arXiv:2611.29565v1 [q-fin.CP] 22 Nov 2026

Mar近临界 INAR模型与粗糙 Hawkes–Heston 极限*

Xiaoyu Wang† Yingli Wang‡ Lingjiong Zhu§

2026年11月24日

摘要

我们基于一个近临界带标记整数值自回归（INAR）过程，为粗糙 Hawkes–Heston 模型开发了一种离散时间蒙特卡洛算法。我们采用分块快速傅里叶变换（FFT）方案实现该算法，在一个含有 N 个区间的网格上，每条路径仅需进行 $\mathcal{O}(N\log^2 N)$ 次运算即可计算激发卷积。我们证明，即期方差、对数价格和共同带标记点测度在分布上联合收敛至相应的粗糙 Hawkes–Heston 极限。我们证明欧式看涨期权和看跌期权价格收敛，也证明算术亚式期权和敲出看跌期权价格收敛至其连续监测下的价格。对于欧式期权，在四种粗糙度水平下，通过网格变换方法计算的一年期隐含波动率微笑均趋近于连续仿射基准。在相同的三个网格上进行的蒙特卡洛实验，将算术亚式期权和敲出看跌期权价格与更精细网格所得的基准价格进行比较，结果表明所提出算法效率较高。

1 引言

Hawkes 过程是一类自激点过程，其条件事件强度由基准率和过去事件产生的非负核函数贡献之和构成（Hawkes，1971）。在多元模型中，一种类型的事件也可以提高其他类型事件的到达率，从而使模型能够捕捉事件流之间的聚集效应和相互作用。它们广泛应用于金融领域，用于模拟交易、价格变化和订单簿动态（Hawkes，2018）。例如，Bacry 等人(2013) 使用相互激励点过程来模拟微观结构噪声以及资产价格之间的依赖关系；而Morariu-Patrichi 和 Pakkanen (2022) 则使用状态依赖 Hawkes 过程来描述订单流与限价订单簿状态之间的反馈。

改变报价的订单也可能改变后续订单的发生率。带标记 Hawkes 过程通过为每个事件附加大小或类型来描述这种反馈。令$\mathcal{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z)$记录空间 E中的事件时间和标记，并令 F 为新标记的分布，该标记独立于过去抽取。对于非负的基准强度 μ、滞后核函数 ϕ 和标记响应 $g:E\to\mathbb{R}_+$，可分离带标记Hawkes模型具有如下可预测强度：

$$\lambda_t=\mu(t)+\int_{[0,t)\times E}\phi(t-s)g(z)\,\mathcal{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z),$$

*数值实验中使用的代码可在以下位置获取 GitHub。

†香港科技大学（广州）金融科技学域，广州，广东，中华人民共和国； xiaoyuwang@hkust-gz.edu.cn

‡通讯作者。复旦大学数学科学学院，中华人民共和国上海。yingliwang@fudan.edu.cn§佛罗里达州立大学数学系，美国佛罗里达州塔拉哈西。zhu@math.fsu.edu

以及带标记补偿子 $\lambda_t \mathrm{d}t\, F(\mathrm{d}z)$。取值 $g \equiv 1$ 可恢复Hawkes(1971)提出的线性 Hawkes 模型。在 Hawkes 和 Oakes (1974)的移民—繁殖（分枝）解释中，标记为 z 的父事件以 $\phi(u)g(z)$ 的速率在滞后时间 $u > 0$产生子代。因此，同一个标记既可以决定即时价格响应，也可以决定未来订单的激发。Karabash 和 Zhu(2015)研究了带标记 Hawkes 过程的极限定理。Horst 和 Xu (2021)为带标记 Hawkes 点测度及其相关的脉冲噪声过程建立了函数型大数定律和中心极限定理。

带标记 Hawkes 模型也有一种离散时间类比模型。对于按区间记录的观测，基本量是整数计数。整数值自回归模型（INAR）通过稀疏化来传递计数（Alzaid 和 Al-Osh，1990）。带泊松子代的带标记 INAR(∞) 模型为区间 j 中第 k 个事件赋予标记 $\zeta_{j,\,k}$。给定截至区间 $n-1$ 的计数与标记历史$\mathcal{H}_{n-1}$，它满足

$$N_n \mid \mathcal{H}_{n-1} \sim \mathrm{Pois}\left(\mu_n + \sum_{j=0}^{n-1} \phi_{n-j} \sum_{k=1}^{N_j} g(\zeta_{j,k})\right), \qquad n \geq 1.$$

与 Hawkes 过程（Hawkes 和 Oakes，1974）类似，INAR模型也有一种移民-出生表示。这里，区间 n 中的移民服从泊松分布，均值为 $\mu_n \geq 0$，每个父事件独立贡献泊松子代，其均值为 $\phi_{n-j} g(\zeta_{j,\,k})$，其中$\phi_{n-j} > 0$ 且 $g:\ E \to \mathbb{R}_+$。新标记从 F中独立抽取。即使标记及其激励权重取实数，计数仍保持整数值。对于 $g \equiv 1$，这就是 Kirchner (2016) 用于近似连续时间 Hawkes 过程的泊松稀疏化 INAR 递推。若激励依赖于标记，则它属于 Wang(2022) 研究的离散时间带标记 Hawkes 模型，该研究证明了大数定律和中心极限定理。下面的模型结合了带符号常规计数和稀有带标记计数，其频率和激励权重均取决于网格间距。

近不稳定自激励也为随机波动率提供了一种机制。Jaisson 和 Rosenbaum (2015年从近不稳定 Hawkes 过程中得到了平方根扩散，而Jaisson 和 Rosenbaum (2016年则从重尾激励中得到了分数阶动力学。Gatheral 等(2018年记录了对数波动率的粗糙性。El Euch 等 (2018年将非对称订单流与杠杆效应及粗糙波动率联系起来。在 Hawkes 订单流框架中，Jusselin 和 Rosenbaum(2020年将无套利条件与宏观尺度下的幂律市场冲击和粗糙波动率联系起来。Horst 等 (2026a证明了重尾 Hawkes 强度经重新缩放后的收敛性，以及价格与波动率联合收敛到粗糙 Heston 模型；其证明使用了 C关于强度过程的紧性估计。

令 S_t 为贴现股价，且 $S_0 > 0$，$X_t :=\log(S_t/S_0)$ 为对数收益率，且 $A_t :=\int_0^t V_s \mathrm{d}s$ 为其连续鞅部分的二次变差，其中 V_t 为方差过程。我们称 V 为即期方差。El Euch 和 Rosenbaum El Euch and Rosenbaum (2019年的粗糙 Heston 模型采用分数阶核 $K_\alpha(t) := t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ 对于 $t > 0$ 和 $1/2 < \alpha < 1$，其动力学由下式给出：

$$X_t = \int_0^t \sqrt{V_s}\mathrm{d}B_s^S - \frac{1}{2}A_t, \tag{1.1}$$

$$V_t = G_0(t) + b\int_0^t K_\alpha(t-s)V_s\mathrm{d}s + \sqrt{c}\int_0^t K_\alpha(t-s)\sqrt{V_s}\mathrm{d}B_s^V, \tag{1.2}$$

其中，初始曲线 G_0 在 $[0,\infty)$ 上是确定的、连续且非递减的，且 $G_0(0) \geq 0$。下文的标记 INAR 缩放取 $G_0(t) = v_0 + \eta t^\alpha/\Gamma(1+\alpha)$，其中 $v_0,\ \eta \geq 0$。这里，$b < 0$ 是均值回复系数，$\sqrt{c}$ 是波动率的波动率。B^S 和 B^V 是标准

布朗运动，满足 $\mathrm{d}\langle B^S, B^V\rangle_t = \rho \mathrm{d}t$。负的 ρ 会产生杠杆效应，而 $\alpha - \frac{1}{2}$ 决定了 V 的粗糙度。

在离散时间下，Cai 等(2026) 从单变量累积 INAR 过程中导出了分数阶扩散极限。Wang 等人(2026a) 从双变量计数中得到了联合粗糙 Heston 价格与方差，并为欧式期权定价推导了精确格点变换。他们在第 4.3 节将网格监测的亚式期权和障碍期权价格与经典 Heston 基准进行了比较，基准取值为 $\alpha = 1$。在扩散驱动的 Volterra–Heston 模型中，Custers 等(2026) 研究了离散监测的算术亚式期权和几何亚式期权。

对于宏观跳跃动力学，Horst 和 Xu (2022) 从微观订单流中导出了带有自激式价格–波动率共跳的随机波动率模型，并针对外生和内生冲击分别采用泊松随机测度。Horst 等(2026b) 将持续性市场订单冲击与暂时性限价单冲击相结合，得到由额外泊松随机测度驱动的粗糙波动率，从而产生波动率尖峰和尖峰簇。

El Euch 和 Rosenbaum (2019年通过分数阶 Riccati 方程表达粗糙 Heston 特征函数。 Abi Jaber 等人 (2019年推导出仿射 Volterra 过程的傅里叶–拉普拉斯泛函。 Abi Jaber (2021建立了具有局部可积核和跳跃的仿射随机 Volterra 方程的弱存在性、唯一性和稳定性。在粗糙 Hawkes–Heston 模型中，Bondi 等人 (2024，第 3–4 节）得到了欧式股票期权和 VIX 衍生品的变换公式。敲出期权还会记录中间时刻的价格下跌是否触及其障碍。例如，大小为 z 的共同标记会使股票价格跌至水平 L 以下，只要 $S_{t-} > L > S_{t-}\mathrm{e}^{-\Lambda z}$，无论到期日的价格如何。

Wang 等人 (2026b从连续时间重尾带标记 Hawkes 系统中得到该模型。他们的命题 4.8 证明了 C-中心化常规订单流的紧性。他们的定理 5.1 给出了即期方差在 $L^2(0,\ 1)$、对数价格在 J_1 以及共同跳跃测度在模糊拓扑下的联合收敛。他们的图 2 比较了两条短期期限 SPX 微笑曲线。

Bondi 等人（2024）的粗糙 Hawkes–Heston 模型在两个粗糙 Heston 方程 (1.1)-(1.2) 中加入了一个共同带标记点测度 J。其可预测补偿子为 $V_s\mathrm{d}s\,\nu(\mathrm{d}z)$。我们~考虑定义在 $(0,\infty)$ 上、具有有限二阶矩的有限测度 ν，并记 $\mathrm{J}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z) := \mathrm{J}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z) - V_s\mathrm{d}s\,\nu(\mathrm{d}z)$。在补偿形式下，方程为

$$
\begin{aligned}
X_t &= \int_0^t \sqrt{V_s}\mathrm{d}B_s^S - \left[\frac{1}{2} + \int_{(0,\infty)} \left(\mathrm{e}^{-\Lambda z} - 1 + \Lambda z\right)\nu(\mathrm{d}z)\right] A_t - \Lambda \int_{(0,t]\times(0,\infty)} z\,\widetilde{\mathcal{J}}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z),\\
V_t &= G_0(t) + b\int_0^t K_\alpha(t-s)V_s\mathrm{d}s + \sqrt{c}\int_0^t K_\alpha(t-s)\sqrt{V_s}\mathrm{d}B_s^V\\
&\qquad + \xi\int_{[0,t)\times(0,\infty)} K_\alpha(t-s)z\,\widetilde{\mathcal{J}}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z),
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

