arXiv:2611.29524v1 [math.DS] 22 Nov 2026

三维竞争 Lotka–Volterra 系统中的八个极限环

Haoyu Albert Wang[1,2] Yuxiu Shao[3] Wei P. Dai[1]

[1]复旦大学智能复杂系统研究院[2]复旦大学类脑智能科学与技术研究院[3]蔚蓝海岸大学，J. A. Dieudonné 实验室′，瓦尔罗斯公园，06108 尼斯邮政专用区 2，法国

haoyuwang18@fudan.edu.cn Yuxiu.SHAO@univ-cotedazur.fr weidai@fudan.edu.cn

摘要

Gyllenberg 和 Yan 猜想，三维竞争 Lotka–Volterra 系统至少可以有五个极限环。我们通过构造一个严格竞争系统证明了这一猜想：在该系统中，八个互不相同的极限环共存于同一个正平衡点附近。对于每个 $m = 5$，6、7、8，我们构造一个 m 阶弱焦点，并确定 Hopf 超曲面上的参数方向，使得可以独立改变前 $m-1$ 个焦点量。我们对这些焦点量进行选取，使标量振幅函数的漂移在 m 条嵌套等值曲线上交替变号，从而在每一对相邻曲线之间迫使出现一个极限环。沿着横截于 Hopf 超曲面的方向施加扰动，会在其余极限环内侧再产生一个极限环。单周位移映射表明，这两种局部计数都是精确的。对于每个 m，我们都给出严格的计算机辅助证明，证明一个显式的有理相互作用矩阵至少产生 m 个互不相同的双曲极限环。我们感谢 GPT-6 Astra 帮助我们比较早期构造、找出拓展这些构造的主要障碍，并发展出本文的方法。

1 五环猜想

在三物种竞争型 Lotka–Volterra 方程中，任何物种的数量增加时，每个物种的人均增长率都会下降。极限环代表一种孤立的丰度周期模式。Gyllenberg 和 Yan 曾提出，对于同一组增长率和相互作用速率 [1]，是否至少能有五种这样的模式共存。这是他们猜想中的存在性部分，在 [2] 中表述为猜想 1.2(i)。

我们采用这样的单位，使每个物种在平衡点处的丰度均为 1。模型及其相互作用矩阵为

$$\dot{x}_i = -x_i \sum_{j=1}^{3} A_{ij}(x_j - 1), \qquad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \qquad A_{ij} > 0. \tag{1}$$

因此，增长率是 A的行和。这种归一化是将每个物种的丰度除以其正平衡值所得。 A的正性使所有交叉相互作用对 $x_i > 0$ 都严格具有竞争性。

定理 1。对于 $m = 5$，6、7、8，辅助数据中指定的有理矩阵 A_m 定义了一个系统 (1)，其中至少有 m 个正八分体内互不相同的双曲极限环。按截面半径递减的顺序， m 经认证的周期轨道在吸引型和鞍型之间交替，且以吸引环开始。

截面半径根据轨道穿过一条经过平衡点的固定半平面的位置对其排序。因此，对于 A_5 和 A_7，最内侧的经认证周期轨道是吸引型；而对于 A_6和 A_8，它是鞍型。鞍型周期轨道在一个横向上吸引，在另一个横向上排斥。附录 A给出了 A_8的全部八条周期轨道共用的九个系数。这为该类系统中可共存的周期轨道数量提供了一个下界。下面的上界仅涉及收缩至指定平衡点的周期轨道。

早期构造将正平衡点附近的小周期轨道与关于边界上流的信息相结合。Yu、Han 和 Xiao 在一个平衡点周围构造了四个小周期轨道[2]。Tian 和 Yu 讨论了通过将七个小周期轨道与一个较大的周期轨道相结合来达到八个周期轨道的一种可能途径 [3]。Li 和 Jiang 给出了若干竞争类中的显式临界参数 [4]，Hu、Lu 和 Luo 则在竞争类 28 [5] 中构造了四个周期轨道。

在八阶临界矩阵处，绕行一周后振幅的首次非零变化的次数为十七。这给出了该平衡点附近小周期轨道数量的上界。我们通过调节标量函数 V 在一族嵌套等值曲线上的漂移，达到了这一上界。为选择固定矩阵 A_8，我们将标量漂移系数与一个具有八个指定正根的多项式相匹配。这些根给出了打靶法的初始半径。随后，对原方程进行区间积分，验证了八个不同的闭轨，并确定了它们的稳定性。

2 从弱焦点到小周期轨道

在 Hopf 点，小振荡没有线性增长或衰减趋势。径向漂移的首个非零项决定了弱焦点的阶。我们找到了每个阶数 $m=5$、6、7、8 的一个焦点，并证明在那里恰好可以分岔出 m 个周期轨道；如果参数必须保持在 Hopf 曲面上，则恰好可以分岔出 $m-1$ 个周期轨道。这里的数量是指在任意小的参数变化下，能够收缩到该平衡点的周期轨道的最大数目。

