arXiv:2611.29544v1 [math.KT] 22 Nov 2026

CO比较两种版本的 ℓ^p-Roe代数的K理论

Liang Guo、Zheng Luo 和 Qin Wang

摘要。我们证明，对于任意局部有限度量空间X 和 $1 < p < \infty$，从系数空间为 $\ell^p(\mathbb{N})$ 的 ℓ^p-Roe代数到系数空间为$\ell^p(\mathbb{N}; \ell^2(\mathbb{N}))$ 的 ℓ^p-Roe代数的典范包含，将前者识别为后者的一个满乘子角。因此，该包含在K理论上诱导一个同构，从而回答了Wang、Xie、Yu和Zhu提出的问题。此外，在端点$p = 1$处，我们证明，只要X 是无限集，相应的两个Roe代数就不Morita等价。

1. 引言

Roe在研究非紧流形上的指标理论时引入了Roe代数[Roe93]。它们编码度量空间的大尺度几何，其K理论承载椭圆算子的高指标，而粗Baum–Connes猜想预言，这一K理论可以由该空间大尺度上的K同调计算得出 [HR95、Yu00、WY20]。Roe代数的Banach空间类比以 ℓ^p空间取代希尔伯特空间，因其与刚性、K理论以及 ℓ^p 粗Baum–Connes猜想 [CL18、CL21、ZZ21、CN23、WXYZ25]等方面的联系而受到广泛关注。

设X 为一个局部有限离散度量空间，即X 中的每个闭球都是有限的。对于巴拿赫空间E，记 $\mathcal{B}(E)$为E 上有界线性算子的巴拿赫代数，记$\mathcal{K}(E)$ 为其由紧算子组成的闭理想。对于 $1 \le p < \infty$，每个$T \in \mathcal{B}(\ell^p(X; E))$ 都可表示为矩阵$(T_{x,y})_{x,y\in X}$，其矩阵元为$T_{x,y} \in \mathcal{B}(E)$中的元素，且其传播为

$$\operatorname{prop}(T) = \sup\{d(x,y) : T_{x,y} \neq 0\}.$$

代数 ℓ^p-*Roe*代数 $B^p\operatorname{alg}(X; E)$ 由所有具有有限传播且矩阵元为紧算子的$T \in \mathcal{B}(\ell^p(X; E))$ 组成，而 ℓ^p-*Roe*代数 $B^p(X; E)$ 是其在 $\mathcal{B}(\ell^p(X; E))$中的算子范数闭包。

巴拿赫空间 $\ell^p(X; E)$ 在X上起几何模的作用，而Roe代数先验上取决于系数空间E。在希尔伯特空间情形下$p = 2$，每个无限维可分希尔伯特空间E 所给出的Roe代数在同构意义下都相同，且其K理论不依赖于这一选择 [WY20]。对于一般的p，有两个自然的系数空间，即

$$E_p = \ell^p(\mathbb{N}) \qquad \text{and} \qquad E_p^{\mathcal{H}} = \ell^p(\mathbb{N}; \mathcal{H}), \qquad \text{where } \mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N}).$$

Zhang 和 Zhou [ZZ21] 研究了 ℓ^p 粗 Baum–Connes 猜想，采用了 E_p；而 Wang、Xie、Yu 和 Zhu [WXYZ25] 在研究可粗嵌入$E_p^{\mathcal{H}}$的空间时，采用了混合范数空间

日期：2026年11月24日。2020数学主题分类。

主要分类 46L80；次要分类 46H25、47L10、51F30。关键词和短语：Roe代数， ℓ^p-算子代数，Morita 等价。

到 ℓ^r 中。我们记

$$B^p_{\mathrm{st}}(X) = B^p(X; E_p), \qquad B^p_{\mathrm{mix}}(X) = B^p(X; E_p^{\mathcal{H}})$$

对于相应的Roe代数，其中“st”和“mix”分别指标准系数空间和混合范数系数空间。对于 $p \neq 2$，空间 E^p 和 $E_p^{\mathcal{H}}$并不同构，因为 ℓ^2 嵌入 $E_p^{\mathcal{H}}$，但不能嵌入 E^p （见 [AK16，第 2]章）。

为比较它们，固定一个单位向量$h_0 \in \mathcal{H}$，并通过$v : E_p \to E_p^{\mathcal{H}}$和$w : E_p^{\mathcal{H}} \to E^p$ 定义$v((a_n)) = (a_n h_0)$ 以及$w((\xi_n)) = (\langle \xi_n, h_0 \rangle)$，其中内积关于第一个变量线性。令$v_X$ 和w_X 表示它们在X上的对角扩张，并令

$$P = v_X w_X, \qquad \iota(T) = v_X T w_X, \qquad T \in B^p_{\mathrm{st}}(X). \tag{1}$$

我们的主要结果如下。

定理 1.1。 设 X 是一个局部有限离散度量空间。

(1) 对于 $1 < p < \infty$，算子 P 是 $B^p{}_{\mathrm{mix}}(X)$ 的全乘子幂等元，并且 ι 将 $B^p{}_{\mathrm{st}}(X)$ 等距同构为满角 $PB^p{}_{\mathrm{mix}}(X)P$。因此，两个*Roe*代数*Morita*等价，且 ι 诱导一个同构

$$\iota_* : K_*(B^p_{\mathrm{st}}(X)) \xrightarrow{\cong} K_*(B^p_{\mathrm{mix}}(X)).$$

(2) 对于 $p = 1$，若 X 是无限集，则 $B^1_{\mathrm{st}}(X)$ 与 $B^1_{\mathrm{mix}}(X)$ 不 *Morita*等价。

Wang、Xie、Yu 和 Zhu 曾提出，典范包含 ι 是否在K理论上诱导同构 [WXYZ25，问题 3。6]。定理 1.1 的第 (1) 部分对每个 $1 < p < \infty$ 以及每个局部有限离散度量空间 X都肯定地回答了这个问题。第 (2) 部分表明，端点$p = 1$ 有所不同。这两个 Roe代数不 Morita等价，而且我们不知道ι 是否仍在 K理论上诱导同构。

