arXiv:2611.29535v1 [math.OA] 22 Nov 2026

交换平方的有限性结果与定量 Ocneanu 刚性

SHANNON HALL 和 REMUS NICOARĂ

摘要。我们为矩阵代数的非退化交换平方引入张成相对交换子条件（SRC）。该条件要求第二相对交换子作为前一个代数上的右模，张成基本构造下下排中的下一个代数。我们证明，如果具有固定带迹包含数据的 SRC 平方序列收敛，则除有限多项外，所有项都与极限方形同构。我们还证明，每个深度二的有限指数 II_1 因子包含的标准交换平方都满足 SRC。这给出了一个交换平方证明，说明具有给定有限主图的标准不变量满足奥克涅努有限性定理。随后，当右上角带迹代数已给定且维数为D时，我们得到 SRC 方形按同构分类数量的显式上界 $B(D) = 10^{7D^5}$。当 D 表示根处长度为 6ℓ 的闭游走数量，且 ℓ 为不小于直径的最小奇整数时，同一个函数还界定了具有给定有限主图的标准不变量数量。我们还刻画了其自旋模型交换方块满足 SRC 的 Hadamard 矩阵。这些矩阵恰好是与有限阿贝尔群的特征表等价的矩阵。

1. 引言

Popa 在其 1983年 关于自由群因子的极大内射子代数的论文中引入了交换方块条件 [P0, 引理 1.2.2]。他同年发表的关于子代数正交对的论文讨论了交为标量的情形 [P1, 引理 2.1 和定义 2.2]。正如 Pimsner 和 Popa 所指出的 [PP2, §1.4, p. 279]，“交换方块”这一术语后来由 Jones 引入。Goodman、de la Harpe 和 Jones 的著作中也使用了这一术语 [GHJ, 定义 4.1.1]。为回顾我们所用的定义，设 P_0 是一个带有忠实归一化迹 τ的有限维矩阵代数。我们所说的矩阵代数，是指由 $\mathbb{C}$ 上的全矩阵代数组成的有限直和。考虑如下含单位包含构成的方形

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} P_{-1} & \subset & P_0 \\ \cup & & \cup \\ Q_{-1} & \subset & Q_0 \end{pmatrix}, \tau \Big). \tag{1.1}$$

对于一个含单位的 $*$-子代数 $X \subset P_0$，令 E_X 表示到 X上的保 τ 条件期望。若满足下式，我们称 (1.1) 为 交换方块

$$E_{P_{-1}} E_{Q_0} = E_{Q_0} E_{P_{-1}} = E_{Q_{-1}} \qquad \text{on } P_0.$$

等价地，$P_{-1} \ominus Q_{-1}$和 $Q_0 \ominus Q_{-1}$在 $L^2(P_0, \tau)$中正交。

交换方块既可用于构造子因子，也可用于定义其不变量。我们可以构造通过沿有限维交换方块的两行迭代 Jones 基本构造，并取所得并集的弱闭包 [JS, Ch. 5]，可以构造超有限 II_1 因子的有限指数子因子。反过来，有限指数子因子的 Jones 塔中的高阶相对交换子构成一个交换方块网格。

本文中所有包含都是含幺的。我们用 $V \cdot W$ 表示$\{vw : v \in V, \ w \in W\}$的复线性张成。我们假设该交换方块是非退化的，即$P_{-1} \cdot Q_0 = P_0$，并且 τ 是两个水平包含上的 λ-马尔可夫迹，其标量相同

日期：2026年11月21日。

$\lambda > 0$。对两行应用 Jones 基本构造 [J1]，得到它们的公共扩张 [P3, §1.1.6],，我们按照 [N3]中的记法将其记为$\mathcal{L}$。因此

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} P_{-1} & \subset & P_0 & \overset{e}{\subset} & P_1 \\ \cup & & \cup & & \cup \\ Q_{-1} & \subset & Q_0 & \overset{e}{\subset} & Q_1 \end{pmatrix}, \tau \Bigg), \qquad P_1 = \langle P_0, e\rangle, \quad Q_1 = \langle Q_0, e\rangle. \tag{1.2}$$

这里，e 是公共 Jones 投影，而 τ 也表示 P_1上的扩展迹。按照我们的约定，马尔可夫性质写作 $\tau(xey) = \lambda\tau(xy)$，其中 $x,\ y \in P_0$；等价地，$E_{P_0}(e) = \lambda 1$。我们用 $\mathcal{U}(X)$ 表示 X的酉群，并用 $\|x\|_2 = \tau(x^*x)^{1/2}$表示。

设 $R_0 = P'_{-1} \cap Q_0$ 和 $R_1 = P'_{-1} \cap Q_1$，其中交换关系取在 P_1中。我们关注第二相对交换子 R_1的大小。在 [N3 中，第二作者在定义 2.2] 中通过要求以下两个等式，引入了大第二相对交换子条件（LRC）：

$$E_{Q_1}(P'_{-1} \cap P_1) = R_1, \qquad E_{P_0}(R'_1 \cap P_1) = P_{-1}.$$

在本文中，我们通过 Q_1 中由 R_1 与取自 Q_0的系数张成的子空间来衡量其大小。

定义 1.1. 设 $R_1 = P'_{-1} \cap Q_1$ 属于与 $\mathcal{C}$ 相关的格 (1.2)。若 $\mathcal{C}$ 具有张成相对交换子 (SRC)，则称之为

$$R_1 \cdot Q_0 = Q_1. \tag{SRC}$$

由于 $e \in R_1$ 和 $Q_1 = \langle Q_0, e\rangle$，对于每个非退化交换方块，代数 R_1 和 Q_0 都生成 Q_1。基本构造将 Q_1 的每个元素写成若干项 qeq' 之和，其系数来自 Q_0，并分别置于 e 的两侧。条件 (SRC) 要求存在如下展开

$$x = \sum_j r_j q_j, \qquad r_j \in R_1, \quad q_j \in Q_0 \qquad (x \in Q_1).$$

因此，R_1 作为右 Q_0-模张成 Q_1。

每个二阶子因子的标准交换平方都满足 (SRC)，因为 R_1 关于 R_0 的右基给出了上述展开（命题 4.1）。对于这样的子因子 $N \subset M$，其 Jones 塔为 $M = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots$，条件 (SRC) 的形式为

$$(M'_1 \cap M_3) \cdot (M' \cap M_2) = M' \cap M_3.$$

这一张成性质直接源自 Popa 对标准不变量 [P4, §1]的公理化，以及他对交换方块非退化性的判据 [P3, §1.1.5, Proposition, (iii) and (v)]。这一观察促使我们为一般的交换方块引入 (SRC)。因此，以 (SRC) 取代 (LRC)，便将 [N3, Corollary 5.2] 中的有限性结果扩展到了所有维数 $\dim_{\mathbb{C}} P_0$ 固定的深度二标准方形。

对于任意方形，$R_1 \cdot Q_0$ 的维数可根据 (2.1) 从包含 $R_0 \subset R_1$ 和$R_0 \subset Q_0$ 中读出。特别是，当 $R_0 = \mathbb{C}1$ 时，条件 (SRC) 等价于维数等式 $\dim_{\mathbb{C}} Q_1 = (\dim_{\mathbb{C}} R_1)(\dim_{\mathbb{C}} Q_0)$。

两个交换方块之间的同构，是指它们的右上代数之间一个保迹的 $*$-同构，并将其余三个代数分别映到对应的代数上。它在迹希尔伯特空间上的酉延拓与琼斯投影相互交织，因此将Q_1 和 R_1 映到各自对应的对象上。特别地，SRC 在同构下保持不变。带迹包含数据由四个代数、四条边的包含矩阵及其相容的块标签，以及 P_0上的迹组成。

我们的主要结果之一是，对于固定的带迹包含数据，满足 (SRC) 的每个交换方块，在满足相同条件的方形中，除同构外都是孤立的。

定理 1.2。 (i) 设 $\mathcal{C}$ 是一个带有马尔可夫迹 τ 的非退化交换平方，如(1.1)–(1.2)所示，并设 $(u_m)_{m\geq 1}$ 是 $U(Q'_{-1}\cap P_0)$ 中的一个序列，满足 $\|u_m-1\|_2\to 0$。对于每个 $m\geq 1$，假设

$$\mathcal{C}_m=\begin{pmatrix} P_{-1} & \subset & P_0 \\ \cup & & \cup \\ Q_{-1} & \subset & Q_0^{(m)}=u_mQ_0u_m^* \end{pmatrix},\tau \tag{1.3}$$

是一个交换方块。令 $Q_1^{(m)}=\langle Q_0^{(m)},e\rangle\subset P_1$ 和 $R_1^{(m)}=P'_{-1}\cap Q_1^{(m)}$。如果

$$R_1^{(m)}\cdot Q_0^{(m)}=Q_1^{(m)}\qquad for\ every\ m\geq 1,$$

那么存在一个 m_0，使得对于每个 $m\geq m_0$，$\mathcal{C}_m$ 都与 $\mathcal{C}$ 同构。

(ii) 对于固定的带迹包含数据，满足 (SRC) 的非退化交换平方只有有限多个同构类。若仅固定(P_0,τ)，同样的有限性结论仍然成立。对于每个整数 $D\geq 1$，所有满足 维数$_{\mathbb{C}}P_0\leq D$ 和 $Z(P_{-1})\cap Z(P_0)=\mathbb{C}1$ 的此类方形也满足该结论。

