$ 成立。应用定义 10.12 的 $\beta_{1/x}$，我们得到：

$$\begin{aligned} \beta_{1/x}(i(\alpha)) &= \beta_{1/x}\left(w_F \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q}\right) \\ \alpha &= \beta_{1/x}\left(w_F \wedge \frac{\mathrm{d}y}{y}\right) \\ &= w \wedge \frac{\mathrm{d}\overline{y}}{\overline{y}} \\ &= 0 \quad (\text{since } \overline{y} = 1 \in \overline{F}_{1/x}) \end{aligned}$$

因此，$w_F \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q} = i(\alpha) = 0 \in H_p^{m+2}(F)$，如所要求。 □

以下结果对于证明任意变量数下的范数定理至关重要。

命题 9.5。设 $w \in \Omega_F^m$是一个微分形式，$f \in \mathcal{F}[x_1, \ldots, x_n]$ 是一个多项式。设$F = \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$，且 q 是一个范数化不可约多项式，使得 $f = q^r g$，其中 $p \nmid r \in \mathbb{N}_0$和 $q \nmid g \in \mathcal{F}[x_1, \ldots, x_n]$。如果 f是 w_F的一个范数，那么 q将是 w_F的一个范数。

证明 . 我们对 n 使用归纳法来证明该命题。令 $n = 1$。由于 f 是 w_F 的范数，我们有 ve:

$$w_F \wedge \frac{\mathrm{d}f}{f} = r w_F \wedge \frac{\mathrm{d}q}{q} + w_F \wedge \frac{\mathrm{d}g}{g} = 0 \in H_p^{m+2}(F).$$

令 $\beta\colon H_p^{m+2}(F)' \to H_p^{m+1}(\mathcal{F}(q))$ 为定义 10.12 中对应于 q-进赋值的剩余映射。应用剩余映射 β，我们有

$$\begin{aligned} \beta\left(w_F \wedge \frac{\mathrm{d}f}{f}\right) = r w_{\mathcal{F}(q)} &= 0 \in H_p^{m+1}(\mathcal{F}(q)) \\ w_{\mathcal{F}(q)} &= 0 \quad (\text{as } p \nmid r). \end{aligned}$$

由于 w 在 $\mathcal{F}(q)$ 上是双曲的，由定理 9.4 可知 q 是 w_F 的范数。
令 $n \geq 2$。此情形与 [16, 命题 A.15 的步骤 2] 类似。

□

现在我们证明任意变量数下的范数定理。

定理 9.6。设 $\mathcal{F}$是一个特征为 p 的域，$F = \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$ 且 $w \in \Omega_F^m$。设 $q \in \mathcal{F}[x_1, \ldots, x_n]$ 是一个范数化不可约多项式。则以下陈述等价：*(1)* w 在 $\mathcal{F}(q)$ 上是双曲的。*(2)* q 是 w_F 的一个范数。

证明。 $n=1$ 的情形由定理 9.4 给出。现在我们取 $n>1$。

(2) $\Longrightarrow$(1): 这个方向与定理 9.4 类似。

(1) $\Longrightarrow$ (2): 如有必要，对变量重新命名后，我们假设 $q \in K[x_1]$ 是一个次数为 ≥ 1 的多项式，其中 $K := \mathcal{F}(x_2, \ldots\ldots, x_n)$。令 $g \in \mathcal{F}[x_2, \ldots, x_n]$ 为 $q \in K[x_1]$ 的首项系数。由于 g 是 K 中的一个单位，因此 $\mathcal{F}(q) \simeq K(q) \simeq K(g^{-1}q)$。由于 $g^{-1}q \in K[x_1]$ 是一个首一不可约多项式，根据定理 9.4 可知，$g^{-1}q$ 是 $w_{K(x_1)}$ 的范数。因此，$g^{p-1}q$ 是 $w_{K(x_1)}$ 的范数。根据命题 9.5，q 是 $w_{K(x_1)} = w_F$ 的范数，证毕。□

10. Appendix

本附录旨在明确描述 Teichm¨uller 提升映射，它在前几节中发挥了重要作用。此处给出的结果取自 [18, chapter7]。不过，为求完整起见，我们提供了证明。本节中，除非另有说明，F 是关于离散赋值 $v: F \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$完备的、特征为 $p>0$ 的域。令 F 为 F 的剩余域，A_F 为 F的赋值环。此外，令 $A_F^{\times}$ 表示 A_F的单位群。为了定义 Teichm¨uller 提升，我们需要以下结果。

定理 10.1. 若完备域 F 的剩余域 F 是完美的，则存在唯一的域单同态 $\beta: F \to F$，使得 $\mathrm{Im}(\beta) \subseteq A_F$，且对所有 $a \in F$，均有 $\beta(\overline{a}) = a$。