其中，B^S、B^V是相关系数为 ρ 的标准布朗运动，$G_0(0) = v_0$，且 $G_0(t) - G_0(s) = \eta\int_s^t K_\alpha(u)\,\mathrm{d}u \geq 0$，其中 $0 \leq s < t$ 满足 Bondi 等人（2024，假设 2.2），$b < 0$ 是均值回复系数，$\sqrt{c}$ 是波动率的波动率。时刻 s 的标记 z 会使对数价格变动 $-\Lambda z$，其中 $\Lambda \geq 0$。它对方差方程中原始标记积分的贡献是函数 $t \mapsto \xi z K_\alpha(t-s)$，其中 $t > s$，且 $\xi > 0$。该项进入即期方差，而即期方差决定未来标记的到达率。方差方程对几乎所有 t 都成立。令 $\nu = 0$，即可恢复粗糙 Heston 模型 (1.1)-(1.2)。方程 (2.13)–(2.14) 用鞅驱动项和原始标记表示跳跃模型。

然而，粗糙 Hawkes–Heston 模型（1.3）是一个连续时间模型，在实践中需要一种算法来实现它。最近，Serva （2025，第 3 章）提出了一种蒙特卡洛

方案，该方案利用分数阶核的多因子近似、Hawkes 跳跃模拟以及针对对数价格的 Euler 时间步进来实现粗糙 Hawkes–Heston 模型。在本文中，我们采用了一种新颖的方法，提出带标记 INAR 过程作为一种可实际实现的算法，用于近似连续时间粗糙 Hawkes–Heston 模型（1.3）。我们建立了严格的收敛结果，为此提供坚实的理论基础。我们的数值方案从带标记 INAR 过程出发，逐区间生成计数和标记，同一区间内的事件共享一个记录时间。据我们所知，这是第一个基于带标记 INAR模型、针对粗糙 Hawkes–Heston 模型的数值方案，并且对即期方差、对数价格和共同带标记点测度的联合收敛给出了严格证明。我们使用分治快速傅里叶变换算法计算激励卷积来实现该方案（第 4.2 节）。

贡献

1. 我们提出了一种基于近临界带标记整数值自回归（INAR）过程的粗糙 Hawkes–Heston 模型新型离散时间蒙特卡洛算法（第 2.1节）。定理 2.2证明，带标记 INAR 模型的即期方差、对数价格和共同带标记点测度依分布联合收敛至其粗糙 Hawkes–Heston 极限。相应的拓扑分别为 $L^2(0,T)$上的范数拓扑、Skorokhod J_1 拓扑和模糊拓扑。大小为 z 的极限标记在时刻 s 产生对数价格跳跃 $-\Lambda z$，并在方差卷积中产生响应 $\xi z K_\alpha(t-s)$， $t>s$。

2. 推论 3.1 证明了欧式看涨期权和看跌期权价格的收敛。我们利用带标记 INAR 变换计算一年期欧式期权隐含波动率微笑，并将其与连续仿射基准进行比较（图 1）。在四种粗糙度水平下，随着网格从 128 个区间细化至512个区间，再细化至 2,048 个区间，十个执行价上的隐含波动率最大绝对差均有所减小（表 2）。

3. 对于推论 3.3所涵盖的路径依赖期权，随着网格间距趋于零，在带标记 INAR 网格上计算的期权价格收敛于连续监测下的价格。据我们所知，这是粗糙 Hawkes–Heston 模型中关于路径依赖期权价格的首个收敛结果，其中标记同时驱动价格跳跃和方差激励。对于敲出看跌期权，该收敛在每个下障碍 $L\in(0,S_0)$ 处均成立，因为极限运行最小值在该处没有原子点质量（引理 3.2）。对于表3中列出的算术平均亚式看跌期权和敲出看跌期权，2,048区间的蒙特卡洛估计值与16,384区间的参考值相差0.4–2.4 个基点的即期价格绝对值。

论文结构 第 2 节利用带标记 INAR 过程构建带标记订单流模型，并陈述其联合尺度极限。第 3.1 节证明欧式期权价格的收敛性，第 3.2 节证明路径依赖期权价格的收敛性。第 4.1 节比较网格模型与极限模型的一年期欧式期权隐含波动率微笑。第 4.2节考察不同监测网格下的亚式及敲出看跌期权价格。第 5 节作总结。所有技术性证明均见附录 A。

记号 固定一个时间范围 $T>0$，令 $h=T/N$、 $N\in\mathbb{N}$，并令 $t_n=nh$。对于单边序列和函数，分别记作

$$(f*g)_n:=\sum_{j=0}^{n} f_{n-j}g_j,\qquad (f*g)(t):=\int_0^t f(t-s)g(s)\mathrm{d}s.$$

积分分数核为

$$G_\alpha(t) := \int_0^t K_\alpha(s)\mathrm{d}s = \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

记 D 为带有 Skorokhod J_1 拓扑的右连续且有左极限的路径空间，记 M_p 为 $[0,T]\times(0,\infty)$ 上带有模糊拓扑的局部有限点测度。估计中的常数可能依赖于固定的模型参数和 T。

2 主要结果

我们使用带标记 INAR 过程构建订单流模型。随后，我们确定其联合极限为粗糙 Hawkes–Heston 模型。第 3 节接着将对数价格收敛应用于欧式期权，以及在期权存续期内进行监测的合约。

2.1 带标记 INAR 模型

固定 $1/2<\alpha<1$, $v_0,\eta\ge 0$, $b<0$, $c,\xi>0$ 和 $\Lambda\ge 0$。设 ν 为 $(0,\infty)$ 上的有限正测度，满足

$$m_j := \int_{(0,\infty)} z^j \nu(\mathrm{d}z) < \infty, \qquad j=0,1,2.$$

这里，c 是连续方差驱动过程每单位活动量的方差。其扩散系数为$\sqrt{c}$。将滞后分布指定为其尾部

$$\begin{aligned} s_0 &:= 1, \quad s_n := \frac{n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad n\ge 1,\\ \phi_0 &:= 0, \quad \phi_k := s_{k-1}-s_k, \quad k\ge 1. \end{aligned} \tag{2.1}$$

这是Wang 等人（2026a，定义 2.1）的格点分布。选择一个符号不对称性 $\beta>1$ 和一个相对向上跳幅 $0<q\le 1$。定义

$$\begin{gathered} \omega_+ := \frac{2}{1+q}, \qquad \omega_- := \frac{2q}{1+q}, \qquad (\gamma_+,\gamma_-) := (1,\beta), \qquad (p_+,p_-) := (q,-1),\\ D_0 := \sum_{i\in\{+,-\}} \omega_i\gamma_i, \qquad H := \sum_{i\in\{+,-\}} \omega_i p_i^2,\\ \ell_0 := \frac{\sum_{i\in\{+,-\}}\omega_i\gamma_i^2}{cD_0^2}, \qquad \ell := \ell_0 h^{1-2\alpha}, \qquad r_i := \omega_i \ell, \end{gathered} \tag{2.2}$$

并令

$$y_i := p_i\sqrt{\frac{h}{\ell H}}, \quad g_i := \frac{h^{1-\alpha}\gamma_i}{\ell D_0}, \quad d := \xi m_1 - b, \quad a := (1+dh^\alpha)^{-1}. \tag{2.3}$$

令 $\mathcal{F}_n$ 包含截至区间 $n-1$的所有结果。区间 n 中的活动 V_n 关于 F_n可测。给定 $\mathcal{F}_n$，两个常规计数

$$N_{n,i} \sim \mathrm{Pois}(r_i V_n),$$

且具有均值 $hV_n\nu(\mathrm{d}z)$ 的泊松随机测度 Π_n 彼此独立。令

$$Z_n := \int_{(0,\infty)} z\Pi_n(\mathrm{d}z).$$

具有空历史和 $n = 0, \dots, N-1$ 的可预测递推为

$$\begin{aligned} H_n &:= a\left(v_0 s_n + \eta h^{\alpha}\right), \\ Y_n &:= a h^{\alpha-1}\left(\sum_{i\in\{+,-\}} g_i N_{n,i} + \xi Z_n\right), \\ V_n &:= H_n + \sum_{j=0}^{n-1} \phi_{n-j} Y_j. \end{aligned} \tag{2.4}$$

特别地， $V_0 = H_0$ 在网格上且 $V_0 \to v_0$。对数价格增量采用相同的聚合标记，其中$X_0^h = 0$, $S^h = S_0 \exp X^h$,

$$\begin{aligned} D_h &= \sum_{i\in\{+,-\}} r_i\left(\mathrm{e}^{y_i} - 1\right) + h\int_{(0,\infty)} \left(\mathrm{e}^{-\Lambda z} - 1\right)\nu(\mathrm{d}z), \\ \Delta X_n &= \sum_{i\in\{+,-\}} y_i N_{n,i} - \Lambda Z_n - D_h V_n, \\ X_t^h &= \sum_{\substack{0\le n<N \\ t_{n+1}\le t}} \Delta X_n. \end{aligned} \tag{2.5}$$

价格在区间的右端点发生变化，其标记则首先在下一个区间中改变活动。一个区间内的多个标记都会全部保留。常规价格创新的条件方差为hV_n。纳入条件独立标记和后，有 $\mathrm{Var}(\Delta X_n \mid \mathcal{F}_n) = hV_n(1 + \Lambda^2 m_2)$。

令 $E := \{+,-\} \cup (0,\infty)$为事件类型空间，其中 $+$和 $-$分别标记两种常规事件类型。将 ν 在$\{+,-\}$上扩展为零。定义单位活动量的平均到达测度，以及类型为 $e \in E$ 的父事件的激励权重如下：

$$\begin{aligned} \mu_h &:= r_+\delta_+ + r_-\delta_- + h\nu, \\ w_h(i) := a h^{\alpha-1} g_i \quad (i \in \{+,-\}), &\qquad w_h(z) := a h^{\alpha-1}\xi z \quad (z \in (0,\infty)). \end{aligned} \tag{2.6}$$

$\widehat{\ }$记$N_{n,i} := N_{n,i} - r_i V_n$ 为中心化常规计数。下一个命题根据（2.6）计算平均后代算子，并根据（2.3）中的载荷计算常规创新的协方差。

命题 2.1。 活动量递推 （2.4）是非负的。对所有滞后阶数求和后，平均后代算子为

$$(\mathcal{M}_h f)(e) = w_h(e)\int_E f(e')\mu_h(\mathrm{d}e'), \qquad f \in L^2(E,\mu_h), \quad \mu_h\text{-a.e. } e \in E. \tag{2.7}$$

其谱半径为 $a\left(1 + \xi m_1 h^{\alpha}\right) < 1$。贴现股票 S^h 是鞅。两个常规创新的条件协方差矩阵为 hV_nQ, 即

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i\in\{+,-\}} (g_i, y_i)^{\top}\widehat{N}_{n,i} \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right) = V_n \sum_{i\in\{+,-\}} r_i (g_i, y_i)^{\top}(g_i, y_i) = hV_nQ, \tag{2.8}$$