第 (i) 部分给出了 SRC 方形之间的序列孤立性。对于具有固定数据的一般序列，令 $Q_{-1}\subset P_{-1}\subset P_0$，并将第四角的收敛理解为在 $L^2(P_0,\ \tau)$ 上按算子范数收敛。第 3 节说明如何将一个子序列写成 (1.3) 的形式，其中$u_m\to 1$。

为证明 (i)，假设有无穷多个 $\mathcal{C}_m$ 不同构于 $\mathcal{C}$。将相应的酉元归一化并取一个子序列后，我们得到自伴单位向量

$$h=\lim_{m\to\infty}\frac{u_m-1}{i\|u_m-1\|_2},\qquad h=h^*,\qquad \|h\|_2=1.$$

与 [N1, 引理 1.8] 和 [N3, 命题 2.9]，中一样，这种归一化使 h 与 (3.2) 中的四个代数分别正交。对每个 $\mathcal{C}_m$ 应用命题 2.1，可得条件期望F_m：$P_1\to P_0$，满足

$$F_m(Q_1^{(m)})=Q_0^{(m)},\qquad F_m((R_1^{(m)})'\cap P_1)=P_{-1}.$$

对数对 $(R_1^{(m)},\ F_m)$ 取一个子序列，可得 (3.7) 中的两个包含。于是，等式 (3.9) 将 h 置于 (3.2) 中四个代数之和内，从而迫使 $h=0$。酉参数空间的紧性进而给出 (ii)。

对于有限指数包含 $N=M_{-1}\subset M=M_0$ 的 II_1 因子，令 $(M_j)_{j\geq -1}$ 表示其 Jones 塔 [J1]。其标准不变量是高阶相对交换子的格 $M_i'\cap M_j$, $-1\leq i\leq j$，连同其包含关系、迹和特定的琼斯投影，并视保留这些数据的同构为等价 [P3, §1.3]。我们将 $N\subset M$ 的主图定义为与该塔相关联的有根二分多重图

$$\mathbb{C}=N'\cap N\ \subset\ N'\cap M\ \subset\ N'\cap M_1\ \subset\ \cdots.$$

若包含 $N\subset M$ 的主图是有限的，则称其具有有限深度（这一概念由 Ocneanu 在20世纪80年代中期关于副群的研究中引入 [Oc, Sa]）。此时，其深度 k 是从根到主图顶点的最大距离。若沿交换方块的各行迭代基本构造，得到一个深度为 k的子因子，则称该交换方块的深度为 k。对于深度为 k的 $N\subset M$，该方块

$$\begin{array}{ccc} M'\cap M_k & \subset & M'\cap M_{k+1} \\ \cup & & \cup \\ M_1'\cap M_k & \subset & M_1'\cap M_{k+1} \end{array}$$

带有从 M_{k+1} 继承的迹的是关于 $N\subset M$的标准交换平方。两行均通过 Jones 基本构造从这些列继续延伸。根据 Popa 重构定理，该方形的保迹同构类决定了$N\subset M$ 的整个标准不变量（见 [P2] 和 [P3，第 1.3.7 节，第 185] 页）。

作为定理 1.2 的推论，我们用交换平方的语言，对以下 Ocneanu 有限性定理给出了一个新的证明。

定理 1.3 (Ocneanu)。 设 Γ 是一个有限根二部多重图。在主图作为有根图同构于 Γ 的 II_1 因子有限指数包含 $N \subset M$ 中，标准不变量至多出现有限多个同构类。

Ocneanu 用副群的语言给出了最初的证明，他在 [Oc] 中引入了副群。正如 Kawahigashi 在 [Kaw 中所解释的，定理 2.1 和推论 2.2], Ocneanu 首先证明了固定融合规则下的刚性，然后推导出给定主图时的有限性。在第 4 节中，我们通过从 $N \subset M$ 过渡到 $N \subset M_{\ell-1}$ 来证明主图命题，其中 ℓ 是一个至少等于主图直径的奇整数。我们证明该包含满足第 4 节的深度 2 条件，从而其标准交换平方满足 (SRC)。通过取一个角，我们恢复原始的标准不变量。随后，推论 4.2 从定理 1.3 推导出固定融合规则命题。

定量估计。 第6节给出了两个有限性定理的共同上界。记$B(D) = 10^{7D^5}$。由定理 6.1可知，当 $\dim_{\mathbb{C}} P_0 \le D$ 且给定 $(P_0,\ \tau)$，或上方水平包含连通（即$Z(P_{-1}) \cap Z(P_0) = \mathbb{C}1$）时，SRC 方块的同构类至多有 $B(D)$个。为得到这个上界，我们将生成恒等式 (SRC) 写成关于乘积 rq系数的多项式方程，其中 r 属于第二相对交换子，q 属于第四个角。序列孤立性保证同构类在解集的每个连通分支上保持不变。于是，Milnor估计 [Mil，定理 2] 给出了同构类数的上界。

设 Γ 是一个给定的有限主图，其邻接矩阵为 G，根为 $*$。令 ℓ 为不小于 diam(Γ)的最小奇整数，并令 $D_\Gamma = (G^{6\ell})_{*,\,*}$。定理 6.3给出了主图为 Γ 的标准不变量同构类数的上界 $B(D_\Gamma)$。为将该上界用于交换方块，我们采用 $N \subset M_{\ell-1}$的标准交换方块 (4.2)。其右上代数为 $N' \cap M_{3\ell-1}$，维数为 D_Γ，即从根出发长度为 6ℓ 的闭游走数。对于每个这样的方块，我们接着计算投影在 $N' \cap M_{\ell-1}$ 中的可能块秩，以恢复 $N \subset M$的标准不变量。第6节还给出了仅对指标和深度设上界时的上界。

对于自旋模型，定理 5.1 将 SRC 方块刻画为有限阿贝尔群的特征表所产生的方块。命题 6.2 给出了这些方块的分离估计。若 A 和 B 是两个阶为 n、具有公共左上代数 D_n 的 SRC 自旋方块的第四角，则

$$\sup_{\|x\|_2=1} \|E_A(x) - E_B(x)\|_2 < \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad \text{the two squares are isomorphic.}$$

这里 $x \in M_n(\mathbb{C})$ 和 $\|x\|_2 = \tau(x^*x)^{1/2}$，其中 τ 是归一化矩阵迹。

致谢。 第二作者感谢 Sorin Popa 将这一问题提请他注意，也感谢此前与其就该主题进行的交流。

人工智能的使用。 我们使用 OpenAI 的 ChatGPT 来探索证明策略、审阅论证和参考文献，并修改表述。我们对研究结果及其呈现方式负责。

2. SRC 方块的一个条件期望

我们首先将 (SRC) 表述为一个维数等式，并在第 5 节中用它检验自旋模型交换方块的条件。接着，我们构造一个从 P_1 到 P_0的条件期望，它将 Q_1 映到 Q_0，并将 $R_1' \cap P_1$ 映到 P_{-1}。这两个恒等式将在第 3 节的孤立性证明中一并使用。

由于 Q_1 由 Q_0eQ_0 和 $E_{P_0}(e)=\lambda 1$张成，因此有 $E_{P_0}(Q_1)=Q_0$。此外，由P_{-1}-双模性可知 $E_{P_0}(R_1)\subset R_0$，故 $E_{Q_0}|_{R_1}=E_{R_0}|_{R_1}$。在 R_0的每个简单块中选取矩阵单位 $(f_{ab}^{(i)})$，并令 $t_i=f_{11}^{(i)}$。选取 R_1t_i的一组基 $(v_{i\alpha})_\alpha$，使其关于内积 $\tau(y^*x)/\tau(t_i)$正交归一。于是

$$E_{Q_0}(v_{i\alpha}^{*}v_{j\beta})=\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}\,t_i,$$

因为 $t_iR_0t_j=0$ 对于 $i\neq j$ 和 $t_iR_0t_i=\mathbb{C}t_i$。因此，$v_{i\alpha}$ 的左乘法将 t_iQ_0等距映射到 $L^2(Q_1,\tau)$中的 $v_{i\alpha}t_iQ_0$，且这些值域彼此正交。它们张成$R_1\cdot Q_0$，因为

$$rq=\sum_{i,a}(rf_{a1}^{(i)})(f_{1a}^{(i)}q)\qquad (r\in R_1,\ q\in Q_0).$$

计算维数可得

$$R_1\cdot Q_0=Q_1\quad\Longleftrightarrow\quad \dim_{\mathbb{C}}Q_1=\sum_i \dim_{\mathbb{C}}(R_1t_i)\,\dim_{\mathbb{C}}(t_iQ_0). \tag{2.1}$$

当 $R_0=\mathbb{C}1$时，该方形满足 (SRC) 当且仅当 $\dim_{\mathbb{C}}Q_1=(\dim_{\mathbb{C}}R_1)(\dim_{\mathbb{C}}Q_0)$。

现在我们转而讨论有限性证明中使用的条件期望。马尔可夫迹已经给出$E_{P_0}(Q_1)=Q_0$。我们还需要控制 $R_1'\cap P_1$的像。下一个命题表明，通过对 E_{P_0}加权，可以指定这两个像。其证明首先利用 (SRC) 得到 $P_1=P_0\cdot R_1$，然后将一个与 R_1 对易的算子平均到 P_{-1}中。R_0各块的迹权重参与了该平均的归一化。

