arXiv:2611.29554v1 [math.LO] 22 Nov 2026

关于 p进闭域中可定义可和根及 dfg-fsg 分解的一致性

Zhentao Zhang

摘要

对于 p进闭域上群的可定义族，我们证明，当素数 p 和族参数变化时，可定义可和根及其 dfg-fsg 分解均可一致地定义。

1 引言

对于在 p 进闭域中可定义的群，已有两项结构分解结果。 [19], Yao 和 Zhang 证明了可定义可和根的存在性，并得到了相应的可定义可和–半单分解。 [16], Pillay、Yao 和 Zhang 建立了可定义可和群的 dfg–fsg 分解。本文研究这些结果的一致版本，其中素数和固定可定义族的参数均可变化。

如果一个可定义群的可定义子集上存在一个在左平移下不变的有限可加概率测度，那么该群称为可定义可和的。在 NIP 理论中，一个可定义群可定义可和，当且仅当它拥有一个全局强 f-泛型型 [6, 推论 5.10]。两个重要的特例是 dfg 群和 fsg 群。若某个关于该群的全局完备型的每个左平移都可在某个共同的小模型上定义，则称该可定义群具有*dfg* （可定义 f-泛型）。若某个全局完备型的每个左平移都在某个共同的小模型中有限可满足，则称该群具有*fsg* （有限可满足泛型）。在 p 进闭域上，fsg 等价于可定义紧致性 [12]。经过转至一个有限指标子群后，dfg 群存在到分裂可解代数群的可定义同态，其核有限且像的指数有限 [16, 定理 5.6]。

每个可定义可和的群 G 在 p-进闭域上都存在一个可定义的正合序列

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow C \longrightarrow 1$$

其中 H 具有有限生成可定义群，且 C 具有 fsg [16, 定理 8.8]。这样的序列称为 *dfg–fsg* 分解，其核 H 是 G的正规 *dfg* 分量 。

更一般地，如果可定义 dfg 子群 $H \leq G$ 在 G的所有可定义 dfg 子群中具有最大维数，则称其为 G 的*dfg* 分支。这等价于它在这类子群中具有几乎包含意义下的极大性，也等价于齐性空间 G/H [16, 具有可定义紧致性（定理 6.4 和 8.18]）。若 $H_1 \cap H_2$ 是 H_1 的有限指数子群，则称 H_1 几乎包含于 H_2。当 G 可定义可和时，其 dfg 分支两两可公度[16, （推论 8.9], ），而正规分支恰好是 dfg–fsg 分解中出现的核。

每个在 p-进闭域 M 中可定义的群 G 都有一个最大的可定义正规可定义可和子群，称为其可定义可和根基，记作 $D(G)$ [19, 命题 3.117]。根基 $D(G)$是唯一确定的，且可在与 G相同的参数上定义。它给出了 G的可定义可和–半单分解，由一个可定义正合列给出

$$1 \longrightarrow D(G) \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} S \longrightarrow 1$$

其中 S 有一个有限指数可定义子群，该子群与某个连通半单代数群$\mathbf{S}(M)$的有限指数子群可定义同构；该代数群$\mathbf{S}$ 定义在 M [19, 上（推论 3.110]）。特别地，当 G 可定义可和时， S 是平凡的。

上述结果在每个固定的 p-进闭理论中均成立，在该理论中，可定义可和性也具有族中可定义性（命题 2.411]）。我们研究这些构造在素数变化时的一致性。现在更精确地陈述我们的主要结果。

令 $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$和 $p\mathrm{CF}$ 为每个素数 p 下 L 中 $\mathbb{Q}_p$ 的理论。固定公式

$$\gamma(x; w), \qquad \mu(x, y, z; w), \qquad \iota(x, y; w)$$

其中 γ 指定底集，而 μ和 ι 分别指定乘法和求逆。令 $\mathrm{Grp}(w)$ 表示这些数据定义一个群。对于$M = M_p \models p\mathrm{CF}$，若元组 a 属于 M，则称其为可容许，如果 $M \models \mathrm{Grp}(a)$。我们将底集为 $\gamma(M; a)$ 的相应群记为 $G_{M,\ a}$。

定理 A。存在一个 L-公式 $\delta_D(x;\ w)$，使得对每个素数 p，每个 $M_p \models p\mathrm{CF}$ 以及每个 M_p 中的可容许 a，都有 $\delta_D(M_p;\ a) = D(G_{M_p,\ a})$。

注意， G 可定义可和，当且仅当 $G = D(G)$。作为推论，对于给定的$\gamma(x; w)$、 $\mu(x,\ y,\ z; w)$ 和 $\iota(x,\ y; w)$，存在一个 L-公式 $\mathrm{Grp}^*(w) := \mathrm{Grp}(w) \wedge \forall x(\gamma(x; w) \leftrightarrow \delta_D(x;\ w))$，表示这些数据定义一个可定义可和群。为方便起见，若元组 a 属于 $M = M_p \models p\mathrm{CF}$，且满足 $M \models \mathrm{Grp}^*(a)$，则称其为强可容许。

此外，我们可以将相应的可定义可和的–半单分解统一实现为可定义的正合列。

定理 B。存在一些 L-公式，使得对于每个素数 p、每个 $M_p \models p\mathrm{CF}$，以及每个来自 M_p 的可容许 a，都存在一个附加参数元组 b，使这些公式定义一个可定义可和的–半单分解

$$1 \longrightarrow D(G_{M_p,a}) \longrightarrow G_{M_p,a} \xrightarrow{\pi_{a,b}} S_{M_p,a,b} \longrightarrow 1.$$

此外，附加参数 b 仅用于指定 $G_{M_p,\ a}$ 上的可定义李图册。特别地，如果给定的族由 一般线性群$_m$ 的可定义子群组成，其中 m 固定，那么这些正合列可以仅在 a 上一致地定义。

对于可定义可和群的 dfg-fsg 分解，我们有

定理 C。 存在一个 L-公式 $\delta_H(x;\ w)$，使得 $\delta_H(M_p;\ a)$ 是 $G_{M_p,\ a}$ 的正规 *dfg* 分量；对于每个素数 p、 $M_p \models p\mathrm{CF}$，以及 M_p 中强可容许的 a，上述结论均成立。

相应的 dfg-fsg 分解也可以一致地实现。

定理 D。 存在一些 L-公式，使得对于每个素数 p、每个 $M_p \models p\mathrm{CF}$，以及来自 M_p 的每个强可容许 a，都存在一个附加参数元组 b，使这些公式定义一个 *dfg-fsg* 分解

$$1 \longrightarrow K_{M_p,a} \longrightarrow G_{M_p,a} \xrightarrow{\rho_{a,b}} C_{M_p,a,b} \longrightarrow 1.$$

此外，若给定的族由某个固定 m 的子群组成，且这些子群属于一般线性群$_m$，则该 *dfg-fsg* 分解可以仅用 a 一致地定义，无需附加参数。

第 2 节回顾可定义紧致性，并对该族中各群上的李群结构给出一致描述。在第 3 节中，我们利用李代数半单商上的伴随作用证明定理 A 和 B。第 4 节在伪局部域中发展增长链，并为扎里斯基闭包给出一致编码。在第 5 节中，我们利用这些结果一致地选取正规 dfg 分量，并构造定理 C 和 D 所需的商映射。

语言 L 以及定义该族的公式在全文中均保持不变。对于每个素数 p，我们记 $M = M_p \models p\mathrm{CF}$。除非另有说明，可定义性允许使用所考察域中的参数。

我们用粗体字母表示代数群。对于域M上的代数群$\mathbf{G}$，我们用 $\mathbf{G}(M)$ 表示其 M-有理点群，并用 $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ 表示单位元处的 M-有理扎里斯基切空间，该空间带有其自然的李括号。对于 $X \subseteq M^n$，我们用 $\mathrm{Zcl}(X)$ 表示其在代数闭包上的仿射 n 空间中的扎里斯基闭包。所有李代数都是基域上的有限维空间，所有李代数同态和导子均在该域上线性。

2 一致的李群结构

我们回顾可定义紧致性，并研究给定族中可定义李群结构的一致性。

2.1 赋值与可定义紧致性

根据 [4], , 存在一个无参数的 L 公式 $o(z)$, 它在每个 $M = M_p \models p\mathrm{CF}$ 中一致地定义赋值环$\mathcal{O}_M$, 其中参数为 p。因此, $\mathcal{O}_M$ 的极大理想可一致地定义为

$$\mathfrak{m}(z) := (z = 0) \vee \big(o(z) \wedge \exists y\,(zy = 1 \wedge \neg o(y))\big).$$

我们记

$$v : M^\times \longrightarrow \Gamma_M$$

为赋值, 其中 $v(0) = \infty$。绝对值取值于相应的乘法有序赋值群, 且

$$\|x\| = \max_i |x_i|$$

适用于元组 x , 其中 M。除非另有说明, 仿射空间均赋予赋值拓扑。绝对值之间的比较以及相应的邻域条件, 都可以在 L 中用 o表示。

若对于某个 $c \in M^\times$, $X \subseteq M^r$满足 $cX \subseteq \mathcal{O}_M^r$, 则称可定义集为有界。若每个可定义的向下有向非空闭子集族都有非空交集, 则称可定义拓扑空间为可定义紧。

对于赋有诱导拓扑的仿射空间中的可定义子集, 可定义紧致性等价于闭且有界 [16, 事实 2.4]。连续的可定义像、闭可定义子空间、有限乘积和有限并都保持可定义紧致性 [9]。特别地, 可定义紧可定义群的有限指数扩张仍然可定义紧。

对于矩阵群, 我们使用闭嵌入

$$\mathrm{GL}_d(M) \longrightarrow M^{d^2+1} : g \longmapsto \big(g, \det(g)^{-1}\big).$$

因此, $\mathrm{GL}_d(M)$中的有界性包括矩阵元素有界以及逆行列式有界。

每个可定义群都带有典范可定义群拓扑 [7, 9],, 我们将在下一小节中使用可定义李图册对其进行描述。这种拓扑可能不同于由该群在仿射空间中的某个给定表示所诱导的拓扑。群的可定义紧致性始终是相对于其群拓扑而言的。

2.2 可定义李图册

我们回顾 [2, 定义 5.1–5.5]中的弱李图册。下文的定义和一阶描述也适用于任何特征零的非平凡赋值域, 只要其中 o 定义了赋值环。

可定义映射 $r\colon\ U \longrightarrow M^d$带有 $U \subseteq M^l$, 若其为局部同胚, 则称其为拓扑 ´*étale*, 其中 U 带有诱导拓扑。群 G 上的有限弱图册由有限个可定义单射组成

$$\phi_j : U_j \longrightarrow G$$

其像覆盖 G，以及可定义的拓扑 ´étale 映射

$$r_j : U_j \longrightarrow M^d.$$

我们要求重叠域

$$U_{ij} := \phi_i^{-1}\big(\phi_j(U_j)\big)$$

在 U_i 中是开集。

利用 r_j 的局部逆映射，我们用域坐标表示过渡映射和群运算。如果这些映射严格可微，并满足 [2, 定义 3.11] 的 T_3 条件，那么该图册就是一个弱严格可微 T_3 李图册 。这些坐标图在 G 上诱导出拓扑。

一个图册模板 $\mathcal{T}$是由有限个 L-公式构成的集合，旨在定义坐标图域 U_j 以及 r_j 和 ϕ_j的图像。这些公式包含参数变量 (w, v)，其中 w 由原有的群族参数组成，而 v由额外的图册参数组成。代入元组 (a, b)后，可得到 $G_{M,a}$ 的候选图册数据，其中 b 的长度由 $\mathcal{T}$ 固定。

引理 1. 对于每个图册模板 $\mathcal{T}$，都存在一个 L-公式 $\mathrm{Cert}_{\mathcal{T}}(w, v)$，使得对于每个素数 p、每个 $M = M_p \models p\mathrm{CF}$ 以及来自 M、分别对应于 w、v 的所有元组 a, b，条件

$$M \models \mathrm{Cert}_{\mathcal{T}}(a, b)$$

成立当且仅当 a 是可容许的，并且由 $\mathcal{T}$指定、带参数 (a, b) 的数据在$G_{M,a}$上构成一个弱严格可微的 T_3 李图册。

同一公式表达了每个非平凡赋值的特征零域中的相应条件，其中 o定义赋值环。

证明。 对于指定的图像，函数性、单射性、覆盖性、相对开性以及局部同胚条件都是一阶的。

对于仿射空间开子集之间的映射 f，在z 处严格可微且导数为 A，可由以下条件表达：对于每个 $\epsilon \neq 0$，都存在$\eta \neq 0$ 使得

$$\|f(u) - f(v) - A(u - v)\| \leq |\epsilon| \, \|u - v\|$$

只要 $\|u - z\| < |\eta|$ 且 $\|v - z\| < |\eta|$。

T_3 条件也是一阶的。在局部，它要求存在三次泰勒展开，并且余项界为四阶且在展开中心上是一致的。次数为 r 的系数本身必须在给定点处允许用次数为 $3 - r$ 的多项式逼近。所有次数和维数都是固定的，因此系数和界都是由域元素组成的有限元组。