令 $u=x-\mathbf{1}$为（1）的平衡点 $\mathbf{1}=(1,1,1)^{T}$的位移。则 $\dot{u}=Ju+Q(u)$，其中 $J=-A$ 为线性化，$Q(u)=-\operatorname{diag}(u)Au$为二次部分。 J的特征多项式为 $\lambda^{3}+(\operatorname{tr}A)\lambda^{2}+S\lambda+D$，其中$\operatorname{tr}A=a+e+i$，$S=ae+ai+ei-bd-cg-fh$且 $D=\det A$。Hopf 曲面由满足 $D=S\operatorname{tr}A$和 $S>0$的矩阵构成。在该曲面上，多项式可分解为$(\lambda+\operatorname{tr}A)(\lambda^{2}+S)$。振荡特征值为$\pm\mathrm{i}\omega$，其中$\mathrm{i}^{2}=-1$且$\omega=\sqrt{S}$ 为角频率。它们的和为零，因此第三个特征值等于 J的迹，即 $-\operatorname{tr}A<0$。由于 $\partial_{c}(D-S\operatorname{tr}A)=dh+(a+i)g>0$，Hopf 方程可由其他元素确定 c。令 α 表示当其他元素固定、 c 变化时，这对振荡特征值的实部。在 $\lambda=\mathrm{i}\omega$处对特征方程求导，得到

$$\partial_{c}\alpha=\frac{dh+(a+i)g}{2\big(S+(\operatorname{tr}A)^{2}\big)}>0. \tag{2}$$

计算焦点阶。 对于 Hopf 曲面上的矩阵，设 q 是 J 对应于 $\mathrm{i}\omega$ 的一个特征向量，$\bar{q}$ 是其对应于 $-\mathrm{i}\omega$ 的复共轭，并设 v_{st} 是对应于负特征值的一个实特征向量。每个位移 u 都有唯一展开式

$$u=zq+\bar{z}\,\bar{q}+wv_{\mathrm{st}}.$$

z 的实部和虚部描述特征值对$\bar{z}$ 所在平面内的振荡，z是 w 的复共轭，而 z 是沿稳定方向的实坐标。在线性化方程中，ω以角频率w旋转，而稳定分量则按$t(=w)\,[-t\,(0)\,\exp A]\operatorname{tr}A+$衰减。为确定证明中使用的基，我们取$\omega I\,\mathrm{i}\,q$的前两行的叉积作为 $A-$，并取 $A(\operatorname{tr}I)\,v_{\mathrm{st}}$的前两行的叉积作为 I，其中z是单位矩阵，然后将每个向量除以其第一个分量。在每个经认证的参数盒上，这些分量和基底行列式都保持非零，因此坐标（，$\bar{z}$，w）$^{T}=[q\ \bar{q}\ v_{\mathrm{st}}]^{-1}u$ 在该处关于矩阵光滑变化。

线性李导数 $\mathcal{L}$ 沿着 $\dot{u} = Ju$的解对标量函数求导。它将总次数为 $n = j + k + \ell$的单项式 $z^j \bar{z}^k w^\ell$乘以 $\mathrm{i}\omega(j-k) - \ell\,\mathrm{tr}\ A$。这个因子仅在 $\ell = 0$和 $j = k$时为零。令 Π_n 在偶数次时将齐次多项式投影到唯一的径向单项式 $(z\bar{z})^{n/2}$ 上，在奇数次时则投影为零。从平方振幅 $V_2 = z\bar{z}$ 开始，选择每个次数为n 的修正项 V_n ，以消去次数为n 的漂移R_n 在此投影之外的部分。对于 $3 \le n \le 2m+2$ ，递推关系为

$$R_n = DV_{n-1}\,Q, \qquad \mathcal{L}V_n = -(I - \Pi_n)R_n, \qquad \Pi_n V_n = 0. \tag{3}$$

这里， $DV_{n-1}\,Q$ 是在相同坐标下沿二次向量场的 V_{n-1} 。除以非零单项式因子即可确定 V_n的系数。剩余的径向漂移通过 $\Pi_{2j+2}R_{2j+2} = L_j|z|^{2j+2}$定义了第 j个焦点量 L_j 。借助 $V = \sum_{n=2}^{2m+2} V_n$，逐次数消去为完整向量场给出 $\dot{V} = \sum_{j=1}^{m} L_j|z|^{2j+2} + O(\|u\|^{2m+3})$。包含稳定变量的项会在每一次数递推中出现。尽管它们的线性除子可逆，但它们与二次向量场的乘积可能在更高次数上对共振投影产生贡献。

对于每个阶 m，令 ξ收集表 1 中列出的 $m-1$ 个自由项。改变这些项，固定其他独立项，并通过 Hopf 方程求出 c。这样，在选定切片上得到一个方形方程组 $F(\xi) = (L_1, \dots, L_{m-1}) = 0$。在根的数值近似 ξ_0 附近，取盒 $X = \{\xi : \ \|\xi - \xi_0\|_\infty \le \Delta\}$ ，其统一的坐标半宽为表中列出的 Δ 。采用向外舍入的球算术在 X上计算（3），并在那里对雅可比矩阵 DF 进行包络。我们通过取区间包络 $DF(\xi_0)^{-1}$的逐项中点来选取 R 。对于每一行 k，令 q_k给出 $I - RDF$在整个X上的绝对行和上界。于是， $h_k = |(RF(\xi_0))_k| + \Delta q_k$ 给出了应用 $\xi \mapsto \xi - RF(\xi)$后，盒中心在坐标 k 方向上的距离上界。表 1 中的检验给出

$$\max_k q_k < 1, \qquad \max_k h_k < \Delta, \qquad 0 \notin L_m(X).$$

坐标图和特征基的分母始终与零保持距离，其中 $A > 0$ 逐项成立，且$S > 0$ 在整个范围内成立。第一个不等式表明， RDF 在 X上可逆，因此两个方阵因子都可逆。于是， $\xi \mapsto \xi - RF(\xi)$ 将 X映入其内部，且其唯一不动点是 F 的精确零点，其导数非奇异。固定切片的其他坐标后，该盒隔离出临界矩阵。在完整参数空间中，这一计算确定了 Hopf 超曲面上导数的一个非奇异子式。

