arXiv:2611.29528v1 [math.AC] 22 Nov 2026

关于不可逆简单导子的各向同性群的一些结果

SUMChandra Mishra、DIBYENDU MONDAL、PANKAJ SHUKLA 和 Sneha Sing H

Abstract. 设 k 为特征零的域，设 $2 \leq i < n$，并设 d_i 为 k的导子 $k[x_1, \ldots, x_i]$。我们研究形如 $d_n = d_i + \sum_{j=i}^{n-1}(a_j x_{j+1} + g_j(x_j))\partial_{x_{j+1}}$ 的 k导子 $k[x_1, \ldots, x_n]$，其中 $a_j \in k$ 且 $g_j \in k[x_j] \setminus k$。在关于 d_i 的适当条件下，我们证明 d_n 的各向同性群由平移构成，并且要么是平凡群，要么同构于 $(k, +)$。

1. Introduction

设 k 为特征零的域。在 k-代数 R 上的 k导子是满足条件 $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ 的 k-线性映射，其中 x、$y \in R$为任意元素。R 的一个 d-理想是满足 $d(I) \subseteq I$的理想 I。R 上的 k导子称为简单导子，当 R 的 d-理想仅为 (0) 和 R时成立。简单导子在交换代数和非交换代数中有多种应用。简单导子可用于构造非交换诺特简单环 $R[x, d]$；参见 [11], ；用于构造乘积定义为 $[a, b] = ad(b) - bd(a)$的简单李环；参见 [5], ；用于构造 Weyl代数上的非全纯不可约模；参见 [17], ；用于刻画正则环；参见 [3], [16]。R的 k导子的各向同性群记为 $Aut(R)_d$，由与 d交换的 R 的自同构组成。研究这些群有助于对仿射 k-代数进行分类和理解。关于局部幂零导子和简单导子的各向同性群的一些研究可见于 [7], [8], [10], [14], [15]。如果一个 k导子的像集不含任何单位元，则称其为不可逆导子。这类导子使我们能够研究斜多项式环 $R[x, d]$，其定义关系为 $rx - xr = d(r)$，其中 $d(r)$永远不可能是 R中的单位元。不可逆导子的例子可见于 [6], [13], [18]。

设 $R_n = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 是域 k 上关于 n 个变量的多项式环。已有文献构造了若干 R_n 的简单导子，其中 $n \geq 2$（见 [1], [12], [13], [18], [19], [20], [21]）。然而，这些导子中的大多数，其像都包含 R_n 的单位元。近年来，与简单导子相关的各向同性群研究也备受关注。在 [10], ，L. G. Mendes 和 I. Pan 证明了 R_2 的简单导子的各向同性群是平凡的。在 [15], ，L. N. Bertoncello 和 D. Levcovitz 证明了简单 Shamsuddin 导子的各向同性群是平凡的。他们还提出了以下猜想：Shamsuddin 导子

D 当且仅当其各向同性群是平凡群时，才是简单的。随后，D. Yan 证明了这一猜想的逆命题；参见 [8, 定理 2.3]。2022年，D. Yan 提出了一个关于 R_n的简单导子的各向同性群的猜想，该猜想指出，对于任意 R_n 上的简单导子 d，$Aut(R_n)_d$ 都与一个平移子群共轭。支持这一猜想的一些例子见 [19], [22]。然而，确定高维中简单导子的各向同性群仍然是一个具有挑战性的问题。受这些进展的启发，本文系统研究 $n \geq 3$上 R_n的若干类不可逆简单导子所对应的各向同性群。

设 i, n 为正整数，使得 $2 \leq i < n$。设 d_i 为定义在 R_i 上的导子，且不存在任何满足 $d_i(f) = cf + h(x_i)$ 的元素 $f \in R_i$，其中 $c \in k$

Date: 2026年11月24日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 13N15；12H05；13P05。*Key words and phrases.* 简单导子；各向同性群；多项式环。

且 $h(x_i) \in k[x_i]$，其中 $deg_{x_i}\, h(x_i) \leq l$，对某个 $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 成立。考虑导子 $d_n := d_i + \sum_{j=i}^{n-1}(a_j x_{j+1} + g_j(x_j))\partial_{x_{j+1}}$，其中 $a_j \in k$ 且对任意 $i \leq j \leq n-1$，$g_j(x_j) \in k[x_j] \setminus k$。接着我们证明，在关于 d_i 的适当条件下，如果 $Aut(R_i)_{d_i}$ 平凡，则各向同性群 $Aut(R_n)_{d_n}$ 同构于一个平移子群（参见定理 2.15）。我们还证明，若导子 d_i 是简单导子，则此导子 d_n 也是简单导子（参见推论 2.19）。因此，我们在 R_n 上构造了一类更广泛的简单导子，它们支持 D. Yan 提出的猜想。

在最后一节中，我们证明了一个结果：若 d_n 的各向同性群包含于 x_n 的平移群中，且系数 a_j 和多项式 g_j 满足某些适当条件，则 d_i 的简单性蕴含 d_n 的简单性。

2. 各向同性群

设 k 是一个特征为零的域，并设 i, n 是满足 $2 \leq i < n$ 的正整数。令 d_i 为多项式环 $R_i = k[x_1, \ldots, x_i]$ 的一个 k- 导子，并设 $R_n := R_i[x_{i+1}, \ldots, x_n]$。我们定义 R_n 的 k- 导子 d_n 如下：

$$d_n = d_i + \big(a_i x_{i+1} + g_i(x_i)\big)\partial_{x_{i+1}} + \cdots + \big(a_{n-1}x_n + g_{n-1}(x_{n-1})\big)\partial_{x_n}, \tag{2.0.1}$$

其中，对于所有 $i \leq j \leq n-1$，$a_j \in k$ 和 $g_j(x_j) \in k[x_j] \setminus k$。于是 $d_n|_{R_i} = d_i$。对于 $i \leq j \leq n$，我们考虑 $R_j = k[x_1, \ldots, x_j]$，并令 d_j 为 d_n 在 R_j 上的限制；注意 $d_n(R_j) \subseteq R_j$，因此对于 $f \in R_j$，$d_n(f) = d_j(f)$。对于 $i < j \leq n$，我们有 $d_n(x_j) = a_{j-1}x_j + g_{j-1}(x_{j-1})$。若不会引起混淆，我们用 d 表示 d_n。