泰勒系数是唯一确定的：两个候选展开式之差可以限制在线上，此时将其最低次非零项与余项界进行比较，即可得到唯一性。因此，系数函数具有可定义图像，可以将其代入前述条件。

r_j 的局部逆分支可通过在足够小的邻域上反转其图像来描述。将这些描述应用于过渡映射、乘法和求逆，即可得到 $\mathsf{Cert}_{\mathcal{T}}$。

□

我们简要回顾相应的李代数。令 $e = 1_G$ 为G的单位元，并设

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) := T_e G.$$

包含 e 的坐标图将 $\mathfrak{g}$ 与 M^d相识别。对于 $g \in G$，令 $c_g : G \to G$ 为共轭映射 $c_g(x) = gxg^{-1}$。伴随作用定义为 $\mathsf{Ad}(g) := \mathsf{d}(c_g)_e$。由链式法则可得

$$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_M(\mathfrak{g})$$

一个可定义同态。它在 e处的导数给出李括号

$$[X, Y] = \mathrm{d}(\mathrm{Ad})_e(X)(Y).$$

这是一个李括号 [2, 命题 6.16 和 6.19]。

对于固定的图册模板 $\mathcal{T}$，这些构造可由 $(a,\ b)$ 一致地定义。事实上，选取包含$G = G_{M,a}$的单位元 $e = 1_{G_{M,\ a}}$的第一个坐标图。 e 在该坐标图中的原像是唯一确定的，而导数和泰勒系数则由前述证明中使用的条件定义。因此， $\mathfrak{g}$ 的结构常数和 Ad 矩阵无需额外参数。

可定义子群是闭的，并且带有由环境群 [11, 诱导的拓扑（事实 2.12]）。可定义同态是可微的，而满射同态是浸没，因而是开映射。因此，群商的任何可定义实现上的群拓扑都与商拓扑一致。

我们还记录一个关于线性群的标准事实。设 $G \leq$ 一般线性群$_d(M)$，并令$\mathbf{G}$ 为其扎里斯基闭包。由 [13], 维数 $G =$ 维数$\mathbf{G}(M)$，可知 G 在$\mathbf{G}(M)$中有非空内部。因此 G是$\mathbf{G}(M)$中的开集，并且李(G) =李$(\mathbf{G})$。

2.3 素数间的一致性

现在我们证明，对于给定的族，有限多个图册模板就已足够，并且对所有素数一致成立。

引理 2 (李图册的一致存在性)。 存在有限多个图册模板 $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_s$，使得对于每个素数 p、每个 $M = M_p \models p\,\mathrm{CF}$ 以及每个来自 M 的可容许元组 a，

$$M \models \bigvee_{i=1}^{s} \exists v_i\, \mathrm{Cert}_{\mathcal{T}_i}(a, v_i).$$

证明。 将所有图册模板枚举为 $\mathcal{T}_1$、$\mathcal{T}_2$、.....。对于每个固定素数 p，每个可定义群都具有一个可定义李图册 [7]。因此，每个可容许元组中的

pCF 的每个模型都具有一个由这些模板之一表示的图册。根据紧致性，对于这个固定理论的所有模型，一个有限的初始片段就足够了。

假设不存在关于 p 能够统一适用的有限初始段。固定素数结论允许我们选取 $p_j > j$、模型 M_{p_j} 和可容许元组 a_j，使得对于 $i \le j$，

$$M_{p_j} \models \neg\exists v_i \,\mathrm{Cert}_{\mathcal{T}_i}(a_j, v_i).$$

设 $N = \prod_j M_{p_j}/\mathcal{U}$ 是一个非主超积，且 $a = (a_j)/\mathcal{U}$。则 $N \models \mathsf{Grp}(a)$，但对于每个 i，

$$N \models \neg\exists v_i \,\mathrm{Cert}_{\mathcal{T}_i}(a, v_i).$$

赋予 N 由 o 定义的赋值环。由于 $p_j \to \infty$，这是一个非平凡赋值的等特征零亨泽尔域。其纯赋值域理论是 1-h-极小的 [5, 推论 6.26]。在充分饱和的初等扩张 N' 中，群 $G_{N',\,a}$ 因此具有有限弱严格可微 T_3 李图册 [2,命题 64]。

由于赋值环由 o 定义，图册数据由带有限个域参数的 L-公式给出。因此，它们由某个模板 $\mathcal{T}_i$ 和来自 N' 的元组 b 表示，于是 $N' \models \mathsf{Cert}\tau_i(a,\ b)$。由初等性可得 $N \models \exists v_i\, \mathsf{Cert}\tau_i(a,\ v_i)$，矛盾。 □

由于图册模板的列表是有限的，我们可以使用一个固定长度的单一参数元组 b。其第一个坐标记录所选模板，其余坐标给出模板的参数，未使用的坐标设为零。于是，相应的李代数和伴随作用可在 $(a,\ b)$ 上一致地定义。

3 可定义可和根基的一致性

我们证明根基的一致可定义性，并构造相应的可定义可和–半单分解。

回顾一下，可定义可和性在可定义同态像、扩张、有限指数子群和有限扩张下保持不变。此外，有限群、可解群和可定义紧致可定义群都是可定义可和的[8, 12, 16]。

3.1 有界共轭

设 $A \le \mathrm{GL}_d(M)$ 是一个可定义子群，并设

$$\mathrm{BC}(A) = \{u \in A : \{huh^{-1} : h \in A\} \text{ is bounded}\}.$$

由于行列式在每个共轭类上都是常数，$\mathsf{BC}(A)$ 定义为

$$u \in A \ \wedge\ \exists c \neq 0\ \forall h \in A \bigwedge_{1 \le i,j \le d} o\big(c(huh^{-1})_{ij}\big).$$

因此，在矩阵群的可定义族中，子群 BC(A) 是一致的 L-可定义的，只使用定义 A 的参数。共轭类的有界性在固定的基变换下保持不变。

我们回顾关于半单群的以下事实。设**S** 是一个连通M-单代数群。如果**S** 是 M-各向同性的，那么由其 M-定义的抛物子群的幺幂根基的 M-点生成的子群**S**(M)$^+$ 是可定义的，且在**S**(M)中具有有限指数 [16, 推论 3.15(i)], ，因此是 Zariski 稠密的。它是抽象单的 [16, 第 3 节2] ，且不是可定义可和的 [16, 引理 4.3]。在这种情况下，**S**(M)的每个不是可定义紧的可定义开子群都包含**S**(M)$^+$ [16, 推论 3.15(ii)]。如果**S** 是M-各向异性的，那么**S**(M)是可定义紧的 [16, 推论 2.17]。

对于有限维半单 M-李代数 $\mathfrak{s}$，记 Aut($\mathfrak{s}$)为其代数自同构群，Int($\mathfrak{s}$)为其连通内自同构代数群。由于 $\mathfrak{s}$ 的每个导子都是内导子 [14, 第 I 章，定理 4.22],

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{s})) = \mathrm{Der}(\mathfrak{s}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{s}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Int}(\mathfrak{s})).$$

由于 Int($\mathfrak{s}$) 是 Aut($\mathfrak{s}$) 的连通代数子群，因此 Int($\mathfrak{s}$) =Aut($\mathfrak{s}$)$^\circ$ ，其中 $\circ$ 表示 Zariski 单位连通分支。

这个群是半单的，因为它的李代数同构于 $\mathfrak{s}$ [14, Chap- ter II, 命题 4.1]。此外，ad 将它在 $\mathfrak{s}$ 上的忠实作用识别为其伴随表示，因此其中心是平凡的。

引理 3. 设 $\mathfrak{s}$ 是有限维半单 M-李代数。设 $A \leq \mathrm{Aut}(\mathfrak{s})(M)$ 是满足 $\mathrm{Lie}(A) = \mathrm{ad}(\mathfrak{s})$ 的可定义子群。那么，$\mathrm{BC}(A)$ 是 A 的可定义紧正规子群，并且包含 A 的每个可定义正规可定义可和子群。

证明。设 **S** = Int($\mathfrak{s}$)，且 $A_0 = A \cap$ **S**(M)。由于 Aut($\mathfrak{s}$)/**S** 有限， A_0 是 A 中的正规有限指数子群。其李代数为 Lie(**S**)，因此 A_0 在**S**(M) 中是开子群。

半单群 **S** 是连通的几乎M-单代数子群 [16, Fact 2.12]的几乎直积。由于 **S** 的中心平凡，因此这是一个直积

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \times \cdots \times \mathbf{S}_r,$$

其中每个 $\mathbf{S}_i$ 都是连通的且为 M-单。

令 A_i 为 A_0 到 $\mathbf{S}_i(M)$ 的投影。那么 A_i 是 $\mathbf{S}_i(M)$ 的可定义开子群。

令 I 为指标 i 的集合，其中 A_i 不是可定义紧的；令J 为指标 i 的集合，其中 A_i 是可定义紧的。对于 $i \in I$，群$\mathbf{S}_i$是 M-各向异性的，且 P_i:=$\mathbf{S}_i(M)^+ \leq A_i$具有有限指数。我们通过包含映射，将 P_i视为**S**(M)的子群，其中它嵌入在第 i 个因子中。由于 A_0 在 **S**(M) 中是开集， $A_0 \cap P_i$ 在 P_i 中也是开集，因而非平凡。它在 P_i 中是正规子群，因为 $P_i \leq A_i$ 的每个元素都可提升为 A_0 中的一个元素，且该元素在第 i 个因子上诱导相同的共轭作用。由 P_i的单性可知， $A_0 \cap P_i = P_i$，因此 $P_i \leq A_0$。

Let

$$\mathbf{S}_I = \prod_{i\in I} \mathbf{S}_i \qquad \text{and} \qquad \mathbf{S}_J = \prod_{i\in J} \mathbf{S}_i.$$

A 的共轭作用置换因子$\mathbf{S}_i$ 及相应的子群 A_i，并保持可定义紧致性。因此，$\mathbf{S}_I$ 和 $\mathbf{S}_J$ 由 A归一化。

断言。 BC(A) $= C_A(\mathbf{S}_I(M))$ 在 Aut($\mathfrak{s}$)。

证明。设 $u \in$ BC(A) 且 $i \in I$。对于一个 M-可定义的一参数幺幂子群 $v : \mathbb{G}_a \longrightarrow \mathbf{S}_i$，有 $v(M) \subseteq P_i \subseteq A$。在作用于 $\mathfrak{s}$的表示中，$v(t)uv(t)^{-1}$ 的各项都是关于 t 的多项式，并且在 M上有界。非恒定多项式在 M上无界，因为当自变量的赋值充分负时，其首项占主导。因此，这些项都是常数。在 $t = 0$ 处取值可知，u 中心化 $v(M)$。这些一参数子群生成 Zariski稠密子群 P_i，因此 u中心化 $\mathbf{S}_I(M)$。

反过来，$C_A(\mathbf{S}_I(M))$ 在 A 中正规，因为 $\mathbf{S}_I(M)$ 被 A 归一化。直积 $\mathbf{S} = \mathbf{S}_I \times \mathbf{S}_J$ 以及 $Z(\mathbf{S})$ 的平凡性意味着$C_A(\mathbf{S}_I(M)) \cap A_0 = \mathbf{S}_J(M) \cap A_0$。由于 A_0在 $\mathbf{S}(M)$ 中是闭的，$C_A(\mathbf{S}_I(M)) \cap A_0$在 $\mathbf{S}_J(M)$ 中是闭的。因此它是一个可定义紧群的闭子群，所以它是可定义紧的。由于 A_0在 A中具有有限指数，$C_A(\mathbf{S}_I(M)) \cap A_0$在 $C_A(\mathbf{S}_I(M))$ 中具有有限指数。因此，$C_A(\mathbf{S}_I(M))$ 是可定义紧的。由正规性可知，它的每个元素的 A-共轭类都包含在该群中，因此有界。因此，$C_A(\mathbf{S}_I(M)) \subseteq$ BC(A)。 $\square_{\text{Claim}}$