其中 hV_n 是区间的活动时间增量，且

$$Q = \begin{pmatrix} c & \rho\sqrt{c} \\ \rho\sqrt{c} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \rho = -\frac{(\beta-1)\sqrt{q}}{\sqrt{(1+q)(1+\beta^2 q)}}. \tag{2.9}$$

每个 $\rho \in (-1, 0)$ 均可达到。对于 $m_0 > 0$，当 $h \downarrow 0$ 时，单位活动量的到达率中带标记的部分，以及相对于类型为 $i \in$ 的常规父事件而言，固定标记 $z > 0$ 的子代权重 $\{+, -\}$ 满足

$$\begin{aligned} \frac{\mu_h((0,\infty))}{\mu_h(E)} &= \frac{hm_0}{2\ell + hm_0} = \frac{m_0 h^{2\alpha}}{2\ell_0 + m_0 h^{2\alpha}} \sim \frac{m_0}{2\ell_0} h^{2\alpha}, \\ \frac{w_h(z)}{w_h(i)} &= \frac{\xi z}{g_i} = \frac{\xi z \ell_0 D_0}{\gamma_i} h^{-\alpha}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

证明。 证明见附录A.1。 □

我们使用正则鞅 B^h, W^h、带标记事件的累计数量和质量 C^h, J^h，以及可预测活动时钟 A^h。它们均从零开始，在区间端点之间保持不变，其增量为

$$\begin{aligned} (\Delta B_n, \Delta W_n) &= \sum_{i \in \{+,-\}} (g_i, y_i) \widehat{N}_{n,i}, \\ (\Delta C_n, \Delta J_n) &= (\Pi_n((0,\infty)), Z_n), \\ \Delta A_n &= h V_n, \\ \Delta M_n &= \Delta B_n + \xi (Z_n - m_1 h V_n). \end{aligned} \tag{2.11}$$

对于保留标记的点测度，令

$$\mathcal{J}^h(\mathrm{d}t, \mathrm{d}z) := \sum_{n=0}^{N-1} \delta_{t_{n+1}}(\mathrm{d}t) \Pi_n(\mathrm{d}z).$$

令 $V^h(t) := V_{\lfloor t/h \rfloor}$ on $[0, T)$ 和 $V^h(T) := V_{N-1}$。对于任意选择的 $V^h(T)$，该阶梯函数定义了$L^2(0, T)$中的同一元素，因为 $\{T\}$ 的勒贝格测度为零。

为将网格递推表示为极限方差方程的形式，令

$$U_0 := 1, \qquad U_n := \sum_{j=1}^{n} \phi_j U_{n-j}, \qquad u_n := U_n - \mathbf{1}_{\{n=0\}}.$$

对于 $0 \le t < T$，网格方差的确定性部分及其极限为

$$G_h(t) = a \left(v_0 + \eta h^{\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor t/h \rfloor} U_j \right), \qquad G_0(t) = v_0 + \eta G_\alpha(t).$$

更新序列 U 以及（2.11）中的补偿增量给出，对于 $0 \le n < N$，

$$V_n = G_h(t_n) + a \sum_{j=0}^{n-1} h^{\alpha-1} u_{n-j} (b h V_j + \Delta M_j). \tag{2.12}$$

附录 A.1 中的引理 A.2由（2.12）推导出（2.4）。

2.2 联合粗糙 Hawkes–Heston 极限

设 V是 $L^2(0, T)$ 中几乎处处非负的随机元素，且具有连续适应积分

$$A_t := \int_0^t V_s \mathrm{d}s.$$

在随机积分和补偿子中，我们使用 V 的可预测版本：在极限 $n(A_t - A_{(t-1/n)^+})$ 存在处取其有限值，其他地方取零。勒贝格微分定理表明，该版本几乎处处等于 V。设 B, W 为从零开始的连续局部鞅，其方差括号矩阵为 QA，顺序为 B, W。设 $\mathcal{J}$为一个在时间零时没有标记、时间上简单的点测度，其在同一滤过下的补偿子为 $V_s\mathrm{d}s\,\nu(\mathrm{d}z)$。设

$$J_t := \int_{(0,t]\times(0,\infty)} z\mathcal{J}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z), \qquad C_t := \mathcal{J}((0,t]\times(0,\infty)),$$
$$M_t := B_t + \xi\left(J_t - m_1 A_t\right), \qquad \kappa := \frac{1}{2} + \int_{(0,\infty)} \left(\mathrm{e}^{-\Lambda z} - 1\right)\nu(\mathrm{d}z).$$

目标系统为

$$V(t) = G_0(t) + \int_0^t K_\alpha(t-s)bV_s\mathrm{d}s + \int_{[0,t)} K_\alpha(t-s)\mathrm{d}M_s, \tag{2.13}$$
$$X_t = W_t - \Lambda J_t - \kappa A_t, \qquad S_t = S_0\mathrm{e}^{X_t}. \tag{2.14}$$

方差方程（2.13）是在 $L^2(0,T)$ 中的等式。其卷积积分对勒贝格几乎处处的 $t\in(0,T)$ 有定义。在布朗表示中，连续系数为 $\sqrt{c}V_t$和$\sqrt{V_t}$，其相关系数为 ρ。事实上，将鞅归一化

$$\frac{B}{\sqrt{c}}, \qquad \frac{W - \rho B/\sqrt{c}}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

通过在 $V^{-1/2}$ 上积分 $\{V>0\}$。在 $\{V=0\}$ 上，用扩张空间上的独立二维布朗运动填补两个缺失的括号。所得连续鞅的括号为 tI_2，因此由列维刻画可得两个布朗驱动过程。对（2.14）应用伊藤公式可得

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_{t-}} = \mathrm{d}W_t + \int_{(0,\infty)} \left(\mathrm{e}^{-\Lambda z} - 1\right)\left(\mathcal{J}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z) - V_t\nu(\mathrm{d}z)\mathrm{d}t\right),$$

因为连续二次变差贡献了 $1\ 2\mathrm{d}A_t$，而原始标记使股票乘以 $\mathrm{e}^{-\Lambda z}$。在进行标记变换 $y=\xi z$ 后，补偿子中的标记测度变为 ν 在 $z\mapsto\xi z$ 下的推前测度。按照 Bondi 等人 (2024）的记号，方差驱动过程跳跃 y，而对数价格跳跃 $-(\Lambda/\xi)y$。

根据 Wang 等人（2026a，命题 2.3），定义两种常规事件类型 $i\in\{+,\ -\}$ 的归一化计数和中心化鞅如下：

$$\begin{aligned} L_t^{h,i} &:= \frac{h}{r_i}\sum_{\substack{0\le n<N\\ t_{n+1}\le t}} N_{n,i}, \\ Z_t^{h,i} &:= \sqrt{\frac{h}{r_i}}\sum_{\substack{0\le n<N\\ t_{n+1}\le t}} \widehat{N}_{n,i}, \qquad \mathbf{Z}^h := \left(Z^{h,+}, Z^{h,-}\right)^\top. \end{aligned} \tag{2.15}$$

方程（2.11）和（2.15给出 $(B^h,\ W^h)^\top = \mathsf{P}\mathbf{Z}^h$，其中

$$\mathsf{P}_{\cdot i} := \sqrt{r_i/h}\,(g_i, y_i)^\top = \left(\frac{\gamma_i\sqrt{\omega_i}}{D_0\sqrt{\ell_0}}, \frac{p_i\sqrt{\omega_i}}{\sqrt{H}}\right)^\top, \qquad i\in\{+,-\}. \tag{2.16}$$

该矩阵与 h 无关，并且根据（2.8），$\mathsf{P}\mathsf{P}^\top = Q$。特别是，$\mathsf{P}$ 可逆，因为 $|\rho| < 1$。

下面的定理确定了网格方差、正则鞅、对数价格和带标记点测度的联合极限，即系统 (2.13)–(2.14)。此外，该定理还表明，两个归一化的常规计数都收敛到同一个活动时钟，而其中心化波动则保留了式 (2.16) 中的协方差结构。

定理 2.2 (联合尺度极限)。 对于 (2.1)–(2.3)中的参数，

$$\left(V^h, B^h, W^h, X^h, \mathcal{J}^h\right) \implies (V, B, W, X, \mathcal{J})$$

在乘积空间中

$$L^2(0,T) \times D([0,T], \mathbb{R}^3) \times M_p.$$

满足 (2.13)–(2.14)的极限联合分布是唯一的。时钟 A^h 联合收敛到 A，在 D中具有连续极限。式 (2.15)中的两个计数均联合收敛到 A。正则鞅向量联合收敛到$\mathbf{Z} = \mathsf{P}^{-1}(B, W)^\top$，其中 P 如式 (2.16) 所示，且括号为 $I_2 A$，相对于联合滤过。

证明。 证明见附录A.2.1。 □

3 期权价格

3.1 欧式期权价格

对于 J_1 拓扑，终值映射是连续的，因此定理2.2 给出欧式看跌期权价格的收敛。随后，利用两种模型中贴现股票的鞅性质，通过看跌-看涨平价可得欧式看涨期权价格的收敛。

推论 3.1 （欧式期权价格）。在定理 *2.2*的假设下，对每个执行价$K > 0$ 和到期日 $T > 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \mathbb{E}\left[\left(K - S_T^h\right)^+\right] &= \mathbb{E}\left[(K - S_T)^+\right], \\ \lim_{h \downarrow 0} \mathbb{E}\left[\left(S_T^h - K\right)^+\right] &= \mathbb{E}\left[(S_T - K)^+\right]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

证明。证明见附录 A.3。论证还验证了下文用于算术平均亚式看涨期权的恒等式 $\mathbb{E}[S_t] = S_0$。 □

3.2 路径依赖期权价格

令 $S_0 > 0$，并令 $K > 0$ 为以贴现股票单位计的执行价。对于定义在 $[0,T]$上的正的右连续有左极限的价格路径s，定义其算术平均和运行最小值如下:

$$\overline{s}_T := \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\mathrm{d}t, \qquad \underline{s}_T := \inf_{0 \le t \le T} s(t).$$

采用（2.5）中的价格约定，带标记 INAR 模型的相应量恰好为

$$\overline{S}_T^h := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_{t_n}^h, \qquad \underline{S}_T^h := \min_{0 \le n \le N} S_{t_n}^h. \tag{3.2}$$

合约	$F(s)$
算术平均亚洲看跌期权	$(K-\bar{s}_T)^+$
算术平均亚式看涨期权	$(\bar{s}_T-K)^+$
敲出看跌期权	$(K-s(T))^+\mathbf{1}_{\{s_T>L\}}$

表1：路径依赖期权的收益函数。

T时刻的价格进入最小值。由于每笔收益都记录在其所在区间的右端点，因此它在时间平均值中的权重为零。我们在每个网格日期监测下障碍，因此在连续时间极限下，监测网格也趋于零。

当最小值等于障碍时，敲出期权的收益可能不连续。为了排除初始价格下方存在原子点质量的情况，我们对方差、其连续驱动过程和标记进行条件化，然后利用对数价格中剩余的高斯分量。