假设 2.1。对于 $h \in R_n$ 和一个变量 x_m，$\deg_{x_m} h$ 表示 h 在 x_m中的次数。令R为一个环。那么，对于任意满足 $a_t \neq 0$的多项式 $f(X) = \sum_{i=0}^{t} a_i X^i$ in $R[X]$，我们可以写成$f(X) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} a_i X^i$，其中对于 $i > t$，令 $a_i = 0$。我们假设 $\deg_{x_i} g_i(x_i) \leq l$，并令$l_i = l$ 和 $l_j = \infty$ 分别为 $i < j \leq n$。

定义 2.2。令 $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。我们称 d_i 满足条件（C_l），如果以下条件成立：若对于某些 $r \in R_i$、$a \in k$，有 $d_i(r) = ar + g(x_i)$，且 $g(x_i) \in k[x_i]$ 满足 $\deg_{x_i} g(x_i) \leq l$，则 $r \in k$ 且$g \in k$。

注记 2.3。假设 d_i 满足条件（C_l），我们注意到 d_i 是不可逆的，因为取 $a = 0$ 和 $g(x_i) \in k$ 表明其像不包含任何单位元。

引理 2.4。假设 d_i 满足条件（C_l）。那么，对于每个 $j \in \{i, \ldots, n\}$，以下性质（P_j）成立：如果 $d_n(f) = cf + h(x_j)$ 对于某些 $f \in R_j$、$c \in k$ 和 $h(x_j) \in k[x_j]$ 且$\deg_{x_j} h \leq l_j$，那么 $f \in k$ 且 $h \in k$。

证明。性质（P_i）由条件（C_l）可知成立。假设对于某个 $i \leq j \leq n-1$，性质（P_j）成立；我们证明性质（P_{j+1}）。令 $f \in R_{j+1}$ 满足 $d(f) = cf + h(x_{j+1})$，其中$c \in k$ 且 $h \in k[x_{j+1}]$。如果 $f = 0$，则结论立即成立。否则，写作 $f = \sum_{s=0}^{t} f_s x_{j+1}^s$，其中$f_s \in R_j$ 且 $f_t \neq 0$。由于 $d(x_{j+1}) = a_j x_{j+1} + g_j(x_j)$，我们有

$$d(f) = \sum_{s=0}^{t} \big(d(f_s) + s a_j f_s\big) x_{j+1}^s + g_j(x_j) \sum_{s=1}^{t} s f_s x_{j+1}^{s-1}. \tag{2.4.1}$$

设 $t \geq 1$。记 $h = \sum_{s=0}^{r} h_s x_{j+1}^s$，其中 $h_s \in k$ 对于 $0 \leq s \leq r$。利用（2.4.1），比较 x_{j+1}^t 在 $d(f) = cf + h$中的系数，得到 $d(f_t) = (c - ta_j) f_t + h_t$ 且 $h_t \in k$，因此 $f_t \in k^*$ 由性质（P_j）可知，比较 x_{j+1}^{t-1}的系数，得到

$$d(f_{t-1}) = \big(c - (t-1)a_j\big) f_{t-1} + \big(h_{t-1} - t f_t\, g_j(x_j)\big).$$

这里 $h_{t-1} - t f_t g_j(x_j) \in k[x_j]$ 的次数为 $\deg g_j \leq l_j$（对于 $j = i$，这是假设 $deg\ g_i \leq l$），因此性质（P_j）意味着 $t f_t g_j(x_j) \in k$。这与 $g_j \notin k$ 矛盾。因此 $t = 0$。

当 $t=0$ 时，我们有 $d(f)=d(f_0)\in R_j$，因此根据 $d(f)=cf+h$，可得 $h\in k$，而性质（P_j）给出 $f\in k$。□

接下来，我们回顾与 d_i 在 [19], 相关的矩阵的略微修改形式。记

$$d_i=h_1\partial_{x_1}+\cdots+h_i\partial_{x_i},\qquad h_j=d_i(x_j)\in R_i\setminus\{0\}.$$

对于 $u,\ v\in\mathbb{Z}^i_{\geq 0}$如果对所有 q都有 $v_q\leq u_q$，并且有 $u\cdot t=\sum_q u_qt_q$，则记作 $v\leq u$。设 M是$\mathbb{Z}$ 上的一个 $i\times i$矩阵，I 为单位矩阵。若 M 满足条件（$*$），则称系统（$M-I$）$Y\leq 0$没有非平凡解 $Y\in\mathbb{Z}^i_{\geq 0}$。

定义 2.5。若对于每个 $1\leq j\leq i$，多项式 h_j 都有一个单项式 $\alpha_jx^{u_j}=\alpha_jx_1^{u_{j1}}\cdots x_i^{u_{ji}}$、$\alpha_j\in k^*$，使得 h_j 的每个单项式都整除 x^{u_j}，且矩阵 $A_{d_i}:=[u_{jq}]_{1\leq j,\ q\leq i}$ 满足条件（$*$），则称 d_i 满足条件（D）。

注 2.6。如果 h_j 整除 x^{u_j}，那么 x^{u_j} 是 h_j 中总次数最高的唯一单项式。举例来说，当每个 D满足条件（h_j），且每个 A_{d_i} 都是单项式与常数之和，并且矩阵 $=[u_{jq}]_{1\leq j:\ q\leq i}$ 满足条件（$*$）时，条件（2.8 说明，整除性要求不能替换为仅要求 x^{u_j} 是总次数最高的单项式。

引理 2.7。假设 d_i 满足条件 (D)，并令 $\rho\in$ 自同构群$(R_n)^{d_n}$。则 $\rho(R_i)=R_i$，且 $\rho|_{R_i}\in$自同构群$(R_i)^{d_i}$。

证明。令 $m\in\{i+1,\ldots,n\}$，并假设对于所有 $1\leq q\leq i$，$\rho(x_q)\in R_m$；对于 $m=n$，这一点成立。我们证明对于所有 $1\leq q\leq i$，$\rho(x_q)\in R_{m-1}$。记

$$\rho(x_q)=\sum_{s=0}^{t_q}f_{qs}x_m^s,\qquad f_{qs}\in R_{m-1},\ f_{qt_q}\neq 0.$$

