arXiv:2611.29537v1 [cond-mat.stat-mech] 22 Nov 2026

临界渗流簇上手性随机行走者的精确超扩散指数与外壳探索

Joshua Uhlig, [1] Ralf Metzler, [1, *] 以及 Erik Kalz[2, †]
[1] *Institute of Physics and Astronomy、University of Potsdam、 14476 Potsdam、 Germany*
[2] *Institut de Science et d'Ingénierie Supramoléculaires、University of Strasbourg、 67000 Strasbourg、France*

我们推广德·热纳迷宫中的蚂蚁概念，考察临界状态下渗流团簇中的手性随机行走者。完全手性的蚂蚁会附着在障碍物边界上，沿团簇的分形外壳移动，并以精确的行走维数 7/4 扩散，直至其轨道闭合。由于团簇在各个尺度上都包含孔洞，整个系综呈现超扩散，$\langle r^2\rangle \sim t^{89/84}$；这一过程由轨道仍然开放的行走者比例不断减少的行走者推动。这两个指数仅由渗流几何决定，并与大尺度数值模拟高度吻合。当行走者仅以概率 $\chi < 1$进行手性转向时，超扩散会在由两个指数共同决定的交叉时间处转变为蚂蚁的亚扩散，其扩散系数则增强了$(1-\chi)^{-2/d_w}$。交叉时间与扩散系数之间的关系不依赖于手性的实现方式，为在无序介质中研究手性示踪粒子提供了直接检验方法。

德·热纳迷宫中的蚂蚁 [1], ——在渗流团簇上的随机行走，是无序介质中输运的经典理想化模型 [2, 3] ，也是描述从复合材料中的导电 [4]、多孔介质和裂隙岩石中的流动与输运 [5, 6] ，到活细胞拥挤内部环境中的相关过程 [7–10]的基础。在渗流阈值处，蚂蚁在初生无限簇（IIC）上运动；该团簇具有自相似性：其在线性尺寸为 R 的区域内的质量按 R^{d_f} 增长，其分形维数为 $d_f = 91/48$ [11–14]。在 IIC 上，蚂蚁进行亚扩散运动，$\langle r^2(t)\rangle \sim t^{2/d_w}$，其行走维数 $d_w \approx 2.878$ 目前只能通过数值方法确定 [15–19]。相关指数定义了一个稳健的普适类，所有在 IIC 上进行的局部、无偏晶格行走都属于这一类；而在连续模型中，微观动力学可能将其分裂为多个类别 [20]。

随机行走的蚂蚁本身没有记忆：它没有在迷宫中导航的策略，完全随机地对周围环境作出反应。我们能为蚂蚁设定的最简单策略是贴墙行走规则 [21],，它可以走遍任何单连通迷宫。这相当于持续地朝固定方向转弯，也就是手性——所谓奇异输运 [22–24] 的一种微观起源。事实上，这种旋转偏置随处可见，从磁场中的带电示踪粒子和磁性斯格明子，到游动细菌以及穿行于无序组织中的疟原虫 [25–29]。在均匀介质中，已知手性会抑制输运 [22, 30], 非均匀环境同样会阻碍扩散 [2, 31], ；然而在渗流阈值附近，两者共同作用的结果却与这一直觉相反。事实上，磁场中的电荷和圆周游动者会沿着障碍物边缘移动，从而增强输运并引发局域化转变 [32–36]。

描述这种运动的最简模型是手性随机行走（CRW）[30], ，这是一种晶格行走者，每一步都以概率 χ 朝固定方向转弯，否则就朝随机方向移动；它在普通蚂蚁（$\chi = 0$）与绕圈行走的完全手性行走者（$\chi = 1$）之间进行插值。在渗流阈值以上，CRW 存在一个使长时间扩散率达到最大值的最佳手性，其取值由贴墙运动的持久长度与典型障碍物簇周长之间的几何匹配决定 [36]。随着障碍物簇的平均大小发散，根据点渗流的匹配晶格对偶性，这恰好发生在临界状态 [37], ，最佳值便移向 $\chi = 1$极限，即贴墙运动 [36]。因此，在临界渗流中，完全手性行走者应是最优行走者。本文证实了这一预期，并表明手性行走者完全脱离了蚂蚁普适类，其单条轨迹和系综分别具有不同的精确指数。

在完全手性规则（$\chi = 1$）下，行走者会无限期地沿着障碍物边界行进，并描绘出渗流外壳；这种结构的分形维数 $d_h = 7/4$已知精确值 [38]。因此，只要其轨道保持开放，每条轨迹都会呈现超扩散行为，$r^2(t) \sim t^{2/d_h} = t^{8/7}$，且行走维数为精确值 $d_w^c = d_h = 7/4$。这使完全手性 CRW 归入为此目的构造的外壳生成型动力学行走 [39–42] 以及具有旋转器型散射体的洛伦兹晶格气体 [43]这一类。然而，行走者系综并不会继承这一指数，因为不同行走者围绕各种大小孔洞的轨道始终会闭合。我们

推导系综的精确指数，并研究具有随机手性的情形（$\chi < 1$），在长时间极限下该情形会恢复普通随机游走行为。因此，手性调节着行走在两个普适类之间转换；我们表明，渗流几何确定了完全手性极限下的指数。

* ralf.metzler@uni-potsdam.de
† erikkalz98@gmail.com

模型——我们研究 CRW，这是一种在文献 [30] 中引入的、用于奇扩散的离散时空随机游走模型，定义在边长为L 、晶格常数和时间步长均设为 1 的二维方格晶格上。行走者携带一个内部状态 $d \in \{\rightarrow, \downarrow, \leftarrow, \uparrow\}$，其取值对应于最近一步行走的方向。在每个时间步，状态以概率 χ沿固定的循环顺序旋转至下一个方向，并以概率 $1-\chi$从四个方向中均匀重新抽取，随后行走者沿所指示的方向移动。团簇上的格点以占据概率 p 彼此独立地开放，否则被阻塞。行走者踏入阻塞格点时会被反射回其此前所在的格点；这一过程与手性旋转结合后产生沿边界循环：反射会使方向反转，第一次旋转使行走者沿边界移动一个格点，第二次旋转则使其进入下一个阻塞格点，于是该循环不断重复。我们将行走者在时间 t 的位置记为 $\mathbf{r}(t)$，并用均方位移（ MSD ）$\langle r^2(t)\rangle = \langle |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0)|^2\rangle$表征输运；该量对行走者和无序实现取平均，并对穿过周期性边界的位置进行展开。我们在占据概率为 $p = 0.592746$时生成团簇，该概率略低于格点渗流阈值 $p_c = 0.59274605079210(2)$ [44–47],；此时关联长度比系统尺寸大数个数量级，最大团簇与无穷簇几乎无法区分 [2, 14]。行走者被初始化在最大团簇的格点上，该团簇通过 Hoshen–Kopelman 算法识别 [48]。完全手性行走者被放置在至少一个阻塞格点旁边，因为在开放空间中，完全手性行走者会无限期地绕着由四个相邻格点构成的方形循环，因而永远无法探索团簇。模型和模拟的详细信息，包括这一初始条件的影响，见补充材料。