定理 1.1 也有一个关于粗Baum–Connes猜想的应用。对于一个具有有界几何的离散度量空间 X，ℓ^p 粗组装映射是利用 ℓ^p- 局部化代数在 X 的 Rips 复形上定义的 Yu97，ZZ21]。我们将 μ_{st} 和 μ_{mix} 分别记为系数空间 E^p 和 $E_p^{\mathcal{H}}$对应的组装映射。将定理 1.1 与相应的局部化代数比较结果结合起来 [WXYZ25]，可得以下推论。

推论1.2。 设 X 是一个具有有界几何的离散度量空间，且 $1 < p < \infty$。那么，与 $B^p{}_{\mathrm{st}}(X)$ 相关联的ℓ^p 粗组装映射 μ_{st} 等价于与 $B^p{}_{\mathrm{mix}}(X)$相关联的对应映射 μ_{mix}。特别地，若 X 可粗嵌入到 ℓ^q 某个 $1 \leq q < \infty$中，则 $B^p{}_{\mathrm{st}}(X)$满足 ℓ^p粗*Baum–Connes*猜想。

本文的组织结构如下。在第 2 节中，我们证明定理 1.1 的第（1）部分。利用 Khintchine 不等式，我们将 $E_p^{\mathcal{H}}$的有限秩坐标投影分解为经过 E^p 的映射，且相关界与投影的秩无关。这些分解表明 P 是满的，因此根据 Banach 代数的莫里田不变性，可得 K-理论同构 [Laf02、Par09、Par 15]。在第 3 节中，我们证明第（2）部分。我们证明，满幂等元会迫使 ℓ^2_n 的恒等算子分解为经过 ℓ^1-空间的映射，且相关界与 n 无关，这与下欣钦不等式矛盾。

致谢。作者获得了中国国家自然科学基金（NSFC）（项目编号：12571135 和 12401155）的部分资助。

AI 声明。 在准备这项工作期间，作者使用了 Gemini 4 Argon。它指出了 Khintchine 不等式的重要性，并帮助澄清了巴拿赫代数中 Morita 等价与满角之间的关系（尤其是命题 3.2的表述）。此外，它还被用于润色语言和行文，并检查稿件中的错误。作者已审阅并核实所有数学论证，并对本文内容承担全部责任。

2. 适用于1 < p < ∞ 的满乘子角 $1 < p < \infty$

本节证明定理 1.1的第 (1) 部分。我们先回顾 Khintchine 不等式（见 [Gra14，附录 C]），该不等式将在证明中用到。

对于$m \in \mathbb{N}$，令 $\Omega_m = \{-1,1\}^m$ 配备均匀概率测度。Rademacher 函数 $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m$：$\Omega_m \to \{-1,1\}$ 定义如下：

$$\varepsilon_j(\omega) = \omega_j \quad \text{for} \quad \omega = (\omega_1,\dots,\omega_m) \in \Omega_m.$$

Khintchine 不等式（参见 [Gra14，附录 C]）指出，对于每个 $1 \le s < \infty$，都存在常数 κ_s，$c_s > 0$ 使得

$$\kappa_s \left(\sum_{j=1}^m |a_j|^2 \right)^{1/2} \le \left\| \sum_{j=1}^m a_j \varepsilon_j \right\|_{L^s(\Omega_m)} \le c_s \left(\sum_{j=1}^m |a_j|^2 \right)^{1/2} \tag{2}$$

对所有 $m \in \mathbb{N}$ 和 $a_1,\dots,a_m \in \mathbb{C}$.

对于任意 $1 \le p < \infty$、$m \ge 1$ 和 $C > 0$，我们称 ℓ^2_m *C* 上的恒等算子经以下映射分解：ℓ^p 若存在一个集合 I 以及有界线性映射U：$\ell^2_m \to \ell^p(I)$ 和 V：$\ell^p(I) \to \ell^2_m$，使得

$$\|VU - \mathrm{Id}_{\ell^2_m}\| \le \tfrac{1}{2} \qquad \text{and} \qquad \|U\|\,\|V\| \le C.$$

下面的引理是一个标准的有限维版本，说明 Rademacher 子空间在 L^p 中当 $1 < p < \infty$ 时是可补的这一事实（例如参见 [AK16，命题 6.4，2] 或[LT77，定理 2.b。3]），并表明有限维希尔伯特空间上的恒等算子可以经有限维 ℓ^p-空间分解，且界与维数无关。

引理 2.1。 设 $p \in (1,\infty)$，并令 $q = p/(p-1)$ 为 p 的 *Hölder* 共轭。对于每个 $m \in \mathbb{N}$，存在有界线性映射

$$U_m : \ell^2_m \longrightarrow \ell^p_{2^m}, \qquad V_m : \ell^p_{2^m} \longrightarrow \ell^2_m$$

使得

$$V_m U_m = \mathrm{Id}_{\ell^2_m}, \qquad \|U_m\| \le c_p, \qquad \|V_m\| \le c_q.$$

特别地，ℓ^2_m $(c_p c_q)$ 的恒等算子可经由 ℓ^p 分解，对每个 $m \in \mathbb{N}$ 均如此。

证明。 将 $\ell^p_{2^m}$ 与 $\ell^p(\Omega_m)$等同。回顾一下，Rademacher 函数 $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m$ 在 $L^2(\Omega_m)$中构成标准正交系，即

$$\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle_{L^2(\Omega_m)} = 2^{-m} \sum_{\omega \in \Omega_m} \varepsilon_i(\omega)\varepsilon_j(\omega) = \delta_{ij}.$$