令 $t=(t_1,\ldots,t_i)$。由于 $m-1\geq i$，我们有 $d(R_{m-1})\subseteq R_{m-1}$，且 $d(x_m)=a_{m-1}x_m+g_{m-1}(x_{m-1})$。因此

$$\deg_{x_m}d(\rho(x_q))\leq t_q. \tag{2.7.1}$$

写作 $h_q=c_{u_q}x_1^{u_{q1}}x_2^{u_{q2}}\cdots x_i^{u_{qi}}+T$，其中 $T\in R_i$的总次数为 $<u_{q1}+u_{q2}+\cdots+u_{qi}$。对于 h_q的单项式 $c_{u_q}x^{u_q}$，多项式 $\rho(c_{u_q}x^{u_q})=c_{u_q}\prod_{r=1}^i\rho(x_r)^{u_{qr}}$中 $x_m^{u_q\cdot t}$的系数为 $c_{u_q}\prod_{r=1}^i f_{rt_r}^{u_{qr}}$。由于对所有 $1\leq r\leq i$，$c_{u_q}\neq 0$且 $f_{rt_r}\neq 0$，利用 R_{m-1}是整环这一事实，我们得出 $c_{u_q}\prod_{r=1}^i f_{rt_r}^{u_{qr}}\neq 0$。因此，$\rho(h_q)$的 x_m-次数为 $u_q\cdot t$。由于$\rho\in$ Aut$(R_n)^{d_n}$，我们有 $d(\rho(x_q))=\rho(d(x_q))=\rho(h_q)$。结合 (2.7.1)，得到

$$t_q\ \geq\ u_{q1}t_1+\cdots+u_{qi}t_i\qquad\text{for all } 1\leq q\leq i, \tag{2.7.2}$$

也就是说，$(A_{d_i}-I)t\leq 0$。根据条件 $(*)$，$t=0$，即对于所有 $1\leq q\leq i$，$\rho(x_q)\in R_{m-1}$。

对 $m=n$、$n-1$、.....、$i+1$重复这一过程，我们得到 $\rho(R_i)\subseteq R_i$。由于 $\rho^{-1}\in$自同构群$(R_n)^{d_n}$，同样的论证给出 $\rho^{-1}(R_i)\subseteq R_i$。因此，$\rho(R_i)=R_i$，且 $\rho|_{R_i}$与 $d_n|_{R_i}=d_i$可交换。□

下面的例子表明，即使 x^{u_j} 选自 h_j的单项式中总次数最高的单项式，(D)中的整除性要求也不能省略。

例 2.8。设 $i=2$、$n=3$、$w=x_1-x_2$以及 $d_2=w^2(\partial_{x_1}+\partial_{x_2})$。然后考虑 $d_3=d_2+x_2\,\partial_{x_3}$。

这里 $h_1=h_2=w^2$。取最高总次数的单项式 x_1^2 和 x_2^2，得到$A_{d_2}=$ diag(2,2)，满足条件（$*$）。然而，x_1x_2 既不能整除 x_1^2，也不能整除 x_2^2，因此对于这一选择（以及任何其他选择），条件（D）均不成立。

导子 d_3 是局部幂零的： $d_3(w) = 0$， $d_3^2(x_1) = d_3^2(x_2) = 0$ 且 $d_3^3(x_3) = 0$。令$F = w^2x_3 - \frac{1}{2}x_2^2$；则 $d_3(F) = w^2x_2 - x_2w^2 = 0$。因此 Fd_3是局部幂零的，并且 $[Fd_3, d_3] = -d_3(F)\ d_3 = 0$，所以 $\rho = \exp(Fd_3) \in \mathrm{Aut}(R_3)_{d_3}$（见 [9]）。由于（$Fd_3$）$^m = F^m d_3^m$，

$$\rho(x_1) = x_1 + w^2F = x_1 + w^4x_3 - \tfrac{1}{2}w^2x_2^2 \notin R_2.$$

因此，引理 2.7 的结论不成立。就证明而言： $t_1 = t_2 = 1$ 和 $f_{11} = f_{21} = w^4$，因此 $\rho(x_1^2)$、 $\rho(-2x_1x_2)$和 $\rho(x_2^2)$中关于 x_3次数为 2 的项相互抵消；事实上， $\rho(h_1) = \rho(w)^2 = w^2$，而（2.7.2）将写成 $1 \geq 2$。注意， d_2 不满足（C_l），因为 $d_2(w) = 0$。

下面的引理是证明各向同性群中的每个元素都是三角形的的关键步骤。

引理 2.9. 假设 d_i 满足条件(C_l)。设 $i \leq p < s \leq n-1$、 $c \in k^*$ 和 $G \in R_p$。那么不存在这样的 $F \in R_s$ ：

$$d(F) = a_pF - c\,g_s(x_s) + G. \tag{2.9.1}$$

证明。我们对 $s - p \geq 1$ 使用归纳法。固定 s，并假设 $F \in R_s$ 满足 (2.9.1)。将$g_s(x_s) = \sum_{r=0}^{D} \gamma_r x_s^r$ 写成 $D \geq 1$ 和 $\gamma_D \neq 0$。若 $F = 0$，则 $c\,g_s(x_s) = G \in R_p \subseteq R_{s-1}$，这不可能，因为 $\deg_{x_s} g_s = D \geq 1$。因此写成 $F = \sum_{r=0}^{q} e_r x_s^r$，其中 $e_r \in R_{s-1}$ 和 $e_q \neq 0$。如同在 (2.4.1) 中， $d(F)$ 中 x_s^r 的系数为

$$d(e_r) + ra_{s-1}e_r + (r+1)e_{r+1}\,g_{s-1}(x_{s-1}). \tag{2.9.2}$$

我们使用引理 2.4的性质（P_{s-1}）；注意，我们在下文中对所有多项式 $h(x_{s-1})$ 应用该性质时，它们都是常数或形如 $\kappa\,g_{s-1}(x_{s-1}) + \kappa'$，其中 $\kappa, \kappa' \in k$，因此次数至多为l_{s-1}。

情形 $q > D$。利用（2.9.2）表示 x_s^q 在 d（F）中的系数，并比较（2.9.1）两边 x_s^q 的系数，我们得到 d（e_q）$=$（$a_p - qa_{s-1}$）e_q，因此根据性质（P_{s-1}）。由于 $q - 1 \geq D \geq 1$，比较（2.9.1）中 x_s^{q-1} 的系数可得

$$d(e_{q-1}) = \big(a_p - (q-1)a_{s-1}\big)e_{q-1} - \big(qe_q\,g_{s-1}(x_{s-1}) + c\gamma_{q-1}\big),$$

其中 $\gamma_{q-1} = 0$ 若 $q - 1 > D$。根据性质（P_{s-1}）， $qe_q\,g_{s-1}(x_{s-1}) \in k$，矛盾。