外壳追踪—图 1 展示了手性的影响。普通的非手性行走者（$\chi = 0$）会探索起点附近一片紧凑的区域，这是二维渗流团簇中具有回归性、紧凑探索特征的典型表现 [49]。随着 χ增大，在相同步数内，轨迹覆盖的团簇区域明显扩大；当 $\chi = 1$ 时，行走者会塌缩到单个障碍物簇的边界上，并始终沿着边界移动，不再脱离。这个边界就是外壳

障碍物簇的外壳，或者等价地说，是可达簇内部空洞的边界；因此，这个边界的分形几何决定了行走维数。

由于行走始终沿着边界进行，因此步数可以直接换算为沿外壳的弧长。在 $\chi = 1$ 每一步都是一次手性旋转，因此沿边行进的循环永不间断，行走者沿边界前进，$\ell(t) \propto t$。对于分形维数为 d_h的自相似曲线，弧长与空间范围之间的关系为 $\ell(R) \sim R^{d_h}$ [50, 51]。因此，在无界外壳上行走的行走者能够到达距离起点 $R(t) \sim t^{1/d_h}$

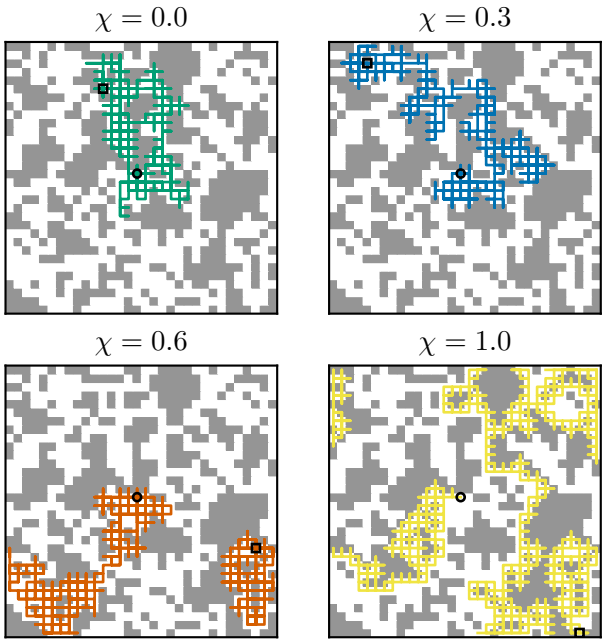


图 1. 手性随机行走在同一初生无限簇上的轨迹，$p = p_c$（$L = 32$），手性分别为 $\chi = 0$、0.3、0.6 和 1。所有行走者均从同一位点出发，行走 $T = 10^3$ 步。可达位点以白色表示，障碍物以灰色表示；黑色圆圈标出起始位置，黑色方块标出最终位置。空间覆盖范围随 χ 增大。在 $\chi = 1$（右下）时，行走者贴附于单个障碍物簇的边界，并沿其外壳行进。

如此一来，其位移平方满足

$$r^2(t) \sim t^{2/d_h}. \tag{1}$$

利用精确的外壳维数 $d_h = 7/4$ [38]，可得$r^2(t) \sim t^{8/7}$ 以及行走维数 $d_w^c = d_h = 7/4$。这些指数是解析得到的，与无手性随机行走者的纯数值结果 $d_w \approx 2.878$ 形成对比。因此，手性将迷宫中的蚂蚁的普适类改变为一个指数精确已知的普适类。

系综指数—图 2展示了局部指数 $\alpha(t) = d\ln\langle r^2(t)\rangle/d\ln t$，即从无穷簇（IIC）上出发的完全手性行走者系综的均方位移（MSD）局部指数。我们展示了$t \geq 100$，初始瞬态阶段受晶格离散性影响。位于外包络上的行走者——即最大障碍物簇的外壳，该簇通常环绕周期系统——遵循式（1），其中 $\alpha = 2/d_h = 8/7$（图 2中的红色虚线）。然而，整体系综（图 2中的黑色点线）呈现出较小的数值，而内部壳上的行走者则完全没有平台（图 2中的蓝色实线）。

这一差异的原因在于，方程（1）描述的是行走者在单个无界外壳上的运动。在无穷簇上，行走者起步时邻近的障碍物决定了它沿着哪个外壳行走：邻近小型障碍物簇时，它会环绕一个

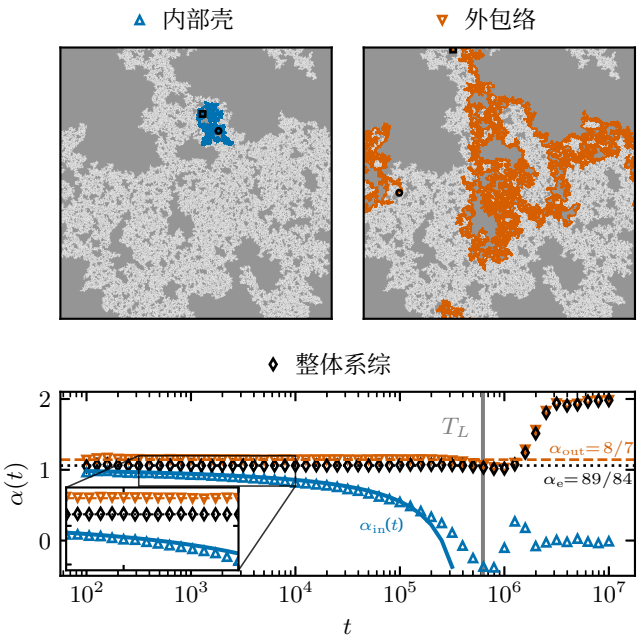


图2. 完全手性行走者（$\chi = 1$）在 $p = p_c$，$L = 2048$。上：在内部壳（左）上经过 $T = 10^6$ 步的轨迹，其轨道闭合；以及在外包络（右）上的轨迹，其绕周期系统一周。可达位点为白色，障碍物为灰色；圆形和方形分别标记初始位置和最终位置。灰色中的明显变化是团簇尚未分辨的结构，放大后即可看见。下：局部指数$\alpha(t) = d\ln\langle r^2(t)\rangle/d\ln t$ 与 $T = 10^7$ 步的关系，展示外包络、内部壳和所有行走者，其中 $2/d_h = 8/7$（红色虚线）、$\alpha_{\rm e} = 89/84$（黑色点线）、$\alpha_{\rm in}(t)$，式（6）（蓝色实线），以及$T_L = L^{d_h}$（灰色竖线）。

小孔洞；邻近大型团簇时，则会环绕一个大孔洞。由于无穷簇中包含各种尺寸的孔洞，系综会采样各个尺度上的外壳。行走者在尺寸为R_g 的孔洞上，仅会扩散 t^{2/d_h}，直至完成一周轨道，所需时间为 $T(R_g) \sim R_g^{d_h}$，随后其位移平方便达到饱和值 $\sim R_g^2$。我们强调，这并非有限尺寸效应，因为即使在无限系统中，由于其分形性质，各个尺度上的孔洞也都是有限的。因此，系综均方位移混合了仍在扩散的行走者与轨道已经闭合的行走者，其指数取决于行走者在不同孔洞尺寸上的分布；对单条轨迹进行时间平均均方位移，则能直接揭示这种混合（补充材料，图4）。