引理 3.2。 在定理 *2.2*的假设下，对于 $0<L<S_0$,

$$\mathbb{P}(\underline{S}_T=L)=0.$$

证明。 证明见附录A.4。 □

接下来，我们研究带标记 INAR 模型下路径依赖期权价格向粗糙 Hawkes–Heston 模型下相应价格的收敛。亚式期权的收益取决于时间平均值。向下敲出看跌期权的回扣为零，且触及障碍时即被敲出。其收益函数汇总于表 1。

下面的推论结合定理2.2 和引理 3.2 ，证明表1中三种收益对应的网格价格均收敛。

推论 3.3（路径依赖期权价格）。 在定理 *2.2*的假设下，固定执行价 $K>0$ 和下障碍 $0<L<S_0$。对于表 *1*中的每种收益，

$$\lim_{h\downarrow 0}\mathbb{E}\left[F\left(S^h\right)\right]=\mathbb{E}[F(S)]. \tag{3.3}$$

证明。 证明见附录A.5。 □

4 数值实验

两项实验的到期日为 $T=1$，单位远期价格为 $F=S_0=1$，INAR网格包含 $N=$128、512、2,048个区间。除粗糙度外，宏观参数均遵循 Bondi 等人（2024，表1）的设定；方差驱动过程采用单位标记载荷和指数标记，$b=-1.812$,$c=0.115$, $\rho=-0.731$, $\Lambda=0.276$, $v_0=0.0079$, $\eta=0.049$, $\xi=1$，以及 $\nu(\mathrm{d}z)=\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z$.对于每个 α，我们设定 $\beta=8$ 并在 $0<q<1/8$上求解（2.8），得到 $q\simeq 0.041605$。

4.1 一年期欧式期权隐含波动率微笑

图1 比较了带标记 INAR 模型与 Serva (2025) 的多因子欧拉格式改编方案所得到的一年期欧式期权微笑曲线，以及粗糙 Hawkes–Heston 模型的基准结果。

沿用 Wang 等人 (2026a，图1)，我们将 α 取为 0.55、0.62、0.80、0.95。每个取值下，离散方差方程采用式（ G_h 中的 2.12），该方程一致收敛于初始曲线$G_0(t) = v_0 + \eta G_\alpha(t)$。

对于有限网格曲线，令 $h := 1/N$， $w := 1/2 + \mathrm{i}u$，并令 $\Phi_h(w) := \mathbb{E}[\exp(wX_1^h)]$。对（2.4）–（2.5）向后条件化，可得递推式，对 $0 \le n < N$，

$$
\begin{aligned}
x_n &= ah^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{n-1} \phi_{n-j} U_j^\star, \\
U_n^\star &= \sum_{i\in\{+,-\}} r_i \left(\mathrm{e}^{wy_i + x_n g_i} - 1\right) + h\left(\frac{1}{1+\Lambda w - \xi x_n} - 1\right) - wD_h, \\
\Phi_h(w) &= \exp\left(\sum_{n=0}^{N-1} H_{N-1-n} U_n^\star\right).
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

事实上，积分掉区间 $m = N-1-n$ 时，后续区间会为 Y_m贡献系数 $s_n^\star = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_{n-j} U_j^\star$。取 $x_n = ah^{\alpha-1} s_n^\star$ 时，条件泊松公式给出

$$
\mathbb{E}[\exp\left(w\Delta X_m + s_n^\star Y_m\right) \mid \mathcal{F}_m] = \exp\left(V_m U_n^\star\right).
$$

将（ V_m 2.4）中的内容代入，会保留常数项 $H_m U_n^\star$ ，并将 $\phi_{m-l} U_n^\star$ 加到每个更早的 Y_l的系数中，$0 \le l < m$。向后归纳得出（4.1）的最后一行。

每一步条件化中的标记积分在此轮廓上均有限。事实上 $x_0 = 0$。若$\mathrm{Re}\, x_n \le 0$，则$\mathrm{Re}(1 + \Lambda w - \xi x_n) \ge 1$。由于$\mathrm{Re}\, w = 1/2$ 且$\mathrm{e}^{v/2} - 1 \le (\mathrm{e}^v - 1)/2$ 对于实数 v， （2.5）给出

$$
\mathrm{Re}\, U_n^\star \le \sum_{i\in\{+,-\}} r_i \left(\mathrm{e}^{y_i/2} - 1\right) + h \int_{(0,\infty)} \left(\mathrm{e}^{-\Lambda z/2} - 1\right) \nu(\mathrm{d}z) - D_h/2 \le 0.
$$

非负滞后权重现在给出 $\mathrm{Re}\, x_{n+1} \le 0$ ，这是由归纳法得到的。对于连续曲线，我们使用 $\Phi(w) = \mathbb{E}[\exp(wX_1)]$ ，通过 Bondi 等人 (2024，定理3.1和3.3中的 Riccati–Volterra变换进行计算。我们用129个指数函数（包括一个常数项）之和近似分数阶核，并在 1,024 个时间区间上采用线性乘积积分。对于 $\Psi = \Phi_h$ 或 Φ且 $k = \log(K/F) \in \mathbb{R}$，归一化看涨期权价格由 Bondi 等人 (2024，命题3.5中的反演公式给出，

$$
\frac{C(1,K)}{S_0} = 1 - \frac{\mathrm{e}^{k/2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}uk}\Psi(1/2 + \mathrm{i}u)\right]}{u^2 + 1/4} \mathrm{d}u.
$$

为说明该公式适用于两个模型中的每一个执行价，记 x 为终端对数收益。于是 min(e x k $= (x+k)/2$ $-|x-k|/2$ $-|y|/2$ $\pi^{-1}\int_0^\infty$ uy $u^2 + ,$e) e e 。 $1/4$ $^{-1}$ $u =$ $^{-|y|/2}$ $\mathbb{E}[\ ^x] = 1$ $\mathbb{E}[\ ^{x/2}] \le 1$

对 e 进行傅里叶反演，得到 cos( )( ) d e 。由于 e 和 e ，在对 $(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^k)^+ = \mathrm{e}^x - \min(\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^k)$ 取期望时，可应用 Fubini定理。我们截断于 $u = 480$ ，并在宽度为4的区间上应用高斯–勒让德求积：第一个区间使用32个节点，其余每个区间使用16个节点。

图 1 绘制了512区间变换曲线和连续变换曲线在101个等距对数远期执行价上的结果，范围为 $[-0.5, 0.5]$。为检验 512区间曲线，我们在该网格上针对每个 $2^{20} = 1,048,576$ 模拟条独立路径 α。相同的路径对全部11个执行价进行定价 $k = -0.5, -0.4, \ldots, 0$。5 在每个面板中。对于 $k < 0$ ，我们采用看跌期权，否则采用看涨期权。为检验该网格上的二阶矩，令 $R_h(x)$ 表示定义 $U_n^\star$ 于（4.1）右侧的表达式，在 $w = 2$ 和 $x_n = x$处。则有

表2：格点变换与连续仿射基准在十一个一年期执行价上的最大绝对隐含波动率差，以波动率百分点计。

α	128 步	512 步	2，048 步
0.55	1.119	0.510	0.234
0.62	0.790	0.326	0.137
0.80	0.322	0.106	0.035
0.95	0.153	0.041	0.011

对于 $x < 1+2\Lambda$，该值递增，因为 $\xi = 1$。对于四组参数组，代入（2.3）可得$R_h(1) \ < h^{1-\alpha}/a$。从 $x_0 = 0$开始，滞后权重为非负且总和至多为1，因此在每一步都有 $x_n \le 1$ 。标记分母至少为 $2\Lambda > 0$，因此 $\Phi_h(2) \ < \infty$ ，且收益具有有限方差。我们在样本均值以及其正态区间的端点处对Black价格进行反演，在两侧分别使用1。96 个估计标准误，从而得到隐含波动率的逐点渐近95%区间。该512区间变换值在44个执行价–参数组组合中的42个落在区间内。两个例外出现在 $\alpha = 0.62$ 和 $k \in \{0。4，0。5\}$。

多因子Euler比较使用相同的参数、512步，以及每个 2^{20} 值对应的 α 条独立路径。我们使用 64 个由 Serva(2025，第2.1节）的几何求积得到的指数因子，并为第一个求积区间以下的核质量添加一个常数因子。在每个时间步上，我们冻结跳跃强度的连续部分，并将左端点强度用作初始稀疏化界。跳跃因子在各提议之间衰减，并在每次接受一个标记后更新。我们采用 10^{-5} 的方差下限，该下限来自 Serva (2025，算法A.1）。令 V_n^{E} 表示设有下限的左端点方差， Z_n^{E} 表示该时间步内接受的标记总量，并令 $(G_n^V，\ G_n^S)$ 表示相关系数为 ρ 的标准正态变量对。Euler更新采用连续时间方程中的扩散系数和跳跃补偿。令 m_j 和 x_j 分别表示因子 j 的权重和衰减率，则有

$$C_{j,n+1} = \mathrm{e}^{-x_j h} C_{j,n} + m_j \left((b-1) V_n^{\mathrm{E}} h + \sqrt{c V_n^{\mathrm{E}} h}\, G_n^V \right),$$

$$\Delta X_n^{\mathrm{E}} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\Lambda}{1+\Lambda} \right) V_n^{\mathrm{E}} h + \sqrt{V_n^{\mathrm{E}} h}\, G_n^S - \Lambda Z_n^{\mathrm{E}}.$$

这里 $C_{j,\ n}$ 是因子 j 的连续贡献。相同的标记会进入跳跃因子和对数价格。我们在与 INAR模拟相同的十一个执行价处，对蒙特卡洛价格及其逐点区间进行反演。按 α 递增排列时，欧拉估计与仿射参考值之间的最大绝对差异分别为 0。564、0。266、0。076 和 0。039 个波动率百分点。方差下限分别在 44。82%、34。82%、10。27% 和 1。57% 的网格更新中生效。

表 2 比较了格点变换与连续基准在相同的十一个执行价下的结果。对于每个 α，随着每次网格细化，最大绝对隐含波动率差均有所下降。在所有三个网格上，对于 α的四个取值，最大差异均出现在 $k = 0.1$ 处。