证明。 **存在性：** 令 a 为 F. 中的任意元素。由于 F是完美的，对所有 $n \in \mathbb{N}_0$.都有 $a^{p^{-n}} \in F$。设 $a_n \in A_F$ 使得

$$\overline{a}_n = a^{p^{-n}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0. \tag{22}$$

因此，我们得到以下关系：

$$\begin{aligned} &\overline{a}_{n+1}^{p} = \overline{a}_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0. \\ &a_{n+1}^{p} \equiv a_n \pmod{P} \qquad (P \text{ is the prime ideal of } A_F). \end{aligned}$$

此外， [18,第 7 章引理 33] 表明：

$$a_{n+1}^{p^{n+1}} \equiv a_n^{p^n} \pmod{P^{n+1}}. \tag{23}$$

设 k、 m、 $n \in \mathbb{N}_0$ 满足 $n \geq m \geq k$。那么，我们有：

$$a_n^{p^n} - a_m^{p^m} = a_n^{p^n} - a_{n-1}^{p^{n-1}} + a_{n-1}^{p^{n-1}} - \ldots + a_{m+1}^{p^{m+1}} - a_m^{p^m} \in P^k \quad (\text{by (23)}).$$

因此，

$$v\left(a_n^{p^n} - a_m^{p^m}\right) \geq k \quad \forall\, n \geq m \geq k.$$

因此，$(a_n^{p^n})_n$ 是一个柯西序列。由于 F 是完备的，存在元素 $x_a \in A_F$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{p^n} = x_a$。此外，(22)意味着 $x_a = a \in F$。现在我们证明，这个 x_a 不依赖于元素 a_n的选择。假设可能，令 $a'_n \in A_F$ 使得对于所有$n \in \mathbb{N}_0$. 都有 $a'_n = a^{p^{-n}}$ 。那么

$$\overline{a'}_n = \overline{a}_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad \text{i.e.,} \quad a'_n \equiv a_n \pmod{P} \ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

因此，由引理 33] 可得 $a'^{p^n}_n \equiv a_n^{p^n}$ （模 P^{n+1}） [18, 。于是， $\lim\limits_{n\to\infty} a'^{p^n}_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^{p^n} = x_a$. 现在，对每个 $a \in F$，我们都可以定义这样的 $x_a \in A_F$。因此，我们有映射 β： $F \to F$，定义如下：

$$\beta(a) = x_a \ \forall\, a \in \overline{F}.$$

特别地，若 $a_n \in A_F$ 使得 $(a_n)^{p^n} = a$ 对所有 $n \in \mathbb{N}_0$ 都成立，则有

$$\beta(a) = \lim_{n\to\infty} a_n^{p^n} \quad \forall\, a \in \overline{F}. \tag{24}$$

现在证明 β 是域同态。设 $a,\ b \in F$ 和 $a_n,\ b_n \in A_F$ 满足 $(\overline{a_n})^{p^n} = a$ 且 $(b_n)^{p^n} = b$，对所有 $n \in \mathbb{N}_0$ 均成立。于是，对所有 $n \in \mathbb{N}_0$ 均有 $(a_n b_n)^{p^n} = ab$ 且 $(a_n + b_n)^{p^n} = a + b$。因此，我们有

$$\begin{aligned}
\beta(ab) &= \lim_{n\to\infty} (a_n b_n)^{p^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n^{p^n} \lim_{n\to\infty} b_n^{p^n} \qquad \text{(the multiplication is a continuous function in } F) \\
&= \beta(a)\beta(b).
\end{aligned}$$

再次得到

$$\begin{aligned}
\beta(a+b) = \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n)^{p^n} &= \lim_{n\to\infty} (a_n^{p^n} + b_n^{p^n}) \qquad \text{(as } \mathrm{char}(F) = p) \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n^{p^n} + \lim_{n\to\infty} b_n^{p^n} \qquad \text{(the addition is a continuous function in } F) \\
&= \beta(a) + \beta(b).
\end{aligned}$$

此外，$\beta(1) = 1$. 因此，β 是一个域同态，满足对所有 $a \in F$. 均有 $\overline{\beta(a)} = a$。于是，β 是单射。

唯一性： 设 $\beta' : F \to \overline{F}$ 是另一个域单同态，满足 $\mathrm{Im}(\beta') \subseteq A_F$ 且对所有 $a \in F$. 均有 $\beta'(a) = \overline{a}$。我们将证明 $\beta = \beta'$。事实上，设 $a \in F$. 。设对所有 $n \in \mathbb{N}_0$ 均有 $\beta'(\overline{a}) = y$ 且 $\beta'(a^{p^{-n}}) = y_n$。因此，

$$\beta'(a) = (y_n)^{p^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \tag{25}$$

$$= y. \tag{26}$$

现在根据 β', 的定义，我们有 $y = a_\circ$ 利用 (25) 和 (26)，得到

$$\overline{y}_n = \overline{\beta'(a)}^{p^{-n}} = \overline{y}^{p^{-n}} = a^{p^{-n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