表 1：四个临界点。所列矩阵元素在 Hopf 曲面上变化，且 c 由 $D = S\,\mathrm{tr}\,A$确定。上界 B_0 大于 $\max_k q_k$ 和 $\max_k h_k/\Delta$。最后一列给出了整个盒上第一个非零焦点系数的包络区间。

阶	自由元素	盒半径 Δ	B_0	L_m
5	e, i, g, b	10^{-30}	$3.19\,10^{-17}$	$[-2.06392, -2.06391]\,10^{-6}$
6	e, g, d, f, i	10^{-30}	$1.36\,10^{-15}$	$[-1.83957, -1.83956]\,10^{-6}$
7	e, b, d, g, f, i	10^{-32}	$1.62\,10^{-14}$	$[-3.79062, -3.79061]\,10^{-8}$
8	e, f, d, g, b, i, h	10^{-32}	$7.64\,10^{-13}$	$[-2.61971, -2.61970]\,10^{-7}$

根据标量漂移计数小周期轨道。 固定一个阶数为 m 的经认证的Hopf矩阵 A_* ，并写作 $\lambda = L_m(A_*) < 0$。我们用 V 既衡量转一圈后振幅的变化 $\dot{}$ ，也根据 V 的符号定位周期轨道。加入常参数 $A = 0$ ，并选取扩展系统的局部中心流形 C^{2m+4} [6, 7]。该中心流形在每个邻近矩阵处的切片都是一个二维不变曲面，其中包含所有充分小的周期轨道。将线性特征基光滑地延拓到邻近矩阵。在每个切片上，稳定坐标为 $w = O(|z|^2)$，振荡坐标满足 $\dot{z} = (\alpha + \mathrm{i}\omega)z + O(|z|^2)$，其中 $\omega > 0$。因此，极角在一个小的穿孔圆盘内始终递增。

在Hopf切片上令 $s=|z|^2$。将标量计算（3）限制在该切片上，可得在 A_* 附近一致成立的结果，

$$V=s+O(s^{3/2}),\qquad \dot V=\sum_{j=1}^{m}L_j(A)s^{j+1}+O(s^{m+3/2}).$$

因此， $\rho=\sqrt{V}$ 在此处衡量振幅。对于 $r=|z|>0$， $\partial_r V=2r+O\left(r^2\right)>0$，所以 V 的小正水平集是相互嵌套的闭合轨道，每条射线都恰好与它们相交一次。在 A_* 处，恒等式 $2\rho\dot\rho=\dot V$ 给出 $\dot\rho=\left(\lambda/2\right)\rho^{2m+1}+O\left(\rho^{2m+2}\right)$。因此，振荡呈螺旋状向内收敛。

单次旋转所得的上界。将实 z 轴作为截面。记 $P_A\left(\sigma\right)$ 为从 $z=\sigma$ 出发完整旋转一周后到达的带符号坐标，并令 $H_A\left(\sigma\right)=P_A\left(\sigma\right)-\sigma$，其中 $P_A(0)=0$。此映射关于 $\left(\sigma,\ A\right)$ 在零的两侧均具有所需阶数的光滑性。事实上，在带符号坐标为 p 的 $z=pe^{\mathrm{i}\theta}$ 中，约化向量场在 $pe^{\mathrm{i}\theta}$ 处的取值含有因子 p，其商函数光滑。角速度在 $p=0$ 处延拓为 $\omega>0$，因此从 0 到 2π 对 $dp/d\theta$ 积分，便在整个截面上定义了同一个光滑映射。

在 A_* 处令 $T_*=2\pi/\omega_*$。线性近似给出转一圈后的 $z(t)=\sigma e^{\mathrm{i}\omega_* t}+O(\sigma^2)$，其持续时间为 $T_*+O(|\sigma|)$。因此 $P_{A_*}(\sigma)=\sigma+O(\sigma^2)$。令 $v(\sigma)$ 表示该矩阵处截面上的 V。沿轨道对 V 积分，得到

$$v(P_{A_*}(\sigma))-v(\sigma)=T_*\lambda\,\sigma^{2m+2}+O(|\sigma|^{2m+3}).$$

由于 $v'(\sigma)=2\sigma+O(\sigma^2)$，左边也等于 $(2\sigma+O(\sigma^2))H_{A_*}(\sigma)$。因此

$$H_{A_*}(\sigma)=\frac{\pi\lambda}{\omega_*}\sigma^{2m+1}+O(|\sigma|^{2m+2}).\tag{4}$$

因此， H_A 的第 $(2m+1)$ 阶导数在一个公共截面区间上，对于所有充分接近 A_* 的 A，始终非零。反复应用罗尔定理可知， H_A 在该区间内至多有 $2m+1$ 个零点，按重数计。每个小周期轨道在截面的每一半上都对应一个零点，因为单圈映射是递增的，而且该映射的每个周期点都是不动点。平衡点还额外提供一个零点。在每个邻近的 Hopf 切片上，我们有 $\dot V=O(|z|^4)$。同样地，积分并除以 $2\sigma+O(\sigma^2)$，得到 $H_A(\sigma)=O(|\sigma|^3)$。于是平衡点处的零点至少计为三重。因此，一般情况下， N 个小周期轨道要求 $1+2N\le 2m+1$，而在 Hopf 曲面上则要求 $3+2N\le 2m+1$。