令 $L \lhd A$ 为可定义可和子群。对于 $i \in I$，令 L_i 为 $L \cap A_0$ 到 $\mathbf{S}_i(M)$ 的投影。于是 $L_i \lhd A_i$ 是可定义可和的。由于 P_i 在 A_i 中具有有限指数，子群 $L_i \cap P_i$ 是可定义可和的。由于 P_i 是单群且不是可定义可和的，$L_i \cap P_i$ 是平凡的。由于 P_i 在 $\mathbf{S}_i$ 中 Zariski 稠密，且中心化条件是 Zariski 闭的，我们有 $L_i = 1$。因此，$L \cap A_0 \leq \mathbf{S}_J(M)$。

对于 $u \in L$ 和 $s \in \prod_{i\in I} P_i$，换位子 $usu^{-1}s^{-1}$ 同时属于 $L \cap A_0 \leq \mathbf{S}_J(M)$ 和 $\mathbf{S}_I(M)$，因此是平凡的。由于 P_i 在 $\mathbf{S}_i$ 中 Zariski 稠密，且中心化条件是 Zariski 闭的，我们有 $L \leq C_A(\mathbf{S}_I(M))$ =BC(A)。

$\square$

3.2 根及其线性商

设 G 是 M 中可定义的群。我们将引理 3 应用于 G 在其李代数的半单商上的作用。这给出了 $D(G)$ 的描述，以及 $G/D(G)$ 的可定义线性实现。

Let

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G), \qquad \mathfrak{r} = \mathrm{rad}(\mathfrak{g}), \qquad \mathfrak{s} = \mathfrak{g}/\mathfrak{r}.$$

$\mathfrak{g}$的每个自同构都保持其可解根 $\mathfrak{r}$。因此，伴随作用诱导出一个可定义同态

$$\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{s})(M).$$

令 $A = \alpha(G)$。由于 $\alpha: G \to A$ 是浸没，且对于每个 $X \in \mathfrak{g}$，$\mathrm{d}\alpha_{1_G}(X) = \mathrm{ad}(X + \mathfrak{r})$，因此 $\mathrm{Lie}(A) = \mathrm{d}\alpha_{1_G}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{s})$。

命题 4. $D(G) = \alpha^{-1}(\mathrm{BC}(\alpha(G)))$。

证明。设 $L \lhd G$ 是任意一个可定义正规可定义可和子群。它的像 $\alpha(L)$ 是 $A := \alpha(G)$ 的可定义正规可定义可和子群。

于是由引理 3 得到 $\alpha(L) \leq \mathrm{BC}(A)$。因此，$L \leq \alpha^{-1}(\mathrm{BC}(A))$。

现在只需证明 $\alpha^{-1}(\mathrm{BC}(\alpha(G)))$ 是可定义可和的。由于 $\mathrm{BC}(\alpha(G))$ 是可定义可和的，只需证明 $\ker\alpha$ 是可定义可和的。

由引理 2.11 及其证明 [11,]，子群 $\ker \mathrm{Ad}$ 是有限扩张的交换群，因此是可定义可和的。令 $K = \mathrm{Ad}(G)$，并令 $\mathbf{K}$ 为其在 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 中的扎里斯基闭包。根据前一节中的线性群观察，我们有 $\mathrm{Lie}(\mathbf{K}) = \mathrm{Lie}(K) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$。$\mathfrak{g}$ 的每个自同构都保持 $\mathfrak{r}$，因此 $\mathbf{K}$ 在 $\mathfrak{s}$ 上的作用是一个代数同态。令 $\mathbf{H}$ 为其核。由于 $\mathfrak{s}$ 的中心平凡，我们有

$$\mathrm{Lie}(\mathbf{H}) = \{\mathrm{ad}(X) : X \in \mathfrak{g} \text{ with } [X, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{r}\} = \mathrm{ad}(\mathfrak{r}).$$

该李代数是可解的。因此，根据$\mathbf{H}^\circ$ 是可解的 [14, 第二章，推论 4。4]。于是，$K \cap \mathbf{H}(M)$ 是有限扩张的可解群，因而是可定义可和的。由于 $\ker\alpha$ 是 $K \cap \mathbf{H}(M)$ 通过 $\ker \mathrm{Ad}$ 的扩张，它是可定义可和的。 □

接下来，我们利用相同的伴随作用，将 $D(G)$ 的商实现为一个线性可定义群。

推论 5。 存在一个可定义满同态 $\pi: G \to S$ 到线性可定义群 S，其 $\ker \pi = D(G)$。群 S 不含非平凡可定义正规可定义可均质子群。

证明。令 $\mathfrak{c} = \mathrm{ad}^{-1}\big(\text{李}(\mathrm{BC}(A))\big)$ 和 $\mathfrak{q} = \mathfrak{s}/\mathfrak{c}$。

沿用引理 3 的证明中的记号，我们有 $\mathrm{BC}(A) = C_A(\mathbf{S}_I(M))$，且 $\mathrm{Lie}(\mathrm{BC}(A)) = \mathrm{Lie}(\mathbf{S}_J)$。因此，$\mathfrak{c}$ 是对应于 J 的单理想的 A- 不变和。自然投影 $\mathfrak{s} \to \mathfrak{q} = \mathfrak{s}/\mathfrak{c}$ 限制为从对应于 I 的互补和到 $\mathfrak{q}$ 上的一个 A-等变同构。由 $\mathbf{S}_I$ 的连通性以及 ad 的单射性，A 中的一个元素在 $\mathfrak{q}$ 上作用平凡，当且仅当它中心化$\mathbf{S}_I(M)$。因此，诱导作用

$$\pi: G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{q})(M)$$

其核为 $\ker \pi = \alpha^{-1}(C_A(\mathbf{S}_I(M))) = \alpha^{-1}(\mathrm{BC}(A)) = D(G)$。然后令 $S := \pi(G)$，它是一个线性可定义群。

令 $L \lhd S$ 为可定义可容正规子群。则 $\pi^{-1}(L)$ 是 G 的可定义正规可定义可均质子群，且包含 $D(G)$。于是 $\pi^{-1}(L) = D(G)$，因此 L 是平凡的。 □

3.3 一致公式与商映射

现在我们在给定族中统一表述前述构造。对于一个固定的图册模板，以下所有构造只使用群参数和图册参数。

引理 6。 设 $(\mathfrak{g}_t)_{t\in T}$ 是一个李代数族，其底层线性子空间 $\mathfrak{g}_t \subseteq M^d$ 及其李括号是一致可定义的，其中d 固定。则导出代数 $[\mathfrak{g}_t,\mathfrak{g}_t]$ 和可解根 $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}_t)$ 是一致可定义的。

此外，如果一个一致可定义的群作用族作用于 $\mathfrak{g}_t$ ，并保持一个一致可定义的理想族 $\mathfrak{i}_t$，那么在 $\mathfrak{g}_t/\mathfrak{i}_t$ 上的诱导作用可以在矩阵坐标中以一致且可定义的方式表示。所有这些构造只使用定义给定族和作用的参数。

证明。 由于 d 固定，将其化为简化行阶梯形的高斯消元只使用有界数量的域运算和零判定。因此，可以在 t上一致地选取 $\mathfrak{g}_t$的基。导出代数 $[\mathfrak{g}_t,\mathfrak{g}_t]$ 是这些基向量的李括号的张成空间，因而是一致可定义的。

对于 $X \in \mathfrak{g}_t$，属于 $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}_t)$ 等价于存在至多 d 个向量，其张成的空间是一个包含 X 的可解理想。理想条件以及包含 X 的条件都是一阶的。由于维数至多为 d，可解性等价于 d 阶导出代数为零。迭代进行括号张成构造 d 次，即可一致地表达这一条件。因此，对张成向量进行存在量化，便可一致地定义 $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}_t)$。

对于最后一个断言，在所选坐标中进行行化简，可得到 $\mathfrak{g}_t/\mathfrak{i}_t$ 的一致可定义的基。诱导矩阵的各项是这些基向量在给定作用下的像的唯一确定坐标。因此，仅使用给定参数即可一致地定义它们。

□

我们还需要对矩阵群的李代数作一致描述。回顾一下， $\mathfrak{m}(z)$ 表示定义赋值环的极大理想的固定 L 公式。

引理 7。设 $G \le$一般线性群$_d(M)$且 $X \in M^{d\times d}$。则 $X \in$李代数(G)当且仅当

$$\forall \epsilon \neq 0\ \exists t \neq 0\ \exists h \in G \left(\mathfrak{m}(t/\epsilon)\ \wedge \bigwedge_{1\le i,j\le d} \mathfrak{m}\left(\frac{(h - I - tX)_{ij}}{\epsilon t} \right) \right).$$

李括号为 $[X,Y] = XY - YX$。因此，矩阵群的李代数可以根据定义这些群的参数统一地 L-可定义。

证明。 这种等价性是通过 $(h - I)/t$ 的极限来刻画 $1_G = I$ 处切空间的通常表述，其中 $t \to 0$ 取遍非零值，且 $h \to I$ 在 G 中取值。所显示的公式利用 $\mathfrak{m}$ 表达了这一条件，因此对于 p 以及定义 G 的参数都是一致的。方括号表示通常的矩阵交换子。

□

现在我们证明定理 A。

定理 *A* 的证明。 固定一个图册模板 $\mathcal{T}$。对于每个 $M = M_p \models p\mathrm{CF}$ 以及满足条件的所有元组 a, b， $M \models \mathsf{Cert}_{\mathcal{T}}(a, b)$，令 $\mathfrak{g}_{a,b}$ 为图册给出的 $\mathsf{Lie}(G_{M,a})$ 的坐标实现。根据第 2.2 节，这个李代数及其伴随作用在 (a, b) 上是一致可定义的。引理 6 随后一致地定义

$$\mathfrak{r}_{a,b} = \mathrm{rad}(\mathfrak{g}_{a,b}) \qquad \text{and} \qquad \mathfrak{s}_{a,b} = \mathfrak{g}_{a,b}/\mathfrak{r}_{a,b}$$

以及诱导同态

$$\alpha_{a,b} : G_{M,a} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{s}_{a,b})(M).$$

由于有界共轭是一致 L可定义的，因此存在一个 L-公式$P_{\mathcal{T}}(x;\, w, v)$，使得 $P_{\mathcal{T}}(x;\, a, b)$ 定义

$$\alpha_{a,b}^{-1}\big(\mathrm{BC}(\alpha_{a,b}(G_{M,a}))\big)$$

在每个有效实例中。根据命题 4，这个子群是 $D(G_{M,a})$。

令 $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_s$ 为引理 2 给出的有限列表。定义

$$\delta_D(x; w) := \gamma(x; w) \ \wedge \bigvee_{i=1}^{s} \exists v_i \left(\mathrm{Cert}_{\mathcal{T}_i}(w, v_i) \wedge P_{\mathcal{T}_i}(x; w, v_i)\right).$$

每个可容许的 a 都具有该列表中的一个有效图册，而每个有效图册都给出相同的子群 $D(G_{M,a})$。因此，

$$\delta_D(M; a) = D(G_{M,a})$$

对于每个素数 p、每个 $M = M_p \models p\mathrm{CF}$ 以及每个可容许的 a。 □

因此，在 p 上，可定义可和性是可定义的。

推论 8。 对于给定的族，在所有素数 p 和所有 $M = M_p \models p\mathrm{CF}$ 下，使 $G_{M,a}$ 可定义可和的可容许参数 a 的集合是一致 L-可定义的。

证明。 由于 $G_{M,a}$ 可定义可和，当且仅当 $D(G_{M,a}) = G_{M,a}$，定理 A 表明所需集合由下式定义：

$$\mathrm{Grp}^*(w) := \mathrm{Grp}(w) \wedge \forall x\big(\gamma(x; w) \leftrightarrow \delta_D(x; w)\big).$$

□

现在我们证明定理 B。

定理 *B* 的证明。 取引理 2 中的一个图册模板 $\mathcal{T}$。令 $M = M_p \models p\mathrm{CF}$，且元组 a, b 满足 $M \models \mathsf{Cert}_{\mathcal{T}}(a, b)$。使用定理 A 的证明中构造的李代数 $\mathfrak{g}_{a,b}$, $\mathfrak{r}_{a,b}$,$\mathfrak{s}_{a,b}$ 以及同态 $\alpha_{a,b}$ 。

令 $A_{a,b}=\alpha_{a,b}(G_{M,a})$，并定义

$$\mathfrak{c}_{a,b}=\mathrm{ad}^{-1}\big(\mathrm{Lie}(\mathrm{BC}(A_{a,b}))\big)\qquad\text{and}\qquad\mathfrak{q}_{a,b}=\mathfrak{s}_{a,b}/\mathfrak{c}_{a,b}$$