现在根据 (24) 中 β 的定义，我们有:

$$\begin{aligned}
\beta(a) &= \lim_{n\to\infty} (y_n)^{p^n} \quad (\text{since } a = (\overline{y_n})^{p^n} \forall\, n \in \mathbb{N}_0) \\
&= y \quad (\text{using (25) and (26)}) \\
&= \beta'(a) \quad \forall\, a \in \overline{F}.
\end{aligned}$$

因此，定理得证。 □

下一个定理利用定理 10.1 的映射 β，给出了 F 的描述。

定理 10.2. 设 F、F 和 $\overline{\beta}$ 如定理 *10.1* 中所定义。则 $F = \beta(F)((\pi))$，其中 π 是一致化元。

证明. 显然，$\beta(F)(\overline{(\pi)})$ 是 F. 的完备子域。此外，F 和 $\beta(F)((\pi))$ 的赋值群和剩余域相同。设 $a \in F^*$。则存在元素 $\overline{l} \in \beta(F)((\pi))$，使得 $v(a) = v(l)$. 因此，$v(a/l) = 0$. 。接着，存在元素 $\overline{c_0} \in \beta(F)$，使得:

$$a/l \equiv c_0 \ (\text{模 } P_F^{n_1}) \ ，\text{其中 } P_F = \langle \pi \rangle \text{ 是 } A_F \text{的素理想，且 } v(a/l - c_0) = n_1 \geq 1.$$

那么， $v\left(\frac{a/l-c_0}{\pi^{n_1}}\right)=0$. 再次存在一个元素 $c_1\in\beta(F)$，使得

$$\frac{a/l-c_0}{\pi^{n_1}}\equiv c_1 \pmod{P_F^{n_2}},\ \text{where } v\left(\frac{a/l-c_0}{\pi^{n_1}}-c_1\right)=n_2\geq 1.$$

于是， $v\left(\frac{a/l-c_0-c_1\pi^{n_1}}{\pi^{n_1+n_2}}\right)=0$。类似地，存在一个元素 $c_2\in\beta(F)$，使得：

$$\frac{a/l-c_0-c_1\pi^{n_1}}{\pi^{n_1+n_2}}\equiv c_2 \pmod{P_F^{n_3}},\ \text{where } v\left(\frac{a/l-c_0-c_1\pi^{n_1}}{\pi^{n_1+n_2}}-c_2\right)=n_3\geq 1.$$

因此，由归纳法可得一个柯西序列 $\left(\sum_{k=0}^{r}c_k\pi^{n_0+n_1+\ldots+n_k}\right)_{r\in\mathbb{N}}$，其中 $n_0=0$ and $c_i\in\beta(F)$。由于 $\beta(F)((\pi))$ 是完备域，因此存在一个元素 $b\in\beta(F)((\pi))$，使得

$$b=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\pi^{n_0+n_1+n_2+\ldots+n_k}.$$

由于对所有 $k\in\mathbb{N}$， $a/l\equiv c_0+c_1\pi^{n_1}+\ldots+c_k\pi^{n_1+n_2+\ldots+n_k}\pmod{P_F^{n_1+\ldots+n_{k+1}}}$，可知 $a/l=b$。因此， $a\in\beta(F)((\pi))$，因为 $l,b\in\beta(F)((\pi))$。所以， $F=\beta(F)((\pi))$。□

在下文中，我们将这一概念推广到剩余域 F 不完美的完备赋值域 F。如果 F 不完美，则它具有非平凡的 p-基。令 S 为剩余域 F的一个 p-线性无关子集。我们考虑一个子集 $S'\subseteq A_F$，它由 S. 中每个元素恰好选取一个代表元组成。那么， S' 将在 F中 p-线性无关。

引理 10.3。设 $K=F(b_{1,1},b_{1,2},\ldots,b_{1,r})$，其中对于 $b_i\in S'$，$b_{1,i}^{p}=b_i$。因此， K 是 F. 的有限扩张。于是，我们可以在 K. 上唯一地延拓赋值 v。如果 K 是 K的剩余域，那么我们有：

(1) $[\overline{K}:\overline{F}]=p^r$。 *(2)* $[K:F]=p^r$ 以及 $\mathcal{T}(K)=\mathcal{T}(F)$，其中 $\mathcal{T}(K)$ 和 $\mathcal{T}(F)$ 分别是 K和 F的赋值群。