利用 $L^2(\Omega_m)$内积恢复系数，对于 $a=(a_1,\dots,a_m)\in \ell_m^2$ 和 $b=(b_\omega)_{\omega\in\Omega_m}\in \ell^p(\Omega_m)$，我们定义

$$U_m a = 2^{-m/p}\sum_{j=1}^m a_j\varepsilon_j, \qquad (V_m b)_j = 2^{m/p}\langle b,\varepsilon_j\rangle_{L^2(\Omega_m)} = 2^{-m/q}\sum_{\omega\in\Omega_m} b_\omega\varepsilon_j(\omega) \quad (1\le j\le m).$$

于是 $(V_mU_ma)_j=\langle\sum_{i=1}^m a_i\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle_{L^2(\Omega_m)}=a_j$对所有 $1\le j\le m$均成立，因此 $V_mU_m=\mathrm{Id}_{\ell_m^2}$。

由 Khintchine 不等式（2），取 $s=p$，可得

$$\|U_m a\|_{\ell_{2^m}^p} = \left\|\sum_{j=1}^m a_j\varepsilon_j\right\|_{L^p(\Omega_m)} \le c_p\|a\|_{\ell_m^2},$$

因此 $\|U_m\|\le c_p$。此外，由 H¨older 不等式以及（2），取 $s=q$，得到

$$\begin{aligned}\|V_m b\|_{\ell_m^2} &= \sup_{\|a\|_{\ell_m^2}=1}\left|2^{-m/q}\sum_{\omega\in\Omega_m} b_\omega\sum_{j=1}^m \overline{a_j}\varepsilon_j(\omega)\right| \\ &\le \|b\|_{\ell_{2^m}^p}\sup_{\|a\|_{\ell_m^2}=1}\left\|\sum_{j=1}^m\overline{a_j}\varepsilon_j\right\|_{L^q(\Omega_m)} \\ &\le c_q\|b\|_{\ell_{2^m}^p}.\end{aligned}$$

因此 $\|V_m\|\le c_q$，证明完毕。 □

对于 k、m $\in\mathbb{N}$，记 $\ell^p\,\mathrm{k}(\ell_m^2)=\ell^p(\{1,\dots,\mathrm{k}\};\ell_m^2)$ 为 k 个 ℓ_m^2 的 ℓ^p-直和。我们将 $\ell^p\,\mathrm{k}(\ell_m^2)$ 视为 $\mathrm{E}_p^{\mathcal{H}}=\ell^p(\mathbb{N};\mathcal{H})$ 的子空间，该子空间由满足以下条件的序列 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 组成：$\xi_n\in\ell_m^2$ 对于 $1\le\mathrm{n}\le\mathrm{k}$，且 $\xi_n=0$ 对于 $\mathrm{n}>\mathrm{k}$。令 $\mathrm{P}_{k,m}\in\mathcal{B}(\mathrm{E}_p^{\mathcal{H}})$ 为到 $\ell^p\,\mathrm{k}(\ell_m^2)\subseteq\mathrm{E}_p^{\mathcal{H}}$ 上的典范坐标投影。

命题 2.2. 对于每个 $k,m\in\mathbb{N}$、$p\in(1,\infty)$，存在有限秩算子

$$s_{k,m}:E_p^{\mathcal{H}}\longrightarrow E_p, \qquad t_{k,m}:E_p\longrightarrow E_p^{\mathcal{H}}$$

使得

$$t_{k,m}s_{k,m}=P_{k,m}, \qquad \|s_{k,m}\|\le c_p, \qquad \|t_{k,m}\|\le c_q. \tag{3}$$

此外，在强算子拓扑下，投影 $Q_n:=P_{n,n}$ 满足

$$\mathrm{SOT}\text{-}\lim_{n\to\infty}Q_n=\mathrm{Id}_{E_p^{\mathcal{H}}}, \qquad \mathrm{SOT}\text{-}\lim_{n\to\infty}Q_n^*=\mathrm{Id}_{(E_p^{\mathcal{H}})^*}.$$

证明. 由引理 2.1，将U_m 和 V_m 应用于 k 个 Hilbert块可得

$$\ell_k^p(\ell_m^2)\xrightarrow{\oplus_{j=1}^k U_m}\ell_{k2^m}^p\xrightarrow{\oplus_{j=1}^k V_m}\ell_k^p(\ell_m^2),$$

其复合为恒等算子。令$s_{k,m}$ 为坐标投影$E_p^{\mathcal{H}}\to\ell^p\ _k(\ell_m^2)$、上述第一个映射与典范包含 $\ell^p\ _{k2^m}\hookrightarrow E_p$的复合。类似地，利用反向映射定义$t_{k,m}$ 。于是$t_{k,m}s_{k,m}=P_{k,m}$。由于算子的 ℓ^p-直和的范数等于其范数的上确界，我们得到

$$\|s_{k,m}\|\le c_p, \qquad \|t_{k,m}\|\le c_q.$$

最后，Q_n 强收敛到 $\mathrm{Id}_{E_p^{\mathcal{H}}}$，因为有限支撑的坐标向量在$E_p^{\mathcal{H}}$中稠密。类似地，由于$(E_p^{\mathcal{H}})^* \cong \ell^q(\mathbb{N};\mathcal{H}^*)$ 和 $1 < q < \infty$，伴随投影Q_n^* 强收敛到 $\mathrm{Id}_{(E_p^{\mathcal{H}})^*}$。□

对于巴拿赫空间E，我们将 $\mathcal{B}(E)$ 记为E上有界线性算子构成的巴拿赫代数，将 $\mathcal{K}(E)$ 记为其由紧算子构成的闭理想。设(X,d) 是一个非空的局部有限度量空间，也就是说，每个闭球$B(x,R)$ 都是有限集。