其中 ad 是伴随同构 $\mathfrak{s}_{a,\ b}\to\mathfrak{ad}(\mathfrak{s}_{a,\ b})$。推论 5 的证明表明，$\mathfrak{c}_{a,\ b}$ 是一个 $A_{a,\ b}$-不变理想，并且 $G_{M,\ a}$在 $\mathfrak{q}_{a,\ b}$ 上的诱导作用的核为 $D(G_{M,\ a})$。

根据有界共轭的统一定义和引理 7，$\mathrm{Lie}(\mathrm{BC}(A_{a,\ b}))$ 在 $(a,\ \ b)$ 上是统一可定义的。因此，引理 6 给出了 $\mathfrak{q}_{a,\ b}$上的坐标以及在 $(a,\ \ b)$ 上统一定义的诱导作用矩阵。由于

$$\dim\mathfrak{q}_{a,b}\le\dim G_{M,a}\le n:=\text{the length of }x,$$

我们通过单位块扩展这些矩阵，从而得到到一般线性群$_n(M)$中的同态。

按照引理 2 之后的描述，将有限多个图册模板及其参数编码为固定长度的 atu-ple b ，即可得到统一可定义的同态

$$\pi_{a,b}:G_{M,a}\longrightarrow\mathrm{GL}_n(M).$$

设 $S_{M,\ a,\ b}=\pi_{a,\ b}(G_{M,\ a})$。我们得到可定义正合列

$$1\longrightarrow D(G_{M,a})\longrightarrow G_{M,a}\xrightarrow{\pi_{a,b}}S_{M,a,b}\longrightarrow 1.$$

这些目标及其群运算都可统一定义为矩阵群。根据推论 5，这些正是所需的可定义可和的-半单分解。

额外参数 b仅指定图册，因为所有后续构造都可以根据其李代数和伴随作用一致地定义。特别地，如果给定的族由 GL_m 的子群组成，其中 m固定，那么矩阵坐标使所有构造都可以仅在 a 上统一定义。

□

4 子群链与可定义商群

本节建立统一构造有限生成可定义群分支及其商所需的技术结果。我们首先用一阶条件描述子群链。接着，在适当的伪局部域中构造一维子群和可定义商群。最后，我们证明线性族存在一致次数界。

4.1 增长链

我们在 $M=M_p\models p$CF中工作。设 G 是一个可定义群。回顾一下，可定义子群是闭的，并带有诱导的群拓扑 [11, 事实 2.12]。

记 Γ为值群，使用赋值环公式 o进行解释。根据 [9, 命题 2.28]， G 存在一个 Γ-穷尽 $\{E_\lambda:\ \lambda\in\Gamma\}$，即在 1_G 处的一个邻域基，满足

- 每个 E_λ 都是可定义紧且开，并且 $E_\lambda^{-1} = E_\lambda$。
- $E_\lambda \subseteq E_{\lambda'}$ 当 $\lambda \leq \lambda'$。
- $\bigcup_{\lambda\in\Gamma} E_\lambda = G$。

对于固定的李图册模板，闭球构造使用群和图册参数上的固定 L-公式。因此，相应的 Γ-穷竭在族中一致可定义。

G 的子集若包含在某个 E_λ中，就称为有界。有界集的乘积和平移仍然有界。对于可定义子群 $H \leq V \leq G$，若对某个 $\lambda \in \Gamma$有 $V \subseteq E_\lambda H$，我们称商 V/H 有界。如果商V/H 是可定义的，那么它有界当且仅当它在商拓扑下可定义紧。回顾一下，当 $H \lhd V$ 且 V/H 是可定义群时，商拓扑与典范群拓扑一致。若完备类型中的每个可定义集都是无界的，则称该完备类型为无界。

定义 9。 G 中的增长链 是一个可定义子群链

$$\{1_G\} = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_r = H \leq G$$

满足 维数 $H_i = i$ 对于 $0 \leq i \leq r$，且 H_{i+1}/H_i 对于 $0 \leq i < r$是无界的。若 G/H 有界，则增长链是完备的。

回顾一下，有限生成可定义群在可定义集上的可定义作用的轨道空间是可定义的 [1, 定理 4。1]。

我们证明，增长链的每一项 H_i 都具有有限生成可定义群。$H_0 = \{1_G\}$的情形是直接的。设 H_i 具有有限生成可定义群。则 H_{i+1}/H_i 是可定义的。它是一维且无界的，因此根据有限生成可定义群 [9, 引理 6。10]，它具有有限生成可定义群。于是 H_{i+1} 是有限生成可定义群的扩张，因此它具有有限生成可定义群。

如果该链是完备的，则 G/H 是可定义且有界的，因而是可定义紧的。因此， H 是 G [16, 的一个 dfg 分支18]定理 8。$H \lhd G$此外，如果 G/H，则 G/H 具有 fsg。

下面的正规核构造将用于使增长链的端点在更大的群中正规。设增长链以H结束，并令 $H \lhd U \lhd V \leq G$ 为可定义子群，使得 U/H 有界。则 H 具有有限生成可定义群性质，而 U/H 具有 fsg 性质。正规核

$$\mathrm{Core}_V(H) = \bigcap_{v\in V} vHv^{-1}$$

在 H [16, 中具有有限指数。引理 8。将每个 H_i 替换为 $H_i \cap \mathrm{Core}_V(H)$，得到一个长度相同的增长链，其端点 $\mathrm{Core}_V(H)$ 在V中正规。此外， $U/\mathrm{Core}_V(H)$ 仍然有界，并且 H 的每个在 V 中正规的子群都包含于 $\mathrm{Core}_V(H)$ 中。

对于固定子群和穷竭公式，增长链条件以及所述的维数和有界性结论都是一阶的。以下的超积论证将使用这些表述。

4.2 伪局部域中的增长链

为建立跨素数的一致可定义性，我们研究伪局部域中所需的构造。令

$$N = \prod_{j} M_{p_j} / \mathcal{U}$$

其中， $\mathcal{U}$ 是 $\mathbb{N}$ 和 $p_j \to \infty$上的非主超滤子。那么， N 是一个剩余特征为零、剩余域为伪有限域且赋值群为 $\mathbb{Z}$-群的伪局部域。第4.1小节中确立的一阶条件在N中成立。对于仿射空间中的可定义子集，其维数与扎里斯基闭包 [18]的维数一致。特别地，零维可定义集是有限的。

对于 N上的可定义完全型 q以及一个初等扩张$N' \succeq N$，我们用 $q|N'$表示它到 N'的典范可定义扩张。

对于每个 $N' \succeq N$，令$k_{N'}$和$\Gamma_{N'}$分别表示其剩余域和赋值群。设 $F_{N'}$ 是 N' $(t^{\mathbb{Q}})$关于 t-进赋值的亨泽尔化。我们赋予 $F_{N'}$ 由该赋值与 N'上的给定赋值复合而成的赋值。其剩余域为 $k_{N'}$，赋值群为 $\mathbb{Q}$ lex $\Gamma_{N'} := \mathbb{Q} \oplus \Gamma_{N'}$，按字典序排列，其中 $\mathbb{Q}$坐标优先。由于 $\lambda \mapsto (0, \lambda)$在Presburger语言中是初等的，且剩余域嵌入是恒等映射，Ax-Kochen-Ershov原理推出 $N' \preceq F_{N'}$。

每个在 N' 上有界的元素 $a \in F_{N'}$（即 $\mathrm{tp}(a/N')$ 有界）都有唯一的标准部分 $\mathrm{st}(a) \in N'$，由其在粗 t-进赋值下的剩余给出。它满足

$$v\big(a - \mathrm{st}(a)\big) > \Gamma_{N'}.$$

此外， $F_{N'}$ 在 $N'(t)$ 上代数，因此 $F_{N'}$ 中每个有限元组在 N' 上的超越次数至多为一。

我们还需要环语言 L 中型的可定义性。我们将 $F_{N'}$ 视为辅助三类语言 L_t 中的结构，其中 [17], 配备粗 t-进赋值 v_t、剩余域 N'、赋值群 $\mathbb{Q}$ 和角分量

$$\mathrm{ac}_t(x) = \mathrm{res}_t\big(x t^{-v_t(x)}\big)$$

对 $x \neq 0$ 而言，其中 res_t 表示粗剩余映射。

引理 10。 对于每个 $N' \succeq N$ 以及来自 $F_{N'}$ 的每个有限元组 a ，型$\mathrm{tp}(a/N')$在 L 中可定义。

证明。 固定一个 L-公式 $\varphi(x; y)$。将 [17, 定理 4.1] 应用于 $F_{N'}$ 的 L_t-扩张后，我们将 $\varphi(a; b)$ 归约为关于 $v_t(P(a; b))$ 和 $\mathrm{ac}_t(P(a; b))$ 的条件，其中涉及有限多个多项式 $P(x; y)$，并且对来自 N' 的所有元组 b 一致成立。

a 中的相关单项式张成一个有限维的 N'-向量空间。连续消去首项得到一个基 e_1, ..., e_r，满足

$$v_t(e_1) < \cdots < v_t(e_r) \qquad \text{and} \qquad \mathrm{ac}_t(e_i) = 1.$$

于是，对于每个相关多项式 $P(x;\, y)$，存在多项式$c_{P,\, i}(y) \in N'[y]$，使得

$$P(a;b) = \sum_{i=1}^{r} c_{P,i}(b) e_i$$

对于来自 N' 的每个元组 b。由于 e_i 构成了关于 N' 的一组基，当且仅当所有$c_{P,\, i}(b)$都为零时，该表达式才为零。否则，若 i是满足$c_{P,\, i}(b) \neq 0$的第一个指数，则

$$v_t(P(a;b)) = v_t(e_i) \qquad \text{and} \qquad \mathrm{ac}_t(P(a;b)) = c_{P,i}(b).$$

在这有限多个情形中的每一种情形下，值群条件具有固定的真值，而剩余域条件则变为关于 N' 的 L-公式。因此，$\varphi(a;\, y)$ 等价于 y 中的一个 $L(N')$-公式。□

如上述证明中一样，我们将使用辅助语言 L_t 中的 [17, Theorem 4.1] 来分析 L-可定义集。除非另有说明，全文中的可定义性均指 L 。

在引理 14 的证明结束之前，令 $H \lhd V \leq G$ 表示关于 N 的可定义群，其中 $Q = V/H$ 无界，并令 $\pi\colon V \to Q$ 为商映射。我们在怪兽模型中固定一个针对 G 的 N-可定义 Γ-穷尽 $(E_\lambda)_\lambda$ ，并令 $E_\lambda = \pi(E_\lambda \cap V)$。我们赋予 Q 商拓扑。集合 E_λ 是闭且开的，在 1_Q处构成一组邻域基，并穷尽 Q。$\hat{}Q$ 的子集若包含于某个 E_λ 中，则称其为有界的。

引理 11. 存在一条代数曲线 C ，其定义于 N 之上；还存在一个集中于 $C \cap V$ 上的 N- 可定义完备型 p，使得 p 和 $q := \pi(p)$ 均无界。此外，对每个 $N' \succeq N$，型 $p|N'$和 $q|N'$分别是 p 和 q的唯一无界完备扩张，并且 $p|N'$ 可在 $V(F_{N'})$中实现。

证明。令

$$p_0^N(x) = \{x \neq 0\} \cup \{v(x) > \lambda : \lambda \in \Gamma_N\} \cup \{\exists z\, (z^k = x) : k \geq 1\}.$$

由 [3, 命题 2.2.2 和 2.3.2]， p_0^N 是完备的。容易看出，指定的 $t \in F_N$ 实现了 p_0^N，每个满足 $m \geq 1$的 $t^{1/m}$ 也如此。由引理 10， p_0^N是可定义的，其到 $N' \succeq N$ 的典范可定义扩张是 $p_0^{N'}$ 。

由 Q的无界性，取 $a \in V(F_N)$，使得 $\pi(a) \notin \hat{}E_{v(t)}$。由于$v(t) > \Gamma_N$， a 和 $\pi(a)$在 N上均无界。此外， F_N在 $N(t)$上代数，因此 $\mathrm{trdeg}(a/N) = 1$。于是， a在 N上的扎里斯基闭包 C是一条代数曲线。令 $p = \mathrm{tp}(a/N)$，并令 $q = \pi(p)$。由引理 10，这两个型都是N-可定义的。显然，它们是无界的。

在包含 a 的 N-可定义坐标图中应用 [17, 引理 3.5 和 3.7] 的局部根构造，我们可得，对某个 $m \geq 1$，存在一个 N-可定义的连续映射 $f\colon D \to C \cap V$，满足 $f(t^{1/m}) = a$，其中 D 在 0 的某个充分小的去心邻域中既开又闭。由于 $t^{1/m} \models p_0^N$，我们有 $p = f(p_0^N)$。