证明。由于 $K=F(b_{1,1},b_{1,2},\ldots,b_{1,r})$ 是由 r 个元素在 F上生成的，且每个 $b_{1,i}$ 都满足一个关于 F 的 p次方程，因此可得 $[K:F]\leq p^r$. 此外， $K=F\left(b_{1,1},b_{1,2},\ldots,b_{1,r}\right)$以及 $b_{1,i}^{p}=b_i\in S$. 由于 $\{b_1,b_2,\ldots,b_r\}$ 是 F中的一个 p-独立集，我们得到 $[K:F]=p^r$. 现在根据第 [18, 章定理 11]，$[\mathcal{T}(K):\mathcal{T}(F)][K:F]=[K:F]$。因此， $[K:F]=p^r$ 并且 $[\mathcal{T}(K):\mathcal{T}(F)]=1$. 所以引理得证。□

定义 10.4。设 F 是一个特征为 p的域， $F^{p^{-1}}$ 是通过向 F 添加 F中所有元素的 p次根而得到的扩张。那么， $\cup_{n\in\mathbb{N}_0}F^{p^{-n}}$ 是 F的最小完美扩张。我们将其记为 $F^{p^{-\infty}}$。

引理 10.5. 设 F、 F、S 和 S' 如上所定义。假设 F 不完美。那么，存在一个完备扩张 L/F，使得 L 的剩余域为 $L=F\left(S^{p^{-\infty}}\right)$。此外，如果 S 是 F 的 p-基，那么 $L=F^{p^{-\infty}}$ 是 F 的最小完美扩张。

证明。令 T 为 S'的一个有限子集。于是，我们可以如引理 10.3 中那样构造域 $F\left(T^{\frac{1}{p}}\right)$。考虑 $K_{1,1}=\bigcup_T F\left(T^{\frac{1}{p}}\right)=F\left(S'^{\frac{1}{p}}\right)$，其中并集遍历所有有限子集 $T\subseteq S'$. 由于

K_1,1 是完备域 F的代数扩张，因此我们将赋值 v 唯一地扩张到 K_1,1 上，记为 v_{K_1},1。现在由引理 10.3，$\mathcal{T}\left(F\left(T^{\frac{1}{p}}\right)\right) = \mathcal{T}(F)$ 对所有有限子集 $T \subseteq S'$均成立。因此，$\mathcal{T}(K_1,1) = \mathcal{T}(F)$。令 K_1 表示关于赋值 v_{K_1},1 的 K_1,1 的完备化。于是，赋值 v_{K_1},1 可以唯一地扩张到 K_1 上，记为 v_{K_1}，且 $\mathcal{T}(K_1) = \mathcal{T}(K_1,1) = \mathcal{T}(F)$。此外，由引理 10.3，$K_1$ 的剩余域由 $K_1 = F\left(S^{\frac{1}{p}}\right)$给出。

注意，$S^{\frac{1}{p}}$是 $K_1 = F\left(S^{\frac{1}{p}}\right)$. 中的 p-独立子集。取 $M_1 = S'^{\frac{1}{p}}$，然后重复相同的过程。令 $K_{2,\,1} = K_1\left(M_1^{\frac{1}{p}}\right)$，并且$K_{2,\,1}$ 的完备化为 K_2.。同样，K_2 的剩余域是

$K_2 = K_1\left(S^{\frac{1}{p^2}}\right) = F\left(S^{\frac{1}{p^2}}\right)$。重复这一过程，我们得到一个域链$F = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots$，满足以下两个条件:

(1) 对所有 $n \in \mathbb{N}$，赋值群 $\mathcal{T}(K_n) = \mathcal{T}(F)$。 (2) 对所有 $n \in \mathbb{N}_0$，K_n 的剩余域是 $K_n = F\left(S^{\frac{1}{p^n}}\right)$。

考虑域 $L_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$。那么，它的剩余域为 $L_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} K_n = F\left(S^{p^{-\infty}}\right)$，且 $\mathcal{T}(L_0) = \mathcal{T}(F)$。最后，设 L 是 L_0的完备化，其剩余域为 L。那么$L = F\left(S^{p^{-\infty}}\right)$且 $\mathcal{T}(L) = \mathcal{T}(F)$。此外，若 S 是 F 的-基，那么 $K_1 = F\left(S^{\frac{1}{p}}\right) = (F)^{\frac{1}{p}}$，且 $S^{\frac{1}{p}}$ 是K_1的 p-基。因此，$K_2 = F\left(S^{\frac{1}{p^2}}\right) = K_1\left(S^{\frac{1}{p^2}}\right) = (K_1)^{\frac{1}{p}} = (F)^{\frac{1}{p^2}}$.类似地，$K_n = (F)^{\frac{1}{p^n}}$对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。所以 $L = \bigcup_n K_n = (F)^{p^{-\infty}}$，它是$F$. 的最小完美扩张。由此，引理得证。□