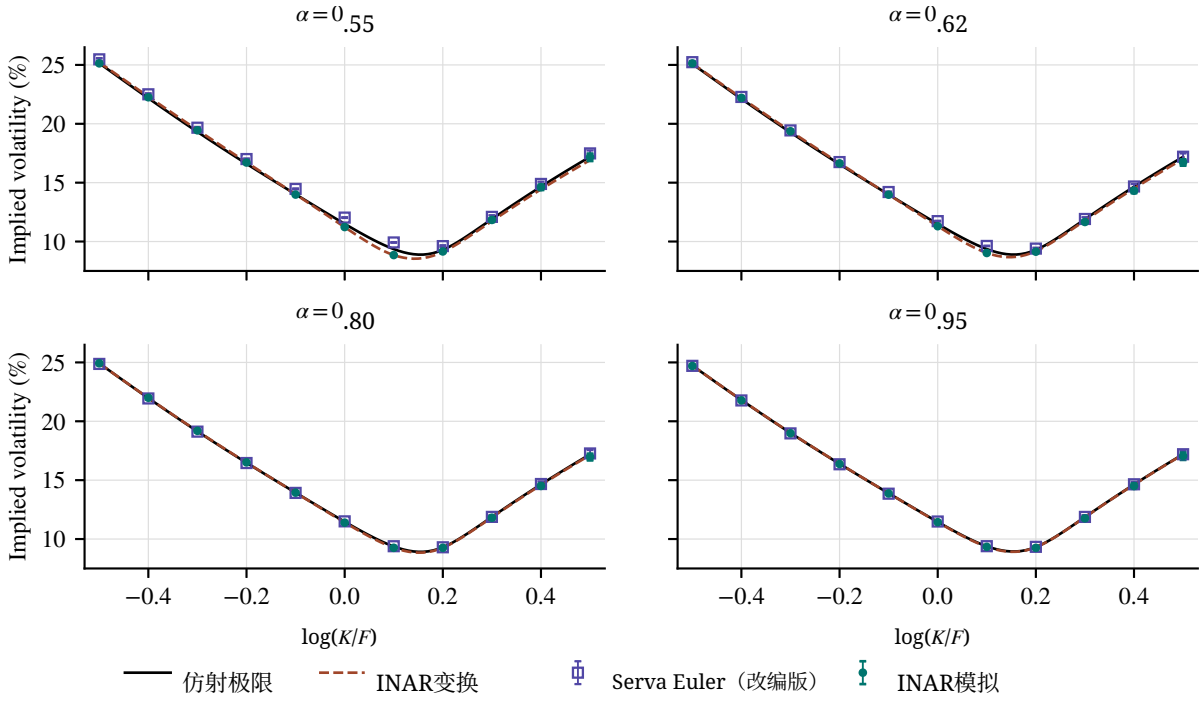

图1：指数标记律下的一年期微笑。变换曲线使用了101个对数远期执行价。带标记的INAR模拟和改编版Serva Euler方案给出了11个执行价处的蒙特卡洛估计值和逐点95%区间。两种模拟以及INAR变换均使用512个时间步。

4.2 算术亚式和敲出看跌期权

我们对执行价为 $K = 1$、到期时间为 $\alpha = 0.62$ 和 0.80 的算术平均亚洲看跌期权和敲出看跌期权进行定价。向下敲出障碍为 $L = 0.85$。在 $K = S_0$ 时，亚式期权看跌-看涨平价表明亚式看涨和看跌期权价格相同，因此我们报告看跌期权价格。

通过分块卷积进行模拟。 常规计数和共同标记进入同一个标量激励 Y_j（见 2.4）。因此，在抽取分箱 n之前所需的历史是单侧卷积 $\sum_{j=0}^{n-1} \phi_{n-j} Y_j$。我们将 Wang 等人（2026a，第 4.1 节，算法 1）的分治快速傅里叶变换算法应用于这种带标记的激励。考虑一个从 d开始、包含 m个分箱的完成块，后面接着一个至多包含 d 个分箱的区块。它对第二区块中分箱 $m + d + k < N$的活动的贡献为

$$\sum_{i=0}^{d-1} \phi_{d+k-i} Y_{m+i} = \left[\mathrm{IFFT}_{2d}\left(\mathrm{FFT}_{2d}(y) \odot \mathrm{FFT}_{2d}(p)\right)\right]_{d+k}, \qquad 0 \le k < d, \tag{4.2}$$

其中 $y = (Y_m, \ldots\ldots, Y_{m+d-1}, 0, \ldots\ldots, 0)$ 和 $p = (\phi_0, \ldots\ldots, \phi_{2d-1})$ 的长度均为 $2d$，且 $\phi_0 = 0$。超出模拟时域的核条目可设为零，而 $\odot$ 表示逐分量乘法。由于 $1 \le d + k - i \le 2d - 1$，保留的条目给出了式（4.2）中的线性卷积。

我们预先计算每种区块长度对应的核变换。在包含 64 个或更少区间的区块内，我们直接对滞后项求和，并按时间顺序抽取计数。对于指数标记律，含有 $j \ge 1$ 个标记的区间，其标记总量 Z_n 服从形状参数为 j、单位尺度的伽马分布。

相同 Z_n 进入 Y_n 以及（2.5）中的收益。不同小块中的每一对区间只计入一次：当较早的区间位于其最小公共区块的左半部分、较晚的区间位于右半部分时计入。对于每种区块长度 $2d$ 每条路径至多有 $\lceil N/(2d) \rceil$ 次块更新，每次耗费$\mathcal{O}(d \log d)$。对二进长度求和后，每条路径计算激励历史所需的运算次数为$\mathcal{O}(N \log^2 N)$。沿每条路径，我们更新（3.2）中的算术平均和运行最小值。我们分别用样本均值估计亚洲期权和敲出看跌期权的期权价格。

网格细化。表 3 比较了 $N = 128$，512、2，048 个分箱在一年期内的结果。另有一个 N =16，384 的估计值作为有限网格基准值。每种 N 和 α 的组合均使用200，000条相互独立的路径，各组合之间使用独立的随机流。价格按每100 单位即期价格报告。每个价格后括号中的数值为收益的样本标准差除以$\sqrt{200}$，000。对于两个独立网格估计值之差，其标准误为两者标准误平方和的平方根。对于这三种网格中的每一种以及每个α，计时从内核设置前开始，到基于相同的200，000 条模拟路径计算两种收益的平均值后结束。我们报告编译完成后使用 Apple M4 Pro 上的十个工作线程、以相同随机种子运行三次所得的运行时间中位数。

表 3：路径依赖看跌期权价格（每 100 单位即期价格）。最后一列给出 2，048 个分箱的价格减去基准值，单位为即期价格的基点。括号内为以对应列单位表示的蒙特卡洛标准误。每项运行时间均涵盖全部 200，000 条路径，以及一个（α，N）组合对应的两种看跌期权价格。

		模拟网格			参考值	差值
α	数量	128	512	2,048	16,384	(bp)
0.62	算术平均亚洲看跌期权	2.360 (0.011)	2.411 (0.011)	2.442 (0.011)	2.446 (0.011)	−0.4 (1.6)
	敲出看跌期权	0.969 (0.005)	0.950 (0.005)	0.938 (0.005)	0.914（0.005）	+2.4 (0。7)
	总运行时间（秒）	0.50	1.98	9.76	—	—
0.80	算术平均亚洲看跌期权	2.383 (0.011)	2.447 (0.011)	2.443 (0.011)	2。431 (0。011)	+1.2 (1.6)
	敲出看跌期权	1.056（0.006）	1.032 (0.006)	0.984 (0.005)	0.968 (0.005)	+1.6 (0。8)
	总运行时间（秒）	0.53	2.06	10.52	—	—

将分箱数从 512 增至 2,048，会使四个估算价格的绝对变化达到即期价格的 0.4–4.8 个基点。相较于 16,384 个分箱的基准值，2,048 个分箱下的亚洲看跌期权估值在 $\alpha = 0.62$ 时低 0.4 个基点，在 $\alpha = 0.80$时高 1.2 个基点。这两项差异均小于一个蒙特卡洛标准误。敲出估值分别比对应基准值高出即期价格的 2.4 和 1.6 个基点，约为 3.3 和 2.2 个标准误。对于障碍期权合约，细化分箱会改变带标记的 INAR 价格动态，也会改变可能发生敲出的日期集合。在这些实验中，固定执行价回望看跌期权的差异更大：2,048 个分箱下的估值分别比对应基准值低即期价格的 29.3 和 17.7 个基点。

5 结论

我们提出带标记 INAR 模型，作为一种可实现的离散时间蒙特卡洛算法，用于粗糙 Hawkes–Heston 模型。我们给出了离散时间

带标记 INAR 模型收敛到连续时间粗糙Hawkes–Heston模型的严格收敛结果，为所提出的算法提供了坚实的理论基础。

我们采用分治快速傅里叶变换方案实现该算法，在包含 N 个区间的网格上，每条路径计算激励历史所需的运算次数为$\mathcal{O}(N\log^2 N)$。随着网格逐步细化，对数价格、即期方差和共同带标记点测度联合收敛。在价格跳跃载荷为正时，相同的标记会降低股票价格，并激发未来方差。在欧式期权实验中，对于测试的四个粗糙度水平，一年期隐含波动率微笑在 INAR 网格上随着每次细化都更加接近连续模型的微笑。

价格路径的收敛性也证明，可以将带标记 INAR 模型用于可能依赖股票历史的合约，包括算术亚式期权和障碍期权等路径依赖期权。随着监测网格逐步细化，算术亚式看涨期权和看跌期权以及敲出看跌期权的价格均收敛于其连续监测对应物。对于初始股票价格以下的任意正障碍水平，障碍期权的结果均成立。我们通过蒙特卡洛实验展示数值方案的效率。

A 技术性证明

A.1 命题 2.1的证明

证明。 在（2.1）中， $s_1 < 1$， $s_n \downarrow 0$，因此

$$\phi_k \geq 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k = 1.$$

由（2.2）–（2.4），

$$\sum_{i\in\{+,-\}} r_i g_i = h^{1-\alpha}, \qquad \mathbb{E}[Y_n \mid \mathcal{F}_n] = a\,(1+\xi m_1 h^{\alpha})\,V_n.$$

在稀疏化构造中，类型为 e的父事件会在时滞 $k \geq 1$ 处生成一个独立的泊松子代测度，其均值为 $\phi_k w_h$（e）μ_h，使用（2.6）。区间 n 中的独立泊松移民具有均值测度 $H_n\mu_h$。叠加后得到（2.4）的条件均值测度 $V_n\mu_h$。对于测试函数 $f \in L^2$（E， μ_h），某类型-e 父事件的子代中 f 的期望总和为

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k w_h(e) \int_E f(e')\mu_h(\mathrm{d}e') = w_h(e) \int_E f(e')\mu_h(\mathrm{d}e'),$$

这证明了（2.7）。由于 μ_h（E） $< \infty$ 且 $w_h \in L^2$（E， μ_h）由 $m_2 < \infty$可知，该算子有界且秩为一。其唯一的非零特征值为

$$\int_E w_h(e)\mu_h(\mathrm{d}e) = ah^{\alpha-1}\left(\sum_{i\in\{+,-\}} r_i g_i + \xi h m_1\right) = a(1+\xi m_1 h^{\alpha}).$$

根据 a 在（2.3）中的定义，它与 1 的差距为

$$1 - a(1+\xi m_1 h^{\alpha}) = -abh^{\alpha} > 0.$$

对（2.4）进行归纳可得非负且有限的分箱强度。将条件泊松指数公式应用于（2.5）可得

$$\mathbb{E}[\exp(\Delta X_n) \mid \mathcal{F}_n] = \exp\{V_n(D_h - D_h)\} = 1.$$

根据条件独立性和泊松方差公式，

$$\operatorname{Cov}\Big(\widehat{N}_{n,i},\widehat{N}_{n,j}\mid\mathcal{F}_n\Big)=\mathbf{1}_{\{i=j\}}r_iV_n,\qquad i,j\in\{+,-\}.$$