为了得到这一分布，我们用线性尺寸为 R 的盒子铺满团簇。由于无穷簇的分形维数为 d_f，它占据其中 $\sim (L/R)^{d_f}$ 个盒子，每个盒子都邻接 $O(1)$ 个尺寸为 $\sim R$、包络长度为 $\sim R^{d_h}$ 的孔洞；这对应于无穷簇的外壳长度分布，而全体周长的壳长分布为 [52]。因此，这种尺寸的孔洞贡献了 $\sim (L/R)^{d_f} R^{d_h}$ 个外壳位点，占团簇的 $\sim L^{d_f}$ 个位点；均匀地从团簇上出发的行走者位于这种孔洞上的概率为 $\sim R^{d_h-d_f}$。对所有尺度求和

大于 R_g 的尺度会得到一个几何级数，该级数收敛是因为 $d_h < d_f$，因此，位于尺寸大于 R_g 的孔洞上的行走者比例与其首项同阶，

$$\Pi(R_g) \sim R_g^{d_h-d_f} = R_g^{-7/48}. \tag{2}$$

因此，$-(d\Pi/dR_g)\,dR_g$ 是位于大小介于 R_g 和 R_g+dR_g 之间的孔洞中的行走者比例。在时间 t，位于大于 $R(t)$的孔洞中的行走者 $\sim t^{1/d_h}$ 仍在以$r^2 = R(t)^2$, 扩散，而位于较小孔洞中的行走者已在 R_g^2处达到饱和，因此

$$\langle r^2(t)\rangle \sim \int_a^{R(t)} R_g^2\Big(-\frac{d\Pi}{dR_g}\Big)dR_g + R(t)^2\,\Pi\big(R(t)\big) \tag{3}$$

因此 $\langle r^2(t)\rangle \sim t^{\alpha_{\rm e}}$，其中

$$\alpha_{\rm e} = 1 + (2-d_f)/d_h = 89/84 > 1, \tag{4}$$

整体系综的均方位移（MSD）指数与图中平台一致。2（黑色点线）。该指数 $\alpha_{\rm e}$ 是精确的，但不同于单条轨迹的数值 $2/d_h$。均方位移（MSD）的增长源于比例趋于零的 $\Pi(R(t) \sim t^{(d_h-d_f)/d_h} = t^{-1/12}$行走者，即其轨道仍处于开放状态的行走者。相同的计数方法还可预测访问过的不同位点数，$\langle S(t)\rangle \sim t\,\Pi(R(t)) \sim t^{1-(d_f-d_h)/d_h} = t^{11/12}$，我们在补充材料中证实了这一点。

在尺寸为 L 的系统中，外包络相当于一个尺寸为 L 的单一孔洞：它聚集了在无限系统中会位于更大孔洞上的行走者。它承载的行走者比例为$\Pi(L) \sim L^{d_h-d_f}$，这些行走者会持续扩散至 $T_L = L^{d_h}$，时间可达t^{2/d_h}，因此在 T_L之前，整体系综不受有限尺寸效应影响。然而，在时间 t时仍在扩散的行走者中，外包络所占比例为

$$y(t) = \frac{\Pi(L)}{\Pi\big(R(t)\big)} = \left(\frac{t}{L^{d_h}}\right)^{(d_f-d_h)/d_h} = \left(\frac{t}{L^{d_h}}\right)^{1/12}, \tag{5}$$

这个比例随时间增加，因为内部轨道不断闭合，而外部轨道不会。因此，移除外包络会使均方位移中越来越大的一部分消失，$\langle r^2(t)\rangle_{\rm in} \propto t^{\alpha_{\rm e}}[1-y(t)]$, 以及内壳的局部指数，

$$\alpha_{\rm in}(t) = \alpha_{\rm e} - \Big(\frac{2}{d_h} - \alpha_{\rm e}\Big)\frac{y(t)}{1-y(t)}, \tag{6}$$

不会停留在平台上，而是持续下降。方程（6）不含自由参数，却能出色地描述内部外壳数据（图2中的蓝色实线），适用于$t \ll T_L$。对于 $t \gtrsim T_L$（图2中的灰色竖线），有限系统效应开始占主导：内部轨道均已闭合（$\alpha_{\rm in} \to 0$），而外包络行走者则绕着周期系统运行并作弹道漂移（$\alpha_{\rm out} \to 2$）。由此得到的有限尺寸标度形式见补充材料。

具有随机性的手性——对于 $\chi < 1$，行走者的方向在每一步都以概率 $1-\chi$ 重新抽取，因此最终必然会脱离任何外壳。图3展示了 p_c 时、$\chi \in [0, 0.99]$条件下的均方位移（MSD）。当手性超过最小值后，曲线在上述两个极限之间过渡：短时间内表现出完全手性行走的系综指数 α_e，长时间内则交叉至普通随机行走者的标度，指数为 $\alpha = 2/d_w$。这不同于团簇上常规行走者在 p_c以上熟知的交叉现象；后者中，有限关联长度将反常区间与普通扩散分隔开来，而这里的两个区间均为反常区间，且性质相反：超扩散转为亚扩散，因此行走者在自身演化过程中途改变了动力学普适类。交叉由两个特征决定。首先，只要超扩散分支可见，其振幅就与 χ、$\langle r^2(t)\rangle = A\,t^{\alpha_e}$无关。其次，长时间分支恢复了随机行走指数，但其数值高于非手性曲线，且这一差距随 χ 增大（图3下方插图）。为理解这种增强，注意到长时间下，行走者再次成为无穷簇（IIC）上的普通随机行走者，其均方位移为 $\langle r^2\rangle|_\chi = K_\chi t^{2/d_w}$，其中 K_χ 是广义扩散系数。在两次随机化之间，行走者沿外壳作确定性移动；两次随机化平均相隔 $n(\chi) = 1/(1-\chi)$ 步。我们提出，长时间下这些行程唯一的影响，是按照其平均长度加快CRW的时钟：$\langle r^2(t)\rangle|_\chi = \langle r^2(n(\chi)\,t)\rangle|_{\chi=0}$，因此

$$K_\chi/K_0 = n(\chi)^{2/d_w} = (1-\chi)^{-2/d_w}. \tag{7}$$

这一表达式不含可调参数，在 K_0 处简化为 $\chi = 0$，并且在整个 χ范围内都与测得的振幅非常吻合（图3右下插图中的绿色实线）。

将与 χ无关的短时间分支与方程（7）相匹配，即可确定交叉时间：

$$\tau \propto (1-\chi)^{-2/(\alpha_e d_w - 2)} \approx (1-\chi)^{-1.91}, \tag{8}$$

它结合了两个普适类的指数。均方位移满足 $\langle r^2(t)\rangle = \tau^{\alpha_e}\mathcal{F}(t/\tau)$，其中$\mathcal{F}(x) \sim x^{\alpha_e}$ 适用于 $x \ll 1$，而 x^{2/d_w} 适用于 $x \gg 1$；图3上方插图中的数据塌缩证实了这一点。匹配还得出 $K_\chi \propto \tau^{\alpha_e - 2/d_w}$。不同于方程（8），这一关系并不依赖于方程（7）的假设：它只需要与 χ无关的短时间振幅和两个指数。由于它将两个可测量量联系起来，且不涉及 χ，因此可以直接检验。