固定 $1 < p < \infty$ 和一个巴拿赫空间E。令 $\ell^p(X;E)$ 表示X上取值于E的 ℓ^p-可和函数构成的巴拿赫空间。于是，每个有界算子$T \in \mathcal{B}(\ell^p(X;E))$ 都可以表示为一个矩阵$T = (T_{x,y})_{x,y\in X}$，其中$T_{x,y} \in \mathcal{B}(E)$ 且

$$\|T_{x,y}\| \le \|T\|, \qquad x,y \in X. \tag{4}$$

T 的支撑和传播分别定义为

$$\mathrm{supp}(T) := \{(x,y) \in X \times X : T_{x,y} \neq 0\}$$

and

$$\mathrm{prop}(T) := \sup\{d(x,y) : (x,y) \in \mathrm{supp}(T)\},$$

分别。

定义 2.3. 设 X 是一个局部有限离散度量空间，E 是一个巴拿赫空间，且 $1 < p < \infty$。代数 ℓ^p-Roe代数记为 B^p alg(X; E)，它是 $\mathcal{B}(\ell^p(X; E))$ 的子代数，由所有满足有限传播且矩阵元 $T_{x,y} \in \mathcal{K}$(E) 为紧算子的有界算子 $T = (T_{x,y})_{x,y\in X}$ 构成。ℓ^p-Roe代数 $B^p(X; E)$ 是 B^p alg(X; E) 在 $\mathcal{B}(\ell^p($X; E)) 中的算子范数闭包。

接下来，我们回顾 Lafforgue[Laf02] 和 Paravicini [Par09,Par15]所发展出的巴拿赫代数 Morita 理论的一个推论。回忆一下，若巴拿赫代数 B 满足张成空间$(BB) = B$，则称其为非退化。若乘子代数中的有界幂等元$P \in \mathcal{M}(B)$ 满足以下条件，则称其为满：

$$\overline{\mathrm{span}}(BPB) = B.$$

根据 [Par09，命题 5.3、推论 5.5 和定理 5.29] 以及 [Laf02，定´理`1.2。8], 我们得到如下结果。

引理 2.4。设 B 是一个非退化巴拿赫代数，且 $P \in \mathcal{M}(B)$ 是一个有界满幂等元。那么，满角 PBP 与 B *Morita*等价，且角嵌入 $PBP \hookrightarrow B$ 诱导一个同构

$$K_*(PBP) \xrightarrow{\cong} K_*(B).$$ □

现在，我们利用有限秩坐标投影$B^p{}_{\mathrm{mix}}(X)$，构造一个逐点变化的有界近似恒等元$Q_n = P_{n,n} \in \mathcal{B}(E_p^{\mathcal{H}})$，它们来自命题2.2。

引理 2.5。设 X 是一个局部有限离散度量空间，并且令 $1 < p < \infty$。对于每个函数$\lambda : X \to \mathbb{N}$，定义

$$P_\lambda := \bigoplus_{x\in X} Q_{\lambda(x)}.$$

那么 $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{N}^X}$ 是 $B^p{}_{\mathrm{mix}}(X)$ 的压缩近似单位，其中 $\mathbb{N}^X$ 按逐点序定向。此外，对于每个 $\lambda \in \mathbb{N}^X$，$P_\lambda \in B^p{}_{\mathrm{alg}}(X; E_p^{\mathcal{H}})$ 以及 $\|P_\lambda\| \le 1$。

证明。 每个P_λ 的传播为零，且具有有限秩矩阵项，其中 $\|P_\lambda\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|Q_n\| = 1$。因此$P_\lambda \in B^p$ alg（X； $E_p^{\mathcal{H}}$）。

由命题 2.2，SOT- $\lim_{n\to\infty} Q_n = \mathrm{Id}^{E_p^{\mathcal{H}}}$and SOT- $\lim_{n\to\infty} Q_n^* = \mathrm{Id}_{(E_p^{\mathcal{H}})^*}$。回顾一下，若一个有界算子序列及其伴随算子强收敛到零，那么在其左侧或右侧乘以紧算子，都会在算子范数下收敛。因此，对每个 $K \in \mathcal{K}(E_p^{\mathcal{H}})$，我们有

$$\|(I-Q_n)K\| \to 0, \qquad \|K(I-Q_n)\| \to 0.$$

设 $T \in B^p$ alg$(X;E_p^{\mathcal{H}})$ 的传播至多为 R，并固定 $\varepsilon > 0$。由于 X 是局部有限的，且每个 $T_{x,y}$ 都是紧算子，对每个 $x \in X$，我们可以选取 $\lambda_0(x) \in \mathbb{N}$，使得

$$\|(I-Q_n)T_{x,y}\| < \frac{\varepsilon}{\#B(x,R)\,\#B(y,R)}, \qquad \|T_{y,x}(I-Q_n)\| < \frac{\varepsilon}{\#B(x,R)\,\#B(y,R)}$$

对所有 $n \ge \lambda_0(x)$ 以及 $y \in B(x,R)$,

现在令 $\lambda \ge \lambda_0$，并令 S 表示 $T - P_\lambda T$ 或 $T - TP_\lambda$。这两个算子的传播至多为 R，并且

$$\|S_{x,y}\| \le \frac{\varepsilon}{\#B(x,R)\,\#B(y,R)}$$

只要 $d(x,y) \le R$。因此，

$$\sum_y \|S_{x,y}\| \le \frac{\varepsilon}{\#B(x,R)} \sum_{y\in B(x,R)} \frac{1}{\#B(y,R)} \le \varepsilon.$$

同理， $\sum_x \|S_{x,\,y}\| \le \varepsilon$ 对每个 $y \in X$。将经典舒尔检验应用于标量矩阵$(\|S_{x,y}\|)_{x,\,y\in X}$ （参见 [GPT24，命题 3。1]），得到

$$\|T - P_\lambda T\| \le \varepsilon, \qquad \|T - TP_\lambda\| \le \varepsilon.$$