Us利用引理 10.3 和引理 10.5，我们证明下面的定理，它将定理 10.1 扩展到的情形剩余域非完善。

定理 10.6。设 F 的剩余域是非完善的。令 S 为 F 的一个 p-基，且$S' \subseteq A_F$中每个 S. 的元素恰好取一个代表元。那么，存在唯一的域单同态 $\alpha:\ F \to F$，使得 $\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq A_F$, $\alpha(S) = S'$ 以及 $\alpha(a) = a$ 对所有 $a \in F$.成立

证明。**存在性：** 根据引理 10.5，存在 L 的一个完备域扩张 F，其剩余域为 $L = (F)^{2^{-\infty}}$，即 F的最小完美扩张，并且 L 包含 $F\left((S')^{p^{-\infty}}\right)$.由于 L是完美的，根据定理 10.1，存在唯一的域单同态 $\beta:\ L \to L$，使得 $\beta(x) = x$ 对所有 $x \in L$.成立

步骤 1： 令 $a \in S$ 和 $x \in S'$ 为 a. 的代表元。现在，对于每个 $n \in \mathbb{N}$、$a^{p^{-n}} \in L$ 和 $x^{p^{-n}} \in L$，满足 $x^{p^{-n}} = a^{p^{-n}}$。因此

$$a = \overline{x^{p^{-n}}}^{p^n} = \overline{a_n}^{p^n}, \quad \text{where} \quad a_n = x^{p^{-n}}\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

于是，我们有

$$\beta(a) = \lim_{n\to\infty} a_n^{p^n} = x, \quad \text{(by definition of } \beta \text{ from (24))}.$$

因此，$\beta(S) = S'$。

步骤 2： 现在我们必须证明 $\beta(F) \subseteq F$.令 $a \in F^*$.那么，对于所有$n \in \mathbb{N}$，$a^{p^{-n}} \in F^{p^{-n}} = K_n$，其中 K_n 在引理 10.5 中定义。因此，存在 $a_n \in K_n$ 使得

$$v_{K_n}(a_n) = 0 \ \text{ and } \ \overline{a}_n = a^{p^{-n}}, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

回想一下， K_n 是通过添加 S' 的 p^n 次根（其中 F），然后再进行完备化构造的。因此，对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个序列 $\{a_{k,n} \mid k \in \mathbb{N}\} \subset F$ 使得

$$a_n = \lim_{k\to\infty} a_{k,n}^{p^{-n}}.$$

由于 F 是完备的，对所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$(a_n)^{p^n} = \lim_{k\to\infty} a_{k,n} \in F.$$

根据式 (24) 中 β 的定义，$\beta(a) = lim_{n\to\infty}(a_n)^{p^n} \in F.$ 因此，$\beta(F) \subseteq F \cap A_L = A_F$，其中 A_L，A_F 分别是 L 和 F 的赋值环。因此，我们定义映射 $\alpha\colon F \to F$，使得 $\alpha = \beta_{\overline{F}}.$ 现在，α 是一个域单同态，且 $\alpha(S) = S'$，$\alpha(a) = a$，对所有 $a \in F$ 均成立。

唯一性： 设 $\alpha_1\colon F \to \overline{F}$ 是一个域单同态，使得 $\mathrm{Im}(\alpha_1) \subseteq A_F$, $\alpha_1(S) = S'$ 且 $\alpha_1(a) = a$ 对所有 $a \in \overline{F}.$ 均成立。回忆一下，$L = F\left(\overline{S}^{p^{-\infty}}\right)$ 和 $F\left((S')^{p^{-\infty}}\right) \subseteq L.$ 因此，我们定义同态 $\beta' : L \to L$，其定义为：

$$\beta'_{|\overline{F}} = \alpha_1 \text{ and } \beta'\left(s^{p^{-n}}\right) = (\alpha_1(s))^{p^{-n}}, \text{ for all } n \in \mathbb{N} \text{ and for all } s \in S.$$

由于 S 在 F 中与 p 独立，β' 是定义良好的域同态。显然，对于所有 $x \in L.$，都有 $\mathrm{Im}(\beta') \subseteq A_L$ 且 $\beta'(x) = \overline{x}$。因此，β' 满足 $\overline{\beta}$ 的所有条件。根据定理 10.1，β 是唯一的，这意味着 $\beta = \beta'$。因此，$\alpha = \alpha_1.$。定理得证。□

下面的定理将定理 10.2 推广到了剩余域非完善的情形。

定理 10.7. 设 F、F、S、S' 和 α 如定理 *10.6* 中所定义。则 $F = \alpha(F)(\pi)$，其中 π 是一个一致化元。

证明。 证明与定理 10.2 的证明相同。 □

定义 10.8。 定理 *10.6* 中的单同态 α 称为 *Teichmüller* 提升，它依赖于 S 和 S'。

推论 10.9. 定理 *10.6* 的单射 α 诱导出一个自然同态 $\alpha' : H_p^{m+1}(F) \to H_p^{m+1}(F)$。此外，$\alpha'$ 是单射，且对于任意 $x \in A_F$ 和 $x_i \in A_F \setminus \pi A_F$，我们有：

$$\alpha'\left(\overline{x}\frac{\mathrm{d}\overline{x}_1}{\overline{x}_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}\overline{x}_m}{\overline{x}_m}\right) = x\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}x_m}{x_m}.$$