通过改变相互作用速率达到这些上界。在 Hopf 曲面上，选取一个较小的平方振幅尺度 $\delta>0$ 并构造

$$Q_\delta(s)=\lambda s^2\prod_{k=1}^{m-1}(s-k\delta).$$

由表1 中的非奇异雅可比矩阵以及逆函数定理可知，在选定切片上存在一个矩阵 A_δ，使得对于每个 $1\le j<m$， L_j 都等于 Q_δ 中 s^{j+1} 的系数。这些目标值为 $O(\delta)$，因此 $A_\delta=A_*+O(\delta)$ 且 $L_m(A_\delta)=\lambda+O(\delta)$。考察 $t=\frac{1}{2},\ 32,\ \ldots\ldots,\ m-\frac{1}{2}$ 对应的 m 级。对于每个完整的闭合轨道 $s=\delta t+O(\delta^{3/2})$。代入标量漂移后得到

$$\delta^{-(m+1)}\dot V=\lambda t^2\prod_{k=1}^{m-1}(t-k)+O(\sqrt{\delta}).$$

事实上，这些级上的标量余项为 $O(\delta^{m+3/2})$，而最高阶系数的变化贡献 $O(\delta^{m+2})$。误差界关于角度是一致的。所显示的首项值符号交替，且均不为零。

从正截面上的这些高度之一出发。当 $V>0$ 位于闭合轨道上时，轨道向外穿过，且在绕行过程中无法再次穿过该闭合轨道。因此，它返回时的截面坐标更大。当 $V<0$ 时，返回时的截面坐标更小。因此，H_{A_δ} 在

相邻测试点处符号相反。由连续性可知，在 $m-1$ 个中间区间内各有一个不动点，且它们对应同一个 Hopf 矩阵。

固定 δ，并使 c 稍稍偏离该矩阵。所选截面坐标处严格的返回符号由连续性保证仍然成立。根据（2），我们可以选择 α 的符号，使其与最内侧测试点处的返回符号相反。线性运动的单周乘子为 $P_A'(0) = \exp(2\pi\alpha/\omega)$。因此，对于所有充分小的 $H_A(\sigma)$，其符号与 α 相同。零点与最内侧测试点之间还存在一个不动点。如有必要，将横向扰动取为小于 δ，即可得到趋于 A_* 的矩阵，且所有 m 周期轨道都收缩至平衡点。

这两种构造都达到了相应的罗尔界，包括重数。因此，每个非零不动点都是单根，其正截面乘子 P_A' 不等于一。随着周期轨道收缩，它们的周期趋于 T_*。根据变分流的连续性，横向于不变曲面的乘子趋于 $\exp[-T_*\mathrm{tr}(A_*)] < 1$。因此，所有构造出的周期轨道都是双曲的。特别地，八阶点处的局部最大值在 Hopf 曲面上为七，在曲面外为八。每个计数都能在任意接近 A_* 的某个正矩阵处达到。

3 选择四个固定系统

我们使用标量函数 V 在Hopf 曲面外选择一个固定矩阵。记 $-A$ 的特征值为 $\alpha \pm \mathrm{i}\omega$ 和 $\lambda_{\mathrm{st}} = -\mathrm{tr}\,A - 2\alpha$，并将 $s = |z|^2$ 置于延拓的线性特征基中。在（3）中，保留对 s 幂的相同投影以及相同的条件 $\Pi_n V_n = 0$。对于 $z^j\bar{z}^k w^\ell$，线性除子现在为 $(j+k)\,\alpha + \mathrm{i}\,(j-k)\,\omega + \ell\lambda_{\mathrm{st}}$。在此处使用的每个次数下，投影之外的除子在经认证的Hopf矩阵附近仍然非零。因此，系数 L_j 从Hopf 曲面平滑延拓。线性向量场对 $2\alpha s$的贡献为 V_2，从而得到标量漂移

$$\dot{V} = sD_A(s) + O(\|u\|^{2m+3}), \qquad D_A(s) = \sum_{k=0}^{m} L_k(A)s^k, \qquad L_0(A) = 2\alpha. \tag{5}$$

表1 中的Hopf曲面雅可比矩阵和横向导数（2）给出 m个彼此独立的参数方向，用于（L_0，……，L_{m-1}）。

对于尺度 $\varepsilon > 0$，指定目标半径 $j\varepsilon$, $1 \le j \le m$。我们构造它们的平方半径多项式，并数值求解以下 m 个方程。

$$\prod_{j=1}^{m}(s - j^2\varepsilon^2) = \sum_{k=0}^{m} p_k(\varepsilon)s^k, \qquad L_k(A) = L_m(A)\,p_k(\varepsilon), \quad 0 \le k < m. \tag{6}$$

在 $\varepsilon = 0$ 所有 p_k 均 $k < m$ 消失的情况下，因此这些方程的参数雅可比矩阵就是刚刚得到的满秩雅可比矩阵。隐函数定理给出了经过临界矩阵的一条分支。对于表 2中的有限组选取，我们在每个试探矩阵处重新计算 L_m。我们改变表 1中列出的元素，同时改变 α。给定 $S_0 = ae + ai + ei - bd - fh$ 和 $D_0 = aei - afh - bdi + bfg$，特征多项式给出剩余元素 $c = A_{13}$ 为

$$c = \frac{(\mathrm{tr}\,A + 2\alpha)S_0 + 2\alpha(\mathrm{tr}\,A + 2\alpha)^2 - D_0}{dh + (a + i + 2\alpha)g}.$$