情形 $q < D$。（2.9.1）右侧 x_s^D 的系数为 $-c\gamma_D \neq 0$，而 $\deg_{x_s} d$（F）$\leq q < D$，矛盾。

情形 $q = D$。利用（2.9.2）比较（2.9.1）中 x_s^D 的系数，我们有 d（e_D）$=$（$a_p - Da_{s-1}$）$e_D - c\gamma_D$，因此根据性质（P_{s-1}），然后

$$(a_p - Da_{s-1})\,e_D = c\gamma_D \neq 0. \tag{2.9.3}$$

若 $D \geq 2$，利用（2.9.2）比较（2.9.1）中 x_s^{D-1} 的系数，得到 $d(e_{D-1}) = (a_p - (D-1)a_{s-1})e_{D-1} - \big(De_D\,g_{s-1}(x_{s-1}) + c\gamma_{D-1}\big)$，而性质（$P_{s-1}$）给出 $De_Dg_{s-1}(x_{s-1}) \in k$，矛盾。因此 $D = 1$，且（2.9.3）表明 $a_p \neq a_{s-1}$。

若 $s = p+1$，则 $a_{s-1} = a_p$，矛盾。这就证明了当 $s - p = 1$ 时的引理。我们假设，作为归纳假设，当 $s - p = r$ 时引理成立。现在我们证明，当 $s - p = r + 1$.

设 $s = p + r + 1$，比较 x_s^0 中的系数（2.9.1），并利用（2.9.2），可得

$$d(e_0) = a_pe_0 - e_1\,g_{s-1}(x_{s-1}) + (G - c\gamma_0), \tag{2.9.4}$$

其中 $e_0 \in R_{s-1}$， $e_1 \in k^*$ 和 $G - c\gamma_0 \in R_p$。因此，(2.9.4) 与 (2.9.1) 具有相同的形式，只需将 s替换为 $s' = s-1$；又由于 $s' - p = r$，由归纳假设可得矛盾。□

引理 2.10. 假设 d_i 满足条件 (C_l) 和 (D)，并令 $\rho \in$ 自同构群$(R_n)_{d_n}$。那么对于每个 $i \leq j \leq n$，都有$\rho(R_j) = R_j$，且对于 $i + 1 \leq j \leq n$,

$$\rho(x_j) = \lambda_j x_j + \varphi_j, \qquad \lambda_j \in k^*,\ \varphi_j \in R_{j-1}.$$

证明。我们对 j 使用归纳法。当 $j=i$ 时，结论由引理 2.7 得出。令 $i+1\le j\le n$，并假设$\rho(R_{j-1})=R_{j-1}$。那么 $\rho(x_j)\notin R_{j-1}$：否则，对于某个 $r\in R_{j-1}$，有 $\rho(x_j)=\rho(r)$，由单射性可得 $x_j=r\in R_{j-1}$。令 $m\in\{j,\dots,n\}$ 为使 x_m 出现在 $\rho(x_j)$ 中的最大指标，并记

$$\rho(x_j)=\sum_{s=0}^{t} f_s x_m^s,\qquad f_s\in R_{m-1},\ t\ge 1,\ f_t\neq 0.$$

令 $G:=g_{j-1}(\rho(x_{j-1}))$。根据归纳假设，$G\in R_{j-1}\subseteq R_{m-1}$。由 $d(\rho(x_j))=\rho(d(x_j))=a_{j-1}\rho(x_j)+G$ 和 (2.4.1)，得到

$$\sum_{s=0}^{t}\big(d(f_s)+sa_{m-1}f_s\big)x_m^s+g_{m-1}(x_{m-1})\sum_{s=1}^{t}sf_sx_m^{s-1}=\sum_{s=0}^{t}a_{j-1}f_sx_m^s+G. \tag{2.10.1}$$

比较 (2.10.1) 中 x_m^t 的系数，得到 $d(f_t)=(a_{j-1}-ta_{m-1})f_t$，因此根据引理 2.4，$f_t\in k^*$。假设 $t\ge 2$。比较 (2.10.1) 中 x_m^{t-1}的系数，得到 $d(f_{t-1})=(a_{j-1}-(t-1)a_{m-1})f_{t-1}-tf_t\,g_{m-1}(x_{m-1})$，而引理 2.4 给出 $tf_tg_{m-1}(x_{m-1})\in k$，矛盾。因此$t=1$。

设 $m>j$。比较 x_m^0 在（2.10.1）中的系数，得到

$$d(f_0)=a_{j-1}f_0-f_1\,g_{m-1}(x_{m-1})+G,$$

其中 $f_0\in R_{m-1}$，$f_1\in k^*$ 且 $G\in R_{j-1}$。这与引理 2.9 中的 $p=j-1$ 和 $s=m-1$矛盾。因此 $m=j$，且 $\rho(x_j)=f_1x_j+f_0$，其中 $f_1\in k^*$ 且 $f_0\in R_{j-1}$。结合 $\rho(R_{j-1})=R_{j-1}$，可得 $\rho(R_j)=R_j$。□

现在我们确定 d_n 的各向同性群。对于 $c=(c_{i+1},\dots,c_n)\in k^{n-i}$，令 $c_q:=0$ 表示$1\le q\le i$，并将由下式给出的 R_n 的平移记为 τ_c

$$\tau_c(x_q)=x_q+c_q\qquad(1\le q\le n).$$

显然 $\tau_c\circ\tau_{c'}=\tau_{c+c'}$，因此 $c\mapsto\tau_c$是一个单射群同态 $(k^{n-i},+)\to\mathrm{Aut}(R_n)$。

引理 2.11。设次数x_i $g_i(x_i)\le l$，并设 d_i 满足条件 (C_l) 和 (D) 以及自同构群$(R_i)_{d_i}=\{$恒等映射$_{R_i}\}$。则每个 $\rho\in$自同构群 $(R_n)^{d_n}$ 都等于某个 $c\in k^{n-i}$。

证明。令 $\rho\in$ 自同构群$(R_n)^{d_n}$。由引理 2.7，$\rho|_{R_i}\in$ 自同构群$(R_i)^{d_i}$，因此 $\rho(x_q)=x_q$ 对于 $1\le q\le i$。由引理 2.10，对于 $i<j\le n$ 我们有

$$\rho(x_j)=\lambda_jx_j+\varphi_j,\qquad\lambda_j\in k^*,\ \varphi_j\in R_{j-1}.$$

我们对 $j\in\{i,\dots,n\}$进行归纳，证明 $\rho(x_j)=x_j+c_j$对于某个 $c_j\in k$.