证明. 设 $\alpha'\colon H_p^{m+1}(F) \to H_p^{m+1}(F)$ 是由单射 $\alpha : F \longrightarrow F$ 诱导的同态。根据定理 10.6，对于每个 $\overline{x} \in A_F$，我们都有 $b_x \in A_F$，使得 $v(b_x) > 0$，并且

$$\alpha(\overline{x}) = x + b_x.$$

此外，对于任意 $x \in A_F \setminus \pi A_F$，我们有

$$(\alpha(\overline{x}))^{-1} = (x + b_x)^{-1} = (y_x + c_x),$$

其中 $x\overline{y_x} = 1 \in \overline{F}$ 和 $v(c_x) > 0.$。因此，对于每个 $x \in A_F \setminus \pi A_F$，我们得到

$$\frac{x}{\alpha(\overline{x})} = x(x + b_x)^{-1} = x(y_x + c_x) = 1 + d_x, \tag{27}$$

其中 $v(d_x) > 0$。现在对于 $x \in A_F$ 和 $x_i \in A_F \setminus \pi A_F$，我们有：

$$\begin{aligned}
\alpha'\left(\overline{x}\frac{\mathrm{d}\overline{x}_1}{\overline{x}_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}\overline{x}_m}{\overline{x}_m}\right) &= \alpha(\overline{x})\frac{\mathrm{d}(\alpha(\overline{x}_1))}{\alpha(\overline{x}_1)}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}(\alpha(\overline{x}_m))}{\alpha(\overline{x}_m)}\\
&= (x+b_x)\frac{\mathrm{d}(\alpha(\overline{x}_1))}{\alpha(\overline{x}_1)}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}(\alpha(\overline{x}_m))}{\alpha(\overline{x}_m)}\\
&= x\frac{\mathrm{d}(x_1+b_{x_1})}{x_1+b_{x_1}}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}(\alpha(\overline{x}_m))}{\alpha(\overline{x}_m)} \qquad (\text{as } b_x\in\wp(F))\\
&= \frac{xx_1}{\alpha(\overline{x}_1)}\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}(\alpha(\overline{x}_m))}{\alpha(\overline{x}_m)}+\frac{xb_{x_1}}{\alpha(\overline{x}_1)}\frac{\mathrm{d}(b_{x_1})}{b_{x_1}}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}(\alpha(\overline{x}_m))}{\alpha(\overline{x}_m)}\\
&= \frac{xx_1}{\alpha(\overline{x}_1)}\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}(\alpha(\overline{x}_m))}{\alpha(\overline{x}_m)} \qquad \left(\text{as } \frac{xb_{x_1}}{\alpha(\overline{x}_1)}\in\wp(F)\right)\\
&= x(1+d_{x_1})\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}(\alpha(\overline{x}_m))}{\alpha(\overline{x}_m)} \qquad (\text{by (27)})\\
&= x\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}(\alpha(\overline{x}_m))}{\alpha(\overline{x}_m)} \qquad (\text{since } xd_{x_1}\in\wp(F)).
\end{aligned}$$

对 $x_2,\ldots,x_m$重复此过程，可得：$\alpha'\left(x\,\mathrm{d}\overline{x}_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\overline{x}_m\right)=x\,\mathrm{d}\overline{x}_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\overline{x}_m$.

现在我们证明 α' 是单射。设 $x_i\in A_F$ 和 $x_{i_j}\in A_F\backslash\pi A_F$ 满足 $\sum_i x_i\,\mathrm{d}\overline{x}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\overline{x}_{i_m}\in\ker(\alpha')$.

于是，我们有:

$$\alpha'\left(\sum_i\overline{x}_i\frac{\mathrm{d}\overline{x}_{i_1}}{\overline{x}_{i_1}}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}\overline{x}_{i_m}}{\overline{x}_{i_m}}\right)=\sum_i x_i\frac{\mathrm{d}x_{i_1}}{x_{i_1}}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}x_{i_m}}{x_{i_m}}=0.$$

应用定义 10.12 (i) 中的剩余映射 χ_π，得到 $\chi_\pi\left(\sum_i x_i\,\mathrm{d}\overline{x}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\overline{x}_{i_m}\right)=0$。根据 χ_π 的定义，可得 $\chi_\pi\left(\sum_i x_i\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_m}\right)=\sum_i x_i\,\mathrm{d}\overline{x}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\overline{x}_{i_m}=0\in H_p^{m+1}(F)$。因此，$\alpha'$ 是单射。于是，我们将 $H_2^{m+1}(F)$ 视为 $H_p^{m+1}(F)$ 的一个子群.