在八阶时， $p_0 = (8!)^2\varepsilon^{16}$。方程 $2\alpha = L_8 p_0$ 说明了要确定原点处的线性增长率所需的精度。

将每个得到的矩阵冻结为精确十进制数 A_m 后，我们使用区间算术检查每个目标值 $L_m p_k$ 附近 D_{A_m} 的符号。在四个冻结矩阵中，每个 L_k 与其目标值 $L_m p_k(\varepsilon)$之间的相对差异均小于 2×10^{-97}。对于每个 j ，正半截面半径区间$\varepsilon(j - 10^{-60},\ j + 10^{-60})$都包含 $D_{A_m}(r^2)$ 的一个单根；端点符号相反，且 D_{A_m} 在 s中的次数，为此提供了认证。为找出完整系统中对应的闭轨，我们取经过平衡点的一个截面。其基矩阵 B 由线性化$-A_m$构造。我们计算对应于具有正虚部特征值的特征向量 v_{osc} ， 以及一个实

特征值为负实特征值的特征向量 v_{st} 。将它们的首个分量归一化为 1 后，我们取列向量 2 Re v_{osc}、 $-2\mathrm{Im}\ v_{\mathrm{osc}}$ 和 v_{st}的有限小数近似值。这些小数精确定义了 B。在坐标 $x-\mathbf{1}=B(\rho,\eta,v)^{T}$中，前两个坐标描述振荡方向， v 描述稳定方向。正半截面为 $\eta=0,\rho>0$。我们称该截面上的 ρ 为截面半径。从每个目标值 $\rho=j\varepsilon$附近出发，我们固定一个试探ρ ，并求解关于周期和初始稳定坐标的两个返回条件，分别涉及 η 和 v 。随后改变 ρ ，使其自身的单周位移为零。第4节中的区间检验验证了同一矩阵下，每个截面区间 $((j-\frac{1}{2})\varepsilon,(j+\frac{1}{2})\varepsilon)$ 内都存在一条闭轨。

精确到小数点后六位，八周期矩阵为

$$A_8 \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0.778387 & 1.615870 \\ 1.125158 & 0.813528 & 0.404240 \\ 1.132158 & 1.916409 & 1.701148 \end{pmatrix}.$$

证明中使用附录A中的完整矩阵项。该矩阵对应的最内侧和最外侧截面半径约为 0。001501 和 0。012206。从图1中的投影可以看出，即使是最外侧轨道也紧邻平衡点。

表2 汇总了对全部四个系统进行的检验。盒半径 Δ 是用于包围截面坐标 (ρ,v) 以及每个周期轨道的未知周期 $\mathcal{T}$ 的共同半宽。第4 节中的闭合检验使用 q 来给出其收缩因子的上界。慢乘子是首次返回映射的导数中最接近 1 的特征值。此处，该映射将一个邻近初始点沿轨道带到其与正半截面的下一次交点。记 μ_{slow} 为该特征值，我们报告其带符号差值 $\delta=\mu_{\mathrm{slow}}-1$。

A_8的平衡点也具有吸引性。 $-A_8$的三个特征系数为 $\operatorname{tr}A_8$、 S、 D，有理数代入可得 $3.5840\times10^{-42}<S\operatorname{tr}A_8-D<3.5841\times10^{-42}$。随后，三次劳斯–赫尔维茨判据表明，三个平衡点特征值均位于左半平面。