命题 2.1. 设 L 是方形 C 在 (1.1) 中的基本构造(1.2)，并令 $R_1=P_{-1}\cap Q_1$。假设 $R_1\cdot Q_0=Q_1$。存在一个正可逆的 $d\in P_0'\cap Q_1$，满足 $E_{P_0}(d)=1$，使得 $F(x)=E_{P_0}(dx)$，$x\in P_1$，定义了从 P_1 到 P_0 的忠实条件期望，并满足

$$F(Q_1)=Q_0,\qquad F(R_1'\cap P_1)=P_{-1}. \tag{2.2}$$

证明。将 P_0 表示为在 $\mathcal{H}=L^2(P_0,\tau)$ 上的左乘法，并将右乘记为 ρ。本证明中的绝对交换子均取自 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$，因此 $P_1=\rho(P_{-1})'$。由于 $P_0=P_{-1}\cdot Q_0$ 且 e 与 P_{-1} 交换，单位元 $P_1=\operatorname{span}_{\mathbb{C}}P_0eP_0$ 给出 $P_1=P_0\cdot Q_1$。对 (SRC) 两边取伴随，得到 $Q_1=Q_0\cdot R_1$。由此可得

$$P_1=P_0\cdot R_1=R_1\cdot P_0.$$

由于 $E_{P_0}(R_1)\subset R_0$，我们得到一个非退化交换平方

$$\mathcal{D}=\begin{pmatrix} R_1 & \subset & P_1\\ \cup & & \cup\\ R_0 & \subset & P_0\end{pmatrix},\tau\Bigg). \tag{2.3}$$

令 $J\xi=\xi^*$作用于 $L^2(P_0,\ \tau)$。我们声称 $JR_1J=R_1$。事实上，R_1由与 P_{-1} 的两种作用均可交换，且将 Q_0 映入 Q_0的算子组成。$Q_1=\langle Q_0,\ e\rangle$中的每个元素都保持 Q_0 不变，并与 P_{-1}的右作用可交换。反过来，具有上述性质的算子在 Q_0 上的限制是右 Q_{-1}-线性的。因此，按照基本构造，它属于 $\mathrm{End}_{Q_{-1}}(Q_0)$，即 Q_1 在 $L^2(Q_0,\ \tau)$上的限制。右 P_{-1}-线性决定了该算子在 $Q_0\cdot P_{-1}=P_0$ 上的取值。对 R_1 的这一描述在 J 下保持不变。

将 (2.3) 中的 $\mathcal{D}$ 用 J 共轭，得到

$$\mathcal{D}^J=\begin{pmatrix} R_1 & \subset & L=P_{-1}'\\ \cup & & \cup\\ I=\rho(R_0) & \subset & K=\rho(P_0)\end{pmatrix},\tau^J\Bigg),\qquad L=K\cdot R_1. \tag{2.4}$$

(2.4) 中的条件期望均是相对于 $\tau^J(y)=\tau(JyJ)$ 在 $y\in L$ 下取的。特别地，$I\subset R_1\cap P_0$。对于有限维带迹代数 $V=\bigoplus_j M_{n_j}(\mathbb{C})$，令 $z_V=\sum_j(\gamma_j/n_j)1_j$，其中 γ_j 是块 j 中极小投影的迹。对 I 和 K 使用 τ^J，并令 $a=z_I$。

取 K 的一组完整矩阵单位，并将每个矩阵单位除以其所在块的极小迹权重的平方根。所得的 (u_k) 构成 $L^2(K,\tau^J)$ 的标准正交基。于是 $v_k = u_k a^{1/2}$ 满足

$$\sum_k v_k E_I(v_k^* y) = y \quad (y \in K), \qquad \sum_k v_k^* z_K v_k = a. \tag{2.5}$$

对于第一个恒等式，将 E_I 按 I 的各个块 M_{n_h} 的矩阵单位 f_{ij}^h 展开。(u_k) 的正交归一性给出

$$\sum_k v_k E_I(v_k^* y) = \sum_{h,i,j} \frac{1}{n_h} \sum_k u_k \tau^J(u_k^* y f_{ji}^h) f_{ij}^h = \sum_{h,i,j} \frac{1}{n_h} y f_{ji}^h f_{ij}^h = y.$$

第二个恒等式由 $\sum_k u_k^* z_K u_k = 1$ 得出：对 K 的每个块，将其中的矩阵单位求和即可。

由于 (2.4) 中的 $E_{R_1}|_K = E_I|_K$ 以及 $L = K \cdot R_1$，同一个 (v_k) 是 L 关于 R_1 的右基。因此

$$X \in R_1' \quad \Longrightarrow \quad Y = \sum_k v_k X v_k^* \in L' = P_{-1}. \tag{2.6}$$

设 $\ell \in L$。将 ℓv_k 按此基展开，并将其系数移过 X，得到

$$\ell Y = \sum_j v_j X \sum_k E_{R_1}(v_j^* \ell v_k) v_k^* = \sum_j v_j X v_j^* \ell = Y\ell.$$

还需将此平均值表示为 P_1 上给定迹的形式。令 Tr 为 $\mathcal{H}$ 上通常的算子迹。在 P_1 上写作 $\tau(y) = \mathrm{Tr}(cy)$，其中 $c \in Z(P_1)$ 为正且可逆。在 P_1 的一个块上，其作用重数为 m，c 的取值为 $\tau(f)/m$，其中 f 是该块的极小投影。同样，在 P_0 上，$\tau(p) = \mathrm{Tr}(z_K p)$，因为每个 M_n 在自身上的作用重数为 n。对于 $x \in R_1' \cap P_1$，对 $X = cx$ 应用 (2.6)。对于 $p \in P_0$，由 p 与 K 的交换性以及 (2.5) 可得

$$\tau(pY) = \mathrm{Tr}\left(pcx \sum_k v_k^* z_K v_k \right) = \mathrm{Tr}(pcxa) = \tau(pax).$$

这里 $a \in I \subset R_1$ 与 x对易。因此 $E_{P_0}(ax) = Y \in P_{-1}$。取 $x = 1$ 并利用 $a \in P_0' \cap Q_1$，得到 $z = E_{P_0}(a) \in P_{-1} \cap Q_0 \cap Z(P_0)$。由于 $a \geq \eta 1$ 对某个 $\eta > 0$成立，我们有 $z = E_{P_0}(a) \geq \eta 1$。令$d = z^{-1}a$ 并定义

$$F(x) = E_{P_0}(dx), \qquad x \in P_1.$$

那么 d 在 $P_0' \cap Q_1$ 中是正且可逆的，并且 $E_{P_0}(d) = 1$。在 τ 下以 P_0 为测试对象，得到$F(x) = E_{P_0}(d^{1/2} x d^{1/2})$，因此 F 是忠实的 P_0-双模条件期望。由于 $d \in Q_1$，我们有 $F(Q_1) \subset Q_0$。对于 $x \in R_1' \cap P_1$，我们有 $F(x) = z^{-1} E_{P_0}(ax) \in P_{-1}$。最后，$F$同时固定 Q_0和 P_{-1}，从而得到这两个等式。□

3. 序列孤立性与有限性

本节证明定理 1.2 (i) 中的序列孤立性结果。首先概述证明的主要步骤。

(1.3) 中的每个方形 $\mathcal{C}_m$ 都是由 $\mathcal{C}$ 得到的，方法是将其右下角的代数 Q_0 替换为 $u_m Q_0 u_m^*$，其中 $u_m \to 1$。假设有无穷多个 $\mathcal{C}_m$ 与 $\mathcal{C}$ 不同构。对这些指标取一个子序列，命题 3.1 给出一个自伴单位向量 h，它属于 $L^2(P_0,\tau)$，并且是 (3.1) 中归一化差的极限。归一化使 h 与 (3.2) 中的四个代数均正交。利用 (SRC) 以及命题 2.1 中的条件期望，我们证明 h 属于这些代数之和。因此 $h = 0$，这与 $\|h\|_2 = 1$ 矛盾。由此证明定理 1.2 (i)。随后，(ii) 可由紧性以及对可能的包含数据进行计数得出。

下面的命题将 [N1，引理 1.8], 中回顾的[N3，命题 2.9], 的归一化论证应用于范数 $\|x\|_2 = \tau(x^*x)^{1/2}$。

命题 3.1。设 C 和 C_m 为交换方块（1.1）和（1.3），其中 $u_m \in U(Q'_{-1} \cap P_0)$ 以及 $\|u_m - 1\|_2 \to 0$。假设对于任意 $m \geq 1$，C_m 都不同构于 C。取一个子序列后，存在酉元

$$\begin{aligned} p_m &\in \mathcal{U}(Q'_{-1} \cap P_{-1}), \quad p'_m \in \mathcal{U}(P'_{-1} \cap P_0), \\ q_m &\in \mathcal{U}(Q'_{-1} \cap Q_0), \quad q'_m \in \mathcal{U}(Q'_0 \cap P_0) \end{aligned}$$