当 $j=i$，$\rho(x_i)=x_i$。令 $i\le j\le n-1$，并设 $\rho(x_j)=x_j+c_j$满足 $c_j\in k$。现在，我们证明 $\rho(x_{j+1})=x_{j+1}+c_{j+1}$。将 ρ 应用于 $d(x_{j+1})=a_jx_{j+1}+g_j(x_j)$，得到

$$\rho\big(d(x_{j+1})\big)=a_j\lambda_{j+1}x_{j+1}+a_j\varphi_{j+1}+g_j(x_j+c_j),$$

and

$$d\big(\rho(x_{j+1})\big)=\lambda_{j+1}\big(a_jx_{j+1}+g_j(x_j)\big)+d(\varphi_{j+1}).$$

由于 ρ 与 d可交换，我们有 $\rho\big(d(x_{j+1})\big)=d\big(\rho(x_{j+1})\big)$，因此

$$d(\varphi_{j+1})=a_j\varphi_{j+1}+h(x_j),\qquad\text{where } h(x_j):=g_j(x_j+c_j)-\lambda_{j+1}g_j(x_j)\in k[x_j]. \tag{2.11.1}$$

这里 $\varphi_{j+1}\in R_j$ 以及 $\deg h\le\deg g_j\le l_j$（对于 $j=i$，这就是假设 $\deg g_i\le l$）。根据引理 2.4 的性质 (P_j)，$\varphi_{j+1}\in k$ 以及 $h\in k$。令 $D=\deg g_j\ge 1$，并令 $\gamma\in k^*$ 为 g_j的首项系数。h 中的 x_j^D的系数为 $\gamma(1-\lambda_{j+1})$，由于 $h\in k$，该系数为零。因此 $\lambda_{j+1}=1$，并且 $\rho(x_{j+1})=x_{j+1}+c_{j+1}$，其中 $c_{j+1}:=\varphi_{j+1}\in k$。□

引理 2.12。令 $g(x)\in k[x]$，其中 $D=\deg g\ge 1$，并令 $c\in k$。

（1）若 $D\ge 2$ 和 $g(x+c)-g(x)\in k$，则 $c=0$。

(2) *If* $D = 1$ *and* $g(x) = \gamma x + \beta$, *then* $g(x + c) - g(x) = \gamma c$.

证明。 (1) 设 γ_D 是 g 的首项系数。 $g(x+c) - g(x)$ 中 x^{D-1} 的系数为 $D\gamma_D c$。由于 $D - 1 \geq 1$，该系数为零；又由于 $\operatorname{char} k = 0$，得到 $c = 0$。 (2) 显然。□

引理 2.13。 设 $c \in k^{n-i}$。那么 $\tau_c \in$ 自同构群$(R_n)_{d_n}$ 当且仅当

$$(E_j) \qquad g_j(x_j + c_j) - g_j(x_j) = -a_j c_{j+1} \qquad \textit{for all } i \leq j \leq n-1.$$

证明。 τ_c 与 d 可交换，当且仅当 $\tau_c(d(x_q)) = d(\tau_c(x_q))$，其中 $1 \leq q \leq n$。对于 $q \leq i$，两边都等于 h_q，因为 $h_q \in R_i$ 在 τ_c 作用下保持不变，且 $d(c_q) = 0$。对于满足 $i \leq j \leq n-1$ 的 $q = j+1$，

$$\tau_c\big(d(x_{j+1})\big) - d\big(\tau_c(x_{j+1})\big) = \big(a_j x_{j+1} + a_j c_{j+1} + g_j(x_j + c_j)\big) - \big(a_j x_{j+1} + g_j(x_j)\big),$$

其为零当且仅当 (E_j) 成立。 □

在后续结果中，每当对于 $i \leq m \leq n-1$ 有 $\deg g_m = 1$，我们记 $g_m(x_m) = \gamma_m x_m + \beta_m$，其中 $\gamma_m \in k^*$ 且 $\beta_m \in k$。

引理 2. **14.** 设 $c \in k^{n-i}$ 对所有 $i \leq j \leq n-1$ 都满足 (E_j)，并设 $i \leq j \leq n-1$。则 *n:*

(1) 若 $\deg g_j \geq 2$，则 $c_j = 0$；(2) 若 $a_j = 0$，则 $c_j = 0$；(3) 若 $c_{j+1} = 0$，则 $c_j = 0$；(4) 若 $a_j \neq 0$ 且 $c_j = 0$，则 $c_{j+1} = 0$；(5) 若 $a_j \neq 0$ 且 $\deg g_j = 1$，则 $c_{j+1} = -\dfrac{\gamma_j}{a_j} c_j$。

—

证明。(1)T 条件 (E_j) 的右端属于 k，因此引理 2.12(1) 给出 $c_j = 0$。

(2) 和 (3) 在这两种情况下，(E_j) 可写为 $g_j(x_j + c_j) = g_j(x_j)$。若 $\deg g_j \geq 2$，则由 (1) 得 $c_j = 0$。若 $\deg g_j = 1$，则由引理 2.12(2) 得到 $\gamma_j c_j = 0$，因此 $c_j = 0$。

(4) 如果 $c_j = 0$，则 (E_j) 的左端为 0，因此 $a_j c_{j+1} = 0$。

(5) 根据引理 2.12 (2)，(E_j) 可写为 $\gamma_j c_j = -a_j c_{j+1}$。 □

定理 2.15。 设 d_n 如 (2.0.1) 所示，其中 $a_j \in k$，并设 $\deg_{x_i} g_i(x_i) \leq l$ 对某个 $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 成立。假设 d_i 满足以下条件：

(i) 条件 (C_l)；(ii) 条件 (D)，以及 (iii) 自同构群$(R_i)_{d_i} = \{\mathrm{Id}_{R_i}\}$。

Then

$$\operatorname{Aut}(R_n)_{d_n} = \{\tau_c : c \in k^{n-i} \textit{ satisfies } (E_j) \textit{ for all } i \leq j \leq n-1\}.$$