因此，式（2.8）中的协方差为 V_n 乘以两个加权外积之和。代入式（2.2）–（2.3）可得 Q 的各项，并表明常规价格增量的条件均值为零。事实上，我们有

$$\frac{1}{h}\sum_{i\in\{+,-\}}r_ig_i^2=\frac{\sum_{i\in\{+,-\}}\omega_i\gamma_i^2}{\ell_0D_0^2}=c,\qquad\frac{1}{h}\sum_{i\in\{+,-\}}r_iy_i^2=\frac{\sum_{i\in\{+,-\}}\omega_ip_i^2}{H}=1,$$

$$\frac{1}{h}\sum_{i\in\{+,-\}}r_ig_iy_i=\sqrt{c}\,\frac{\sum_{i\in\{+,-\}}\omega_i\gamma_ip_i}{\sqrt{H\sum_{i\in\{+,-\}}\omega_i\gamma_i^2}}=-\sqrt{c}\,\frac{(\beta-1)\sqrt{q}}{\sqrt{(1+q)(1+\beta^2q)}},$$

$$\sum_{i\in\{+,-\}}r_iy_i=\sqrt{\frac{h\ell}{H}}\sum_{i\in\{+,-\}}\omega_ip_i=0.$$

固定 $\beta>1$，将 $f_\beta(q)=\rho^2$ 按式（2.8）所示的方式表示。那么

$$f_\beta'(q)=\frac{(\beta-1)^2(1-\beta^2q^2)}{(1+q)^2(1+\beta^2q)^2},\qquad f_\beta(0)=0,\qquad f_\beta(1/\beta)=\left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)^2.$$

对于任意给定的 $\rho_\star\in(-1,\ 0)$，取 $\beta>(1+|\rho_\star|)/(1-|\rho_\star|)$。在 $(0,\ 1/\beta)$ 上连续且严格单调，因此该区间内存在唯一的 q 使得 $f_\beta(q)=\rho_\star^2$。式（2.8）中的负号给出$\rho=\rho_\star$。最后，由式（2.2）–（2.3）和（2.6）可得

$$\mu_h((0,\infty))=hm_0,\qquad r_++r_-=2\ell,\qquad g_i=\frac{\gamma_i}{\ell_0D_0}h^\alpha.$$

代入式（2.10）中的两个比率，即得所述标度。 □

A.2 定理 2.2 的证明

在继续证明定理 2.2之前，我们先陈述并证明一个技术引理。对于 $t\geq0$，网格模型的更新核为

$$k_h(t):=h^{\alpha-1}u_{\lfloor t/h\rfloor+1}.$$

我们利用其 L^2 收敛性，在方差卷积中取极限，并利用关于 V_n 的一致二阶矩界来控制活动时钟。

引理 A.1。 对于滞后分布 (2.1)， $u_n\sim n^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ 当 $n\to\infty$ 时。由于 $h=T/N\downarrow0$,

$$\|k_h-K_\alpha\|_{L^2(0,T)}\longrightarrow0,\qquad\max_{0\leq n\leq N}\left|h^\alpha\sum_{j=1}^{n}u_j-G_\alpha(t_n)\right|\longrightarrow0.\tag{A.1}$$

方差满足 (2.12) 并且，关于 $[0,T)$,

$$\|G_h-G_0\|_\infty\longrightarrow0,\qquad\sup_{N\geq1}\max_{0\leq n<N}\mathbb{E}\left[V_n^2\right]<\infty.$$

证明。 滞后分布的尾部为 $\sum_{k=n+1}^{\infty}\phi_k = s_n$ 根据（2.1）。由于 $\phi_1,\ \phi_2 > 0$，其跨度为一。对于$n \geq 1$，更新质量为 $u_n = \sum_{j=1}^{n}(\phi^{*j})_n$。由于 $\alpha > 1/2$，算术强更新定理（Caravenna 和 Doney，2019年，定理1.4）给出

$$u_n \sim \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi n s_n} = \frac{\sin(\pi\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\pi}\, n^{\alpha-1} = \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

其中最后一个等式是欧拉反射公式。将常数增大以涵盖有限多个指标后，对于每个 $n \geq 1$，都有 $u_n \leq Cn^{\alpha-1}$。当 $0 < t \leq T$、$k_h(t) \to K_\alpha(t)$ 以及 $k_h(t) \leq Ct^{\alpha-1}$ 时。由于 $2\alpha - 2 > -1$，控制收敛定理给出在 $L^2(0,T)$ 中的收敛。根据 k_h 的定义，

$$\max_{0\leq n\leq N}\left|h^\alpha\sum_{j=1}^{n}u_j - G_\alpha(t_n)\right| = \max_{0\leq n\leq N}\left|\int_0^{t_n}(k_h(s)-K_\alpha(s))\mathrm{d}s\right| \leq \sqrt{T}\,\|k_h - K_\alpha\|_2 \longrightarrow 0.$$

将 (2.11) 代入 (2.4) 并除以 a。令 δ_0 为零点处的单位序列，并令 $U = \delta_0 + u$，得到

$$(I-\phi*)V = v_0 s + \eta h^\alpha \mathbf{1} - dh^\alpha V + \phi * \left(\xi m_1 h^\alpha V + h^{\alpha-1}\Delta M\right).$$

更新递推给出 $U*(\delta_0-\phi) = \delta_0$和 $U*\phi = u$。尾部恒等式 $s = (\delta_0-\phi)*\mathbf{1}$ 随即给出 $U*s = \mathbf{1}$。与 U 卷积并利用 $\xi m_1 - d = b$ 得到

$$(1+dh^\alpha)V = v_0\mathbf{1} + \eta h^\alpha U*\mathbf{1} + u*\left(bh^\alpha V + h^{\alpha-1}\Delta M\right),$$

这就是 (2.12)。对于 $t_n \leq t < t_{n+1}$，根据 G_h 的定义可得

$$G_h(t) - G_0(t) = (a-1)G_0(t) + a\eta\left(h^\alpha + h^\alpha\sum_{j=1}^{n}u_j - G_\alpha(t_n) + G_\alpha(t_n) - G_\alpha(t)\right).$$

由于 $a \to 1$ 且 G_α 在 $[0,T]$上连续一致，(A.1)给出 $\|G_h - G_0\|_\infty \to 0$。

由条件泊松律和(2.11)，条件矩满足

$$\mathbb{E}[\Delta M_j \mid \mathcal{F}_j] = 0, \qquad \mathbb{E}\left[(\Delta M_j)^2 \mid \mathcal{F}_j\right] = \left(c + \xi^2 m_2\right) hV_j. \tag{A.2}$$

所有区间 由(2.4)中的有限归纳可知，二阶矩均存在。由于 $b < 0$ 且 $V_n \geq 0$ ，

$$\mathbb{E}[V_n] \leq G_h(t_n), \qquad 0 \leq V_n \leq G_h(t_n) + a\sum_{j=0}^{n-1}h^{\alpha-1}u_{n-j}\Delta M_j.$$

对 V_n的非负上界平方后取期望，并利用鞅差的正交性，得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[V_n^2\right] &\leq (G_h(t_n))^2 + a^2\left(c+\xi^2 m_2\right)\sum_{j=0}^{n-1}h\left(h^{\alpha-1}u_{n-j}\right)^2\mathbb{E}[V_j] \\ &\leq \|G_h\|_\infty^2 + \left(c+\xi^2 m_2\right)\|G_h\|_\infty\int_0^{t_n}(k_h(s))^2\,\mathrm{d}s. \end{aligned}\tag{A.3}$$

收敛 $\|G_h - G_0\|_\infty \to 0$ 以及 $L^2(0,T)$ 在（A.1）中的收敛性对所有充分大的 N都给出了两个范数的界。对于剩下的有限个网格， G_h 和 k_h 是在 $[0,T)$上的有界阶梯函数。因此，令 $h = T/N$对每个正整数 N，

$$\sup_{N\geq 1}\|G_h\|_\infty < \infty, \qquad \sup_{N\geq 1}\|k_h\|_{L^2(0,T)} < \infty.$$

对 $0 \leq n < N$ 取最大值，然后对 $N \geq 1$ 在（A.3）中取上确界，即得一致二阶矩界。

□

A.2.1 定理2.2的证明

证明。 时钟 A^h 决定了正则鞅的可预测括号以及标记计数的补偿子。

步骤 1：活动时钟与正则订单流。 $D([0,T],\mathbb{R}^d)$中的一个族称为 C-紧的，如果它对 J_1 是紧的，且每个子序列弱极限都支撑在连续路径上。我们使用分段常值滤过$\mathcal{F}_t^h=\mathcal{F}_{\lfloor t/h\rfloor}$，其中$\mathcal{F}_N$位于 T。我们在这个滤过下取离散可预测括号。令 $\|\cdot\|_\infty$ 表示 $[0,T]$上的上确界范数，并定义

$$\bar{A}_t^h:=\int_0^t V^h(s)\mathrm{d}s,\qquad 0\le t\le T. \tag{A.4}$$

根据 V^h的阶梯函数定义以及引理A.1中的二阶矩界，当 $h=T/N$，

$$H_T:=\sup_{N\ge1}\mathbb{E}\left[\left\|V^h\right\|_{L^2(0,T)}^2\right]=\sup_{N\ge1}\sum_{n=0}^{N-1}h\mathbb{E}[V_n^2]\le T\sup_{N\ge1}\max_{0\le n<N}\mathbb{E}[V_n^2]<\infty.$$

对于 $0\le s\le t\le T$，对 $\bar{A}_t^h-\bar{A}_s^h=\int_s^t V^h(u)\mathrm{d}u$ 在 (A.4) 中应用柯西–施瓦茨不等式。利用 $\Delta A_n=hV_n$ 由 (2.11) 得到

$$\begin{aligned}\left|\bar{A}_t^h-\bar{A}_s^h\right|&\le|t-s|^{1/2}\left\|V^h\right\|_2,\\ A_t^h=\bar{A}_{h\lfloor t/h\rfloor}^h,\qquad&\mathbb{E}\left[\left\|A^h-\bar{A}^h\right\|_\infty^2\right]\le hH_T.\end{aligned} \tag{A.5}$$

在$\{\|V^h\|_2\le R\}$ 上，插值后的时钟从零开始，且其 1/2-赫尔德半范数至多为 R。根据阿尔泽拉–阿斯科利定理，这些路径属于 $C[0,T]$ 的一个紧子集，而其补集的概率至多为 H_T/R^2。因此，(A.5)证明了 C的 A^h-紧性。由(2.15)，

$$L^{h,i}-A^h=\sqrt{\frac{h}{r_i}}\,Z^{h,i}.$$

给定$\mathcal{F}_n$，常规计数$N_{n,+}$和$N_{n,-}$是均值分别为 r_+V_n和 r_-V_n的独立泊松随机变量。因此，(2.15)的增量满足

$$\mathrm{Cov}\left(\sqrt{h/r_i}\,\widehat{N}_{n,i},\sqrt{h/r_j}\,\widehat{N}_{n,j}\mid\mathcal{F}_n\right)=\mathbf{1}_{\{i=j\}}hV_n,\qquad i,j\in\{+,-\}.$$