使得 $\widehat{u}_m = p_m p'_m u_m q'_m q_m$ 趋于1，$\widehat{u}_m \neq 1$，且

$$h = \lim_{m\to\infty} \frac{\widehat{u}_m - 1}{i\|\widehat{u}_m - 1\|_2} \in Q'_{-1} \cap P_0, \qquad h = h^*, \qquad \|h\|_2 = 1. \tag{3.1}$$

方向 h 满足

$$\begin{aligned} E_{P'_{-1}\cap P_0}(h) = E_{Q'_{-1}\cap P_{-1}}(h) = 0, \\ E_{Q'_0\cap P_0}(h) = E_{Q'_{-1}\cap Q_0}(h) = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

将(1.3) 中的 u_m 替换为 $\widehat{u}_m$，得到一个与 C_m 同构的方形。

证明。令 $G_l = \mathcal{U}(Q'_{-1} \cap P_{-1})\,\mathcal{U}(P\prime_{-1} \cap P_0)$，并令 $G_r = \mathcal{U}(Q'_0 \cap P_0)\,\mathcal{U}(Q'_{-1} \cap Q_0)$。每个乘积中的两个因子都彼此交换，因此它们是紧群。右乘 G_r 保持第四个角不变，而用 G_l 中的元素作共轭会保持 P_{-1} 不变，并逐点固定 Q_{-1}。取 $\widehat{u}_m \in G_l u_m G_r$，使 $t_m = \|\widehat{u}_m - 1\|_2$ 达到最小值。由非同构假设，$0 < t_m \leq \|u_m - 1\|_2$。设 $h_m = (\widehat{u}_m - 1)/(it_m)$。由于 $\|h_m\|_2 = 1$ 且 $Q'_{-1} \cap P_0$ 是有限维的，(h_m) 的一个子序列在 2-范数下收敛到某个 $h \in Q'_{-1} \cap P_0$，且 $\|h\|_2 = 1$。在 P_0 上，2-范数与算子范数等价，因此沿此子序列，$h_m \to h$ 和 $\widehat{u}_m \to 1$ 也在算子范数下收敛。由酉性，

$$h^*_m = \frac{1 - \widehat{u}^*_m}{it_m} = \widehat{u}^*_m \frac{\widehat{u}_m - 1}{it_m} = \widehat{u}^*_m h_m.$$

取极限得到 $h^* = h$，从而证明了 (3.1)。

设 $a = a^*$ 属于定义 G_l的两个代数之一。对于 $s \in \mathbb{R}$，由极小性可得 $\|e^{-ist_m a}\widehat{u}_m - 1\|_2 \geq t_m$。除以 t_m 并取极限，可得对每个实数 s都有 $\|h - sa\|_2 \geq \|h\|_2$。因此 $\tau(ha) = 0$。对 $e^{-ist_m a}$ 作右乘，对定义 G_r的任一代数也可得相同结论。由于 E_X 是 $L^2(P_0, \tau)$中到 X 上的正交投影，这恰好就是 (3.2) 中的四个等式。□

定理 *1.2* 的证明(i)。设C_m 如 (1.3) 所示。若有无穷多个C_m 不同构于C，则取该子序列并应用命题 3.1。将每个方形替换为其中给出的同构方形，并仍将其实现酉元记为 u_m。于是 $t_m = \|u_m - 1\|_2 > 0$ 及其方向 h 满足 (3.1) 和 (3.2)。

对于酉元 $u \in \mathcal{U}(Q'_{-1} \cap P_0)$，记作 $Q^u_0 = uQ_0u^*$。当且仅当将图（1.3）中的 u_m 替换为 u 时，该图为交换方块。

$$E_{P_{-1}}(uqu^*) = E_{Q_{-1}}(q) \qquad (q \in Q_0). \tag{3.3}$$

对于每个解 u，在 $L^2(P_0,\ \tau)$ 的张成向量上定义映射如下：

$$w_u(qb) = uqu^*b \qquad (q \in Q_0,\ b \in P_{-1}). \tag{3.4}$$

由 (3.3)，所提出的映射在这些张成向量上保持内积。为此，在 uqu^*b 与 $uq'u^*b'$的内积中，将 $E_{P_{-1}}$ 作用于 uq'^*qu^* 即可看出。因此，w_u 是有限维空间上的等距映射，且为满射。其像为 $Q^u_0 \cdot P_{-1}$，所以新的方形是非退化的。酉元 w_u与 P_{-1}的右作用交换，并逐点固定 $L^2(P_{-1}, \tau)$。因此 $w_u \in P_1$且 $w_u e = e w_{u^0}$。它在 Q_0的左作用上实现了 $q \mapsto uqu^*$。

令 $w_m = w_{u_m}$。由 (3.4) 可知， $\|w_m - 1\| \le Ct_m$ 在算子范数下成立。事实上，可以选取 P_0 的一组固定向量空间基，由乘积 qb构成；对每个这样的向量，估计均可由 $\|u_m q u_m^* - q\|_2 \le 2\|q\|\, t_m$推出。因此，沿着进一步抽取的子序列，

$$\frac{w_m - 1}{it_m} \longrightarrow g = g^* \in P_1.$$

与 (3.1) 中一样，自伴性由酉性推出。由于 $u_m^* w_m$ 与 Q_0 对易，取其与单位元之差并作归一化，得到

$$g - h \in Q_0' \cap P_1. \tag{3.5}$$

因此，$\mathcal{C}_m$ 的基本构造为

$$\mathcal{L}_m = \left(\begin{array}{ccccc} P_{-1} & \subset & P_0 & \overset{e}{\subset} & P_1 \\ \cup & & \cup & & \cup \\ Q_{-1} & \subset & Q_0^{(m)} & \overset{e}{\subset} & Q_1^{(m)} \end{array} , \tau \right), \qquad m \ge 1, \tag{3.6}$$

其中 $Q_0^{(m)} = u_m Q_0 u_m^*$ 和 $Q_1^{(m)} = \langle Q_0^{(m)},\ e \rangle = w_m Q_1 w_m^*$。将 $R_1^{(m)} = P_{-1}' \cap Q_1^{(m)}$ 代入 (3.6)。在 P_1 中，差一个酉共轭后，含幺子代数类型只有有限种，因为它们的矩阵块大小和包含重数都有界。取一个相同类型的子序列，并对共轭酉元取一个收敛子序列，我们得到子代数 $R \subset P_1$ 和酉元$v_m \in P_1$，满足

$$R_1^{(m)} = v_m R v_m^*, \qquad v_m \longrightarrow 1.$$

取极限得到 $R \subset P_{-1}' \cap Q_1$。这一包含足以完成证明的其余部分。

对每个 m，选取一个条件期望 $F_m : P_1 \to P_0$，使其满足格 (3.6) 的条件 (2.2)。这些映射的范数为一，因此存在一个子序列在范数下收敛到一个 P_0-双模映射 F，该映射固定P_0。我们声称

$$F(Q_1) \subset Q_0, \qquad F(R' \cap P_1) \subset P_{-1}. \tag{3.7}$$

对于 $x \in Q_1$，元素 $F_m(w_m x w_m^*)$ 属于 $Q_0^{(m)}$，并收敛到 $F(x)$。对于 $x \in R' \cap P_1$，我们有 $v_m x v_m^* \in (R_1^{(m)})' \cap P_1$，因此 $F_m(v_m x v_m^*) \in P_{-1}$。这就证明了 (3.7)。

固定 $r \in \mathcal{U}(R)$，并令 $r_m = v_m r v_m^*$。那么 $r_m \in P_{-1}' \cap P_1$，且 $w_m^* r_m w_m \in Q_1$。相减并除以 it_m，得到

$$\frac{r_m - w_m^* r_m w_m}{it_m} \longrightarrow [g, r] \in (P_{-1}' \cap P_1) + Q_1.$$

事实上，分子等于 $(1 - w_m^*) r_m w_m + r_m (1 - w_m)$，因此取极限时只需 $r_m \to r$。右侧的两个加项在对 r^*右乘下均保持不变。对 $\mathcal{U}(R)$ 上的$[g, r] r^* = g - r g r^*$ 取平均，得到

$$g \in (P_{-1}' \cap P_1) + Q_1 + (R' \cap P_1). \tag{3.8}$$

将 F 应用于 (3.5) 和 (3.8)。由双模性和 (3.7) 得到

$$h \in (P_{-1}' \cap P_0) + Q_0 + P_{-1} + (Q_0' \cap P_0).$$

由于 h 与 Q_{-1}可交换，对 $\mathcal{U}(Q_{-1})$ 取平均可得

$$h \in (P_{-1}' \cap P_0) + (Q_{-1}' \cap P_{-1}) + (Q_0' \cap P_0) + (Q_{-1}' \cap Q_0). \tag{3.9}$$

由 (3.2)， h 与四个加项中的每一项都正交。因此 $\|h\|_2^2 = 0$，这与 (3.1) 矛盾。由此证明 (i)。□

定理 *1.2* 的证明(ii)。 固定带迹包含数据。若这些数据可以实现，则选取一个具有该数据的方形 (1.1)。在识别 $Q_{-1} \subset P_{-1} \subset P_0$ 后，每个第四角都是某个$u \in \mathcal{U}(Q_{-1}' \cap P_0)$的 $u Q_0 u^*$。事实上，包含重数通过一个 v酉元给出了 P_0 中Q_0两个副本之间的共轭。映射 $q \mapsto vqv^*$ 和 $q \mapsto q$ 从 Q_{-1} 到目标副本具有相同的