令 $N' \succeq N$，并令 a' 实现 p 在 N' 上的一个无界完备扩张。则存在 $u \models p_0^N$ 使得 $f(u) = a'$。若 u 在 N' 上不是无穷小，它就会落在 D 的一个 N'-可定义闭环域中，进而 a' 在 N' 上有界，矛盾。因此，$u \models p_0^{N'}$，从而 $a' \models p|N'$。

最后，由于 $p = f(p_0^N) \in F_N$ 实现，因此 $p|N'$ 由 $f(p_0^{N'})$ 实现。关于 $q = \pi(p)$的唯一性断言立即可得。

□

现在，我们利用 [10, 第 5]节中对可解释群的处理，将 [9, 第 4–6] 节中的有界间隙和 μ-稳定子论证改用于 N。

对于子集 I，$A \subseteq Q$，记

$$I \diamond A := \{x \in I : xA \cap I = \varnothing\}.$$

引理 12。 设存在一个 N-可定义子群 $W \lhd V$，其包含 H，且 W/H有界、V/W是交换的。令 $I \subseteq G$为 N-可定义的，使得 $\hat{}I := \pi(I \cap V)$在 Q中是无界的。那么对每个 $\lambda \in \Gamma_N$，存在 $\hat{}\hat{}\hat{}\lambda' > \lambda$，使得 $I \diamond (E_{\lambda'} \setminus E_\lambda)$ 是有界的。

证明。 对于固定的定义公式，假设是一阶的，因此根据 Lo´s 定理，它们在几乎所有 $\mathcal{U}$ 因子 M_{p_j} 中都成立。由于结论也是一阶的，只需在这些因子中证明即可。

在每个这样的因子中，对应的数据使用相同的记号，并将 [10,引理 5.6] 应用于交换商群 V/W。令 θ: $V/H \to V/W$为自然映射。其核 W/H 有界，因此有界集的原像也有界。对于在 V/W中得到的指数 $\gamma > \lambda$，选取 $\lambda' > \gamma$使得

$$\theta^{-1}(\theta(\hat{E}_\gamma)) = \hat{E}_\gamma(W/H) \subseteq \hat{E}_{\lambda'}.$$

因此，像落在 $\theta(\hat{}E_\gamma) \setminus \theta(\hat{}E_\lambda)$ 中的差属于 $\hat{}E_{\lambda'} \setminus \hat{}E_\lambda$。所以，所需的间隙集包含于 V/W 中有界间隙集的原像，因而有界。

□

我们回顾一下 [15, 节 2]和 [9,节 5]中的形式稳定子构造。我们在 L^{eq}中理解 Q的可定义子集，以及 Q 上的完备型或部分类型。当然，上述引理也可以在 L^{eq}中表述。令 μ_N 为 1_Q处无穷小元素的部分类型，并用 Stab(Σ) 表示部分类型 Σ 在左平移作用下的稳定子。

对于 Q 上的 N-可定义完备类型 q，部分类型 $\mu_N \cdot q$ 是可定义的[15, 断言 2.15]。存在 N-可定义子群 $K_\varphi \leq Q$，使得对于每个$N' \succeq N$，

$$\mathrm{Stab}\big(\mu_{N'} \cdot (q|N')\big) = \bigcap_\varphi K_\varphi(N').$$

我们还在群和商上使用标准部分。在用于构造 $(E_\lambda)_\lambda$ 的闭有界图表片上，对粗略 t-进赋值逐坐标取剩余类，可在 N' 中得到一个标准部分。因此，$V(F_{N'})$ 中在 N' 上有界的每个点，在 $V(N')$ 中都有唯一的标准部分。$Q(F_{N'})$ 中的一个有界点具有

一个位于 $V(F_{N'})$ 中的有界代表元，其标准部分通过 π 定义了它在 $Q(N')$ 中的标准部分。对于 $Y \subseteq F_{N'}^m$，我们令 $\mathrm{st}(Y)$ 表示 Y 中在 N' 上有界的点的标准部分所组成的集合。

引理 13. 设 $N' \succeq N$，且 $Y \subseteq F_{N'}^m$ 可定义。那么$\mathrm{st}(Y)$是 N'-可定义的，并且 $\dim(\mathrm{st}(Y)) \leq \dim(Y)$。

证明。在 L_t 中，我们有

$$\mathrm{st}(Y) = \mathrm{res}_t\big(\{a \in Y : v_t(a_i) \geq 0 \text{ for all } i\}\big).$$

根据 [17, 定理 4.1], ，它在纯剩余域 N' 中是可定义的。

令 $\dim Y = d$，并设 Z 为 Y 的扎里斯基闭包。那么根据 [18, 定理 B(2)、C(3) 以及事实 1.17(2)], $\dim Z = d$。

对于每个由 $d+1$ 坐标指标构成的集合 J， Z 在这些坐标上的投影满足一个非零多项式关系 $P_J \in F_{N'}[X_j : j \in J]$。将$P_J$除以其 v_t-值最小的一个系数。于是所有系数的 v_t-值均非负，且有一个系数为 1。逐系数应用 res_t，得到一个非零多项式 $\mathrm{res}_t(P_J) \in N'[X_j : j \in J]$。对于每个有界 $a \in Y$，res_t 给出

$$\mathrm{res}_t(P_J)\big(\mathrm{st}(a)_J\big) = 0.$$

令 W为由所有这些方程 $\mathrm{res}_t(P_J) = 0$ 在 N'上定义的代数集。则 $\mathrm{st}(Y) \subseteq W(N')$。由于在 W中没有 $d+1$个坐标可以代数独立，因此 $\dim W \leq d$，从而 $\dim(\mathrm{st}(Y)) \leq \dim W \leq d = \dim Y$。

□

引理 14。假设存在一个 N-可定义子群 $W \lhd V$，包含 H，且 W/H有界、V/W交换。那么存在一个 N-可定义子群 $U \leq V$，包含 H，使得 U/H 无界，并且

$$\dim U \leq \dim H + 1.$$

若 H出现在增长链中，则 维数 $U =$ 维数 $H + 1$。

证明。令 C、 p和 $q = \pi(p)$ 如引理 11 中所述。令 $N' \succeq N$为 $|N|^+$-饱和的。取实现 $p|N'$ 的 $a \in V(F_{N'})$，并令 $b = \pi(a)$。于是 $b \models q|N'$在 N' 上无界。

对于每个属于 p 的 N-可定义子集 I，令 $\hat{}I = \pi(I \cap V)$，并令

$$X_I := \{h \in Q(N') : \hat{I}(F_{N'}) \cap h\hat{E}_\lambda(F_{N'})b \neq \emptyset \text{ for every } \lambda \in \Gamma_{N'}\}.$$

由于 q 在 N 上是可定义的，因此 X_I 在 N 上是可定义的。 [10,引理5.9], 的论证与引理 11 一起给出

$$\mathrm{Stab}\big(\mu_{N'} \cdot (q|N')\big) = \bigcap_{I \in p} X_I.$$

断言。对于每个 $I \in p$，集合 X_I 都是无界的。

证明。固定 $I \in p$ 和 $\lambda \in \Gamma_{N'}$。将引理 12 应用于 I^{-1}（注意 V/W 是交换的），存在 $\lambda' > \lambda$，使得 $(\hat{}I)^{-1} \diamond (\hat{}E_{\lambda'} \setminus \hat{}E_\lambda)$ 有界。由于 b^{-1} 在 N' 上无界，它位于 $(\hat{}I)^{-1} \diamond (\hat{}E_{\lambda'} \setminus \hat{}E_\lambda)$ 之外。因此，存在 $c \in \hat{}\hat{}\hat{}E_{\lambda'}(F_{N'}) \setminus E_\lambda(F_{N'})$，使得 $cb \in I(F_{N'})$。

由于 $V(N')$ 根据的 X_I 的定义，我们有 $\mathrm{st}(c) \in X_I$。由于 $\hat{E}_\lambda(N') \setminus$ 是任意的，X_I 是无界的。 $\square_{\text{Claim}}$

容易看出 $X_{I \cap I'} \subseteq X_I \cap X_{I'}$。因此，这些 X_I 的每个有限交都是无界的。由于族 $\{X_I\}_I$ 的基数至多为 $|N|$，饱和性表明 $\mathrm{Stab}(\mu_{N'} \cdot (q|N')) = \bigcap_{I \in p} X_I$ 是无界的。

剩下要证明维数。设 $I_C = C \cap V$ 和 $Y = I_C a^{-1} H$。容易验证 $\dim Y \leq \dim H + 1$。对于每个坐标图 $\phi_j \colon U_j \to G$，我们令

$$Y_j = \{u \in U_j(F_{N'}) : \phi_j(u) \in Y(F_{N'})\}.$$

并令 Z_j 为 $\mathrm{st}(Y_j)$ 在赋值拓扑中的闭包。

设 $g \in V(N')$ 满足 $\pi(g) \in X_{I_C}$。根据定义，对于每个 $\lambda \in \Gamma_{N'}$，

$$Y(F_{N'}) \cap gE_\lambda(F_{N'}) \neq \emptyset.$$

这意味着，对于每个包含 g 的坐标图，$\phi_j^{-1}(g)$ 都属于 Z_j。在这些坐标图中应用引理 13，我们得到

$$\dim \pi^{-1}(X_{I_C}) \leq \max_j \dim(Z_j) = \max_j \dim \mathrm{st}(Y_j) \leq \dim Y \leq 1 + \dim H.$$

回忆一下，$\mathrm{Stab}(\mu_{N'} \cdot (q|N')) = \bigcap_\varphi K_\varphi(N')$，其中每个 $K_\varphi \leq Q$ 都可定义于 N 上。于是 $\bigcap_\varphi K_\varphi(N') = \bigcap_I X_I$。由于 N' 是 $|N|^+$-饱和的，存在 φ 使得 $K := K_\varphi(N') \subseteq X_{I_C}$。另一方面，存在 I 使得 $X_I \subseteq K$。因此 K 是无界的。

设 $U = \pi^{-1}(K)$。则 U 是 V 的一个 N-可定义子群，且包含 H。商 U/H 是无界的，并且 $\dim U \leq 1 + \dim H$。因此，这个 U 正是我们所需要的。

最后，假设 H 出现在一个增长链中。对于固定的定义公式，根据 Lo´s 定理，在 $\mathcal{U}$-几乎所有因子 M_{p_j} 中，链条件、U/H的无界性以及 $\dim U \leq \dim H + 1$均成立。为方便起见，将这些因子中相应的群分别记为 H' 和 U'。于是，H' 具有有限生成可定义群。若 $\dim U' = \dim H'$，则根据 [1, 推论 4.4]，U'/H'是有限的，这与 U'/H'的无界性矛盾。因此，$\dim U' = \dim H' + 1$在 $\mathcal{U}$-几乎所有因子中成立。于是，根据 Lo´s 定理，$\dim U = \dim H + 1$在 N中成立。 $\square$

引理15。 *在引理 14 的假设下，进一步假设一个增长链终止于 H。则该链可以延拓为一个终止于 $K \lhd V$的增长链，使得 V/K 是有界的。*

如果 $V \lhd G$和 $H \lhd G$，则端点 K 也可以在 G 中选为正规。

证明。设 U 如引理 14 所述。为使这个扩张正规化，我们令

$$U_0 = \{u \in U : uwu^{-1}w^{-1} \in H \text{ for every } w \in W\}.$$

在几乎所有因子中，相应的商 U'/H' 和 W'/H' 分别具有有限生成可定义群性质和 fsg 性质。根据 [16, 命题 7， U'/H'对 W'/H'的共轭作用的像是有限的，因此 U_0'在 U'中的指数有限。该结论是一阶的，因此我们有 $\dim U_0 = \dim U$，并且 U_0/H在 N上无界。

令 $H = 核_V(U_0)$。于是 $H \lhd V$。将第4.1小节中的结论应用于 $\mathcal{U}$中几乎所有因子上的 $U_0' \lhd W'U_0' \lhd V'$，相应的商 U_0'/H'是有限的，且 $\dim H' = \dim H' + 1$。因此， U_0/H是有界的，且 $\dim H = \dim H + 1$。容易验证， H扩展了原来的增长链。

若H无界，则我们可以令H替换H，并对重复此过程。由于每一步都会增加端点的维数，迭代最终会在 V 中得到一个正规端点 K，其商有界。

若$K \models 核_G(K)$，则所有因子中， K' 的 G'-共轭都是 V' 的正规 dfg 子群，且商为 fsg，因此由引理 8.1]可知它们可公度。根据定理 5.12], ，它们的交是有限交，所以 K'/K' 是有限的。于是 K/K有界，且 $\dim(K) = \dim(K)$。将增长链与 K相交，便得到所需的增长链，其终点为 K。 □