无序介质中的手性粒子。

方程（7）是一个假设。沿分形外壳进行一次包含 n步的行走仅跨越$R \sim n^{1/d_h}$，如果将各次行走视为以该尺度进行的独立跳跃，则会得到弱得多的 $K_\chi \propto (1-\chi)^{-(2/d_h - 2/d_w)}$，而数据

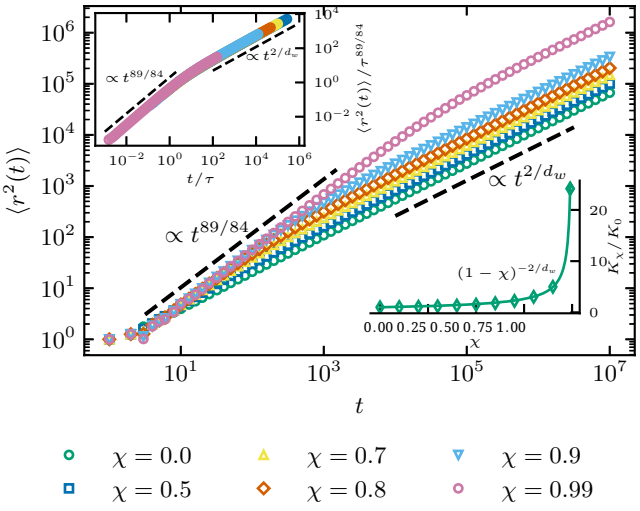


图 3. 手性粒子的 $p = p_c$ 对应手性 $\chi \in [0.0, 0.99]$下的均方位移。虚线表示超扩散 t^{α_e} 和亚扩散 t^{2/d_w} 标度。上方插图：使用 $\tau = (1-\chi)^{-2/(\alpha_e d_w - 2)}$、（方程（8））进行数据塌缩，位移按 τ^{α_e}重新标度。下方插图：长时间振幅 K_χ/K_0 随 χ的变化；实线：$(1-\chi)^{-2/d_w}$（方程（7）），不含自由参数。

排除了这一点。相反，数据表明连续的行走会累积起来：由于手性确定了环流方向，行走者随机迈出一步后，通常会重新附着到同一外壳上，并沿相同方向继续前进，因此脱离更常见的是短暂停顿，而不是逃逸到体相中。模拟结果与这些假设高度一致，从而支持了这些假设。

结论——我们研究了临界渗流团簇上的手性随机游走，并证明，持续的转向偏置会使其脱离迷宫中的蚂蚁所属的普适类。当 $\chi = 1$行走者无限期地沿着障碍物边界行走，每条轨迹都会描绘出一个渗流外壳，其精确行走维数为 $d_w^c = d_h = 7/4$，而不是非手性蚂蚁数值上已知的$d_w \approx 2.878$。行走者系综不会继承这一指数：由于孔洞在所有尺度上都是有限的，轨道始终会闭合，而均方位移则以不同的指数 $\alpha_e = 1 + (2 - d_f)/d_h = 89/84$增长，这一增长由轨道仍然开放的那部分行走者承担。两个指数都仅由分形维数决定；同样的计数方法还解释了内部壳上行走者指数的连续漂移，以及访问过的不同位点数 $\langle S(t)\rangle \sim t^{11/12}$的变化。因此，完全手性行走者只能通过其外壳了解团簇：其谱无法用谱维数概括，而只编码外壳长度的分布；所以，与普通随机行走者 [15, 53–55], 不同，它“听见”的是分形鼓的“海岸线”，而不是它的膜。

对于 $\chi < 1$，行走者在交叉时间 $\tau \propto (1-\chi)^{-2/(\alpha_e d_w - 2)}$ 后从 t^{α_e} 返回蚂蚁的 t^{2/d_w}，因此

属于蚂蚁普适类，其振幅增强了（$1-\chi$）$^{-2/d_w}$。该振幅可通过将行走者视为一只时钟以其平均运行长度 $1/(1-\chi)$ 沿外壳加速的蚂蚁来得到；这一假设无需可调参数便能再现广义扩散系数。增强效应随 $\chi \to 1$ 的无限增长，与在阈值以上发现的中间 χ处的最佳手性 [36], 形成对比，并证实了促成本研究的预期：在临界状态下，由于外壳存在于所有尺度上，完全手性的行走者是最优的。因此，手性成为无序介质中输运的控制参数，其最优值由介质的几何结构决定；手性行走者通过同时最大化扩散距离和访问的站点数量来达到这一最优值。

持续转向偏置的重要性远不止于当前模型。手性与渗流也与生命物质有关：旋转的微藻会聚集成渗流手性流体 [56]。此外，渗流还用于量化破碎化景观中的栖息地连通性 [57], ；在这种情况下，沿边界移动能否成功取决于破碎化模式 [58], ，这与我们对内壳和外包络的区分十分相似。在理论计算机科学中，人们研究基于转子的行走，正是因为固定的局部转向顺序会改变行走者遍历图的方式 [59, 60]。然而，在这些情形中，这种优势只是通过定性分析、模拟或针对任意图的界限来确立的。临界渗流团簇是一个罕见的例子，在这里，这种优势可以用精确指数加以确定，从而为这些情形提供解析基准。

从超扩散到亚扩散的交叉在实验上为检验我们的结果提供了直接途径。由于$K_\chi \propto \tau^{\alpha_e-2/d_w}$ 是通过匹配两个区间得出的，因此它不受 χ如何映射到物理参数以及时钟假设（方程（7））的影响，因此可用于检验阈值附近无序介质中的任意手性示踪粒子。事实上，在具有光刻图案化障碍阵列的二维电子气中，磁学上的对应现象已得到实现：当回旋半径小于障碍物尺寸时，测得的磁电导率便会出现峰值；模拟表明，这一现象源于电子沿障碍物轮廓运动 [33]。胶体模型系统已能实现密度可调、接近局域化转变的随机障碍矩阵 [61]，因此若将示踪粒子换成手性粒子，便可直接检验这一结果。候选系统包括手性活性胶体、颗粒状手性粒子 [24, 62], 以及障碍阵列中的游动微生物 [27, 28], ；在无序多孔介质中，细菌已可通过单细胞分辨率进行追踪 [63], ；还包括磁性斯格明子，其陀螺耦合使其热运动呈现奇扩散 [25, 26, 64]。对于斯格明子，已知钉扎缺陷会增强而非抑制扩散 [65],; 这与奇动力学和障碍物之间的相互作用相同，而这种相互作用正是本文及参考文献 [36] 中所发现的扩散增强现象的根源。

如今，钉扎景观既可测量，也可写入 [66, 67], ，因此可以直接设计渗流缺陷图案。

致谢— 感谢 Jan W´ojcik、Narinder 和 Nir Sherf 提供宝贵的讨论。RM 感谢德国研究基金会（DFG，资助编号 ME1535/22-1）的支持。