□

推论 10.10。 根据定理 *10.6*， α 取决于 S、 S'。然而，推论 *10.9* 表明，α' 与 S 或 S'的选择无关。

推论 10.11。 由推论 *10.9*，我们得到 $H_p^{m+1}(F)\simeq\alpha'(\overline{H}_p^{m+1}(F))\subseteq H_p^{m+1}(F)$。

现在我们定义一些在本文中多次使用的剩余映射。

定义 10.12。 设 F 是特征为 p 的域，且 $v\colon F\to\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$ 是一个离散赋值，并以 π 作为一致化元。分别设 F_π 和 F_π 为 F 的剩余域和完备化。令 U_0 表示由元素 $a\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\frac{x_m}{x_m}$ 生成的 $H_p^{m+1}(F_\pi)$ 的子群，其中 $x_i\in F_\pi^*$和 $a\in F_\pi$ 满足 $v(a)\geq 0$。根据 [7, 定理 2。5]，，群 U_0 由以下形式加法生成

$$u\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}x_m}{x_m},\quad u\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}x_{m-1}}{x_{m-1}}\wedge\frac{\mathrm{d}\pi}{\pi},$$

其中 $u, x_i \in F_\pi$ 满足 $v(u) \geq 0$ 且 $v(x_i) = 0$ 对所有 i均成立。

(i) 剩余映射 $\zeta\colon\ U_0 \to H_p^m(F)$ 和 $\overline{\chi}_\pi\colon\ U_0 \to H_p^{m+1}(F)$ 在生成元上的定义如下:

$$\zeta\left(u\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}x_m}{x_m}+u'\frac{\mathrm{d}x'_1}{x'_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}x'_{m-1}}{x'_{m-1}}\wedge\frac{\mathrm{d}\pi}{\pi}\right)=\overline{u'}\frac{\mathrm{d}\overline{x'}_1}{\overline{x'}_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}\overline{x'}_{m-1}}{\overline{x'}_{m-1}}$$

and

$$\chi_\pi\left(u\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}x_m}{x_m}+u'\frac{\mathrm{d}x'_1}{x'_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}x'_{m-1}}{x'_{m-1}}\wedge\frac{\mathrm{d}\pi}{\pi}\right)=\overline{u}\frac{\mathrm{d}\overline{x_1}}{\overline{x_1}}\wedge\ldots\wedge\frac{\overline{x_m}}{\overline{x_m}}.$$

映射 ζ, χ_π 由 [6, 定理 2。5]良定义。剩余映射 ζ 与 π的选择无关，但 χ_π 取决于一致化元的选择。

(ii) 令 $H_p^{m+1}(F)'$ 为 $H_p^{m+1}(F)$中由元素 $a\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\mathrm{d}x_m}{x_m}$生成的子群，其中$x_i \in F^*$且 $a \in F$ 满足 $v(a) \geq 0$。令 $i\colon H_p^{m+1}(F)' \to H_p^{m+1}(F_\pi)$ 为同态 $j\colon H_p^{m+1}(F) \to H_p^{m+1}(F_\pi)$ 在 $H_p^{m+1}(F)'$ 上的限制，其中 j由标量扩张诱导。则 $Im(i) \subset U_0$。令 $\beta\colon H_p^{m+1}(F)' \to H_p^m(F_\pi)$ 和 $\beta_\pi\colon H_p^{m+1}(F)' \to H_p^{m+1}(F_\pi)$ 为由下式定义的剩余映射:

$$\beta := \zeta \circ i, \quad \beta_\pi = \chi_\pi \circ i.$$

下面的引理讨论 p-形式，这对于证明引理 3.7 至关重要。

引理 10.13。设 F 是一个特征为 p 的域，使得 $\{t_1, \ldots, t_n\}$ 在 F 和 $a \in F \setminus F^p$ 上是 p-独立的。若 p- 形式 $\langle\langle a, t_1, \ldots, t_n\rangle\rangle$ 是各向同性的，则有

$$\langle\langle a, t_1, \ldots, t_n\rangle\rangle_{\mathrm{an}} \simeq \langle\langle t_1, \ldots, t_n\rangle\rangle$$

其中，记号 φ_{an} 表示 p-形式 φ 的各向异性部分 [8] 。

证明。由于 $\{t_1, \ldots, t_n\}$ 在 K 上是 p-独立的，因此 p-形式 $\langle\langle t_1, \ldots, t_n\rangle\rangle$ 在 K 上是各向异性的。根据 [5, 推论 4.10],， p-形式 $\langle\langle a, t_1, \ldots, t_n\rangle\rangle_{\mathrm{an}}$ 的维数对于某个 $m \in \{0, \ldots, n+1\}$ 为 p^m。由于 $\langle\langle a, t_1, \ldots, t_n\rangle\rangle$ 是各向同性的，所以 $m < n+1$。因此，由命题 4.19] 可得

$$\psi := \langle\langle a, t_1, \ldots, t_n\rangle\rangle_{\mathrm{an}} \simeq a^i\langle\langle t_1, \ldots, t_n\rangle\rangle \quad \text{for some } i = 0, 1, \ldots, p-1. \tag{28}$$