对各区间求和，并在($\Delta A_n=hV_n$ 中使用2.11，得到

$$\left\langle Z^{h,i},Z^{h,j}\right\rangle_t=\mathbf{1}_{\{i=j\}}A_t^h.$$

Doob 的 L^2 最大不等式给出

$$\mathbb{E}\left[\left\|L^{h,i}-A^h\right\|_\infty^2\right]\le4(h/r_i)\mathbb{E}\left[A_T^h\right]\le C_Th^{2\alpha}. \tag{A.6}$$

这里 $h/r_i=h^{2\alpha}/(\omega_i\ell_0)$ 由(2.2)得出。

对于有界停时 $0\le\sigma\le\tau\le(\sigma+\delta)\wedge T$，(A.5) 中的两个网格点之间至多相隔 $\delta+h$。对 $Z^{h,i}$ 和 $(Z^{h,i})^2-A^h$ 应用可选抽样定理可得

$$\mathbb{E}\left[\left|\mathbf{Z}_\tau^h-\mathbf{Z}_\sigma^h\right|^2\right]=2\mathbb{E}\left[\left(A_\tau^h-A_\sigma^h\right)\right]\le2\sqrt{H_T(\delta+h)}. \tag{A.7}$$

此外，

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\le T}\left|\mathbf{Z}_t^h\right|^2\right] \le 8\mathbb{E}\left[A_T^h\right] \le 8\sqrt{TH_T}. \tag{A.8}$$

对于 $R,\ \varepsilon>0$，由马尔可夫不等式和（A.7）可得

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\mathbf{Z}_t^h\right|>R\right)\le\frac{8\sqrt{TH_T}}{R^2},\qquad \sup_{\sigma,\tau}\mathbb{P}\left(\left|\mathbf{Z}_\tau^h-\mathbf{Z}_\sigma^h\right|>\varepsilon\right)\le\frac{2\sqrt{H_T(\delta+h)}}{\varepsilon^2}, \tag{A.9}$$

其中，上确界取遍（A.7）中的停时。（A.9）中的第一个界给出了紧包含。对第二个界先取上极限$h\downarrow 0$，再取 $\delta\downarrow 0$，即可验证A.9）中的（Billingsley，1999，定理 16.10）对$\mathbf{Z}^h=\left(Z^{h,+},Z^{h,-}\right)^\top$ 在 $D([0,T],\ \mathbb{R}^2)$ 上的 Aldous 紧性判据。

记作 $D_{n,\ i}:=\sqrt{h/r_i}\,\widehat{N}_{n,\ i}$。均值为 λ 的泊松随机变量，其四阶中心矩为 $\lambda+3\lambda^2$。因此

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[D_{n,i}^4\mid\mathcal{F}_n\right]&=\frac{h^2}{r_i}V_n+3h^2V_n^2,\\
\sum_{n=0}^{N-1}\mathbb{E}\left[D_{n,i}^4\right]&\le C_T\left(h^{2\alpha}+h\right),\\
\mathbb{P}\left(\max_{n<N}|\Delta\mathbf{Z}_n|>\varepsilon\right)&\le C_T\varepsilon^{-4}\left(h^{2\alpha}+h\right).
\end{aligned} \tag{A.10}$$

事实上，$|\Delta\mathbf{Z}_n|^4=(D_{n,\ +}^2+D_{n,\ -}^2)^2\le 2(D_{n,\ +}^4+D_{n,\ -}^4)$。因此，由并集界和马尔可夫不等式可得

$$\mathbb{P}\left(\max_{0\le n<N}|\Delta\mathbf{Z}_n|>\varepsilon\right)\le\varepsilon^{-4}\sum_{n=0}^{N-1}\mathbb{E}\left[|\Delta\mathbf{Z}_n|^4\right]\le 2\varepsilon^{-4}\sum_{i\in\{+,-\}}\sum_{n=0}^{N-1}\mathbb{E}\left[D_{n,i}^4\right],$$

这给出了（A.10）中的最后一个界。若 $x_k\to x$属于向量 J_1，则存在时间变换 λ_k 满足$\|x_k\circ\lambda_k-x\|_\infty\to 0$。取左极限可得

$$\sup_{0<t\le T}|\Delta x(t)|\le\sup_{0<t\le T}|\Delta x_k(t)|+2\left\|x_k\circ\lambda_k-x\right\|_\infty.$$

因此，(A.10) 使紧鞅向量的每个极限都具有连续路径。由于所有边缘极限都是连续的，且 C-紧性成立，时钟与鞅向量是联合 J_1 收敛到连续路径意味着一致收敛。方程 (A.6) 将这一性质传递给计数向量。根据 (2.16)，加入两个正则驱动项 B^h,W^h 仍保持联合 C紧性。

对于 $i,j\in\{+,-\}$，可选协变差中的误差是鞅

$$U_t^{h,ij}:=\left[Z^{h,i},Z^{h,j}\right]_t-\mathbf{1}_{\{i=j\}}A_t^h=\sum_{\substack{0\le n<N\\ t_{n+1}\le t}}\left(D_{n,i}D_{n,j}-\mathbf{1}_{\{i=j\}}hV_n\right).$$

其条件增量方差为

$$\operatorname{Var}\left(D_{n,i}D_{n,j}\mid\mathcal{F}_n\right)=\begin{cases}(h^2/r_i)V_n+2h^2V_n^2, & i=j,\\ h^2V_n^2, & i\ne j.\end{cases}$$

对角项由（A.10）得出，非对角项则由条件独立性得出。将这些方差相加并应用 Doob 的 L^2 最大不等式，可得

$$\max_{i,j\in\{+,-\}}\mathbb{E}\left[\left\|U^{h,ij}\right\|_\infty^2\right]\le C_T\left(h^{2\alpha}+h\right)\longrightarrow 0. \tag{A.11}$$

步骤 2. 带标记坐标的紧性。令 $Y^h := (B^h,\ W^h,\ C^h,\ J^h)$ 如（2.11）所示。其第三个坐标 C^h 计数标记，第四个坐标 J^h 对标记的正大小求和，因此二者均为递增过程。根据条件泊松抽样和 $C^h - m_0 A^h$，过程 $J^h - m_1 A^h$ 是平方可积鞅。对于（A.7）中的停时，可选抽样定理给出

$$\mathbb{E}\left[\left(C^h_\tau - C^h_\sigma\right) + \left(J^h_\tau - J^h_\sigma\right)\right] = (m_0+m_1)\mathbb{E}\left[\left(A^h_\tau - A^h_\sigma\right)\right] \le (m_0+m_1)\sqrt{H_T(\delta+h)}.$$

此外，

$$\mathbb{E}\left[\left(C^h_T + J^h_T\right)\right] = (m_0+m_1)\mathbb{E}\left[A^h_T\right] \le (m_0+m_1)\sqrt{TH_T}.$$

马尔可夫不等式和 Aldous 判据（Billingsley，1999，定理 16.10）给出了这对 (C^h, J^h) 在向量 J_1 中的紧性。将 Step 1 中 C-紧的正则坐标和时钟加入后，仍保持向量 J_1 的紧性，因为沿着收敛的乘积子列，对(C^h, J^h)的时间变换也适用于一致收敛且极限连续的坐标。泊松计数的条件阶乘矩给出

$$\mathbb{P}(\exists n < N : \Delta C_n \ge 2) \le \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\mathbb{E}[\Delta C_n(\Delta C_n - 1)] = \frac{1}{2}m_0^2h^2\sum_{n=0}^{N-1}\mathbb{E}\left[V_n^2\right] \le C_T h. \tag{A.12}$$

固定一个确定性的 $t \in [0,T]$ 和一个半径 $\delta > 0$。令

$$I_\delta(t) := [t-\delta, t+\delta] \cap [0,T] \quad \text{and} \quad E_h(t,\delta) := \{0 \le n < N : t_{n+1} \in I_\delta(t)\}.$$

这样的端点至多有 $2\delta/h + 2$ 个。由于 $\mathbb{E}[\Pi_n((0,\infty)) \mid \mathcal{F}_n] = hm_0V_n$，

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{J}^h(I_\delta(t)\times(0,\infty)) > 0\right) \le \sum_{n\in E_h(t,\delta)}\mathbb{E}[\Pi_n((0,\infty))] \le m_0(2\delta+2h)\max_{0\le n<N}\mathbb{E}[V_n]. \tag{A.13}$$

沿着在向量 J_1下收敛的一个子列，取 (C^h, J^h) 的 Skorokhod 表示，其极限为 (C, J)，并取时间变换 λ_h 使得

$$\|\lambda_h - \mathrm{id}\|_\infty + \left\|\left(C^h, J^h\right)\circ\lambda_h - (C,J)\right\|_\infty \to 0,$$

几乎必然成立。对于 $t \in (0,T]$，对齐后的跳跃收敛于 $(\Delta C_t, \Delta J_t)$，因为取左极限仍保持一致界。因此，非零极限跳跃要求 $I_\delta(t)$中最终出现一个带标记的端点。沿着该子列，Fatou 引理和（A.13）给出下面前两个不等式。柯西–施瓦茨不等式给出最后一个不等式。

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left((\Delta C_t, \Delta J_t) \ne (0,0)\right) &\le \liminf_{h\downarrow 0}\mathbb{P}\left(\mathcal{J}^h(I_\delta(t)\times(0,\infty)) > 0\right) \\
&\le 2m_0\delta\sup_{N\ge 1}\max_{0\le n<N}\mathbb{E}[V_n] \\
&\le 2m_0\delta\left(\sup_{N\ge 1}\max_{0\le n<N}\mathbb{E}[V_n^2]\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

在这些上确界中 $h = T/N$。根据引理A.1，最终的界随着 $\delta \downarrow 0$趋于零，因此$(C,\ J)$几乎必然在这个固定的 t 处没有跳跃。在 $t = 0$，$C^h_0 = J^h_0 = 0$，并且

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\limsup_{h\downarrow 0}\mathbb{P}\left(\mathcal{J}^h([0,\delta]\times(0,\infty)) > 0\right) = 0,$$

由（A.13）可得，其中 $t=0$。因此，标记不会在初始端点处聚集。

步骤 3. 奇异卷积。令 $D_\circ^h = bA^h + M^h$，其中（2.11）给出 s

$$M_t^h = \sum_{\substack{0\le j<N\\ t_{j+1}\le t}} \left[\Delta B_j + \xi\left(Z_j - m_1 h V_j\right)\right] = B_t^h + \xi\left(J_t^h - m_1 A_t^h\right).$$

步骤 2 得到 $\left(A^h, B^h, W^h, C^h, J^h\right)$ 的向量 J_1 紧性。同一时间变换适用于其线性像

$$D_\circ^h = (b-\xi m_1)\, A^h + B^h + \xi J^h,$$

因此 $D_\circ^h$ 与这些坐标联合紧。对于 $f \in C_c^\infty((0,\infty))$，将其延拓为零后，定义

$$\mathcal{T}_f(x)(t) := \int_0^t f'(t-s)x(s)\mathrm{d}s \qquad \text{on } D([0,T],\mathbb{R}).$$