更确切地说：

(a) 如果 $a_j \neq 0$ 对所有 $i \leq j \leq n-1$ 均成立，则 自同构群$(R_n)_{d_n} = \{\mathrm{Id}_{R_n}\}$。 (b) 假设 $a_j = 0$ 对某个 j 成立，并令 $j^* := \max\{j : i \leq j \leq n-1,\ a_j = 0\}$。 (b1) 如果 $\deg g_m = 1$ 对所有 $j^* < m \leq n-1$ 均成立，则

$$\operatorname{Aut}(R_n)_{d_n} = \{\tau_{s\varepsilon} : s \in k\} \cong (k, +),$$

where $\varepsilon = (\varepsilon_{i+1}, \ldots, \varepsilon_n) \in k^{n-i}$ *is defined by*

$$\varepsilon_m = 0 \quad (i < m \leq j^*), \qquad \varepsilon_{j^*+1} = 1, \qquad \varepsilon_{m+1} = -\frac{\gamma_m}{a_m}\varepsilon_m \quad (j^* < m \leq n-1).$$

(b2) 若$\deg g_m \geq 2$ 对某个 $j^* < m \leq n-1$ 成立，则自同构群$(R_n)_{d_n} = \{\mathrm{Id}_{R_n}\}$。

证明。 第 2.11 和 2.13 条引理。设 $c \in k^{n-i}$ 对所有E_j 均满足 $(i \leq j \leq n-1$，并回顾 $c_i = 0$。

(a) 由于 $c_i = 0$ 且 $a_j \neq 0$ 对所有 j，引理 2.14(4) 归纳地给出 $c_{i+1} = \cdots = c_n = 0$。因此$\tau_c =Id_{R_n}$。

(b) 由于 $a_{j^*}=0$，引理 2.14(2) 给出 $c_{j^*}=0$，反复应用引理 2.14(3) 可得$c_j=0$ 对所有 $i\le j\le j^*$。由 j^* 的极大性，我们有 $a_m\neq 0$ 对所有 $j^*<m\le n-1$。

(b1) 设 $s:=c_{j^*+1}$。引理 2.14(5) 归纳地给出 $c_m=\varepsilon_m s$ 对 $j^*<m\le n$。结合$c_j=0=\varepsilon_j s$ 对 $i<j\le j^*$，可得 $c=s\varepsilon$。反之，对于每个 $s\in k$，向量 $s\varepsilon$ 满足（E_j）对所有 j:

- 对于 $i\le j<j^*$，有 $c_j=c_{j+1}=0$;
- 对于 $j=j^*$，有 $c_{j^*}=0$ 和 $a_{j^*}=0$;
- 对于 $j^*<j\le n-1$，（E_j）表示为 $\gamma_j\varepsilon_j s=-a_j\varepsilon_{j+1}s$，这由 ε的定义可知。

因此 $\mathrm{Aut}(R_n)_{d_n}=\{\tau_{s\varepsilon}:\ s\in k\}$，且映射 $s\mapsto\tau_{s\varepsilon}$ 是一个同构（k，$+$）$\to\mathrm{Aut}(R_n)_{d_n}$。

（b2）设 $j^*<m\le n-1$，且 $\deg g_m\ge 2$。由引理 2.14（1），$c_m=0$。由引理 2.14（3），$c_j=0$ 对所有 $i\le j\le m$。由于 $a_j\neq 0$ 对于 $m\le j\le n-1$，引理 2.14（4）给出 $c_j=0$ 对所有$m<j\le n$。因此 $c=0$。□

注 2.16。如果 $a_j=0$ 对所有 j，那么 $j^*=n-1$，且定理 2.15（b1）给出自同构群 $\mathrm{Aut}(R_n)_{d_n}=\{(x_1,\ldots\ldots,x_{n-1},x_n+s):\ s\in k\}$，从而恢复了 [19, 定理 2。4]（其中将条件（ii）替换为条件（D）；参见例 2.8）。

例 2.17. 设 $i=2$, $n=4$, $a_2=0$, $a_3\neq 0$ 和 $g_3(x_3)=\gamma x_3+\beta$ with $\gamma\neq 0$。那么$j^*=2$，定理 2.15(b1) 给出 $\tau_{s\varepsilon}(x_3)=x_3+s$, $\tau_{s\varepsilon}(x_4)=x_4-\frac{\gamma}{a_3}s$。直接验证可得$\tau_{s\varepsilon}(d(x_3))=g_2(x_2)=d(x_3)$，以及 $\tau_{s\varepsilon}(d(x_4))=a_3\big(x_4-\frac{\gamma}{a_3}s\big)+\gamma(x_3+s)+\beta=d(x_4)$。若 $\deg g_3\ge 2$,—则根据定理 2.15(b2)，各向同性群是平凡群，尽管 $a_2=0$。

接下来，我们回顾 Shamsuddin 的一个重要结果 [4]；另见 [2,定理 13.2.1]。

定理 2.18 ([4])。设 R 为一个包含 $\mathbb{Q}$的环，且设 d 为 R的简单导子。通过令 $d(t)=at+b$，将 $\tilde{d}$ 扩展为 $R[t]$ 的导子 $\tilde{d}$，其中 a、$b\in R$。则当且仅当不存在 $r\in R$ 使得 $d(r)=ar+b$时，d 是简单的。

推论 2.19。设 d_i 满足条件 (C_l)，且 $\deg_{x_i} g_i(x_i)\le l$。如果 d_i 是简单的，那么d_n 是简单的。

证明。设 $i\le j\le n-1$ 并设 d_j 是简单的。若 $d_j(r)=a_jr+g_j(x_j)$ 对某个 $r\in R_j$成立，则引理 2.4 的性质 (P_j) 给出 $g_j\in k$，矛盾。由定理 2.18，d_{j+1} 是简单的。由归纳法，d_n 是简单的。□

在 [10], Mendes 和 Pan 证明了 R_2 的简单导子的各向同性群是平凡群。作为推论，我们有如下结果。

推论 2.20。设 $i=2$，设 d_n 如 (2.0.1) 中所述，其中 $a_j\in k$ 任意，并设 $\deg_{x_2} g_2(x_2)\le l$。假设 d_2 是简单的，并满足条件 (C_l) 和(D)。则 d_n 是简单的，并且自同构群$(R_n)_{d_n}$如定理 *2.15*所述。

证明。由推论 2.19，d_n 是简单的。由 [10, 定理 1], 自同构群$(R_2)_{d_2}=\{\mathrm{Id}_{R_2}\}$。现在应用定理2.15。□

We n现在给出由 R_2的简单导子得到的此类扩张的例子 d_n .