因此 $\dim \psi = p^n$。由此，根据 [5, 推论 4.10], ，我们得到

$$\psi \simeq \begin{cases} \langle\langle t_1, \ldots, t_n\rangle\rangle \quad \text{(case 1)} \\ \quad \text{or} \\ \langle\langle a, t_{i_1}, \ldots, t_{i_{n-1}}\rangle\rangle \quad \text{where } 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leq n \quad \text{(case 2)}. \end{cases}$$

在情形 1 中，证明完毕。在情形 2 中，由 [5, 命题 4.6(i)], ，我们得到

$$\psi \simeq a\psi \simeq a^2\psi \simeq \ldots \simeq a^j\psi \quad \text{for any } j \in \mathbb{N}. \tag{29}$$

由 (28) 和 (29)，我们得到

$$\psi \simeq a^{p-i}\psi \simeq a^p\langle\langle t_1, \ldots, t_n\rangle\rangle \simeq \langle\langle t_1, \ldots, t_n\rangle\rangle.$$

因此，引理得证。 □

[8]参见 [5, 定义 2.11]，其中给出了 a p-形式的各向异性部分的明确界定。

References

[1] J.K. Arason, R. Aravire, R. Baeza, *On some invarients of fields of characteristic $p > 0$*, 《代数杂志》, 311 (2007), 714-735. [2] R. Aravire, B. Jacob, *Quadratic Forms over Rational Function Fields in Characteristic 2*, 《太平洋数学杂志》, 228 (1) (2006), 19–51. [3] R. Aravire, A. Laghribi, M. O'Ryan, *Transfer for Kato-Milne cohomology over purely inseparable extensions*, 《纯粹与应用代数杂志》, 226 (2022), 106930. [4] R. Baeza, *The norm theorem for quadratic forms over a field of characteristic 2*, 《代数通讯》, 18(5) (1990), 1337–1348.[5] D. W. Hoffmann, *Diagonal forms of degree p in characteristic p*, 《二次型的代数与算术理论》, 《当代数学》, 第344卷, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, (2004), 第135-183页。[6] O. Izhboldin, *p-primary part of the Milnor K-groups and Galois cohomologies of fields of characteristic p*, 《几何与拓扑专著》, 第3卷, Geometry & Topology Publications, 考文垂, (2000), 19–41. [7] O. Izhboldin, *On the cohomology Groups of the Field of Rational Functions*, 美国数学学会, 174, (1996), 21–44. [8] K. Kato, *Symmetric Bilinear Forms, Quadratic Forms and Milnor K-Theory in Characteristic Two*, 《数学发明》, 66 (1982), 493-510. [9] M. Knebusch, *Specialization of quadratic and symmetric bilinear forms, and a norm theorem*, 《算术学报》, 24 (1973), 279-299. [10] A. Laghribi, *The norm theorem for totally singular quadratic forms*, 《落基山数学杂志》, 36 (2) (2006), 575-592. [11] A. Laghribi, T. Maiti, *Kato-Milne cohomology group over rational function fields in characteristic 2, I*, 《K-理论年刊》, 10, 第3期, (2025), 509-562. [12] A. Laghribi, T. Maiti, *Kato-Milne cohomology group over rational function fields in characteristic 2, II*。已被《以色列数学杂志》接收。[13] A. Laghribi, D. Mukhija, *The norm theorem for semisingular quadratic forms*, 《纯粹与应用代数杂志》, 225(6) (2021), 论文编号106601, 共13页。[14] J. Milnor, *Algebraic K-Theory and Quadratic Forms*, 《数学发明》, 9 (1970), 318–344. [15] P. Morandi, *Field and Galois Theory*, 《数学研究生教材》, 167。施普林格出版社, 纽约, 1996。xvi+281 页。[16] D. Mukhija, *Two applications of the Transfer for Kato-Milne Cohomology over Purely Inseparable Extensions*, R. Aravire、A. Laghribi、M. O'Ryan 的论文 *"Transfer for Kato-Milne cohomology over purely inseparable extensions"* 的附录。《纯粹与应用代数杂志》, 226 (2022), 106930. [17] P. Ribenboim, *The Theory of Classical Valuations*, 《施普林格数学专著》, (1999)。[18] O. Schilling, *The theory of Valuations*, 《数学综论》, 第4期, 美国数学学会, 纽约, (1950), vii+253 页。[19] L. Xiao, *Nonarchimedean differential modules and ramification theory*, 麻省理工学院, (2009)。