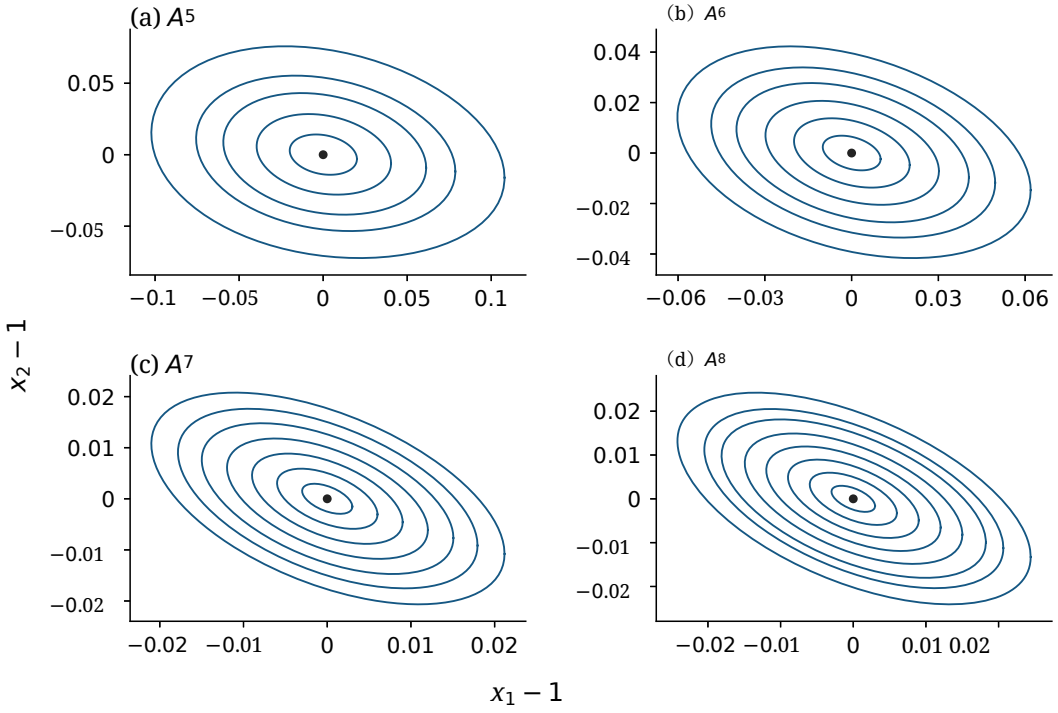


图1：已验证周期轨道在相对于平衡点的前两种物种偏差上的数值投影。每幅投影中的中心点表示 (1，1，1)。各面板的尺度不同。

表2：对每个固定矩阵的验证。上界涵盖该行中的每条轨道。此处 $x_{\min}$是包围完整轨道的管状邻域内物种丰度的最小值。

矩阵	尺度 ε	已证明的周期	盒半径 Δ	$q<$	$x_{\min}>$	$\lvert\delta\rvert>$
A_5	.010	5	10^{-50}	$8.50\,10^{-5}$	.8977	$1.054\,10^{-21}$
A_6	.005	6	10^{-60}	$7.81\,10^{-22}$	.9397	$8.115\,10^{-28}$
A_7	.0015	7	10^{-85}	$2.63\,10^{-24}$	.9789	$2.199\,10^{-39}$
A_8	.0015	8	10^{-85}	$6.46\,10^{-27}$	.9757	$1.532\,10^{-42}$

4 固定系统的直接证明

对于每个固定矩阵，我们直接在（1）中证明周期轨道。每个输入小数均表示一个精确有理数。对于位移 $u = x - \mathbf{1}$，将向量场记为 F，因此$\dot{u} = F$（u），其中

$$F(u) = -Au - u \odot Au,$$

其中 $\odot$ 表示逐分量乘法。用 $\varphi_t(u_0)$表示从 u_0出发、经过时间 t 后的解。使用第 3 节中的截面基 B，并验证其在冻结的小数项处的可逆性。在 $u = B(\rho, \eta, v)^T$中，正半截面为 $\eta = 0, \rho > 0$。令 $C = B^{-1}, E = [B_{\cdot 1}\ B_{\cdot 3}], n^T = C_{2\cdot}$，并令 L 依次由 C的第一行和第三行组成。这里，$B_{\cdot j}$ 表示列 j，$C_{j\cdot}$ 表示行 j。矩阵 E 将截面坐标嵌入状态空间，n^T提取截面法向坐标，而 L 提取两个截面坐标。

4.1 闭合与严格积分

设 $y = (\rho,\ v)^T$，并令 $\mathcal{T}$为未知的正返回时间。对于三个未知量 $\mathbf{z} = (\rho,\ v,\ \mathcal{T})^T$，闭合方程及其关于 $\mathbf{z}$ 的导数为

$$G(y, \mathcal{T}) = \varphi_{\mathcal{T}}(Ey) - Ey = 0, \qquad DG = \big[D\varphi_{\mathcal{T}}(Ey)E - E\ \ F(\varphi_{\mathcal{T}}(Ey))\big]. \tag{7}$$

从数值打靶解出发，我们通过牛顿迭代细化中心 $\mathbf{z}_c$，并将其坐标固定为精确十进制数。取表 $\Delta > 0$ 中的统一半宽 2，盒 $X = \mathbf{z}_c + [-\Delta, \Delta]^3$包含试探初始坐标和周期。其周期区间为 $[\mathcal{T}_-, \mathcal{T}_+]$，其中 $\mathcal{T}_- > 0$。我们单独包围 $G(\mathbf{z}_c)$，并在整个 DG 范围内包围 X。与焦点检验一样，我们根据 R_0 的区间逆矩阵各元素的二进制中点，构造一个固定的近似逆矩阵$DG(\mathbf{z}_c$。令 q_i 界定 i 的第 $I - R_0 DG$ 行在整个 X范围内的绝对行和。检验结果为

$$q := \max_i q_i < 1, \qquad \max_i \big(|(R_0 G(\mathbf{z}_c))_i| + \Delta q_i\big) < \Delta. \tag{8}$$

因此，$\mathbf{z} \mapsto \mathbf{z} - R_0 G(\mathbf{z})$ 将 X 严格映入自身，且构成压缩映射。此外，$R_0 DG(\mathbf{z})$ 根据纽曼级数判据可逆，因此 R_0 和 $DG(\mathbf{z})$ 均可逆。因此，该压缩映射的唯一不动点满足闭合方程。我们还验证了终端包围区域上的截面横截性，$n^T F \neq 0$。结合周期为正这一条件，可排除平衡点。包围计算从 $W(0) = E$ 开始，对状态及两列切向列进行泰勒积分。因此，$W(t) = D\varphi_t(Ey)E$ 是关于截面坐标的导数矩阵。每一步都展开 $u(t) = \sum_{k\ge 0} u_k t^k$ 和 $W(t) = \sum_{k\ge 0} W_k t^k$，并在步长边界处将时间重置为零。它们的系数满足

$$u_{k+1} = -\frac{Au_k + \sum_{j=0}^{k} u_j \odot Au_{k-j}}{k+1}, \tag{9}$$

$$W_{k+1} = -\frac{AW_k + \sum_{j=0}^{k} [\operatorname{diag}(u_j)A + \operatorname{diag}(Au_j)]W_{k-j}}{k+1}. \tag{10}$$