推论 2.21。设 m_1、m_2 为满足 $m_2\nmid m_1$的正整数。对于 $n\ge 3$，设

$$d_n=(1+x_1^{m_2}x_2)\partial_{x_1}+x_1^{m_1}\partial_{x_2}+(a_2x_3+g_2(x_2))\partial_{x_3}+\cdots+(a_{n-1}x_n+g_{n-1}(x_{n-1}))\partial_{x_n},$$

其中 $a_j\in k$ 且 $g_j(x_j)\in k[x_j]\setminus k$ 当 $2\le j\le n-1$时。则 d_n 是简单的，且 $\mathrm{Aut}(R_n)_{d_n}$ 如定理 *2.15*所述。特别地，$\mathrm{Aut}(R_n)_{d_n}$ 当所有 $a_j\neq 0$时是平凡的。

证明。导子 $d_2=(1+x_1^{m_2}x_2)\partial_{x_1}+x_1^{m_1}\partial_{x_2}$ 是简单的 [20, 定理 4.1 和 6.1], ，并且根据 [13, 命题 2.2]，它满足条件 (C_∞)。对于 (D)，取 $u_1=(m_2,1)$ 和 $u_2=(m_1,0)$:

$h_1 = 1 + x_1^{m_2}x_2$ 的单项式整除 $x_1^{m_2}x_2$，而 $h_2 = x_1^{m_1}$是一个单项式。对于 $Y = (t_1, t_2)^T \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$，系统 $(A_{d_2} - I)$ $Y \leq 0$ 为

$$(m_2 - 1)t_1 + t_2 \leq 0, \qquad m_1 t_1 - t_2 \leq 0.$$

相加，$(m_1 + m_2 - 1)t_1 \leq 0$，因此 $t_1 = 0$，然后 $t_2 = 0$。因此 (D) 成立，结论由推论 2.20得出。□

推论 2.22。设 $\alpha \geq 1$、$\beta \geq 1$ 和 $m \geq \beta + 1$ 为整数。对于 $n \geq 3$，令

$$d_n = (1 - x_2^{\alpha}x_1^{\beta})\partial_{x_1} + x_1^m\partial_{x_2} + (a_2x_3 + g_2(x_2))\partial_{x_3} + \cdots + (a_{n-1}x_n + g_{n-1}(x_{n-1}))\partial_{x_n},$$

其中 $a_j \in k$，$g_j(x_j) \in k[x_j]\backslash k$ 对于 $2 \leq j \leq n-1$，且 次数 $g_2 = 1$。则 d_n 是简单的，且 自同构群$(R_n)_{d_n}$如定理 2.15所述。

证明。导子 d_2 是简单的 [12, 定理 2.6]，，并且根据命题 2.8、2.9]，满足条件（C_1）。对于条件（D），取 $u_1 = (\beta, \alpha)$ 和 $u_2 = (m, 0)$。方程组（$A_{d_2} - I$）$Y \leq 0$ 写作（$\beta - 1$）$t_1 + \alpha t_2 \leq 0$ 和 $mt_1 - t_2 \leq 0$；由第一个得到 $t_2 = 0$，再由第二个得到 $t_1 = 0$。现在令 $l = 1$，应用推论 2.20。□

3. 一个部分逆命题

设 i, n, R_i, R_n, d_i和 d_n与前一节中的定义相同。设 $c \in k$。用 $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + c)$ 表示 R_n 的自同构，它对所有 $1 \leq j \leq n-1$ 都将 x_j 映为 x_j，并将 x_n 映为$x_n + c$。本节将证明：若 d_i 是简单的，且 d_n 的各向同性群是$\{(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + c) : \ c \in k\}$的子群，那么在满足关于 a_j 和 g_j的适当条件时，导子d_n 是简单的。

对于 $s \in \{i, \ldots, n-1\}$，我们设 $p(s) := 1 + \max\{j : \ s \leq j \leq n-1,\ a_j = a_s\} \in \{s+1, \ldots, n\}$.

定理 3.1. 设 d_i 是一个简单的 k-导子，定义在 R_i上，并令 d_n 如 (2.0.1)所示。假设对每个 $s \in \{i, \ldots, n-1\}$，对于所有 $\deg g_m = 1$，都有 $p(s) \leq m \leq n-1$。若

$$\mathrm{Aut}(R_n)_{d_n} \subseteq \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + c) |\ c \in k\},$$

那么 d_n 是 R_n的简单导子。

证明。假设 d_n不是简单的。由于 d_i是简单的，因此存在 $s \in \{i, \ldots, n-1\}$使得 d_s是简单的，而 d_{s+1} 不是。由定理 2.18，存在 $r_s \in R_s$ 满足 $d_s(r_s) = a_s r_s + g_s(x_s)$。令$u = x_{s+1} - r_s \in R_{s+1} \setminus k$。于是

$$d(u) = a_s x_{s+1} + g_s(x_s) - a_s r_s - g_s(x_s) = a_s u.$$

令 $p = p(s)$。根据假设，$g_m(x_m) = \gamma_m x_m + \beta_m$，其中 $\gamma_m \in k^*$ 且 $\beta_m \in k$ 适用于 $p \leq m \leq n-1$；又由 p 定义中的极大性，对于 $p \leq m \leq n-1$有 $a_m \neq a_s$。定义 $c_p = 1$ 并

$$c_{m+1} = \frac{\gamma_m}{a_s - a_m} c_m \qquad (p \leq m \leq n-1), \tag{3.1.1}$$

并令 ρ为由 R_n 给出的自同态

$$\rho(x_q) = x_q \quad (1 \leq q \leq p-1), \qquad \rho(x_q) = x_q + c_q u \quad (p \leq q \leq n).$$

我们首先证明，ρ 是一个自同构。如果 $p > s+1$，则 $u \in R_{s+1} \subseteq R_{p-1}$，因此 ρ 是对角系数全为 1 的三角形的自同构。如果 $p = s+1$，则 $\rho(x_{s+1}) = 2x_{s+1} - r_s$且 $\rho(x_q) - x_q \in R_{s+1}$对$q > s+1$成立，因此 ρ是对角系数属于 $\{1, 2\}$的三角形的自同构。在这两种情况下，ρ都是自同构。

现在我们证明，ρ 与 d可交换。对于 $q \leq p-1$，我们有 $d(x_q) \in R_{p-1}$，而 ρ 逐点固定它，因此 $\rho(d(x_q)) = d(x_q) = d(\rho(x_q))$。对于 $q = p$，利用 $a_{p-1} = a_s$ 和 $\rho(x_{p-1}) = x_{p-1}$，

$$d(\rho(x_p)) = a_{p-1}x_p + g_{p-1}(x_{p-1}) + a_s c_p u = a_{p-1}(x_p + c_p u) + g_{p-1}(x_{p-1}) = \rho(d(x_p)).$$