[1] P.-G. de Gennes，《渗流：一个统一性概念》，《La Recherche》7，919（1976）。[2] S. Havlin 和 D. ben-Avraham，《无序介质中的扩散》，《Adv. Phys.》36，695（1987）。[3] D. ben-Avraham 和 S. Havlin, *Diffusion and Reactionsin Fractals and Disordered Systems*（英国剑桥剑桥大学出版社，2000）。[4] S. Kirkpatrick，《渗流与导电》，《Rev. Mod. Phys.》45，574（1973）。[5] M. Sahimi, *Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock*（Wiley-VCH Verlag & Co，德国魏因海姆，2011）。[6] B. Berkowitz，《表征断裂地质介质中的流动与输运：综述》，《Adv. Water Resour.》25，861（2002）。[7] M. Saxton，《由结合导致的反常扩散：一项蒙特卡洛研究》，《Biophys. J.》70，1250（1996）。[8] F. H¨ofling 和 T. Franosch，《拥挤生物细胞世界中的反常输运》，《Rep. Prog. Phys.》76，046602 2013( )。[9] S. Sadegh、J. L. Higgins、P. C. Mannion、M. M. Tamkun 和 D. Krapf，《质膜由自相似的皮层肌动蛋白网格分隔》，《Phys. Rev. X》7，011031（2017）。[10] Y. Mardoukhi、J.-H. Jeon、A. V. Chechkin 和 R. Met- zler，《临界随机环境中随机游走的涨落》，《Phys. Chem. Chem. Phys.》20，20427（2018）。[11] M. P. M. den Nijs，《八顶点模型与q态波茨模型温度指数之间的关系》，《J. Phys. A》12，1857（1979）。[12] B. Nienhuis、E. K. Riedel 和 M. Schick，《二维q态波茨模型的磁性指数》，《J. Phys. A》13，L189（1980）。[13] R. B. Pearson，《扩展波茨模型磁性本征值的猜想》，《Phys. Rev. B》22，2579（1980）。[14] D. Stauffer 和 A. Aharony, *Introduction to percolation theory* 1992 （

Taylor & Francis，伦敦，）。[15] S. Alexander 和 R. Orbach，《分形上的态密度：“分形子”》，《J. Physique Lett.》43，625（1982）。[16] Y. Gefen、A. Aharony 和 S. Alexander，《渗流簇上的反常扩散》，《Phys. Rev. Lett.》50，77（1983）。[17] R. B. Pandey 和 D. Stauffer，《确认渗流阈值处的动力学标度》，《Phys. Rev. Lett.》51，527 1983( )。[18] B. O’Shaughnessy 和 I. Procaccia，《分形对象上扩散的解析解》，《Phys. Rev. Lett.》54，455（1985）。[19] P. Grassberger，《二维渗流中的电导率指数与骨架维数》，《Physica A》262，251（1999）。[20] M. Spanner、F. H¨ofling、S. C. Kapfer、K. R. Mecke、G. E.

Schr¨oder-Turk 和 T. Franosch，《拥挤介质中反常输运普适性类别的分裂》，《Phys. Rev. Lett.》116，060601（2016）。[21] ´E. Lucas， *Récréations mathématiques*，第1卷（Gauthier-Villars，巴黎，1882年）。[22] C. Hargus、J. M. Epstein 和 K. K. Mandadapu，《手性随机运动的奇扩散率》，《Phys. Rev. Lett.》127，178001 2021( )。[23] M. Fruchart、C. Scheibner 和 V. Vitelli，《奇黏度与奇弹性》，《Annu. Rev. Condens. Matter Phys.》14，471（2023年）。[24] L. Caprini、M. Musacchio、U. M. B. Marconi、B. Liebchen 和 H. L¨owen，《惯性手性活性气体的活性热力学：状态方程与边缘电流》，《Proc. Natl. Acad. Sci. USA》123，e2532158123（2026）。[25] E. Kalz、H. D. Vuijk、J.-U. Sommer、R. Metzler 和 A. Sharma，《平衡奇扩散系统中的振荡力自相关》，《Phys. Rev. Lett.》132，057102（2024年）。[26] C. Reichhardt、C. J. O. Reichhardt 和 M. V. Milo˘sevi´c，《与无序和纳米结构相互作用的斯格明子的静态与动力学》，《Rev. Mod. Phys.》94，035005（2022）。[27] E. Lauga、W. R. DiLuzi、G. M. Whitesides 和 H. A. Stone，《绕圈游动：固体边界附近细菌的运动》，《Biophys. J.》90，400（2006年）。[28] L. Lettermann、M. Singer、S. Steinbr¨uck、F. Ziebert、S. Kanatani、P. Sinnis、F. Frischknecht 和 U. S. Schwarz，《疟原虫的手性决定其运动模式》，《Nat. Phys.》22，112（2026）。[29] C. Hargus、F. Ghimenti、J. Tailleur 和 F. van Wijland，《手性活性浴中被动物体的奇动力学》，《Phys. Rev. Lett.》135，167102（2025年）。[30] J. W´ojcik 和 E. Kalz，《手性随机游走：奇扩散的量子启发框架》，《New J. Phys.》28，114603（2026）。[31] L. Rayleigh，《按矩形排列的障碍物对介质性质的影响》，《Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.》34，481（1892年）。[32] W. Schirmacher、B. Fuchs、F. H¨ofling 和 T. Franosch，《无序结构中的反常磁输运：经典边缘态渗流》，《Phys. Rev. Lett.》115，240602 2015( )。[33] N. H. Siboni、J. Schluck、K. Pierz、H. W. Schumacher、D. Kazazis、J. Horbach 和 T. Heinzel，《无序障碍物阵列中二维电子气的非单调经典磁电导率》，《Phys. Rev. Lett.》120，056601（2018年）。[34] O. Chepizhko 和 T. Franosch，《拥挤介质中的理想圆形微型游泳者》，《软物质》15，452（2019）。[35] O. Chepizhko 和 T. Franosch，《随机环境中圆形微型游泳者的随机运动》，《New J. Phys.》22，073022（2020年）。[36] J. Uhlig、J. W´ojcik、R. Metzler 和 E. Kalz，《手性增强无序环境中的扩散》，《J. Chem. Phys.》165，124118（2026）。[37] M. F. Sykes 和 J. W. Essam，《二维中格点与键问题的精确临界渗流概率》，《J. Math. Phys.》5，1117（1964）。[38] H. Saleur 和 B. Duplantier，《二维渗流外壳指数的精确确定》，《Phys. Rev. Lett.》58，2325（1987年）。[39] R. M. Ziff、P. T. Cummings 和 G. Stells，通过随机行走生成渗流团簇周界，J. Phys. A 17, 3009 (1984)。[40] I. Majid、N. Jan、A. Coniglio 和 H. E. Stanley，动力学生长游走：线性聚合物的新模型，Phys. Rev. Lett. 52, 1257 (1984)。[41] A. Weinrib 和 S. A. Trugman，一种新的动力学游走与渗流周界，Phys. Rev. B 31, 2993 (1985)。[42] R. M. Ziff，生成外壳的游走，Physica D 38, 377 (1989)。[43] R. M. Ziff、X. P. Kong 和 E. G. D. Cohen，洛伦兹格子气体与动力学游走模型，Phys. Rev. A 44, 2410 (1991)。[44] M. E. J. Newman 和 R. M. Ziff，针对渗流的高效蒙特卡罗算法与高精度结果，Phys. Rev. Lett. 85, 4104 (2000)。[45] R. M. Ziff，二维渗流的临界阈值、标度修正指数和磁化率振幅比结果，Phys. Procedia 15, 12 (2011)。[46] J. L. Jacobsen，周期 Temperley–Lieb 代数中的特征值恒等式所给出的 Potts 和 O(N) 模型临界点，J. Phys. A 48, 454003 (2015)。[47] S. Mertens，方格晶格上的精确位点渗流概率，J. Phys. A 55, 334002 (2022)。[48] J. Hoshen 和 R. Kopelman，渗流与簇分布。I. 簇的多重标记技术与临界浓度算法，Phys. Rev. B 14, 3438 (1976)。[49] S. Condamin、O. B´enichou 和 J. Klafter，受限几何中亚扩散的首次通过时间分布，Phys. Rev. Lett. 98, 250602 (2007)。[50] J. Feder， *Fractals* （Plenum Press，纽约州纽约，1988）。[51] K. Falconer， *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications* 2 ，第nd 版（ Wiley，奇切斯特，2003 ）。[52] R. M. Ziff，渗流团簇周界标度指数检验，Phys. Rev. Lett. 56, 545 (1986)。[53] M. Kac，能否听出鼓的形状？，Am. Math. Mon. 73, 1 (1966)。[54] M. L. Lapidus，能否听出分形鼓的形状？ Weyl–Berry 猜想的部分解决，在 *Geometric Analysis and Computer Graphics* ，Math. Sci. Res. Inst. Publ.，第 17 卷，P. Concus、R. Finn 和 D. A. Hoffman 编（ Springer，纽约，1991 ），第 119–126 页。[55] M. L. Lapidus，分形鼓、椭圆算子的逆谱问题与 Weyl–Berry 猜想的部分解决，Trans. Amer. Math. Soc. 325, 465 (1991)。[56] I. Eisenmann、P. Cosme、H. van Sterkenburg、H. Franca、T. Seguy、M. Tatulea-Codrean 和 M. Jalaal，手性反转与活性转子悬浮液中的奇输运，电子预印本 10.48550/arXiv.2610.41016 (2026)。[57] T. Keitt、D. Urban 和 B. Milne，检测破碎化景观中的临界尺度，Conserv. Ecol. 1, 4 (1997)。[58] G. P. Malanson 和 B. E. Cramer，迷宫中的蚂蚁：临界景观的启示，Prof. Geogr. 51, 155 (1999)。[59] V. B. Priezzhev、D. Dhar、A. Dhar 和 S. Krishna-murthy，作为自组织临界性模型的欧拉游走者，Phys. Rev. Lett. 77, 5079 (1996)。[60] V. Yanovski、I. Wagner 和 A. Bruckstein，用于高效网络巡逻的分布式蚁群算法，Algorithmica 37 ，165（2003）。