重数。用该副本中的一个酉元 w 对第一个映射进行共轭，使两个映射逐点一致，因此 wv 与 Q_{-1}交换。

设 $(\mathcal{C}_m)$ 是具有固定数据的 SRC 方块序列，并选取表示酉元 v_m。(3.3) 的解集在$\mathcal{U}(Q'_{-1} \cap P_0)$ 中是闭集。取一个子序列，可得 $v_m \to v$ 属于此集合。其极限第四角 vQ_0v^* 由 (3.4) 给出一个非退化交换平方。相对于该交换平方，第四角由 $u_m = v_m v^*$ 实现，而 $u_m = v_m v^*$ 趋于 1。由 (i) 可知，该子序列最终同构。若某个第四角已指定为子空间极限，则每个这样的子序列都有相同的极限角。对任何一列与指定极限不同构的项构成的子序列应用此论证，便会得到矛盾。

由此可知，具有固定数据且两两非同构的 SRC 方块序列必定有限。对于固定的带迹代数 (P_0, τ)，其子代数的块大小和包含矩阵只有有限种选择，而这些选择确定了相应的限制迹。当 $P_{-1} \subset P_0$ 连通时，其包含矩阵和块大小通过 Perron–Frobenius 方程确定归一化马尔可夫迹 [GHJ，第 2] 章。这就证明了其余断言。□

备注 3.2. 如果上部包含不连通，那么即使四个代数及其包含关系都固定，改变迹也能得到无穷多个两两不同构的交换方块。令四个代数都为 $\mathbb{C}^2$，包含关系均为恒等包含，迹为 $\tau_t(a,b) = ta + (1-t)b$，其中 $0 < t < 1/2$。每个方块都满足 (SRC)，因为 $R_1 = Q_0 = Q_1 = \mathbb{C}^2$。保迹同构会保持极小投影迹所成的无序对 $\{t, 1-t\}$。由于 t 是较小的权重，不同的 t 值会给出不同构的方块。

4. 深度二与主图

我们首先证明，子因子的深度 2 条件蕴含其标准交换平方满足 (SRC)。对于有限深度子因子 $N \subset M$，我们将此结果应用于 $N \subset M_{\ell-1}$，再通过取角恢复 $N \subset M$。这证明了给定主图时的奥克涅努有限性定理，并将固定融合规则的刚性作为推论。

令 $N = M_{-1} \subset M = M_0 \subset M_1 \subset \cdots$ 为 II_1 因子有限指数包含的 Jones 塔，其 Jones 投影为 $e_j \in M_j$。深度 2 条件 是

$$N' \cap M \;\subset\; N' \cap M_1 \;\subset\; N' \cap M_2$$

是一个带有 Jones 投影 e_2 的基本构造。等价地，主图的深度至多为 2。这包括深度 1 的情形，例如 II_1 因子 R 中的包含 $R \otimes 1 \subset R \otimes M_n(\mathbb{C})$ 和 $n \geq 2$（见 [BG，§4]）。

命题 4.1。设 $N \subset M$ 为满足深度2条件的 II_1 因子有限指数包含。在其 *Jones* 塔中，考虑标准交换平方

$$\mathcal{C}_{N,M} = \begin{pmatrix} N' \cap M_1 & \subset & N' \cap M_2 \\ \cup & & \cup \\ M' \cap M_1 & \subset & M' \cap M_2 \end{pmatrix}, \tau \Bigg). \tag{4.1}$$

则 $C_{N,\ M}$ 具有一个张成相对交换子。更明确地说，

$$(M_1' \cap M_3) \cdot (M' \cap M_2) = M' \cap M_3.$$

证明。 生成恒等式直接源自 Popa 公理化的标准不变量[P4, §1]。事实上，考虑上行为 $M_{\prime} \cap M_2 \subset M' \cap M_3$、下行为$M_{\prime_1} \cap M_2 \subset M_1' \cap M_3$的交换方块。环境中的琼斯投影 e_4实现了两行中的条件期望。根据 $M_1 \subset M_2$的深度 2 条件，$(M_1' \cap M_3)e_4(M_1' \cap M_3)$的线性张成是整个 $M_1' \cap M_4$，因而包含单位元。因此，下部包含的一个右 Pimsner–Popa 基也是上部包含的右基，从而得到所述的张成 [P3, §1.1.5, 命题 (iii) 和 (v)]。下面我们将明确给出基的计算。

深度 2 条件传递到塔中的下一个包含（见 [BG, §3] 和 [N3, §5]）。特别地， $M' \cap M_1 \subset M_1 \cap M_2 \subset M_1 \cap M_3$ 是一个带有琼斯投影 e_3 的基本构造。置 $A = M_1 \cap M_1$ 和 $B = M' \cap M_2$，并取限制迹 τ。记 $A = \bigoplus_j M_{n_j}(\mathbb{C})$，令 1_j 为第 j 个直和项的单位元，并在该直和项中选取一个极小投影 p_j。令 (u_i) 为 B 的矩阵单位，并将其归一化为在 $L^2(B,\tau)$ 中具有单位范数。令

$$z_A = \sum_j \frac{\tau(p_j)}{n_j}\, 1_j \in Z(A), \qquad s_i = u_i z_A^{1/2}.$$

将 (2.5) 中的矩阵单位构造应用于 $A \subset B$，这些元素满足

$$y = \sum_i s_i E_A(s_i^* y) \qquad (y \in B).$$

因此，(s_i) 是有限右 Pimsner–Popa 基。在基本构造在 $L^2(B)$ 上的表示中，e_3 由 E_A 作用。所示单位元等式表明，$\sum_i s_i e_3 s_i^*$ 固定每个 $y \in B$，因此它在 $M_1 \cap M_3$ 中等于 1。对于 $x \in N' \cap M_2$，将此等式右乘以 xe_3。Jones 关系给出

$$xe_3 = \sum_i s_i E_{M_1}(s_i^* x) e_3, \qquad x = \sum_i s_i E_{M_1}(s_i^* x),$$

其中第二个等号由 $y \mapsto ye_3$ 在 M_2 上的忠实性得出。根据 E_{M_1} 的双模性，每个系数都属于 $N' \cap M_1$。因此， $P_0 = Q_0 \cdot P_{-1}$ 在 (4.1) 中。取伴随得到 $P_0 = P_{-1} \cdot Q_0$，从而证明非退化性。

因此，(4.1) 的水平扩张是格 (1.2)，具有公共 Jones 投影 $e = e_3$、Markov 标量 $[M : N]^{-1}$，以及

$$P_i = N' \cap M_{i+2}, \qquad Q_i = M' \cap M_{i+2} \qquad (i = -1, 0, 1).$$

因此，两行均通过基本构造 [BG, §3], 继续，而它们的公共扩张是 [P3, §1.1.6]中的那个。

$Q_1 = M' \cap M_3$ 中的元素已经与 M 交换。若它还与 $P_{-1} = N_1 \cap M_1$ 交换，则它与 e_1 交换，因而也与 $M_1 = \langle M, e_1 \rangle$ 交换。反之， $P_{-1} \subset M_1$。再与 Q_0 求交得到

$$R_1 = M_1' \cap M_3, \qquad R_0 = M_1' \cap M_2.$$

两步平移保持深度不变，因此 $R_0 \subset R_1 \subset M_1' \cap M_4$ 是一个带有 Jones 投影 e_4 [BG, §3]的基本构造。对 $R_0 \subset R_1$ 应用相同的构造，得到一个有限右 Pimsner–Popa 基 (r_j)，其中 $\sum_j r_j e_4 r_j^* = 1$。对于 $x \in Q_1$，在右侧乘以 xe_4 并利用 $e_4 y e_4 = E_{M_2}(y) e_4$ 来处理 $y \in M_3$。 $y \mapsto ye_4$ 在 M_3 上的忠实性给出

$$x = \sum_j r_j E_{M_2}(r_j^* x).$$

每个系数都与 M 交换，且属于 M_2，因此位于 Q_0 中。这就证明了 $Q_1 = R_1 \cdot Q_0$。 □

定理 *1.3* 的证明。令 G 为给定主图 Γ 的邻接矩阵，其根为 $*$。选取一个奇整数 $\ell \geq \operatorname{diam}(\Gamma)$。令

$$B_0 = M_{\ell-1}, \qquad B_1 = M_{2\ell-1}, \qquad B_2 = M_{3\ell-1}.$$

根据多步基本构造 [PP] , B_1, B_2 是 $N \subset B_0$ 的前两个基本构造。按照这种约定， $N_1 \cap M_{j-1}$ 中由层 j 的顶点 v 对应的块的大小，是从 $*$ 到 v [长度为 j 的路径数 $(G^j)_{*,v}$ J2，定理 3.1.3 和 4.2.1]。所有奇顶点都位于层 ℓ，所有偶顶点都位于层 2ℓ。因此， $N_1 \cap B_0 \subset N' \cap B_1 \subset N' \cap B_2$ 的包含矩阵是 G^ℓ 的奇到偶块及其转置。为证明这个三元组是一个基本构造，写作 $A_i = N_1 \cap B_i$，并令 $f \in B_2$ 为 $B_0 \subset B_1$ 的琼斯投影。它与 N 交换。等式 $E_{B_0}(A_1) = A_0$ 表明，f 限制为从 $L^2(A_1)$ 到 $L^2(A_0)$ 的琼斯投影。因此，限制到 $L^2(A_1)$ 将 $A_1 f A_1 \subset A_2$ 映到 $A_0 \subset A_1$ 的基本构造，其中 $A_1 f A_1$