为获得关于 p-进闭域中可定义可和群的统一结果，我们研究它们在 N 上的类似对象，这些对象由一阶条件 Grp^*给出。在本小节余下部分，固定一个来自 N 的元组 a，满足 $N \models \mathrm{Grp}^*(a)$，并令 $G = G_{N,\,a}$

引理 16. 若李(G) 是半单的，则 G 有界。

证明。 在几乎所有的 $\mathcal{U}$-因子中，相应的群 G' 是可定义可和的，且李(G')是半单的。其伴随同态的核有限，因为微分 ad 是单射。其像的扎里斯基闭包的单位连通分支是半单的。因此，由引理 8.4],可知，该像是可定义紧的 [16, ， G' 也如此。于是 G' 有界，并且根据 Lo´s 定理， G也有界。 □

命题 17. G 具有一个 N-可定义的、以正规端点为终点的完全增长链。

证明。我们首先证明 $G \leq \mathrm{GL}_m(N)$ 的情形。令 $\mathrm{G} = \mathrm{Zcl}(G)$，R 为 G° 的可解根。令 $W = G \cap \mathrm{R}(N)$。代数商映射诱导出一个可定义同态 $f\colon G \longrightarrow (\mathrm{G}/\mathrm{R})(N)$，其核为 W。由于G 在 $\mathrm{G}(N)$ 中是开集， f 在 1_G 处的微分与代数商映射的微分一致；根据 [14, 第二章，命题 3.29]，该映射是满射。因此，李$(f(G))$ = 李 (G/R) 是半单的。由于可定义可和性在每个 p-adic 因子下经可定义映射的像保持不变， Lo´s 定理表明，在 N 中定义 $f(G)$ 的参数满足像群族的 Grp^*-公式。于是根据引理 16， $f(G)$ 是有界的。因此，我们只需处理 R 中的部分。

将 G 与$\mathbf{R}$的导出列各项相交，并按逆序排列，我们得到一个序列

$$\{1_G\} = V_0 \lhd V_1 \lhd \cdots \lhd V_s = W$$

在 G 中正规且每个 V_{i+1}/V_i 交换的子群。我们从平凡增长链构造一个完全增长链。假设当前端点为 $H \leq V_i$，其中 $H \lhd G$ 且 V_i/H 有界。如果 V_{i+1}/H 有界，我们在此步骤不延长增长链。否则，我们应用引理15，分别取 V_{i+1} 和 V_i 作为引理中记作 V 和 W 的群。其假设成立，因为 V_i/H 有界且 V_{i+1}/V_i 是交换的。由于 $V_{i+1} \lhd G$，该引理允许我们将增长链延长至新的端点 $H \lhd G$，使得 V_{i+1}/H 有界。沿着级数 $(V_i)_i$重复这一过程，我们得到一个终点为 $K \lhd G$ 且 W/K 有界的增长链。由于 G/W 有界，因此 G/K也有界，于是增长链现在是完全的。

现在我们证明一般情形。令 $A =$ 为 Ad 的核。在 $\mathcal{U}$-几乎所有因子中，$Z(A')$ 在 A' [2, 中的指数有限，由引理8.5和8.7], 可知， $A/Z(A)$是有界的。如果$Z(A)$是有界的，我们令 H 为平凡群。如果 $Z(A)$是无界的，我们将引理15应用于 G的交换的正规子群 $Z(A)$。在这两种情形下，我们都得到一个以 $H \lhd G$ 结尾的增长链，其中 $Z(A)/H$ 是有界的。由于 $A/Z(A)$ 和 $Z(A)/H$ 都是有界的， A/H 是有界的。

现在将线性构造应用于 $\mathrm{Ad}(G)$，其在几乎所有因子中的像都是可定义可和的。沿着 Ad 拉回那里所使用的正规列，我们得到一个正规子群列

$$A = V_0 \lhd V_1 \lhd \cdots \lhd V_s$$

它是 G 的正规子群列，使得每个 V_{i+1}/V_i 都是交换的，而 G/V_s 是有界的。由于 V_0/H 是有界的，线性情形中的归纳法仍然适用。证明完毕。

□

4.3 一致扎里斯基闭包

我们使用可定义维数与扎里斯基闭包的维数之间的等式，该等式在 p-闭域及其超积中成立。结合紧致性，我们得到定义扎里斯基闭包的方程的一致次数界，以及这些闭包的一致编码。

引理 18. 固定一个 L-公式 $\theta(z;\ w)$。存在一个整数 d，使得对于每个素数 p、每个 $M = M_p \models p\,\mathrm{CF}$ 以及来自 M 的每个元组 a， $\theta(M;\ a)$ 的扎里斯基闭包都是 M 上有限多个次数至多为 d 的多项式的公共零点集。

此外，存在一个整数 k 和一个 L-公式 $\kappa(w;\ u)$，它们在每个这样的 M 中定义一个函数 $c_M\colon\ M^{|w|} \to M^k$，使得对于所有 a、$a' \in M^{|w|}$，

$$c_M(a) = c_M(a') \text{ iff } \mathrm{Zcl}(\theta(M;a)) = \mathrm{Zcl}(\theta(M;a')).$$

证明。假设不存在一致次数界。对每个 $j \geq 1$，选取M_{p_j}和 a_j，使得 $X_j = \theta(M_{p_j};\ a_j)$ 的扎里斯基闭包无法由

次数至多为 j 的多项式定义。取一个子列后，假设这些素数要么恒定，要么趋于无穷。令 $N = \prod_j M_{p_j}/\mathcal{U}$,$a =$ a ($a_j)/\mathcal{U}$ 和 $X = \theta(N;)$。在这两种情况下， N 中的可定义维数都与扎里斯基闭包的维数一致，正如上文所述。

设 $Z_1, \dots, Z_s$ 是 Zcl(X) 的几何不可约分支，且都定义在 N 上。于是 $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} Z_i(N)$，并且对每个 i，$\dim\big(X \cap Z_i(N)\big) = \dim\ Z_i$。

对每个 i，选取一个定义 Z_i、系数属于 N 的有限方程集，并令 l 为这些方程次数的一个公共上界。对于这些固定的方程次数界，几何不可约性以及所显示的条件都是一阶性质。根据 -Lo´s 定理，这些性质在几乎所有 $\mathcal{U}$ 因子所对应的代数集中都成立，因此它们的并集恰好是 Zcl(X_j)。这个并集由如下乘积定义：从每个方程集中各选一个方程并将它们相乘。这些乘积的次数至多为 sl，与 X_j 对 $j > sl$ 的选取相矛盾。因此，一致次数界 d 存在。

固定次数至多为 d 的单项式的一个排序，并将多项式与其系数向量对应。对每个 a，令

$$I_d(a) = \{P \in M[z]_{\le d} : P(x) = 0 \text{ for every } x \in \theta(M; a)\}.$$

这些空间构成一个一致的 L-可定义族，属于固定维数的系数空间中的向量子空间。显然， $I_d(a)$ 的公共零点集恰为 Zcl($\theta(M;\ a)$)。

按照引理 6 的证明中的行化简，令 $c_M(a)$ 为唯一的、行空间为 $I_d(a)$ 的简化行阶梯矩阵的元素元组，并补上零行使其大小固定。其图由一个 L-公式$\kappa(w;\ u)$ 一致定义。

那么，对于 $a,\ a' \in M^{|w|}$，Zcl($\theta(M;\ a)$) $=$Zcl($\theta(M;\ a')$) 当且仅当 $I_d(a) = I_d(a')$，当且仅当$c_M(a) = c_M(a')$。 □

对于 GL$_m(M)$ 的子集，我们使用仿射实现应用该引理

$$g \longmapsto \big(g, \det(g)^{-1}\big).$$

因此，闭包取自代数群 GL$_m$ 内部。特别地，对于 GL$_m(M)$ 的一个固定可定义子群族，这些子群及其陪集的扎里斯基闭包都可仅用定义它们的参数进行一致编码。

5 一致的 dfg–fsg 分解

本节将证明定理 C 和定理 D。

5.1 一致的正规 dfg 分量

我们首先证明，可以一致地构造完备增长链。

命题 *19.* 存在有限多个 L-公式 $\sigma_\ell(w;\, v)$ 和 $\psi_{\ell,i}(x;\, w, v)$，满足 $i \leq s_\ell$，使得对于每个 $M = M_p \models pCF$ 以及 M 中每个强可容许的 a，都存在 ℓ 和 b，使得 $M \models \sigma_\ell(a;\, b)$ 和 $(\psi_{\ell,i}(M;\, a, b))_{i \leq s_\ell}$ 是 $G_{M,a}$ 中一条以正规端点为端点的完备增长链。

证明。对于每个 M_p 以及 a 中的元组 M_p，$\mathrm{Grp}^*(a)$表示$G_{M_p,\, a}$ 是可定义可和的。dfg-fsg 分解定理 [16, 定理 8.8]以及 dfg群的结构定理 [16, 定理 5.6] 给出了一个具有正规端点的完全增长链。因此，存在一个公式链 $(\psi_i)_{i \leq s}$ 定义该完全增长链。并且存在 σ 使得 $\sigma(a)$表示 $(\psi_i)_{i \leq s}$ 为$G_{M_p,\, a}$定义了所需的增长链。将额外参数替换为自由变量元组 v后，我们得到 L-公式 $\sigma(w;\, v)$和 $\psi_i(x;\, w, v)$。我们将所有这些可能的 L-公式序列枚举为 $(\sigma_\ell, \psi_{\ell,i}(x;\, w, v_\ell) :\, 0 \leq i \leq s_\ell)$。

现在只需证明存在 k 使得

$$M_p \models \forall w(\mathrm{Grp}^*(w) \to \bigvee_{\ell \leq k} \exists v_\ell \sigma_\ell(w, v_\ell))$$

对每个素数 p。若非如此，则对每个 j，存在素数 p_j 和 $a_j \in M_{p_j}$ 使得$M_{p_j} \models \mathrm{Grp}^*(a_j) \wedge \bigwedge_{\ell \leq j} \neg \exists v_\ell \sigma_\ell(a_j;\, v_\ell)$。令 $N = \prod_j M_{p_j}/\mathcal{U}$为一个非主超积，并令 $a = (a_j)/\mathcal{U}$。取一个子列后，不妨设 p_j 为常数，或 $p_j \to \infty$。无论哪种情况，$G_{N,\, a}$ 都具有一个以正规端点为端点的完全增长链（当 $p_j \to \infty$时由命题 17 得出）。因此，存在 k使得 $N \models \mathrm{Grp}^*(a) \wedge \exists v_k \sigma_k(a,\ v_k)$。于是存在 $j > k$使得 $M_{p_j} \models \mathrm{Grp}^*(a_j) \wedge \exists v_k \sigma_k(a_j,\ v_k)$，矛盾。 □

现在我们证明定理 C。

定理 *C* 的证明。 我们沿用命题 19 中的记号，并假设$\ell \leq k$。那么，对每个 M_p 以及 M_p中的元组 a 和 b，若满足 $\sigma_\ell(a,\ b)$，则$\psi_{\ell,\, s_\ell}(M_p;\, a,\ b)$ 是 $G_{M_p,\, a}$的一个正规 dfg 分量。为了去掉额外的参数 b，我们收集所有这些正规 dfg 分量，并令

$$\mathcal{Y}_a := \bigcup_{\ell \leq k} \{\psi_{\ell, s_\ell}(M_p; a, b) : \sigma_\ell(a, b) \text{ holds}\}$$

那么，$\mathcal{Y}_a$ 是$G_{M_p,a}$的正规 dfg 分量的一个可定义族。根据 [16,定理 5.12], , $\bigcap \mathcal{Y}_a$ 是 $\mathcal{Y}_a$中成员的有限交。反复应用 [16, 推论 8.9] 可知，这个有限交仍是一个 dfg 分量。因此，$\bigcap \mathcal{Y}_a$ 是$G_{M_p,a}$的正规 dfg 分量。

现在我们令

$$\delta_H(x; w) := \bigwedge_{\ell \leq k} \forall v \big(\sigma_\ell(w; v) \to \psi_{\ell, s_\ell}(x; w, v)\big).$$

那么，$\delta_H(x;\, w)$ 是一个 L-公式。很容易验证，$\delta_H(x;\, a)$ 在每个 M_p 和强可容许的 a 中定义了 $\bigcap \mathcal{Y}_a$。 □