[61] T. O. E. Skinner、S. K. Schnyder、D. G. A. L. Aarts、J. Horbach 和 R. P. A. Dullens，随机限域中流体的局域化动力学，Phys. Rev. Lett. 111，128301（2013）。[62] C. W. Chan、D. Wu、K. Qiao、K. L. Fong、Z. Yang、Y. Han 和 R. Zhang，手性活性粒子是环境几何的灵敏探针，Nat. Commun. 15，1406（2024）。[63] T. Bhattacharjee 和 S. S. Datta，多孔介质中的细菌跳跃与捕获，Nat. Commun. 10，2075（2019）。[64] C. Sch¨utte、J. Iwasaki、A. Rosch 和 N. Nagaosa，驱动斯格明子的惯性、扩散与动力学，Phys. Rev. B 90，174434（2014）。[65] P. Rieger、M. Weißenhofer 和 U. Nowak，缺陷增强的磁性斯格明子扩散，Phys. Rev. B 108，144417（2023）。[66] M. A. Brems、T. Sparmann、S. M. Fr¨ohlich、L.-C. Dany、J. Roth¨orl、F. Kammerbauer、E. M. Jefremovas、O. Farago、M. Kl¨aui 和 P. Virnau，在任意势中实现斯格明子动力学的定量准粒子建模，Phys. Rev. Lett. 134，046701（2025）。[67] L.-M. Kern、B. Pfau、V. Deinhart、M. Schneider、C. Klose、K. Gerlinger、S. Wittrock、D. Engel、I. Will、C. M. G¨unther、R. Liefferink、J. H. Mentink、S. Wintz、M. Weigand、M.-J. Huang、R. Battistelli、D. Metternich、F. B¨uttner、K. H¨oflich 和 S. Eisebitt，通过聚焦 He+离子辐照确定性生成并引导磁性斯格明子运动，Nano Lett. 22，4028（2022）。[68] E. Kalz、H. D. Vuijk、I. Abdoli、J.-U. Sommer、H. L¨owen 和 A. Sharma，碰撞增强奇扩散系统中的自扩散，Phys. Rev. Lett. 129，090601（2022）。[69]Y. He、S. Burov、R. Metzler 和 E. Barkai，随机时间尺度不变扩散与输运系数，Phys. Rev. Lett. 101，058101（2008）。[70] R. Metzler、J.-H. Jeon、A. G. Cherstvy 和 E. Barkai，反常扩散模型及其性质：单粒子跟踪百年之际的非平稳性、非遍历性和老化，Phys. Chem. Chem. Phys. 16，24128 2014( )。[71] Y. Meroz、I. M. Sokolov 和 J. Klafter，混合起源的亚扩散：当遍历性与非遍历性共存时，Phys. Rev. E 81，010101(R)（2010）。[72] Y. Meroz、I. M. Sokolov 和 J. Klafter，从单条轨迹检验并确定遍历系统中的亚扩散模型，Phys. Rev. Lett. 110，090601（2013）。[73] A. G. Cherstvy、S. Thapa、Y. Mardoukhi、A. V. Chechkin 和 R. Metzler，Ornstein-Uhlenbeck过程的时间平均及其统计变化：初始粒子分布与向平稳态弛豫的作用，Phys. Rev. E 98，022134（2018年）。[74] Y. Mardoukhi、J.-H. Jeon 和 R. Metzler，随机分形几何中由几何控制的反常扩散：超越无限簇，Phys. Chem. Chem. Phys. 17，30134（2015）。[75] R. Rammal 和 G. Toulouse，分形结构和渗流簇上的随机游走，J. Physique Lett. 44，L13（1983）。[76] T. Nakayama、K. Yakubo 和 R. L. Orbach，分形网络的动力学性质：标度、数值模拟与物理实现，Rev. Mod. Phys. 66，381 1994( )。[77] B. Sapoval、T. Gobron 和 A. Margolina，分形鼓的振动，Phys. Rev. Lett. 67，2974（1991）。