表示这些乘积的线性张成。根据转置规则，后一个代数中奇数 v对应的块的大小为 $(G^{3\ell})_{*,\,v}$。它们的大小的平方之和等于 $\dim_{\mathbb{C}} A_2$。因此 $A_1 f A_1 = A_2$，且限制是忠实的。由此， $N \subset B_0$ 满足深度 2 条件。

将命题 4.1 应用于 $N \subset B_0$。其标准方形为

$$\mathcal{C}_{N,B_0} = \begin{pmatrix} N' \cap B_1 & \subset & N' \cap B_2 \\ \cup & & \cup \\ B_0' \cap B_1 & \subset & B_0' \cap B_2 \end{pmatrix}, \tau \Bigg). \tag{4.2}$$

(4.2) 中的上部包含具有正的包含矩阵。事实上，每个偶顶点都可以通过长度为 ℓ 的游走与每个奇顶点相连，只需在最短路径上来回折返即可。其右上维数为

$$\dim_{\mathbb{C}}(N' \cap B_2) = \sum_{v \text{ odd}} (G^{3\ell})^2_{*,v} = (G^{6\ell})_{*,*}.$$

因此，定理 1.2 (ii) 表明，(4.2) 中的 $\mathcal{C}_{N,B_0}$ 只有有限多个同构类。每个这样的方形都确定了 $N \subset B_0$ 的标准不变量。事实上，(4.2) 的两行都通过水平基本构造继续延伸，且每一步都具有一个公共 Jones 投影。因此，迭代 (4.2) 就能在保迹同构意义下确定这两行中所有后续的方形 [P3, §1.1.6]。为了在 Popa 重构定理中识别这两行，将 $B_0 \subset B_1 \subset B_2$ 扩展为 $N \subset B_0$ 的 Jones 塔 $(B_j)_{j\ge 0}$。在每一层 $j \ge 1$，都有

$$B_1' \cap B_j = (N' \cap B_1)' \cap (B_0' \cap B_j). \tag{4.3}$$

事实上， $N' \cap B_1$ 包含琼斯投影，它与 B_0一起生成 B_1。(4.3) 右侧在 $N' \cap B_j$ 中的取值由迭代方形确定。因此，我们恢复了两行 $B_0' \cap B_j$和 $B_1' \cap B_j$，以及它们的包含关系和迹。根据深度 2 条件，这两行中由列 $j = 2$ 和 $j = 3$ 构成的方形，通过 Popa 重构定理确定了 $N \subset B_0$ 的标准不变量（参见 [P2]和 [P3，第 1.3.7 节，第 185] 页）。

剩下的任务是恢复原始包含。记 $\ell = 2r + 1$，并令 $p = e_2 e_4 \cdots e_{2r} \in M' \cap B_0$，若 $r = 0$，则取 $p = 1$。这些因子彼此交换，连续的马尔可夫条件期望给出 $\tau(p) = [M : N]^{-r} > 0$。连续应用 $e_{2j} M_{2j} e_{2j} = M_{2j-2} e_{2j}$得到 $pB_0p = Mp$。 pB_0p 的归一化迹经由 $x \mapsto xp$限制为因子 M 上的唯一归一化迹。因此，该映射将 $N \subset M$ 与 $Np \subset pB_0p$同一起来，并保留其归一化角迹。包含 $N \subset B_0$是极端的，因为它具有有限深度 [P3，第 1.3.6 节，第 183] 页。根据琼斯约化定理 [J2, 正式发表版本中的推论 4.2.16、预印本中的推论 4.2.14], ， $N \subset B_0$ 的标准不变量与 $p \in N' \cap B_0$ 共同确定该角的标准不变量。 $N' \cap B_0$ 中的酉共轭投影给出同构的角。在这个有限维代数中，一个投影可能具有的块秩只有有限多个，因此定理得证。□

推论 4.2（奥克纳努刚性定理）。 固定一个有限深度子因子副群的融合规则。对于每个抛物群实现这些规则的有限指数包含 $N \subset M$ 的 II_1 因子，取每个不可约 N–M 标签的一个代表元的直和作为生成元。由此产生的标准不变量同构类只有有限多个。等价地，对于这些规则，酉量子 $6j$符号系统在重数空间中的酉基变换下仅有有限多个等价类。

证明。 分别用 I_{00}和 I_{01}表示不可约 N–N标签和 N–M标签。对于 $a \in I_{00}$和i， $b \in I_{01}$，令 N_{ai}^{b}表示 b在乘积 ai中的重数。取 $X = \bigoplus_{i \in I_{01}} i$。原始生成元的每个不可约直和项都出现在 X 中。因此， X 生成整个副群，因为 X 及其对偶的交替乘积包含了所有原始标签（在直和与直和项意义下）。

具有生成元 X 的标准不变量的偶顶点为 I_{00}，奇顶点为 I_{01}，根为N–N 单位元标签。从 a 到 b 的边数是 aX中 b 的重数，即$\sum_{i \in I_{01}} N_{ai}^{b}$ [Kaw，§2]。因此，每个实现都给出相同的有限根主图。

具有生成元 X 的副群确定一个有限深度酉平面代数，通过该代数可以恢复这一对 [BCEGP，推论 2.23]。我们采用其标准球面结构。由于 N 和 M 处的单位对象都是简单的，两个 0- 盒空间均为一维，因此该平面代数是连通的。于是，Jones 实现定理 [J2，定理 4.3.1] 给出一个具有此标准不变量的 II_1 因子有限指数包含（另见 [BCEGP，§2.5]）。定理 1.3只给出有限多个高阶相对交换子的格的可能性。每个格都可通过重构确定其副群。在融合规则固定的情况下，在重数空间中选取标准正交基，就能将其结合映射表示为量子 $6j$-符号 [Kaw，§2]。改变这些基恰好给出固定标签下的酉规范等价。为简单直和项赋予标签的方式只有有限种。□

5. SRC 自旋模型交换方块

我们证明，复 Hadamard 矩阵 H 的自旋模型交换方块满足 (SRC)，当且仅当 H 等价于某个有限阿贝尔群的特征标表。对于去相位矩阵，这等价于要求任意两行的逐项商仍是 H 的一行。我们将这一刻画应用于实矩阵与 Butson 矩阵。

设 $H = (h_{ij})$ 的阶为 n，且 $|h_{ij}| = 1$ 和 $HH^* = nI$。记 $U = n^{-1/2}H$，并令 D_n 表示对角代数。采用 (1.2) 中的记号，由 Popa 正交对构造 H 关联的自旋模型交换方块 [P1] 为

$$\mathcal{C}(H) = \left(\begin{array}{ccc} P_{-1} = D_n & \subset & P_0 = M_n(\mathbb{C}) \\ \cup & & \cup \\ Q_{-1} = \mathbb{C} & \subset & Q_0 = UD_nU^* \end{array}, \tau \right), \tag{5.1}$$

其中 τ 是归一化矩阵迹。若一个 Hadamard 矩阵可由另一个通过置换行和列，并将各行和各列分别乘以模为一的标量得到，则称二者等价。两个这样的矩阵等价，当且仅当它们的自旋方块同构 [N2, §2, p. 455]。事实上，列运算保持第四个角，而行运算则以单项酉矩阵（即置换矩阵与对角酉矩阵的乘积）共轭该方块。反过来，设 $U = H/\sqrt{n}$ 和 $V = K/\sqrt{n}$。从 $\mathcal{C}(H)$ 到 $\mathcal{C}(K)$ 的同构由一个归一化 D_n 的酉矩阵 W 实现，因此 W 是单项矩阵。由于 $WUD_nU^*W^* = VD_nV^*$，酉矩阵 V^*WU 也归一化 D_n，且为单项矩阵。因此 H 和 K 等价。

我们对 H 去相位，使其第一行和第一列均由 1 组成。令 F_m 表示阶数为 m的傅里叶矩阵，其元素为 $\exp(2\pi ijk/m)$，其中 $0 \le j,\ k < m$。

定理 5.1. 设 H 是一个阶数为 $n \ge 1$的复 *Hadamard* 矩阵，且 r_1、…、r_n 是 H的去相位代表元的各行。在 *(5.1)* 中 $\mathcal{C}(H)$ 的基本构造里，令 $R_1 = D_n' \cap Q_1$。以下命题等价。

(i) $\mathcal{C}(H)$满足(SRC)。(ii) 维数$_{\mathbb{C}}\, R_1 = n$。(iii)任意两行的逐项商仍是一行，也就是说，

$$r_i\overline{r_j} \in \{r_1, \dots, r_n\} \qquad (1 \le i, j \le n). \tag{5.2}$$