两个递推式均采用球算术计算。以下解析界说明了为何可以在所选整数阶数 p处截断。设 $h_{\max}$ 为要涵盖的最大步长。

下文中的范数指向量无穷范数及其诱导矩阵范数。在每一步开始时，选取$b \ge \sup \|u\|_\infty$、 $\sigma > 0$、 $a = b + \sigma$和 $\beta \ge \|A\|_\infty$。定义 b时所取的上确界覆盖输入状态盒，而 σ 是用于导数估计的附加复坐标半径。选取满足以下条件的时间半径 $R > h_{\max}$

$$d_R = 1 + a - ae^{\beta R} > 0, \qquad M = \frac{ae^{\beta R}}{d_R}, \qquad \kappa = h_{\max}/R < 1.$$

标量解 $g' = \beta(g + g^2)$（ $g(0) = a$）具有非负泰勒系数，并对范数不超过 a 的复初始状态下的状态递推构成主控。它在半径为 R 的时间圆盘上，以 M 为界控制解析流。因此，利用半径为 σ 的多圆盘，通过对时间和各个初始坐标应用柯西估计，可得

$$\tau_u = M\frac{\kappa^{p+1}}{1-\kappa}, \qquad \tau_{W,j} = \frac{\tau_u}{\sigma}\sum_i \sup|(W_0)_{ij}|. \tag{11}$$

截断后，这些上界控制每个状态分量以及切向列 j 中各分量的余项。切向上界使用传入的 W_0。在进行区间多项式求值后加上这些尾项，即可逐步包住流及其导数。在 $[0, h_{\max}]$ 上求值还可得到一个管状邻域，将步长内到达的所有状态包住。严格的主控不等式允许使用稍大的时间圆盘，从而保证在其边界上应用柯西估计是合理的。最后一个区间步长将 X 中的每个 $\mathcal{T}$ 都包住，同时步长均为非负，且均验证了相同的解析不等式。

4.2 单圈与不同周期轨道

令 $Y = Cu$。对于其投影（Y_1， Y_2），定义到原点的平方距离 $Q_\perp$ 和角速度 Ω 如下

$$Q_\perp = Y_1^2 + Y_2^2, \qquad \Omega = \frac{Y_1(CF(u))_2 - Y_2(CF(u))_1}{Q_\perp}.$$

令 Ω_- 和 Ω_+ 分别为整步管上的角速度统一下界和上界。在这些管内，我们验证 $1 + u_i > 0$、 $Q_\perp > 0$ 和 $0 < \Omega_- \le \Omega \le \Omega_+$，以及 $\Omega_+\mathcal{T}_+ < 4\pi$。因此，闭轨的提升角严格递增，其总增量是小于 4π 的 2π 的正整数倍。它恰好转一圈。因此，其周期是最小周期，并且每个周期恰好与正半截面相交一次。对于相同的矩阵和截面，互不相交的 ρ 区间因此代表几何上不同的正周期轨道。

4.3 横向乘子

截面返回导数的两个特征值就是横向弗洛凯乘子。它们衡量一个周期内沿流方向之外的压缩或扩张；流方向上的乘子为 1。我们将最接近 1 的乘子称为 μ_{slow}，并报告其有符号偏移量 $\delta = \mu_{\mathrm{slow}} - 1$。

在周期根处，令 $f_{\mathcal{T}} = F(\varphi_{\mathcal{T}}(Ey))$ 和 $W = D\varphi_{\mathcal{T}}(Ey)E$。将截面坐标中的首次返回映射 y 记为 $\mathcal{P}$。对截面条件求导可得

$$D\mathcal{P} = L\left(I - \frac{f_{\mathcal{T}} n^T}{n^T f_{\mathcal{T}}}\right) W. \tag{12}$$

横截性使分母不为零。该修正考虑了返回时间对初始点的依赖性。在 X 上进行区间求值，可将唯一周期根处的这个导数包含在内。

表3： A_8 的八个周期轨道按截面半径递增的顺序排列 ρ。半径和最小周期$\mathcal{T}$取盒中心的舍入值。δ 的区间已向外舍入。在全部八行中，另一个横向乘子介于 1.502×10^{-15} 和 1.507×10^{-15} 之间。

周期轨道	ρ	$\mathcal{T}$	$\delta=\mu_{\mathrm{slow}}-1$	稳定性
1	.001500804	9.710336328	$[1.53281,1.53282]\,10^{-42}$	鞍点
2	.003003216	9.710377072	$[-2.18975,-2.18974]\,10^{-42}$	吸引
3	.004507220	9.710444978	$[4.01458,4.01459]\,10^{-42}$	鞍点
4	.006013418	9.710540091	$[-9.62382,-9.62381]\,10^{-42}$	吸引
5	.007507350	9.710661143	$[3.15824,3.15825]\,10^{-41}$	鞍点
6	.009125407	9.710822170	$[-1.46163,-1.46162]\,10^{-40}$	吸引
7	.010325794	9.710961675	$[7.78255,7.78256]\,10^{-40}$	鞍点
8	.012206388	9.711214448	$[-2.69371,-2.69370]\,10^{-38}$	吸引