因此，(P_λ) 是 B^p alg$(X;E_p^{\mathcal{H}})$上的双侧近似单位元。由于 $\|P_\lambda\| \le 1$ 和 B^p alg$(X;E_p^{\mathcal{H}})$ 在 B^p mix(X)中范数稠密，该收敛性可推广到 B^p mix(X)中的所有元素。□

现在我们证明定理1.1的第 (1) 部分。

定理 1.1 (1) 的证明。由 (1) 可知，由于 $wv = \mathrm{Id}^{E_p}$ 且 $\|v\| = \|w\| = 1$，我们有 $P^2 = P$ 和$\|P\| = 1$。与 P 相乘保持有限传播和紧矩阵元，因此 P 是 B^p mix(X) 的乘子幂等元。对于每个 $T \in B^p$ st(X)，有 $\iota(T) = v_X T w_X \in PB^p$ mix(X)P，且 $w_X \iota(T) v_X = T$，因此 $\|\iota(T)\| = \|T\|$。其在 PB^p mix(X)P 上的逆为 $S \mapsto w_X S v_X$。于是， ι 将 B^p st(X) 等距地识别为角代数 PB^p mix(X)P。

记 $s_n = s_{n,\,n}$ 和 $t_n = t_{n,\,n}$ 为命题 2.2 中的有限秩算子，使得 $t_n s_n = Q_{n,\,n}$，$\|s_n\| \le c^p$，并且 $\|t_n\| \le c^q$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。对于每个 $\lambda \in \mathbb{N}^X$，定义

$$C_\lambda := \bigoplus_{x\in X} v s_{\lambda(x)}, \qquad D_\lambda := \bigoplus_{x\in X} t_{\lambda(x)} w.$$

这两个算子的传播均为零，且矩阵项均为有限秩，其中

$$\|C_\lambda\| \le \|v\| \sup_{n\in\mathbb{N}} \|s_n\| \le c_p, \qquad \|D_\lambda\| \le \|w\| \sup_{n\in\mathbb{N}} \|t_n\| \le c_q.$$

因此 $C_\lambda, D_\lambda \in B^p$ 代数$(X;E_p^{\mathcal{H}}) \subseteq B^p$ 混合(X)。利用 $wv = \mathrm{Id}^{E_p}$ 和 $t_n s_n = Q_n$，可得

$$D_\lambda P C_\lambda = \bigoplus_{x\in X} Q_{\lambda(x)} = P_\lambda. \tag{5}$$

特别是，$P_\lambda \in B^p$ 混合$(X)PB^p$ 混合(X)。根据引理 2.5，$(P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{N}^X}$ 是B^p 混合(X)的有界近似单位元。因此，对于每个$T \in B^p$ 混合(X)，

$$T = \lim_\lambda P_\lambda T = \lim_\lambda D_\lambda P(C_\lambda T),$$

又由于D_λ,$C_\lambda T \in B^p$ 混合(X)，我们得出

$$\overline{\mathrm{span}}\big(B^p_{\mathrm{mix}}(X)PB^p_{\mathrm{mix}}(X)\big) = B^p_{\mathrm{mix}}(X).$$

因此，P 是B^p 混合(X)的全乘子幂等元。压缩近似单位还意味着B^p 混合(X) 是非退化的，因此其余断言由引理2.4得出。□

3. 端点 $p = 1$

在本节中，我们证明定理1.1的第（2）部分。本节中，我们假设X 是一个无限局部有限离散度量空间。

与引理2.1不同，在该引理中，ℓ^2_n 上的恒等算子可经由 $\ell^p_{2^n}$ 分解，且常数与n 无关（当 $1 < p < \infty$时）；而对于$p = 1$，我们的论证结合了两个相反的事实。满幂等元迫使 ℓ^2_n 上的恒等算子 C-分解经由 ℓ^1，其中C 与n 无关（命题3.2）；而任何此类分解都必须满足$C \geq c\sqrt{n}$ （命题3.4）。

对于巴拿赫空间 E、向量 $u \in E$ 以及泛函 $\varphi \in E^*$，我们将 $u \otimes \varphi$ 记作作用在 E 上的秩一算子 $z \mapsto \varphi(z)u$ 。下面的引理刻画了 ℓ^1-Roe 代数的极小左理想。

引理 3.1。若 $f \in B^1_{\mathrm{st}}(X)$ 是一个非零幂等元，且 $fB^1_{\mathrm{st}}(X)f = \mathbb{C}f$，则 $f = u \otimes \psi$，其中 $u \in \ell^1(X;\ E_1)$，并且 $\psi \in \ell^1(X;\ E_1)^*$，且

$$B^1_{\mathrm{st}}(X)f = \big\{z \otimes \psi : z \in \ell^1(X;E_1)\big\}.$$

对于 $B^1_{\mathrm{mix}}(X)$ 和 $E_1^{\mathcal{H}}$，将其替换为 $B^1_{\mathrm{st}}(X)$ 和 E_1 后，同样的结论仍成立。

证明。我们只证明关于 $\mathrm{B}^1_{\mathrm{st}}(\mathrm{X})$ 的结论，因为关于 $\mathrm{B}^1_{\mathrm{mix}}(\mathrm{X})$ 的证明完全相同。由于 $\mathrm{f} \neq 0$，且有限支撑向量和有限支撑泛函在弱*-拓扑和范数拓扑下都稠密，我们可以选取一个有限支撑向量 $\mathrm{z} \in \ell^1(\mathrm{X};\ \mathrm{E}_1)$ 和一个有限支撑泛函 $\varphi \in \ell^1(\mathrm{X};\ \mathrm{E}_1)^* \cong \ell^\infty(\mathrm{X};\ \mathrm{E}_1^*)$，使得 $\mathrm{f}\,\mathrm{z} \neq 0$ 且 $\varphi \circ \mathrm{f} \neq 0$。由于它们都是有限支撑的，$\mathrm{z} \otimes \varphi$ 具有有限传播，因此 $\mathrm{z} \otimes \varphi \in \mathrm{B}^1_{\mathrm{st}}(\mathrm{X})$，并且

$$f(z \otimes \varphi)f = (fz) \otimes (\varphi \circ f) \in fB^1_{\mathrm{st}}(X)f = \mathbb{C}f.$$