(iv) H 等价于一个阶数为 n的阿贝尔群的特征标表，或者等价地，等价于若干傅里叶矩阵的张量积。

证明。由于 D_n 是极大阿贝尔的，且 (5.1) 是一个交换方块，$R_0 = D_n' \cap Q_0 = \mathbb{C}1$。我们有 dim $_{\mathbb{C}}\, Q_0 = n$，并且 Q_1（$\mathbb{C} \subset Q_0$的基本构造）同构于作用在 $L^2(Q_0,\ \tau)$上的全矩阵代数。因此 dim $_{\mathbb{C}}\, Q_1 = n^2$，而 (2.1) 给出 (i)⇔(ii)。(ii) 与 (iv) 的等价性是经典结果。Jaeger、Matsumoto 和 Nomura 证明了 II型矩阵 [代数的极大维数判据（JMN，第 5 节）1]。Jones 在自旋模型中、紧接在 [之后陈述了特征表判据（J2，定理 2.11）15]。为将这些条件与 (iii) 联系起来，我们可以将 H

替换为其去相位代表元，因为这保留了自旋平方的同构类。令$\xi_{ij} = r_i \overline{r_j}$。

在$\{1, \dots, n\}^2$上构造图：若不同顶点 (i,j) 和 (k,l) 满足$\langle \xi_{ij}, \xi_{kl} \rangle \neq 0$，则连接它们。根据 Jones 的分支公式 [J2、定理 2.11.15], 在[N2 的交换平方表述中，命题 2.6], $\dim_{\mathbb{C}} R_1$ 等于连通分支的数量。属于不同连通分支的向量所张成的空间彼此正交，且它们共同张成 $\mathbb{C}^n$，因为 $\xi_{i1} = r_i$。因此，当且仅当每个连通分支都张成一条直线时，连通分支的数量才是 n。此时，正交行位于不同的直线上，所以每个 ξ_{ij} 都与某一行成比例。其首项为 1，故两者相等。反过来，在 (5.2) 条件下，每一行对应一个连通分支。

对于 (iii)⇒(iv)，商下封闭意味着这些行构成一个阿贝尔群 G。对坐标求值，为每一列给出一个 G 的特征。列正交性给出 n 个不同的特征，因此$\widehat{\ }$它们就是 G的全部特征。反过来，特征表 $(\chi(g))_{g\in G,\ \chi\in\widehat{G}}$若将单位元和恒等特征置于首位，则满足 (5.2)，因此其自旋平方满足 (i)。Hadamard 等价保持 (5.1) 的同构类不变，这就证明了 (iv)⇒(i)。将 G 分解为循环群因子即可得到傅里叶张量积。对特征表另选首行 g_0 和首列 χ_0，得到去相位元素 $(\chi\chi_0^{-1})(gg_0^{-1})$。因此，去相位行群的同构类不依赖于这些选择，而等价的特征表具有同构的行群。□

实矩阵与 *Butson* 矩阵。 用 $BH(n,\ q)$ 表示阶数为 n 、其元素为q次单位根 [Bu] 的 Hadamard 矩阵。 $BH(n,\ q)$ 中的 SRC 类由阶为 n 且指数整除 q的阿贝尔群的特征表表示。事实上，去相位化保持 q次单位根这一性质，因此每一行的阶都整除 q。反过来，这类群的每个特征取值都是q次单位根。当 $q = 2$ 时，这些群为 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$，因此实 SRC 矩阵恰好是 Walsh 矩阵 $F_2^{\otimes k}$，相差至多行置换、列置换和符号变换。

例子。 在经典四阶族 [Cr 中，等式 (3) 和定理 1],用 [N2,§4.1], 的去相位参数化 $F_4(a)$ 表示时，行向量为

$$(1,1,1,1),\quad (1,a,-1,-a),\quad (1,-1,1,-1),\quad (1,-a,-1,a),\qquad |a|=1.$$

第二行的平方为 $(1,\ a^2,\ 1,\ a^2)$。若这些行构成一个群，该行必须是第一行或第三行，因此 $a^2 = \pm 1$。当 $a = \pm 1$ 时，这些行构成克莱因四元群；当 $a = \pm i$ 时，第二行生成整个四元群。这些正是 SRC 参数。对于 $a_m = e^{i/m}$，令$U(a) = \frac{1}{2}F_4(a)$ 和 $u_m = U(a_m)U(1)^*$。于是 $u_m \to 1$，而 $\mathcal{C}(F_4(a_m))$ 恰好是满足 $Q_0 = \overline{U}(1)D_4U(1)^*$ 的方形 (1.3)。它的极限 $\mathcal{C}(F_4(1))$ 满足 SRC，但其近似方形均不满足。对于无平方因子 n，阶为 n 的唯一阿贝尔群是循环群，因此 F_n 是唯一的 SRC 类。特别地， $BH(6,\ 3)$ 不含 SRC 矩阵。在 12 阶情形，两个 SRC 类为 F_{12} 和 $F_2 \otimes F_2 \otimes F_3$。只有后者在 $BH(12,\ 6)$ 中有一个代表元，且两者都没有实代表元。

6. SRC 交换方块的定量估计

我们将 (SRC) 条件写成多项式方程，并对其实解集的连通分支进行计数，从而得到满足 (SRC) 的交换方块同构类数量的显式上界。对于自旋方块，我们还估计了两个不同构方块之间必须相隔多远。最后，给定一个有限主图，我们通过计算路径数，分别为 (4.2) 中右上代数的维数以及可能的角的数量给出上界。这两个关于同构类数量的上界使用了函数

$$B(D) = 10^{7D^5} \qquad (D \geq 1).$$

定理 6.1。 设 D 为正整数。在以下每种情形中，形如 (1.1) 的 *SRC* 交换方块至多有 $B(D)$ 个同构类。

(i) 带迹代数 (P_0, τ) 已给定，且维数$_{\mathbb{C}} P_0 \leq D$.(ii) 包含 $P_{-1} \subset P_0$ 是连通的，且维数$_{\mathbb{C}} P_0 \leq D$。

此处及下文中，方形均为非退化的，且两条水平包含具有共同的马尔可夫迹。

证明。 首先固定带迹包含数据，并选取一个实现这些数据的方形。根据第 3 节，具有这些数据的其他每个方形都由满足 (3.3) 的酉元 $u \in \mathcal{U}(Q'_{-1} \cap P_0)$ 表示。式 (3.4) 中的酉元w_u 将固定的下行 $Q_0 \subset Q_1$ 与变动的下行 $uQ_0u^* \subset w_uQ_1w_u^*$对应起来。我们说明变动的方形满足 SRC 的含义。

选取 Q_0 的一组基 $q_1, \dots, q_b$，以及 Q_1 的一组基 $y_1, \dots, y_c$。由于 w_u 将两行对应起来，SRC 等价于存在满足下列条件的元素 $x_{jk} \in Q_1$

$$\begin{aligned} y_k &= \sum_{j=1}^{b} x_{jk} q_j \quad (1 \le k \le c), \\ [p, w_u x_{jk} w_u^*] &= 0 \qquad\qquad (p \in P_{-1},\ 1 \le j \le b,\ 1 \le k \le c). \end{aligned} \tag{6.1}$$

事实上，第二个等式恰好说明，传输后的系数属于第二相对交换子。只需在 P_{-1} 的一组基上施加这一条件。

考虑解集 $(u,\ (x_{jk}))$。在实部和虚部坐标下，它由次数至多为五的多项式方程刻画。为此，选取一个由形如qz 与 $q \in Q_0$、 $z \in P_{-1}$的乘积qz 组成的 P_0 的基。在此基下， $w_u(qz) = uqu^*z$，因此其各项关于u的次数至多为二。(6.1) 中的交换子次数至多为五，而酉性和 (3.3) 是二次的。实变量的数量至多为

$$2D + 2bc^2 \ \le\ 4D^5,$$

因为 $b \le D$和 $Q_1 \subset \mathcal{B}(L^2(P_0,\ \tau))$给出 $c \le D^2$。

解集的每个连通分支对应一个同构类。事实上，在参数为 u 的解处，定理 1.2 (i) 表明，所有充分接近的 SRC 参数都会给出同构的方形。否则，序列 $u_m \to u$ 将与该定理应用于$u_m u^* \to 1$所得的结论矛盾。因此，同构类在解集上局部恒定。每个 SRC 方形都可由 (6.1) 表示。根据米尔诺界 [Mil, 定理 2], 表明，在$\mathbb{R}^m$ 中由次数至多为五的方程定义的实代数集至多有 $5 \cdot 9^{m-1}$ 个连通分支。因此，对于固定数据，同构类的数量至多为 10^{4D^5}。

剩下的工作是计算这些数据。记录四个代数的块大小以及四条边的包含矩阵，并使用共同的块标签。将每个列表补齐至长度 D，并将每个矩阵补齐至 $D \times D$ 大小，最多得到 $(D+1)^{4D+4D^2}$ 种可能性，因为每个条目都介于 0 和 D 之间。在 (i) 中，右上角的迹已知。在 (ii) 中，它由连通的上部包含和马尔可夫性质确定。其他迹则是它的限制。由于 $D + 1 \le 2^D$，数据的数量至多为 $2^{8D^3} \le 10^{3D^5}$。乘以固定数据时的上界，得到至多

$$10^{4D^5} \cdot 2^{8D^3} \le 10^{7D^5} = B(D)$$

满足 (SRC) 的交换平方的同构类。 □

一个分离 估计。 两个第四角 $A, B \subset P_0$ 之间的距离定义为

$$d(A, B) = \sup_{\|x\|_2 = 1} \|E_A(x) - E_B(x)\|_2. \tag{6.2}$$

对于自旋方块，这些条件期望的条目给出了直接的数值检验 t.