对于 $p \leq m \leq n-1$，

$$d(\rho(x_{m+1})) = a_m x_{m+1} + g_m(x_m) + a_s c_{m+1} u,$$

$\rho(d(x_{m+1})) = a_m(x_{m+1} + c_{m+1}u) + g_m(x_m + c_m u) = a_m x_{m+1} + g_m(x_m) + (a_m c_{m+1} + \gamma_m c_m)u$，并且由（3.1.1）可知这些相等。因此 $\rho \in$自同构群$(R_n)^{d_n}$。

因此，$\rho(x_p) - x_p = u \notin k$。$\rho$不是 $(x_1$、……、x_{n-1}，$x_n + c)$ 的形式，这就产生了矛盾。 □

注 3.2。定理 3.1 的两个极端情形如下：

(1) $a_i = \cdots = a_{n-1}$那么，对每个 s，都有 $p(s) = n$，且无需对 g_m 作任何条件限制；(2) a_j两两不同，那么对于任意 $s \in \{i, \ldots n-1\}$，都有 $p(s) = s+1$，此时条件简化为对所有 $i+1 \le m \le n-1$，$\deg g_m = 1$。

Acknowledgments

第一作者谨此感谢印度科学技术部提供的 INSPIRE 教师奖学金资助 IFA23-MA 197，以及 Anusandhan 国家研究基金会（ANRF）提供的 ARG-MATRICS 资助（ANRF/ARGM/2025/001651/MTR）。第二作者谨此感谢 IIT 印多尔提供的青年教师研究资助（编号 IITI/YFRSG/2024-25/Phase-VII/05），以及 Anusandhan 国家研究基金会（ANRF）提供的 PMECRG 资助（ANRF/ECRG/2025/003435/PMS）。第三作者获得印度科学与工业研究理事会（CSIR India）提供的高级研究奖学金资助，编号为 09/1022(16075)/2022-EMR-I。在准备本文期间，作者使用 Claude 作为辅助工具，以改进论文的组织结构、清晰度和语言表达。

References

[1] A. Nowicki, *An example of a simple derivation in two variables*, 《Colloq. Math.》113（2008年），第1期，25–31页。[2] A. Nowicki, *Polynomial Derivations and their Rings of Constants*, Uniwersytet Miko·laja Kopernika, Toru´n, 1994年。[3] A. Seidenberg, *Differential ideals in rings of finitely generated type*, 《Amer. J. Math.》89, （1967年），第1期，22-42页。[4] A. Shamsuddin，博士论文，利兹大学，1977年。[5] C. R. Jordan, D. A. Jordan, *The Lie structure of a commutative ring with a derivation*, 《J. London. Math. Soc.》18, （1978年），第1期，39–49页。[6] D. A. Jordan, *Differentially simple rings with no invertible derivatives*, 《Q. J. Math》32（1981年），第4期，417-424页。[7] D. Yan, *A note on isotropy groups and simple derivations*, 《Comm. Algebra》50（2022年），第7期，2831-2839页。[8] D. Yan, *On Shamsuddin derivations and the isotropy groups*, 《J. Algebra》637（2024年），243–252页。[9] G. Freudenburg, *Algebraic theory of locally nilpotent derivations*, 第2版, 《Encyclopaedia Math. Sci.》136, Springer, 柏林, 2017年。[10] L. G. Mendes, I. Pan, *On plane polynomial automorphisms commuting with simple derivations*, 《J. Pure Ap- gebra》221（2017年），第4期，875–882页。[11] O. Ore, *Theory of non-commutative polynomials*, 《Ann. of Math.》34（1933年），第3期，480–508页。[12] P. Shukla, A. Parkash, *Simple derivations in two variables*, 《Comm. Algebra》53（2025年），第2期，535–542页。[13] P. Shukla, S. Singh, *Classes of non-invertible simple derivations of* $k[x_1, \ldots, x_n]$, （2026年），（Arxiv: https://arxiv.org/abs/2611.21018）。[14] R. Baltazar, M. Veloso, *On isotropy group of Danielewski surfaces*, 《Comm. Algebra》49（2021年），第3期，1006-1016页。[15] L. N. Bertoncello, D. Levcovitz, *On the isotropy group of a simple derivation*, 《J. Pure Appl. Algebra》224（2020年），第1期，33–41页。[16] R. Hart, *Derivations on regular local rings of finitely generated type*, 《J. London. Math. Soc.》10, （1975年），第3期，292-294页。[17] S. C. Coutinho, *Nonholonomic simple D-modules from simple derivations* **49**, 2007 1, , 《Glasg. 11 21 Math. J.》（），第–期，–页。[18] S. C. Mishra, D. Mondal, P. Shukla, *A class of simple derivations of polynomial ring* $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, 《Comm. Algebra》54（2026年），第4期，1492–1501页。[19] S. C. Mishra, D. Mondal, P. Shukla, *On the isotropy groups of non-invertible simple derivations*, 即将在《J. Comm. Algebra》发表，（Arxiv: https://doi.org/10.48550/arXiv.2507.15525）。[20] S. Kour, *A class of simple derivations of* $k[x, y]$, 《Comm. Algebra》42（2014年），第9期，4066–4083页。[21] S. Kour, *Some simple derivations of k[x, y]*, 《Comm. Algebra》40（2012年），第11期，4100–4110页。[22] Y. Huang, D. Yan, *Simple derivations and the isotropy groups*, 《Comm. Algebra》52（2024年），第3期，1097-1112页。

Indian Institute of Technology Indore, Simrol, Khandwa Road, Indore 453 552, India
Email address: sumitcmishra@gmail.com, sumitcmishra@iiti.ac.in

Indian Institute of Technology Indore, Simrol, Khandwa Road, Indore 453 552, India
Email address: mdibyendu07@gmail.com, mdibyendu@iiti.ac.in

Indian Institute of Technology Indore, Simrol, Khandwa Road, Indore 453 552, India
Email address: Pankajshuklashvm23@gmail.com, phd2201141002@iiti.ac.in

Indian Institute of Technology Indore, Simrol, Khandwa Road, Indore 453 552, India
Email address: mscphd2403141015@iiti.ac.in