由于 $\mathrm{f}\,\mathrm{z} \neq 0$ 且 $\varphi \circ \mathrm{f} \neq 0$，算子 $(\mathrm{f}\,\mathrm{z}) \otimes (\varphi \circ \mathrm{f})$ 是一个非零秩一算子。幂等元 f 是 $(\mathrm{f}\,\mathrm{z}) \otimes (\varphi \circ \mathrm{f})$ 的非零标量倍，因此 f 的秩为一，所以对于某个 $\mathrm{u} \in \ell^1(\mathrm{X};\ \mathrm{E}_1)$ 和 $\psi \in \ell^1(\mathrm{X};\ \mathrm{E}_1)^*$，有 $\mathrm{f} = \mathrm{u} \otimes \psi$，且 $\psi(\mathrm{u}) = 1$。

显然，$\mathrm{B}^1_{\mathrm{st}}(\mathrm{X})\,\mathrm{f}$ 中的每个元素 $\mathrm{T}\,\mathrm{f} = (\mathrm{Tu}) \otimes \psi$ 都具有 $\mathrm{z} \otimes \psi$ 的形式。选取一个满足 $\varphi_0(\mathrm{u}) = 1$ 的有限支撑泛函 φ_0，则对于所有有限支撑的 z，都有 $\mathrm{z} \otimes \psi = (\mathrm{z} \otimes \varphi_0)\,\mathrm{f} \in \mathrm{B}^1_{\mathrm{st}}(\mathrm{X})\,\mathrm{f}$；因此，由稠密性，对于所有 $\mathrm{z} \in \ell^1(\mathrm{X};\ \mathrm{E}_1)$ 也成立。□

命题 3.2. 设 L 是一个巴拿赫代数，且 $Q,R \in \mathcal{M}(L)$ 是幂等元，其中 Q 在 L 中是满的，$QLQ \cong B^1_{\mathrm{st}}(X)$，且 $RLR \cong B^1_{\mathrm{mix}}(X)$ 作为巴拿赫代数同构。则存在 $C > 0$，使得对每个 $n \geq 1$，ℓ^2_n 的恒等算子都可经由 ℓ^1 分解。

证明。通过给定的同构，将QLQ 与$B^1_{\mathrm{st}}(X)$ 等同，并将RLR 与$B^1_{\mathrm{mix}}(X)$ 等同；这只会使范数相差一个乘法常数。由于Q 在L中是满的，在两侧乘以R 可得

$$B^1_{\mathrm{mix}}(X) = \overline{\mathrm{span}}\big((RLQ)(QLR)\big). \tag{6}$$

固定 $x_0 \in X$，并选取支撑于 x_0 处的 $u \in \ell^1(X; E_1^{\mathcal{H}})$ 和 $\varphi \in \ell^1(X; E_1^{\mathcal{H}})^*$，使得 $\varphi(u) = 1$。那么 $g := u \otimes \varphi \in B^1_{\mathrm{mix}}(X)$ 是一个秩一幂等元，满足 $gLg = gB^1_{\mathrm{mix}}(X)g = \mathbb{C}g$，且 $B^1_{\mathrm{mix}}(X)g = \{z \otimes \varphi : z \in \ell^1(X; E_1^{\mathcal{H}})\}$。由 (6) 和 $gR = Rg = g$ 可知，g 属于张成空间$\big((gLQ)(QLg)\big)$。由于 $(gLQ)(QLg) \subseteq gLg = \mathbb{C}g$ 是一维的，我们可以选取 $A_0 \in gLQ$ 和 $B_0 \in QLg$，使得

$$A_0B_0 = g, \qquad gA_0 = A_0, \qquad B_0g = B_0.$$

于是，$f = B_0A_0 \in QLQ = B^1_{\mathrm{st}}(X)$ 是一个非零的秩 1 幂等元，满足$fB^1_{\mathrm{st}}(X)f = \mathbb{C}f$。根据引理 3.1，存在 $\psi \in \ell^1(X;E_1)^*$，使得

$$B^1_{\mathrm{st}}(X)f = \big\{z \otimes \psi : z \in \ell^1(X; E_1)\big\}.$$

映射 $z \mapsto z \otimes \varphi$ 和 $z \mapsto z \otimes \psi$ 将 $\ell^1(X; E_1^{\mathcal{H}})$ 和 $\ell^1(X; E_1)$ 分别识别为巴拿赫空间，并满足 $B^1_{\mathrm{mix}}(X)g = RLg$ 和 $B^1_{\mathrm{st}}(X)f = QLf$，其中第一个识别使 $B^1_{\mathrm{mix}}(X)$ 的作用与左乘相交织。此外，由于 $B_0A_0 = f$ 且 $A_0B_0 = g$，右乘 B_0 和 A_0 是 QLf 与 QLg 之间的互逆同构，因此 $QLg \cong QLf \cong \ell^1(X; E_1)$。由于左乘 $B \in QLR$ 和 $A \in RLQ$ 将 RLg 映入 QLg，并再映回 RLg，因此每个乘积 AB 都可分解为经过 $\ell^1(X; E_1)$ 的映射，而后者视为作用于 $\ell^1(X; E_1^{\mathcal{H}})$ 上的算子。