我们还验证了 A 可逆。沿正周期轨道对 $\dot{x}_i/x_i=-(Au)_i$ 积分得到 $A\int_0^{\mathcal{T}}u\,dt=0$，因此 u 的平均值为零。散度为

$$\operatorname{div}F=-\operatorname{tr}A-\sum_i A_{ii}u_i-\sum_i(Au)_i.$$

因此，它在轨道上的平均值为 $-\operatorname{tr}A$。令 $d=\det D\mathcal{P}$ 表示两个横向乘子的乘积。由刘维尔公式以及流方向上的单位乘子可得

$$d=\exp(-\mathcal{T}\operatorname{tr}A). \tag{13}$$

令 $t_{\mathcal{P}}=\operatorname{tr}D\mathcal{P}$ 表示迹。判别式为正，区间求值给出了较大和较小特征值 μ_+ 和 μ_-的以下上界，

$$t_{\mathcal{P}}^2-4d>0,\qquad \mu_+=\frac{t_{\mathcal{P}}+\sqrt{t_{\mathcal{P}}^2-4d}}{2}>0,\qquad 0<\mu_-:=d/\mu_+<1,\qquad 0\notin[\mu_+-1].$$

括号中的数值表示 $[\mu_+-1]$ 乘子偏移量的计算区间。较大的乘子μ_+ 在 μ_{slow} 这些例子中。因此，两个横向乘子都避开了单位圆。负的μ_+-1 值证明该轨道具有吸引性，正值则证明其具有鞍点稳定性。对于 A_8 这八个带符号的区间见表3。对每个矩阵进行相同检验，再结合互不相交的截面盒，即可证明定理1。

致谢

我们感谢 GPT-6 Astra（OpenAI）帮助我们比较以往研究者如何在平衡点附近构造小极限环，以及其中一些人如何利用边界动力学获得额外的周期轨道。这些讨论帮助我们找到了扩展局部构造的主要障碍：将若干低阶系数设为零之后，必须在保持先前抵消条件的同时改变下一个系数。GPT-6 Astra 的建议帮助我们选取了能够独立改变的相互作用速率，从而构造出显式矩阵。它还帮助我们设计了对该构造的直接检验：对于每个固定矩阵，我们都对原方程进行了严格的区间积分，以验证预测的轨道确实闭合。作者对论证、计算和最终文本承担全部责任。

A 精确系数与区间计算设置

对于每个固定系统 A_m，辅助目录 data/order$m$/ 在 parameters.json 中给出精确十进制矩阵、截面基和标量设计目标值。对于每个固定矩阵，标量_

`targets.json` 给出（5）中系数的区间包络，并验证每个目标根区间两端的符号相反。临界点数据位于 `focus input.json` 和`focus certificate.json`中。每个 Arb 轨道 j.`json` 记录给出基 B 以及周期轨道 j的盒中心、半径和区间界；周期轨道按截面半径递增排列。三个值 `center exact decimals rho s T` 依次为截面半径 ρ、稳定坐标v和周期 $\mathcal{T}$。

区间包络采用任意精度球算术 [8]。对于 A_5， A_6， A_7， A_8，流计算分别采用 200、220、280 和 280 位十进制数字的工作精度。每个流步对 A_5 使用次数为 210 的泰勒多项式，对其余三个系统使用次数为 180 的泰勒多项式。对于八周期矩阵，$(A_8)_{11} = 1$。其余各项如下所示，每项占连续两行。请将这两行视为一个十进制数。这些是 (1) 的精确有理系数。

(1,2) 0.778386695113706979417914554463080737614305418444864787624792307561094
3289985101940397131347495863999889137885101737738081963198353144708783 1 (1,3)
1.615869951332547683386136307155169340759284951069736132535758572585403
0644162096013628597788753261516355587273519754901638543206199763015538 (2,1)
1.125158490263112269102603722718783127401021806112215114347163339880155
0902896040363402058270765670929132426982161891422695526498584919535216 (2,2)
0.813528208696623913656749920771728811051993780692036373307581944601469
2477153456816287416378417813334665297670979144029595902984845030417987 7 (2,3)
0.404240479225403248362993810481531777758813482162671245499532590674271
5134008284661033276754828575863873396391292846038739932974179432492537 4 (3,1)
1.132158093943317069581368348592846351879996726042802776725508415170489
7490826654993634490996699325783319118721695216084257020573223887125 31 (3,2)
1.916409408366542779871905801930225399001149365464329359875401890490870
8919258009593623529019686121330225746471366112934366374929883634684887 (3,3)
1.701148348235526384311648280351535568598146115034077250065150861005463
3076415640908245454175457400467596062243168280658237399015811667966986

参考文献

[1] M. Gyllenberg 和 P. Yan，具有异宿环的三维竞争 Lotka–Volterra 系统的四个极限环，Comput. Math. Appl. 58 (2009)，649–669。[2] P. Yu、M. Han 和 D. Xiao，三维竞争 Lotka–Volterra 系统中 Hopf 奇点附近的四个小极限环，J. Math. Anal. Appl. 436 (2016)，521–555。[3] Y. Tian 和 P. Yu，计算与 Hopf 分岔相关的一般 n 维微分系统的正规形和中心流形的显式递归公式，Int. J. Bifurcation Chaos 23 (2013)，1350104。[4] Y. Li 和 J. Jiang，三维 Lotka–Volterra 竞争系统中极限环的重数，J. Dyn. Differ. Equ. 36 (2024)，2007–2039。[5] M. Hu、Z. Lu 和 Y. Luo，Zeeman 分类第 28 类三维竞争 Lotka–Volterra 系统中的四个极限环，arXiv:2603.24612v1 (2026)。[6] J. Carr，《中心流形理论的应用》，Applied Mathematical Sciences 35，Springer，1981。[7] Y. A. Kuznetsov，《应用分岔理论基础》，第 3 版，Applied Mathematical Sciences 112，Springer，2004。[8] F. Johansson，Arb：高效的任意精度中点-半径区间算术，IEEE Trans. Comput. 66 (2017)，1281–1292。