命题 6.2. 设 H 和 K 是阶为 n 且其自旋方块满足 *SRC* 的复 *Hadamard* 矩阵。记 A 和 B 为它们在 (5.1)中的第四角，且左上角具有相同的对角代数 D_n。若 $d(A, B) < 1/n$，则这两个方形同构。

证明。 根据定理 5.1，每个矩阵都等价于某个阿贝尔群的特征标表。先假设 H 是一个特征标表，并用 g_i标记其行。对于通常的矩阵单位 e_{kl}，由特征标正交性可得

$$(E_A(e_{kl}))_{ij} = \frac{1}{n^2}\sum_{\chi} \chi(g_i)\overline{\chi(g_j)\chi(g_k)}\chi(g_l) = \begin{cases} 1/n, & g_i g_j^{-1} = g_k g_l^{-1}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

列运算保持 A不变，行置换重新标记指标，行相位只会使条目发生相位变化。因此，对于每个 SRC 自旋方块，此公式中的绝对值为 0 或 $1/n$。为从零模式恢复群，固定一个标签 o 作为单位元，并规定 $i\cdot j = k$当且仅当 $g_i g_o^{-1} = g_k g_j^{-1}$。这样，在标识 $i \mapsto g_i g_o^{-1}$下即可恢复群运算。

矩阵单位 $\sqrt{n}\,e_{kl}$ 构成 $L^2(M_n,\ \tau)$的一组标准正交基。在这组基下，算子 E_A 的矩阵条目恰为数值$(E_A(e_{kl}))_{ij}$。若 $d(A,\ B) < 1/n$，它们的零模式必定相同，因为算子范数限制了每个矩阵条目的绝对值。恢复得到的群彼此同构，因此它们的特征标表等价，其对应的方块也同构。□

主图的估计。 在定理 1.3 的证明中，我们先选取 $N \subset B_0$ 的标准交换平方 (4.2)，其中 $B_0 = M_{\ell-1}$，然后再选取 $N' \cap B_0$ 中的一个投影。对 $N \subset M$ 的主图上的路径进行计数，可以得出每种选择的可能性数量上界。

定理 6.3。 设 Γ 为一张至少有一条边的有限连通有根二部多重图，其邻接矩阵为 G，根为 $*$。取 ℓ 为不小于 $\operatorname{diam}(\Gamma)$ 的最小奇整数，并令

$$D_\Gamma = (G^{6\ell})_{*,*}. \tag{6.3}$$

有限指标 II_1 子因子中主图为 Γ 的标准不变量同构类至多有 $B(D_\Gamma)$ 个。

证明。 考虑 (4.2) 中的标准交换平方$\mathcal{C}_{N,B_0}$。根据第 4 节，它满足 SRC，其上方水平包含是连通的，且其右上代数 $N' \cap B_2$ 的维数为 D_Γ。令$D = D_\Gamma$。定理 6.1 的证明表明，这类交换方块至多有 $10^{4D^5}\cdot 2^{8D^3}$ 个同构类。每个交换方块都确定了 $N \subset B_0$ 的标准不变量。

固定 $N \subset B_0$ 的一个标准不变量。为了计算 $N \subset M$ 的可能标准不变量，只需计算 $p \in N' \cap B_0$ 的投影在酉共轭下的个数。在层 ℓ，$N' \cap B_0$ 的块大小为 $m_v = (G^\ell)_{*,\,v}$ 对于奇顶点 v。一个投影由其在每个块中的秩唯一确定，除酉共轭外。根据 Jones 角定理，由此，从这个固定不变量得到的 $N \subset M$ 的标准不变量数至多为

$$\prod_{v\ \text{odd}} (m_v + 1) \ \le\ 2^{\sum_v m_v} \ \le\ 2^{D_\Gamma}. \tag{6.4}$$

最后一个不等式由 $N\prime \cap B_0 \subset N' \cap B_2$ 得出。将方形数量的上界与投影类数量的上界 (6.4) 相乘，得到至多

$$10^{4D^5}\cdot 2^{8D^3+D} \le 10^{4D^5}\cdot (2^9)^{D^5} \le 10^{7D^5} = B(D_\Gamma)$$

个标准不变量，因为 $8D^3 + D \le 9D^5$ 对于 $D \ge 1$ 和 $2^9 < 10^3$。在不可约情形 $p(N\prime \cap B_0)$ $p \simeq N' \cap M = \mathbb{C}$ 中，因而 p 是最小的。于是，需要考虑的角的数量至多等于奇顶点的数量。例如，对于以端点为根的 A_3，在酉共轭下只有一个可能的角。□

该估计还给出了一个仅用指标和深度表示的界。设 $[M:\ N] \le I$，且深度至多为正整数 h。在有限深度情形下，有 $\|G\|^2 = [M:\ N]$ [P3, §1.3.6, p. 183]。由于每个顶点到根的距离至多为 h，$\operatorname{diam}(\Gamma) \le 2h$。因此 $D_\Gamma \le I^{3(2h+1)}$。我们也可以直接计算可能的图的数量。由于 $\sum_w G_{vw} \le \sum_w G_{vw}^2 \le I$，顶点数至多为 $V = 1 + \lfloor I\rfloor + \cdots + \lfloor I\rfloor^h$。固定根的标号，并用孤立顶点补齐邻接矩阵，使其

成为方阵。对角线以上的每个元素至多为 $\lfloor\sqrt{I}\rfloor$，因此有根主图至多有 $(1+\lfloor\sqrt{I}\rfloor)\binom{V}{2}$ 个。将这个数乘以 $B(\lceil I^{3(2h+1)}\rceil)$，即可得到满足这些指标和深度界的标准不变量总数的上界。

参考文献

[BG] K. C. Bakshi 和 V. P. Gupta，关于 Pimsner–Popa 基与深度 2 正则子因子的几点评论，《格拉斯哥数学杂志》64 (2022)，586–602。[BCEGP] M. Bischoff、I. Charlesworth、S. Evington、L. Giorgetti 和 D. Penneys，多因子双模的扭曲与多融合范畴的表示，《数学文献》30 (2025)，497–586，doi:10.4171/DM/1011。[Bu] A. T. Butson，广义阿达玛矩阵，《美国数学会会刊》13 (1962)，894–898。[Cr] R. Craigen，逆正交矩阵与酉阿达玛矩阵的等价类，《澳大利亚数学会通报》44 (1991)，109–115。[GHJ] F. M. Goodman、P. de la Harpe 和 V. F. R. Jones，《考克斯特图与代数塔》，数学科学研究所出版物第 14 卷，施普林格出版社，纽约，1989。[JMN] F. Jaeger、M. Matsumoto 和 K. Nomura，与 II 型矩阵和自旋模型相关的 Bose–Mesner 代数，《代数组合论杂志》8 (1998)，39–72。[J1] V. F. R. Jones，子因子的指标，《数学发明》72 (1983)，1–25。[J2] V. F. R. Jones，平面代数 I，《新西兰数学杂志》52 (2021)，1–107，doi:10.53733/172。早期版本（1999），arXiv:math/9909027。[JS] V. F. R. Jones 和 V. S. Sunder，《子因子导论》，伦敦数学会讲义丛书第 234 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1997，doi:10.1017/CBO9780511566219。[Kaw] Y. Kawahigashi，子因子与旁群理论，载于《算子代数与算子理论》，《当代数学》第 228 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1998，179–188。[Mil] J. Milnor，实代数簇的贝蒂数，《美国数学会会刊》15 (1964)，275–280。[N1] R. Nicoară，矩阵代数交换平方的有限性结果，《算子理论杂志》55 (2006)，295–310。[N2] R. Nicoară，子因子与 Hadamard 矩阵，《算子理论杂志》64 (2010)，453–468。[N3] R. Nicoară，第二相对交换子较大的交换平方的有限性结果，《美国数学会汇刊》364 (2012)，3685–3698。[Oc] A. Ocneanu，量子化群、弦代数与代数的伽罗瓦理论，载于《算子代数及其应用》第 2 卷，1989，119 136，172 伦敦数学会讲义丛书，剑桥大学出版社，剑桥，–。[PP] M. Pimsner 和 S. Popa，迭代基本构造，《美国数学会汇刊》310 (1988)，127–133。[PP2] M. Pimsner 和 S. Popa，代数对的有限维逼近与指标的障碍，《泛函分析杂志》98 (1991)，270–291，doi:10.1016/0022-1236(91)90079-K。[P0] S. Popa，与自由群相关的因子中的极大内射子代数，《数学进展》50 (1983)，27–48，doi:10.1016/0001-8708(83)90033-6。[P1] S. Popa，有限冯·诺伊曼代数中 $*$-子代数的正交对，《算子理论杂志》9 (1983)，253–268。[P2] S. Popa，子因子分类：化归为交换平方，《数学发明》101 (1990)，19–43。[P3] S. Popa，II 型可容子因子的分类，《数学学报》172 (1994)，163–255。[P4] S. Popa，子因子高阶相对交换子格的公理化，《数学发明》120 (1995)，427–445，doi:10.1007/BF01241137。[Sa] N. Sato，旁群理论中关于平坦性的两个主题，S ¯urikaisekikenky ¯usho K ¯oky ¯uroku 936 (1996)，32–45。

（Shannon Hall 和 Remus Nicoară）田纳西大学数学系，诺克斯维尔