将 $\ell^1(X; E_1^{\mathcal{H}})$ 识别为 $\ell^1(X \times \mathbb{N}; \mathcal{H})$，并将 $\ell^2_n \subseteq \mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ 视为由前 n 个标准基向量张成的子空间，其正交投影为 $P_{\ell^2_n} : \mathcal{H} \to \ell^2_n$。选取 X 中互不相同的点 $x_1, x_2, \ldots$，对于每个 $n \geq 1$，定义 $\sigma_n : \ell^2_n \to \ell^1(X \times \mathbb{N}; \mathcal{H})$ 和 $\pi_n : \ell^1(X \times \mathbb{N}; \mathcal{H}) \to \ell^2_n$ 为

$$(\sigma_n s)(x,i) = \begin{cases} s, & \text{if } (x,i) = (x_n, 1), \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \qquad \pi_n(z) = P_{\ell^2_n}\big(z(x_n, 1)\big),$$

对于 $s \in \ell^2_n$ 和 $z \in \ell^1(X \times \mathbb{N}; \mathcal{H})$。于是 $T = \sum_{n \geq 1} \sigma_n\pi_n \in B^1_{\mathrm{mix}}(X)$ 的范数为 1，并且满足$\pi_n T\sigma_n = \mathrm{Id}_{\ell^2_n}$，对所有 $n \geq 1$ 均成立。

由 (6) 可知，存在 $A_1, \ldots, A_m \in RLQ$ 和 $B_1, \ldots, B_m \in QLR$，使得 $\|T - \sum_{j=1}^m A_jB_j\| \leq 1/2$。将每个 $A_jB_j = \Psi_j\Phi_j$ 分别通过 $\ell^1(X; E_1)$ 分解，并取 ℓ^1-直和 $\ell^1(I)$（由 m 个 $\ell^1(X; E_1)$ 的副本构成）$= \ell^1(X \times \mathbb{N})$，定义 $U : \ell^1(X; E_1^{\mathcal{H}}) \to \ell^1(I)$ 和 $V : \ell^1(I) \to \ell^1(X; E_1^{\mathcal{H}})$ 为

$$Uz = (\Phi_1 z, \ldots, \Phi_m z), \qquad V(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{j=1}^m \Psi_j z_j.$$

于是 $VU = \sum_{j=1}^m A_jB_j$，并且对于每个 $n \geq 1$，

$$\|(\pi_n V)(U\sigma_n) - \mathrm{Id}_{\ell^2_n}\| = \|\pi_n(VU - T)\sigma_n\| \leq \frac{1}{2}, \qquad \|U\sigma_n\|\,\|\pi_n V\| \leq \|U\|\,\|V\|.$$

因此， ℓ^2_n C-因子的恒等算子可通过 ℓ^1 进行分解，对于每个 $n \geq 1$均成立，其中 $C = \|U\|\,\|V\|$，且与 n 的选择无关。□

注 3.3. 引理 3.1 和命题 3.2 中的论证对于所有 $1 < p < \infty$ 仍然成立，只需将 ℓ^1 和 E_1 替换为 ℓ^p 和 E_p。这表明，当 X 为无限集时，B^p st(X) 和 B^p mix(X) Morita等价的必要条件是 $\mathrm{Id}_{\ell^2_n}$ 能够一致地分解经由 ℓ^p。对于$1 < p < \infty$，引理 2.1 表明这一必要条件确实满足。

下面的命题表明，引理 2.1 不能推广到 $p = 1$。

命题 3.4. 存在一个通用常数 $c > 0$，使得对于每个 $n \geq 1$ 和 $C > 0$，若 ℓ^2_n C 的恒等算子可经由 ℓ^1 分解，则 $C \geq c\sqrt{n}$。

证明。设 I、U 和 V 如 C-分解的定义所述。将 V 替换为 $(VU)^{-1}V$ 后，我们可以假设 $VU = \mathrm{Id}_{\ell^2_n}$ 且 $\|U\|\,\|V\| \leq 2C$。对每个 $i \in I$，选取 a_i、$b_i \in \ell^2_n$，使得对所有 $x \in \ell^2_n$，$(Ux)_i = \langle x, a_i\rangle$，并且 b_i 是 V 对 $\ell^1(I)$ 的第 i 个标准基向量的像。于是 $\|b_i\| \leq \|V\|$，且对任意 $x \in \ell^2_n$,

$$\sum_{i\in I} |\langle x, a_i\rangle| \leq \|U\|\,\|x\|, \qquad x = \sum_{i\in I} \langle x, a_i\rangle\, b_i. \tag{7}$$

令 $e_1, \ldots\ldots, e_n$ 为 ℓ^2_n 的标准正交基。对每个 $\omega \in \Omega_n = \{-1, 1\}^n$，向量 $x_\omega := \sum_{k=1}^n \varepsilon_k(\omega) e_k$ 的范数为 $\sqrt{n}$，并且对每个 $a = (a_1, \ldots\ldots, a_n) \in \ell^2_n$，$\langle x_\omega, a\rangle = \sum_{k=1}^n a_k \varepsilon_k(\omega)$。由 Khintchine 不等式 (2) 在 $s = 1$ 时的下界可得

$$2^{-n} \sum_{\omega\in\Omega_n} |\langle x_\omega, a\rangle| = \left\| \sum_{k=1}^n \overline{a_k}\varepsilon_k \right\|_{L^1(\Omega_n)} \geq \kappa_1 \|a\|_{\ell^2_n}.$$

将不等式 (7) 应用于 $x = x_\omega$ 并对 $\omega \in \Omega_n$ 取平均，得到

$$\kappa_1 \sum_{i\in I} \|a_i\| \leq 2^{-n} \sum_{\omega\in\Omega_n} \sum_{i\in I} |\langle x_\omega, a_i\rangle| \leq \|U\|\sqrt{n}.$$

将 (7) 中关于 $x = e_k$ 的展开式代入，并对 $\sum_{i\in I} \|b_i\| \leq \|V\|$取上确界，得到

$$\begin{aligned} n = \sum_{k=1}^n \langle e_k, e_k\rangle &= \sum_{k=1}^n \sum_{i\in I} \langle e_k, a_i\rangle\langle b_i, e_k\rangle = \sum_{i\in I} \langle b_i, a_i\rangle \\ &\leq \Big(\sup_{i\in I} \|b_i\|\Big) \sum_{i\in I} \|a_i\| \leq \|V\| \sum_{i\in I} \|a_i\| \leq \frac{1}{\kappa_1}\,\|U\|\,\|V\|\sqrt{n} \leq \frac{2C}{\kappa_1}\sqrt{n}, \end{aligned}$$