补充材料

模型—CRW 在离散时空（晶格常数为 a 、时间步长为 δt）中对奇扩散进行建模：为行走者赋予一个内部自由度，其状态 d 编码了行走者最近一步的方向。该状态通过两条规则的混合进行更新：以概率 χ ，按照固定的循环顺序确定性地改变为下一个方向（$\rightarrow$、$\downarrow$、$\leftarrow$、$\uparrow$、$\rightarrow$.....）；以概率 $1-\chi$，则从均匀随机分布中重新抽取。随后，行走者沿更新后的内部状态所指定的晶格方向移动。因此，CRW 在普通随机行走（$\chi=0$）与完全确定性的圆形轨迹（$\chi=1$）之间进行插值。

根据文献 [30] ，粒子的状态写成如下形式的概率向量

$$|\rho(t)) = \sum_{\mathbf{r},d} p_{\mathbf{r},d}(t)\,|\mathbf{r}) \otimes |d), \tag{9}$$

其中以圆括号态矢表示概率向量，并以$\otimes$ 表示结合内部自由度与空间向量空间的张量积。这里， $|\mathbf{r}) = |x)|y) \in \mathbb{Z}^2$ 为空间基向量，而 $|d)$（其中 $d \in \{\rightarrow\leftarrow,\uparrow,\downarrow\}$）为内部自由度的基向量。联合位置-硬币分布的时间演化为

$$|\rho(t+1)) = U|\rho(t)) = S\,C|\rho(t)), \quad C = \sum_{\mathbf{r}} |\mathbf{r})(\mathbf{r}| \otimes C_{\mathbf{r}}, \tag{10}$$

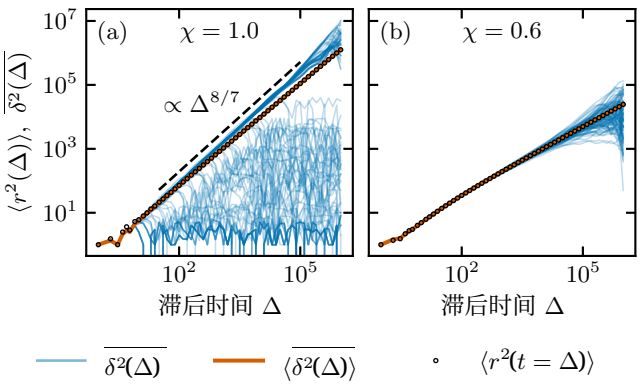
其中， S 根据行走者的内部状态使其移动，例如 $S|x$、y、$\uparrow) = |x$、$y+1$、$\uparrow)$；硬币算符 C通过位置依赖算符 $C_{\mathbf{r}}$ 作用于内部状态。在可达位点上， $C_{\mathbf{r}}$ 是 CRW 硬币算符

$$C_{\mathrm{CRW}} = (1-\chi)\,C_{\mathrm{rand}} + \chi\,C_{\mathrm{chir}}, \tag{11}$$

其中 $\chi \in [0,1]$ 是手性，即采用手性规则的概率。在受阻位置， $C_{\mathbf{r}} = C_{\mathrm{refl}}$ 会反转内部状态，因此行走者踏上障碍物后，会在下一步返回先前的位置 [30]。这里，C_{rand} 会随机化内部状态， C_{chir} 会循环置换内部状态，而 C_{refl} 会反转内部状态，

$$C_{\mathrm{rand}} = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1 \end{pmatrix},\ C_{\mathrm{chir}} = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&1&0&0\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix},\ C_{\mathrm{refl}} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

在基 ($\rightarrow$，$\leftarrow$，$\uparrow$，$\downarrow$) 下。没有障碍物时，长时间扩散张量可由离散格林–久保



图。 4 14 $p = p_c$ $L =$ 2048 $T = 10^6$ 时间平均均方位移，公式（），在，，。(a) 完全手性行走者（ $\chi = 1$）：随机选取的100条轨迹的个体时间平均均方位移（细蓝线）、其系综平均 $\langle\delta^2(\Delta)\rangle$（红线）和均方位移（空心圆）。个体曲线按 $\Delta^{8/7}$（黑色虚线）增长，并在其轨道闭合后达到饱和，在所有滞后时间处均呈现平台。(b) $\chi = 0.6$的情况相同：个体时间平均均方位移与均方位移重合。

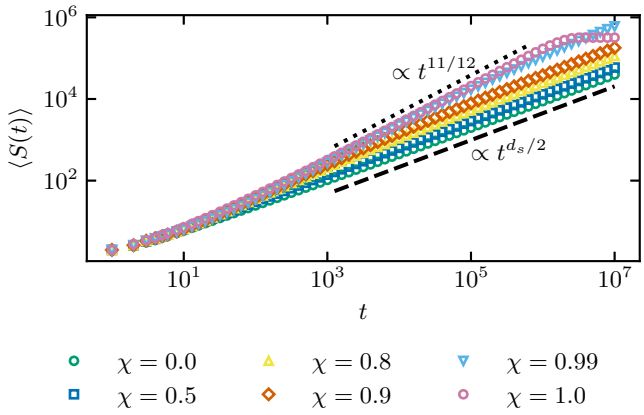


图5。访问过的不同位点平均数，$\langle S(t)\rangle$，在 $p = p_c$ $L = 2048$ $\chi \in \{0.0, 0.5, 0.8, 0.9, 0.99, 1.0\}$ （）处，对于手性。虚线：普通随机行走的 $t^{d_s/2} = t^{d_f/d_w} \approx t^{0.659}$，其谱维数为 $d_s = 2d_f/d_w$；点线：$t^{11/12}$ 通过公式（2）的计数法预测的完全手性行走者的 $\langle S(t)\rangle \sim t\,\Pi(R(t))$。

关系 [22, 30]，

$$\mathbf{D}_{\mathrm{CRW}} = \frac{a^2}{4\delta t}\frac{1-\chi^2}{1+\chi^2}\begin{pmatrix} 1 & \frac{-2\chi}{1-\chi^2} \\ \frac{2\chi}{1-\chi^2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

具有反对称的非对角元素，$D_{yx} = -D_{xy}$，这是奇扩散 [22, 68] 的典型特征。

模拟方法——我们在边长为 L、晶格常数为 $a = 1$、时间步长为 $\delta t = 1$且采用周期性边界条件的方格晶格上模拟手性随机游走。每个位点独立地以概率 p （位点占据概率）设为可通行，否则设为反射边界。我们使用 Hoshen–Kopelman 算法 [48]识别最大连通团簇。对于 $\chi < 1$ 所有行走者，均将其初始化在该团簇上随机选取的位置，并使其初始内部自由度状态均匀分布。在完全手性情形下 $\chi = 1$，我们在最大团簇上随机选取一个紧邻阻塞位点的起始位置，并令初始内部自由度指向远离阻塞位点的方向，仿佛刚发生过一次反射，从而可能出现边缘黏附。这样只排除了平凡轨迹：在开放空间中，完全手性行走者会无限期地绕着由四个相邻位点构成的正方形转圈，且 $r^2 \le 2a^2$。若从整个团簇上均匀选取起点，这些行走者会形成一个恒定偏移量，并按黏附到外壳的行走者比例降低 $\langle r^2(t)\rangle$ 和 $\langle S(t)\rangle$的振幅，但所有指数保持不变。若从紧邻外壳的位点中均匀选取起点，则每个孔洞的权重与其包络长度成正比，这正如式（2）所假设的那样。对于外壳系综，行走者从紧邻最大障碍物簇的位点出发。该团簇通常会环绕周期系统；若未环绕，其外壳便是大小为 $\sim L$的闭合轨道，对于 $t \ll T_L$ 而言表现相同，随后趋于饱和而非继续漂移。对于内壳系综，行走者从紧邻任意其他未环绕周期性边界的障碍物簇的位点出发。与外壳和内壳都相邻的位点不予考虑。我们在 $p = 0.592746$ 处进行模拟，该值略低于临界阈值$p_c = 0.59274605079210(2)$ [46, 47]，；在此处，最大团簇在统计上与初生无限簇（无穷簇）无法区分 [2, 14]。对于每个无序实现，我们演化 100 条独立轨迹，每条持续 $T = 10^7$ 步，并对 10^4 个实现重复上述过程，总计得到 10^6 条轨迹。采用这一设置后，所有图中的统计误差均小于符号尺寸，因此未予显示。