5.2 一致可定义的商映射

我们首先证明定理 D 的线性情形。在这种情形下，第 4.3 小节中关于扎里斯基闭包的编码直接给出了商映射。

定理 D 的线性情形的证明。假设给定的族由固定的 m 的一般线性群 GL_m 的子群组成。对于 $M = M_p \models p\mathrm{CF}$ 和来自 M 的强可容许元组 a，令 $H_{M,a} = \delta_H(M; a)$。由引理 18，存在一个 L-公式，使得 ρ_M 给出 $g \in G_{M,a}$ 时 $\mathrm{Zcl}(gH_{M,a})$ 的编码。令 $\rho_{M,a}(g) := \rho_M(g, a)$。由于由 g 给出的左平移是 GL_m 的代数映射，$\mathrm{Zcl}(gH_{M,a}) = g\,\mathrm{Zcl}(H_{M,a})$。因此，对于 $g, g' \in G_{M,a}$，$\rho_{M,a}(g) = \rho_{M,a}(g')$，当且仅当 $g\,\mathrm{Zcl}(H_{M,a}) = g'\,\mathrm{Zcl}(H_{M,a})$，当且仅当 $g^{-1}g' \in G_{M,a} \cap \mathrm{Zcl}(H_{M,a})(M)$。

令 $K_{M,a} = G_{M,a} \cap \mathrm{Zcl}(H_{M,a})(M)$。由于 $H_{M,a}$ 在 $G_{M,a}$ 中是正规子群，因此 $K_{M,a}$ 也是如此。$\rho_{M,a}$ 的纤维恰好是 $K_{M,a}$ 的左陪集。由于 $\dim H_{M,a} = \dim \mathrm{Zcl}(H_{M,a})$，子群 $H_{M,a}$ 在 $K_{M,a}$ 中是开的。由于 $H_{M,a}$ 具有 dfg，它在 $K_{M,a}$ [1，中具有有限指数，见推论 4.4]。因此，$K_{M,a}$ 是一个正规 dfg 分量。令 $C_{M,a} := \rho_{M,a}(G_{M,a})$，并定义乘法为

$$\rho_{M,a}(g)\rho_{M,a}(g') = \rho_{M,a}(gg').$$

此乘法定义良好，并且 $C_{M,\,a}$ 具有 fsg。于是我们得到一致的 dfg-fsg 分解

$$1 \longrightarrow K_{M,a} \longrightarrow G_{M,a} \xrightarrow{\rho_{M,a}} C_{M,a} \longrightarrow 1$$

如所需，且无需额外参数。 □

对于一般的群表示，我们沿着增长链构造商。在每一步中，一个一维轨道在域坐标中产生一条曲线。对该曲线及其极限进行编码，得到陪集空间上的一个具有有限纤维的映射。然后，我们利用该映射在 G 上的微分，得到一个群商，其核是端点的有限扩张。

对于接下来的三个引理，令 $N = \prod_j M_{p_j}/\mathcal{U}$ with $p_j \to \infty$，如第 4.2 小节所述。在充分饱和的初等扩张 $N' \succeq N$ 中进行讨论。

引理 20. 设 C 是定义在 N' 上的一条代数曲线，且 $c \in C(N')$。至多存在 $2^{\aleph_0}$ 个集中于 $C\backslash\{c\}$ 且无限接近 c 的完备 L-型（定义在 N' 上）。

证明。 我们首先估计在 N' 上关于 0 处非零无穷小的完备 L-型的数量。设 u 实现了这样一个型，则对每个 $\gamma \in \Gamma_{N'}$，都有 $v(u) > \gamma$。对于任意定义在 N' 上的非零多项式 P，$P(u)$ 的首项就是其最低次非零单项式的首项。由 [3, 命题 2.2.2 和 2.3.2], 可知，u 的型由其幂陪集以及 $v(u)$ 的同余关系决定。对每个 n，只有有限多个 n 次幂陪集，因为剩余域是特征零的伪有限域，主单位是可除的，且 $\Gamma_{N'}/n\Gamma_{N'}$ 是有限的。因此至多有 $2^{\aleph_0}$ 个型。

根据诺特正规化，存在有限纤维正则映射 $t\colon U \to \mathbb{A}^1$ 在 N' 上的仿射邻域 U 中取值于 c。我们可以假设 $t(c) = 0$。

由于 $t^{-1}(0)$是有限的，每个与 c 无穷小接近的 $x \neq c$ 都会映射到一个非零无穷小。 $t(x)$在 N' 上的每个完备型都只有有限个提升，因此前述界成立。

□

引理 21. 设 G 是一个可定义群，且 H 是 G中一条增长链的端点。那么存在一个可定义映射 $f\colon G \to (N')^r$ 以及一个自然数d，使得 f 在每个左 H-陪集上都是常值，且每个纤维至多包含 d个这样的陪集。

证明. 我们将增长链写为

$$\{1_G\} = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_s = H.$$

我们对 i使用归纳法来构造映射 f_i。令 f_0 为 G上的恒等映射。假设 $f_i\colon G \to (N')^{r_i}$ 在左 H_i-陪集上为常值，且每个纤维中至多有 d_i 个这样的陪集。由于 $H_i \lhd H_{i+1}$，群 H_{i+1}/H_i 在 G/H_i 上按以下方式从右作用：$(gH_i)\cdot(hH_i) = ghH_i$。其轨道就是 $G/H_i \to G/H_{i+1}$的纤维。

对于 $g \in G$，令 $Y_g = f_i(gH_{i+1})$。f_i 的每个纤维都是至多 d_i个左 H_i-陪集的并。将纤维维数定理应用于 f_i 在gH_{i+1}上的限制，可得

$$\dim Y_g = \dim H_{i+1} - \dim H_i = 1.$$

令 $(E_\lambda)_\lambda$ 是 Γ 的穷尽族 G。令

$$Y_{g,\lambda} = f_i\big(gH_{i+1} \setminus g(E_\lambda \cap H_{i+1})H_i\big)$$

且 $Z_g := \bigcap_\lambda \mathrm{cl}(Y_{g,\lambda})$，其中闭包是在射影空间 $\mathbb{P}^{r_i}(N')$ 的赋值拓扑中取的。由于有界集的平移仍然有界，Z_g 与陪集 gH_{i+1} 的代表元 g 的选取无关。

由于 H_{i+1}/H_i 无界，集合 $Y_{g,\lambda}$ 非空，且随 λ 增大而递减。由 $\mathbb{P}^{r_i}(M_{p_j})$ 的可定义紧致性，相应的闭包在几乎所有 $\mathcal{U}$ 因子中的交集非空。由 Łoś 定理和 $N \preceq N'$，可得 $Z_g \neq \emptyset$。

断言。集合 Z_g 是有限的。

证明。f_i 在 gH_{i+1} 中的每个纤维至多由 d_i 个左 H_i-陪集组成；当 λ 充分大时，这些陪集全都包含在 $g(E_\lambda \cap H_{i+1})H_i$ 中。因此，$\bigcap_\lambda Y_{g,\lambda} = \emptyset$。

假设 Z_g 是无限的。那么对于$n \in \mathbb{N}$，存在两两不同的 $c_n \in Z_g$。由于集合 $Y_{g,\lambda}$ 递减且交集为空，N' 的饱和性给出了一个公共的 λ，使得对于每个 n，$c_n \in \mathrm{cl}(Y_{g,\lambda})\setminus Y_{g,\lambda}$。根据 [2,命题 2.18], $\dim(\mathrm{cl}(Y_{g,\lambda})\setminus Y_{g,\lambda}) < \dim Y_{g,\lambda} \leq 1$。因此，$\mathrm{cl}(Y_{g,\lambda})\setminus Y_{g,\lambda}$ 是有限的。这就产生了矛盾。

$\square_{\text{Claim}}$

令 $f_{i+1}(g)$ 表示由引理 18 给出的仿射 Zariski 闭包 $\mathrm{Zcl}(Y_g)$ 的编码，以及由对称多项式给出的有限集 Z_g 的编码。则 f_{i+1} 是可定义的，并且在每个左 H_{i+1}-陪集上都是常值的。

假设 $f_{i+1}(g) = f_{i+1}(g')$。那么 $\mathrm{Zcl}(Y_g) = \mathrm{Zcl}(Y_{g'})$，并且 $Z_g = Z_{g'}$。令 C 为 $\mathrm{Zcl}(Y_g)$ 在 $\mathbb{P}^{r_i}$ 中的扎里斯基闭包，并固定某个 $c \in Z_g$。对于每个这样的 g'，我们都有 $Y_{g'} \subseteq C(N')$ 和 $c \in Z_{g'}$。

根据引理 20，在 N'上与 c无穷小接近的 $C \setminus \{c\}$ 上至多有 $2^{\aleph_0}$ 个完备类型。由于 f_i 的每个纤维都是至多 d_i 个左H_i-陪集的并，每个这样的类型至多包含$Y_{g'}$ 个不同的陪集 $g'H_{i+1}$，其中 d_i。因此，该纤维至多包含 $d_i\, 2^{\aleph_0}$ 个陪集。这些陪集构成 G/H_{i+1}的一个可定义子集，因此 N' 的饱和性表明它们只有有限多个。再次利用饱和性，可得所有纤维都有一个共同的有限上界 d_{i+1}。归纳法至此完成。

□

引理 22. 设 G是一个可定义群，H 是一个可定义正规子群。假设存在一个可定义映射 $f\colon G \to (N')^r$，使得每个纤维都是至多 d 个左 H-陪集的并，其中 d。那么存在一个可定义群 C 以及一个可定义满同态 $\rho\colon G \to C$，使得 $\ker\rho$ 是 H的有限扩张。

证明. 设 $Q = G/H$，并设 $\pi\colon G \to Q$ 是商映射。在 f严格可微的每个点g，令 $J_f(g)$ 为线性映射 $\mathrm{d}(f \circ R_g)_{1_G}\colon$李$(G) \to (N')^r$，其中 $R_g\colon G \to G\colon x \mapsto xg$。

由 [2, 命题 5.7]，f 在 G的一个可定义开稠密子集上严格可微。其微分在该处连续，因此它的秩在 G的一个可定义开稠密子集 U 上局部常值。由于 f 的每个纤维都是有限个左 H-陪集的并，纤维的每个非空相对开可定义子集的维数都是 $\dim H$。由 [2, 命题 4.11],，对于 $g \in U$，

$$\operatorname{rank} J_f(g) = \dim G - \dim H.$$

由于 H在 G中是正规子群，映射 $f\circ R_g$在 H上为常值，因此 Lie(H) $\subseteq$ker $J_f(g)$。由此可得，对每个 $g \in U$，ker $J_f(g)$ =Lie(H)。由于对每个$h \in H$都有 $f \circ R_h = f$，我们可以用 UH 替换 U，并假设 U 是右 H-不变的。

由于 H 在 G中是正规子群，伴随作用 Ad(G) 保持 Lie(H)。令α 表示 G 在 Lie(G)/Lie(H)上的诱导作用。对于 $h \in H$，映射$x \mapsto hxh^{-1}x^{-1}$ 的取值落在 H中，因此其微分 Ad(h) –id 在 1_G 处的像包含于 Lie(H)。因此，H 在 Lie(G)/Lie(H)上作用平凡。

那么对于 $g \in U$，令

$$F_0(g) = \big(f(g), J_f(g), \alpha(g)\big).$$

其中 α(g)用固定基表示。映射 F_0 是右 H-不变的。令

$$A_0 = \{ag^{-1}g'a^{-1} : a \in G \text{ and } g, g' \in U \text{ with } F_0(g) = F_0(g')\}.$$

并令 $A = \pi$(A_0)。由于 A_0 在 G中在共轭作用下保持不变，其像 A在 Q中也在共轭作用下保持不变。

断言。 A 是有限的。

证明。令 $Z = \{(g, g') \in U \times U\colon F_0(g) = F_0(g')\}$ 以及 $\Phi(a, g, g') = ag^{-1}g'a^{-1}$。显然，$A_0 = \Phi(G \times Z)$。在坐标图中工作，根据命题 2.15 和 5.9]，将 Z 划分为有限个可定义的 étale 部分。对于每个部分 S,

根据命题 5.7]，包含映射 $\ell\colon S \hookrightarrow U^2$ 在一个可定义开稠密子集V 上严格可微。

在（g, g'） $\in V$处，令（ξ, ξ'） $\in \mathrm{Lie}(G) \times \mathrm{Lie}(G)$ 表示 $\mathrm{d}\ell_{(g,g')}$ 的像中以右平移坐标表示的任意向量。沿着 V 对 $f(g) = f(g')$ 求微分，得到 $J_f(g)\xi = J_f(g')\xi'$。由于 $J_f(g) = J_f(g')$，我们得到 $\xi' - \xi \in \mathrm{Lie}(H)$。令 $z = \Phi(a, g, g') = ag^{-1}g'a^{-1}$ 和 $w = g^{-1}g'$。于是 $z = awa^{-1}$。在右平移坐标中，乘法在（u, v）处的微分将（X, Y）映为 $X + \mathrm{Ad}(u)Y$；而求逆在 u 处的微分将 X 映为 $-\mathrm{Ad}(u^{-1})X$。因此，w 处的切向量为 $\omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})(\xi' - \xi)$。记 ζ 为 a 处的切向量，则在 z 处，

$$\zeta + \mathrm{Ad}(a)\omega - \mathrm{Ad}(aw)\,\mathrm{Ad}(a^{-1})\zeta = (\mathrm{id} - \mathrm{Ad}(z))\zeta + \mathrm{Ad}(ag^{-1})(\xi' - \xi).$$