由此 $C \geq (\kappa_1/2)\sqrt{n}$。这里，上面的第一个 $\leq$ 本质上依赖于 $p = 1$。 □

现在证明定理1.1的第 (2) 部分。

定理的证明*1.1*（*2*）。根据命题3.2 和3.4，不存在一个带有幂等元Q、$R \in \mathcal{M}$（L）的巴拿赫代数L 满足命题3.2的假设。特别地，取$L = B^1_{\mathrm{mix}}$（X）并取$R = 1$，可知B^1_{st}（X）不同构于B^1_{mix}（X）的任何满乘子角。

如果$B^1_{\mathrm{st}}(X)$和$B^1_{\mathrm{mix}}(X)$按照 Lafforgue [Laf02] 和 Paravicini[Par09] 的意义（见 [Chu25，定义 2.12]）是 Morita等价的，那么相应的连接班纳赫代数

$$L = \begin{pmatrix} B^1_{\mathrm{st}}(X) & E^{>} \\ E^{<} & B^1_{\mathrm{mix}}(X) \end{pmatrix}$$

将具有对角矩阵单位Q 和$R = 1 - Q$，并在 $\mathcal{M}(L)$ 中满足$QLQ = B^1_{\mathrm{st}}(X)$、$RLR = B^1_{\mathrm{mix}}(X)$，且$(LQL) = L$张成空间。这将导致矛盾。□

注 3.5。 定理 1.1 (2) 无法确定 ι 是否在 K-理论上诱导$p = 1$的同构，该问题仍未解决。

参考文献

[AK16] Fernando Albiac 和 Nigel J. Kalton。《班纳赫空间理论专题》，《数学研究生教材》第 233 卷。施普林格出版社， [Cham], 第二版，2016 年。Gilles Godefory 作序。[Chu25] Yeong Chyuan Chung。两种 ℓ^p Roe 型代数的 Morita 等价。《非交换几何杂志》，19(3):1069–1088，2025 年。[CL18] Yeong Chyuan Chung 和 Kang Li。ℓ^p Roe 型代数的刚性。《伦敦数学学会会报》，50(6):1056–1070，2018 年。[CL21] Yeong Chyuan Chung 和 Kang Li。ℓ^p 一致 Roe 代数的结构与 K理论。《非交换几何杂志》，15(2):581–614，2021 年。[CN23] Yeong Chyuan Chung 和 Piotr W. Nowak。扩张图是粗 Baum-Connes 猜想的反例。《非交换几何杂志》，17(1):305–331，2023 年。ℓ^pGPT[Karlheinz Gr24] ochenig、Christine Pfeuffer 和 Joachim Toft。矩阵拟班纳赫代数及伪微分算子的谱不变性。《数学论坛》，36(5):1201–1224，2024 年。¨Gra[Loukas Grafakos。《经典傅里叶分析》，《数学研究生教材》第 249 卷。施普林格出版社，纽约，第三版，2014 年。14] HR[Nigel Higson 和 John Roe。论粗 Baum-Connes 猜想。载于《诺维科夫猜想、指标定理与刚性》，第 2 卷（奥伯沃尔法赫，1993），《伦敦数学学会讲义丛书》第 227 卷，第 227–254 页。剑桥大学出版社，剑桥，1995 年。95] Laf[Vincent Lafforgue。班纳赫代数的双变 K理论与 Baum-Connes 猜想。《数学发明》，149(1):1–95，2002 年。02] LT´Joram Lindenstrauss 和 Lior Tzafriri。《经典班纳赫空间 I》，《数学及其交叉领域成果》第 92 卷。施普林格出版社，柏林—纽约，1977 年。序列空间。`Par[Walther Paravicini。班纳赫代数的 Morita 等价与 KK-理论。《Jussieu 数学研究所杂志》，8(3):565–593，2009 年。77] Par /Walther Paravicini。班纳赫代数的 kk-理论 I：非等变情形。《泛函分析杂志》，268(10):3108–3161，2015 年。/Roe[John Roe。完备黎曼流形上的粗上同调与指标理论。《美国数学学会回忆录》，104(497):x09] ，1993 年。[WXYZ15] Jinmin Wang、Zhizhang Xie、Guoliang Yu 和 Bo Zhu。[-可粗嵌入空间的粗 Baum–Connes 猜想。预印本，arXiv:2411.15070，2025 年。93] WY+90Rufus Willett 和 Guoliang Yu。《高指标理论》，《剑桥高等数学研究》第 189 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2020 年。

[Yu97] Guoliang Yu。局部化代数与粗 Baum-Connes 猜想。K理论，11(4):307–318，1997 年。[Yu00] Guoliang Yu。关于可一致嵌入希尔伯特空间的空间的粗 Baum-Connes 猜想。《数学发明》，139(1):201–240，2000 年。[ZZ21] Jianguo Zhang 和 Dapeng Zhou。L^p 粗 Baum-Connes 猜想以及K理论在L^p Roe代数中的应用。《非交换几何杂志》，15(4):1285–1322，2021 年。

(L. Guo) 隆德大学数学科学中心，邮政信箱 118，隆德，22100，瑞典

电子邮箱: liang.guo@math.lth.se

(Z. Luo) 嘉兴大学数据科学学院，嘉兴，浙江，中华人民共和国

电子邮箱: zluo@zjxu.edu.cn

(Q.Wang) 华东师范大学数学科学学院算子代数研究中心，上海，200241，中华人民共和国。

电子邮件地址：qwang@math.ecnu.edu.cn