时间平均均方位移——为了解析系综指数背后的各条独立轨迹，我们计算每条轨迹的时间平均均方位移（TAMSD） [69, 70]，

$$\overline{\delta^2(\Delta)} = \frac{1}{T-\Delta}\sum_{t=0}^{T-\Delta-1}\left[\mathbf{r}(t+\Delta) - \mathbf{r}(t)\right]^2, \qquad (14)$$

滞后时间为 Δ，测量时间为 T。对于 $\chi < 1$，个体时间平均均方位移彼此相同，并且在时间 $\Delta \ll T$ （图4（b））中与均方位移一致。随机化使行走者脱离任何单一外壳，因此该行走具有遍历性，这与无穷簇上的普通随机行走者相同 [10, 71–73]。对于 $\chi = 1$，情况则有所不同（图4（a））。平均时间平均均方位移 $\langle\overline{\delta^2}(\Delta)\rangle$在所有滞后时间下仍与均方位移一致。然而，每个个体时间平均均方位移都以 $\Delta^{2/d_h} = \Delta^{8/7}$ 增长，直至其轨道在$\Delta \sim R_g^{d_h}$闭合，随后在平台 $\sim R_g^2$处饱和。所有滞后时间下都会出现平台，这是各个尺度上均存在孔洞的直接特征；而外包络上的行走者则遵循 $\Delta^{8/7}$。对于非手性随机游走，p_c 附近出现类似的离散，是因为行走者被困在有限簇上，也就是说，相空间非连通 [74]。在 $\chi = 1$ 时，相

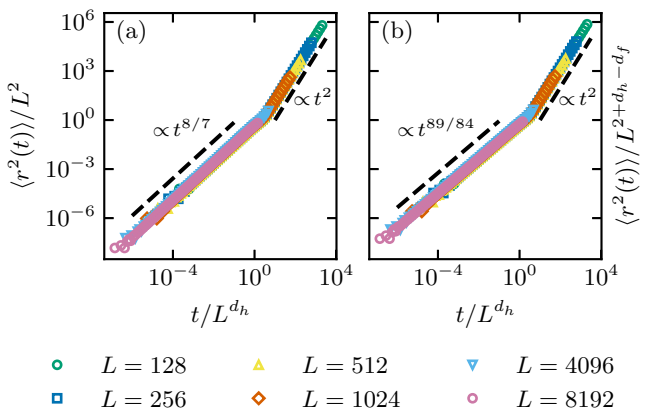


图 6. $\chi = 1$ 在 p_c $L \in \{128, 256, 512, 1024, 4096, 8192\}$ $p =$ 时的均方位移有限尺寸标度，适用于 。(a) 外包络行走者将 $\langle r^2(t)\rangle/L^2$ 对 t/L^{d_h} 作图并进行重标度后，塌缩到 $\Phi(x)$（式 (15)），其中 $\Phi \sim x^{8/7}$ 表示绕行包络一周前，$\Phi \sim x^2$ 表示绕行包络一周后。(b) 整体系综将 $\langle r^2(t)\rangle/L^{2+d_h-d_f}$ 对 t/L^{d_h} 作图，并按 $2 + d_h - d_f = 89/48$ 重标度后，塌缩到 $\Psi(x)$（式 (16)），其中 $\Psi \sim x^{\alpha_e}$ 和 $\Psi \sim x^2$。

空间（无穷簇）是连通的，而手性则将其划分为互不相交的轨道。系综平均均方位移的标度将在正文中讨论。

谱维数——对于普通随机游走，谱（分形子）维数 $d_s = 2d_f/d_w$ 将输运与团簇的谱联系起来：它决定返回概率 $P_0(t) \sim t^{-d_s/2}$、访问过的不同位点数 $S(t) \sim t^{d_s/2}$ 以及振动态密度 $g(\omega) \sim \omega^{d_s-1}$ [15, 75, 76]。在 $\chi = 1$ 处，演化算符是行走者内部状态的一个置换；行走者会在轨道周期的整数倍时刻以及反射后返回其起始状态，因此——因此，$P_0(t)$呈现为轨道周期处的一列峰，而非幂律。于是，谱仅反映包络长度的分布。这与具有分形边缘的鼓恰好相反：其谱在主导阶上由膜决定，边缘仅带来修正：完全手性行走者“听见”的只有边缘。对于从无穷簇上出发的行走者，轨道长度大于 ℓ 的比例 $\Pi(\ell) \sim \ell^{-1/12}$按幂律衰减；在轨道闭合之前，行走者以恒定速率访问新位点。因此，$\langle S(t)\rangle \sim t\,\Pi\big(R(t)\big) \sim t^{11/12}$，与模拟结果一致，如图 5所示。对于 $\chi < 1$，$\langle S(t)\rangle$会从完全手性标度过渡到普通标度。

有限尺寸效应——对于线性尺寸为 L 的系统，最大尺度是外包络。当最大的障碍物簇绕行周期系统时，沿其外壳行走的行走者会绕系统行进，每绕行一周，展开轨迹就会移动一个长度为 L的晶格向量。对于 $t \gg T_L$，因此这种运动是确定性漂移，$\langle r^2(t)\rangle \sim L^2(t/L^{d_h})^2$ 并结合式（1），外包络均方位移满足

$$\langle r^2(t)\rangle = L^2\,\Phi\!\left(\frac{t}{L^{d_h}}\right), \quad \Phi(x) \sim \begin{cases} x^{8/7}, & x \ll 1, \\ x^2, & x \gg 1, \end{cases} \tag{15}$$

交叉由包络长度决定。图 6(a)证实了这一数据塌缩，适用于 L从 128 到 8192。由于外包络承载了 $L^{d_h-d_f}$ 所有行走者中的一定比例，整体系综遵循类似的形式

$$\langle r^2(t)\rangle = L^{2+d_h-d_f}\,\Psi\!\left(\frac{t}{L^{d_h}}\right), \quad \Psi(x) \sim \begin{cases} x^{\alpha_e}, & x \ll 1, \\ x^2, & x \gg 1, \end{cases} \tag{16}$$

其中 $2 + d_h - d_f = 89/48$，图 6(b)证实了这一数据塌缩。