由于 $\alpha(g) = \alpha(g')$，我们有 $\alpha(z) = \alpha(a)\alpha(g)^{-1}\alpha(g')\alpha(a)^{-1} = \mathrm{id}$。因此，$\mathrm{Ad}(z)$在$\mathrm{Lie}(G)/\mathrm{Lie}(H)$上平凡作用，所以$(\mathrm{id} - \mathrm{Ad}(z))\zeta \in \mathrm{Lie}(H)$。此外，$\xi' - \xi \in \mathrm{Lie}(H)$，且 H 的正规性蕴含 $\mathrm{Ad}(ag^{-1})$保持$\mathrm{Lie}(H)$不变。因此，$\mathrm{Ad}(ag^{-1})(\xi' - \xi) \in \mathrm{Lie}(H)$也成立。于是，$\Phi$ 在 $G \times V$ 上的微分的秩至多为$\dim H$，故由 [2, Proposition 5.21]可得$\dim \Phi(G \times V) \le \dim H$。

由连续性，$\Phi(G \times S) \subseteq \mathrm{cl}(\Phi(G \times V))$。取闭包保持维数[2, Proposition 2.18]。由于该划分是有限的，$\dim A_0 \le \dim H$。U 和 F_0的右 H-不变性，连同 H的正规性，表明 A_0 是若干左 H-陪集的并。因此，$f|_{A_0}$的每个非空纤维维数均为$\dim H$。由纤维维数定理可得$\dim f(A_0) = 0$，因此 $f(A_0)$是有限的。由于每个纤维至多包含 d 个左 H-陪集，$A = \pi(A_0)$是有限的。 $\square_{\text{Claim}}$

根据 [2, 引理 6.2],，有限个左平移 $a_1U, \ldots, a_kU$覆盖 G。对于$g \in G$，取满足 $g \in a_jU$ 的最小 j，并令

$$F_1(\pi(g)) = \big(j, F_0(a_j^{-1}g)\big).$$

此映射定义良好，且其纤维的大小至多为 d。如果 $F_1(\pi(g)) = F_1(\pi(g'))$，那么两者都出现相同的指数 j，因此 $\pi(g^{-1}g') \in A$。

令 P 为由 A生成的 Q 的子群。P在有限集 A上的共轭作用的核为 $Z(P)$。于是 $P/Z(P)$是有限的，并且根据 Schur 定理，导出子群 $[P, P]$ 是有限的。令 K 为 P中 $P/[P, P]$的挠子群的原像。由于 $K/[P, P]$ 是有限生成阿贝尔群 $P/[P, P]$的挠子群，因此它是有限的。由于 $[P, P]$ 是有限的，K 也是有限的。此外，由于 K 在 P 中是特征子群，且 P 在 Q中正规，故 K是 Q的有限正规子群。

设 $W = \{u^j : u \in A$ 和 $0 \le j < d\}$。固定 W 的一个序，并在 Q 上定义一个映射如下：

$$F_2(q) = \big(F_1(qw)\big)_{w \in W}.$$

假设 $F_2(\pi(g)) = F_2(\pi(g'))$，并令 $u = \pi(g^{-1}g')$。由于 $1_Q \in W$，$F_2(\pi(g))$ 与 $F_2(\pi(g'))$ 相等意味着 $F_1(\pi(g)) = F_1(\pi(g'))$，因此 $u \in A$。由于 $\pi(g') = \pi(g)u$，比较由 u^j 索引的坐标（其中 $0 \le j < d$），我们得到

$$F_1(\pi(g)) = F_1(\pi(g)u) = \cdots = F_1(\pi(g)u^d).$$

这些 $d+1$ 个论证中有两个根据 F_1 的纤维界相同。因此， u 的序至多为 d，从而属于 K。

最后，我们定义从 ρ 到 G 的映射如下：

$$\rho(g) = \text{ the code of the finite set } \{F_2(\pi(g)k) : k \in K\}.$$

显然， $\rho(g)$ 仅取决于 $\pi(g)K$。反过来，若 $\rho(g) = \rho(g')$，则对某个 $k \in K$，有 $F_2(\pi(g)) = F_2(\pi(g')k)$。根据前一段， $\pi(g)K = \pi(g')K$。因此， Q/K 上的乘法在 $C = \rho(G)$ 上诱导出一个可定义的群运算，使得 $\rho\colon G \to C$ 成为一个满同态，其核为 $\pi^{-1}(K)$，这是 H 的有限扩张。 □

现在我们证明定理 D 的一般情形。

定理 D 一般情形的证明。对于 M_p 中每个 M_p 和强可容许的 a， [16, 定理 8.8] 给出 $G_{M_p,a}$ 的 dfg-fsg 分解。此外，我们可以假设 dfg 部分包含 $H_{M_p,a} := \delta_H(M_p; a)$ 作为有限指数子群，其中 $\delta_H(x; w)$ 是定理 C 中的公式。因此，存在一个 L- 公式 $\chi(x, y; w, v)$、一个自然数 d 以及一个元组 b，使得 $\chi(x, y; a, b)$ 定义了 $G_{M,a}$ 的一个 dfg-fsg 分解的商映射 ρ 的图，其中 $H_{M_p,a} \leq$ 的核为 ρ，而 $|$的核为 $\rho/H_{M_p,a}| \leq d$。

由于核上的 dfg 条件和像上的 fsg 条件分别由 [16, 定理 5.9] 和 [12, 定理 1.2 及命题 4.1], 在族中可定义，因此存在一个 L 公式 $\sigma(w, v)$ 和 $\sigma(a, b)$，它们表达了一阶条件，确保 $\chi(x, y; a, b)$ 定义了某个 dfg-fsg 分解中商映射的图像，并且由 δ_H 定义的子群在该映射的核中的指数至多为 d 。

我们将所有这些可能的 L公式对及其对应的界枚举为 $(\chi_\ell(x, y_\ell; w, v_\ell)\ \sigma_\ell(w, v_\ell)\ d_\ell)$。

为了得到 dfg-fsg 分解，并使其中由 δ_H 定义的群在核中的指数一致有界，只需证明存在 k 使得

$$M_p \models \forall w(\mathrm{Grp}^*(w) \to \bigvee_{\ell \leq k} \exists v_\ell \sigma_\ell(w, v_\ell))$$

对每个素数 p 都成立。否则，对每个 j，都存在素数 p_j 和 $a_j \in M_{p_j}$，使得 $M_{p_j} \models \mathrm{Grp}^*(a_j) \wedge \bigwedge_{\ell \leq j} \neg\exists v_\ell\, \sigma_\ell(a_j; v_\ell)$。令 $N = \prod_j M_{p_j}/\mathcal{U}$ 为一个非主超积，并令 $a = (a_j)/\mathcal{U}$。取一个子列后，我们可以假设 p_j 是常数，或者 $p_j \to \infty$。

如果对所有 j 都有 $p_j = p$，那么 $N \models p\mathrm{CF}$。由于 a 是强可容许的，固定素数情形给出一个指数为 ℓ 的 $d_\ell = 1$，使得 $N \models \exists v_\ell\, \sigma_\ell(a, v_\ell)$。

假设 $p_j \to \infty$，并令 $N' \succeq N$ 充分饱和。在每个因子中， $\delta_H(M_{p_j}; a_j)$ 在命题 19 中某条链的端点里具有有限指数。将该链与此子群相交，并应用 Łoś 定理和初等性，可得一条以 $\delta_H(N'; a)$ 结尾的完全增长链。由引理 21 和 22，存在一个定义商映射 ρ，其核包含 $\delta_H(N'; a)$，且后者具有有限指数，而该商有界。取

$d = |\ker \rho/\delta_H(N';\ a)|$，我们得到一个指数 ℓ，使得 $N' \models \exists v_\ell\, \sigma_\ell(a, v_\ell)$。由初等性，$N \models \exists v_\ell\, \sigma_\ell(a, v_\ell)$。

在这两种情况下，Lo´s 定理给出 $M_{p_j} \models \exists v_\ell\, \sigma_\ell(a_j,\ v_\ell)$，对几乎所有 $\mathcal{U}$- j 都成立，这与 a_j 对 $j \geq \ell$ 的选择矛盾。

剩下要证明的是核与 b无关。对于每个强可容许的 a，令$K_{M_p,\ a}$ 为所有由 $\chi_\ell(x,\ y_\ell;\ a,\ b)$ 给出的映射的核的交，其中 $\ell \leq k$ 且 $M_p \models \sigma_\ell(a,\ b)$。它在 a 上一致可定义，并且是至多 $d = \max_{\ell \leq k} d_\ell$ 个此类核的交，因为每次严格取交都会使 $H_{M_p,\ a}$ 上的指数下降。到相应商群的笛卡尔积的诱导映射的核为$K_{M_p,\ a}$。以其像为目标，即得到所需的 dfg-fsg 分解。

□

AI 使用声明

作者在准备本稿期间使用 ChatGPT（OpenAI）协助语言编辑，并讨论和核查数学论证。最终版本中所含的所有数学陈述、论证和证明均由作者独立核实，作者对本文内容承担全部责任。

参考文献

[1] P. And´ujar Guerrero 和 W. Johnson，关于 p-可定义的型根基 ly 闭域，Ann. Pure Appl. Logic **175**（2024），第 10 期，文章 103484。[2] J. P.Acosta L´opez 和 A. Hasson，在1-*h*-极小域中可定义的群与域，J. Inst. Math. Jussieu**24** （2025），第 1 期，203–248。[3] J. P.Acosta L´opez 和 M. Hils，代数闭赋值域与伪局部域中可定义的一维交换群，预印本，arXiv:2112.00430v2（2025）。[4] R.Cluckers，J. Derakhshan，E. Leenknegt 和 A. Macintyre，在具有有限或伪有限剩余域的亨泽尔赋值域中一致地定义赋值环，Ann. Pure Appl. Logic **164**（2013），第 12 期，1236–1246。[5] R.Cluckers，I. Halupczok 和 S. Rideau-Kikuchi，亨泽尔极小性 *I*，Forum Math. Pi**10** （2022），文章 e11。[6] E. Hrushovski 和 A. Pillay，关于 *NIP* 与不变测度，J. Eur. Math. Soc.**13** （2011），第 4 期，1005–1061。[7] E. Hrushovski 和 A. Pillay，局部域与伪有限域中可定义的群，Israel J. Math. **85** （1994），203–262。

[8] E. Hrushovski、Y. Peterzil 和 A. Pillay，群、测度与 NIP，J. Amer. Math. Soc. 21（2008），第 2 期，563–596。[9] W. Johnson 和 N. Yao，关于非紧 p-adic 可定义群，J. Symbolic Logic 87（2022），第 1 期，188–213。[10] W. Johnson 和 N. Yao，在 p-adically 闭域中可定义的交换群，J. Symbolic Logic 90（2025），第 1 期，460–481。[11] W. Johnson 和 N. Yao，非交换 p-adic 可定义群中的一维子群与连通分支，J. Symbolic Logic，First View（2024），1–19。[12] W. Johnson，关于 p-adically 闭域中的 fsg 群的一则注记，Math. Log. Quart. 69（2023），第 1 期，50–57。[13] A. Macintyre，关于 p-adic 域中的可定义子集，J. Symbolic Logic 41（1976），第 3 期，605–610。[14] J.S.Milne，李代数、代数群与李群，课程讲义，2013。[15] Y. Peterzil 和 S. Starchenko，拓扑群、 μ-型及其稳定子，J. Eur. Math. Soc. 19（2017），第 10 期，2965–2995。[16] A. Pillay、N. Yao 和 Z. Zhang，关于 p-adically 闭域中可定义的群，预印本，arXiv:2601.20565v2。[17] J. Pas，一致的 p-adic 胞分解与局部 ζ 函数，J. Reine Angew. Math. 399（1989），137–172。[18] E. Walsberg 和 J. Ye，´Ez 域，J. Algebra 614（2023），611–649。[19] N. Yao 和 Z. Zhang，关于 o-极小群与 p-Adic 群的 Newelski 猜想，预印本，arXiv:2602.01810v2。