对右连续有左极限半鞅 D 进行分部积分，并令 $D_0=0$，得到

$$\int_{(0,t]} f(t-s)\mathrm{d}D_s = f(0)D_t - f(t)D_0 + \int_0^t f'(t-s)D_s\mathrm{d}s = \mathcal{T}_f(D)(t), \tag{A.14}$$

因为 $f(0)=0$。若 $x_j \to x$ 属于 J_1，则路径一致有界，并且在 x 的每个连续点处收敛。因此，

$$\left\|\mathcal{T}_f(x_j) - \mathcal{T}_f(x)\right\|_\infty \le \|f'\|_\infty \left\|x_j - x\right\|_{L^1(0,T)} \to 0.$$

对于确定性滞后 $l \in L^2(0,\ T)$，由 Fubini定理、（A.2）中鞅差的正交性以及漂移和的柯西–施瓦茨不等式可得

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\sum_{0\le j<N, t_{j+1}\le t} l(t-t_{j+1})\Delta M_j\right|^2 \mathrm{d}t\right] \le \left(c+\xi^2 m_2\right)\sum_{j=0}^{N-1} h\mathbb{E}[V_j]\,\|l\|_2^2,$$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\sum_{0\le j<N, t_{j+1}\le t} l(t-t_{j+1})hV_j\right|^2 \mathrm{d}t\right] \le T\sum_{j=0}^{N-1} h\mathbb{E}\left[V_j^2\right]\,\|l\|_2^2.$$

对于 $t_n \le t < t_{n+1}$ 和 $0\le j<n$，$\lfloor (t-t_{j+1})/h\rfloor + 1 = n-j$。因此，系数 $h^{\alpha-1}u_{n-j}$ 在 (2.12) 中恰为 $k_h(t-t_{j+1})$。将这两个界应用于 $l = k_h - f$ 可得

$$\mathbb{E}\left[\left\|V^h - G_h - a\mathcal{T}_f\left(D_\circ^h\right)\right\|_2^2\right] \le C_T\|k_h - f\|_2^2. \tag{A.15}$$

选取 $f_p \in C_c^\infty((0,\ T))$，满足

$$\|f_p - K_\alpha\|_2 \xrightarrow[p\to\infty]{} 0. \tag{A.16}$$

令 $V^{h,\ p} := G_h + a\mathcal{T}_{f_p}(D_\circ^h)$。从任意序列 $h\downarrow 0$ 中抽取一个子序列，使得向量$\mathcal{Y}^h = \left(A^h, B^h, W^h, C^h, J^h, D_\circ^h\right)$ 在向量 J_1 中收敛到$\mathcal{Y}$。记 $D_\circ$为其最后一个坐标。对于每个固定的 p，q，由连续映射定理、 $a\to 1$ 和 $\|G_h - G_0\|_\infty \to 0$ 可得

$$\left(\mathcal{Y}^h, V^{h,p}, V^{h,q}\right) \implies \left(\mathcal{Y}, V^p, V^q\right), \qquad V^p = G_0 + \mathcal{T}_{f_p}(D_\circ).$$

由平方范数的下半连续性，(A.15) 以及 $\|k_h - K_\alpha\|_2 \to 0$,

$$\mathbb{E}\left[\|V^p - V^q\|_2^2\right] \le \liminf_{h\downarrow 0} \mathbb{E}\left[\left\|V^{h,p} - V^{h,q}\right\|_2^2\right] \le 2C_T\left(\|K_\alpha - f_p\|_2^2 + \|K_\alpha - f_q\|_2^2\right).$$

的完备性 $L^2(\Omega; L^2(0,T))$ 意味着 $V^p \to V$属于该空间（根据引理 A.1 和（A.15）中的界，光滑卷积是平方可积的）。对每个 $\varepsilon > 0$，由马尔可夫不等式可得

$$\limsup_{h\downarrow 0} \mathbb{P}\left(\left\|V^h - V^{h,p}\right\|_2 > \varepsilon\right) \le C_T\varepsilon^{-2}\|K_\alpha - f_p\|_2^2 \xrightarrow[p\to\infty]{} 0.$$

共同收敛定理（Billingsley，1999，定理 3.2）应用于这些对 $\left(\mathcal{Y}^h,\ V^{h,\ p}\right)$，得到沿该子序列 $\left(\mathcal{Y}^h,\ V^h\right) \Rightarrow (\mathcal{Y}\ V)$ 在 $L^2(0,T)$上的范数拓扑下收敛。由（A.5），

$$\left\|A^h - \int_0^{\cdot} V^h(s)\mathrm{d}s\right\|_\infty \longrightarrow 0 \qquad \text{in probability.}$$

积分映射从 $L^2(0,T)$ 到 $C[0,T]$ 是连续的，这是由柯西–施瓦茨不等式可知的，因此$A_t = \int_0^t V_s\mathrm{d}s$ 同时对 $0 \le t \le T$ 几乎必然成立。中的正锥 L^2 是闭的，因此 $V \ge 0$几乎处处几乎必然成立。（A.6）中的一致计数近似给出 $L^+ = L^- = A$。等式（2.16）还给出

$$\mathbf{Z} = \mathsf{P}^{-1}(B, W)^\top.$$

Step 4. 联合滤过中的特征。对于 $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_4) \in \mathbb{R}^4$，记

$$\theta_r := (\theta_1, \theta_2), \qquad l_i := \theta_1 g_i + \theta_2 y_i.$$

条件　增量 $Y_\circ^h$ 的特征函数为 $\exp\{hV_nP_h(\theta)\}$，其中　e

$$P_h(\theta) = h^{-1}\sum_{i\in\{+,-\}} r_i\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}l_i} - 1 - \mathrm{i}l_i\right) + \int_{(0,\infty)}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_3+\theta_4 z)} - 1\right)\nu(\mathrm{d}z),$$

$$P(\theta) = -\frac{1}{2}\theta_r Q\theta_r^\top + \int_{(0,\infty)}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_3+\theta_4 z)} - 1\right)\nu(\mathrm{d}z). \tag{A.17}$$

泰勒余项和 (2.8) 蕴含

$$|P_h(\theta) - P(\theta)| \le C_\theta h^\alpha.$$

固定 θ，$\mathrm{Re}\, P_h \le 0$。积分型泰勒公式给出 $|\mathrm{e}^z - 1 - z| \le |z|^2/2$ 对于 $\mathrm{Re}\ z \le 0$。因此引理A.1 和 (A.17) 给出

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N-1}\left|\mathrm{e}^{hV_nP_h(\theta)} - 1 - hV_nP(\theta)\right|\right] &\le \frac{1}{2}|P_h(\theta)|^2h^2\sum_{n=0}^{N-1}\mathbb{E}\left[V_n^2\right] + |P_h(\theta) - P(\theta)|\mathbb{E}\left[A_T^h\right] \\ &\le C_\theta\left(h + h^\alpha\right) \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{A.18}$$

因此，对于每个子列极限 $Y_\circ = (B,\ W,\ C,\ J)$,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta\cdot Y_{\circ,t}} - P(\theta)\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta\cdot Y_{\circ,s-}}\mathrm{d}A_s \quad \text{is a martingale.} \tag{A.19}$$

固定 $0 \le s < t \le T$。令 F_s^h 是定义在 $L^2(0,\ s)$ 上、关于 $V^h|_{(0,s)}$ 的有界连续函数，并且是 $\left(A^h, Y^h_\circ\right)$ 在有限多个确定性时刻 $r \le s$ 处取值的函数。这些变量是$\mathcal{F}_s^h$-可测的。用 F_s 表示作用于极限坐标的同一函数。步骤 2 排除了固定跳跃，因此在联合 Skorokhod 表示下，$F_s^h \to F_s$ 几乎必然成立。令 $E_r^h = \exp(\mathrm{i}\theta \cdot Y^h_{\circ r})$，逐区间取条件期望可得

$$\mathbb{E}\left[F_s^h\left(E_t^h - E_s^h - \sum_{0\le n<N, s<t_{n+1}\le t} E_{t_n}^h \left\{\exp\left(hV_nP_h(\theta)\right) - 1\right\}\right)\right] = 0. \tag{A.20}$$

根据 (A.18)，在 (A.20) 中将 $\exp(hV_nP_h(\theta)) - 1$ 替换为 $hV_nP(\theta)$，所得误差趋于零。定义 $u_h := h\lfloor u/h \rfloor$ 和 $E_r := \exp(\mathrm{i}\theta \cdot Y_{\circ r})$。由于对于 $t_n \le r < t_{n+1}$，$E_r^h = E_{t_n}^h$ 且 $V^h(r) = V_n$，因此替换后 (A.20) 中的求和满足

$$\sum_{\substack{0\le n<N\\ s<t_{n+1}\le t}} E_{t_n}^h hV_nP(\theta) = P(\theta) \sum_{n=\lfloor s/h\rfloor}^{\lfloor t/h\rfloor - 1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} E_r^h V^h(r)\mathrm{d}r = P(\theta)\int_{s_h}^{t_h} E_r^h V^h(r)\mathrm{d}r, \tag{A.21}$$

其中空和等于零。(A.21) 中的积分满足

$$\begin{aligned}\left|\int_{s_h}^{t_h} E_r^h V^h(r)\mathrm{d}r - \int_s^t E_{r-}V_r\mathrm{d}r\right| \le 2\sqrt{h}\left\|V^h\right\|_2 + \sqrt{T}\left\|V^h - V\right\|_2 \\ + \int_s^t \left|E_r^h - E_{r-}\right| V_r\mathrm{d}r.\end{aligned} \tag{A.22}$$

(A.22) 右端的前两项在该表示下几乎必然趋于零。对于最后一项，在 $E_r^h \to E_{r-}$ 的每个连续点处 $Y_\circ$，且 $2V \in L^1(0,\ T)$，因此可应用控制收敛定理。(A.21) 中的积分是一致可积的，因为其绝对值由 $\sqrt{T}\|V^h\|_2$ 和 $\sup_h \mathbb{E}\|V^h\|_2^2 < \infty$ 所界，见引理 A.1。利用 (A.20)、(A.18)、(A.21) 和 (A.22) 取极限，得到

$$\mathbb{E}\left[F_s\left(E_t - E_s - P(\theta)\int_s^t E_{r-}\mathrm{d}A_r\right)\right] = 0. \tag{A.23}$$

单调类定理将（A.23）推广到由 $V|_{(0,s)}$ 和 $(A,\ Y_\circ)|_{[0,s]}$生成的联合过去。对于 $s_j \downarrow s$，（A.19）中的过程在 s_j 处收敛到其在 s处的值，这是由右连续性所致，且其绝对值有界于 $1 + |P(\theta)|A_T$。控制收敛定理给出右连续增广下的（A.23）。同理，

$$\mathbb{E}\left[F_s^h\left(\left(B_t^h, W_t^h\right) - \left(B_s^h, W_s^h\right)\right)\right] = 0.$$

一致 L^2 最大界（A.8）和线性关系（2.16）保证这些增量一致可积。令极限得到 $(B,\ W)$ 是同一滤过下的连续鞅。

其余坐标 C, J 均为递增，因此 $Y_\circ = (B, W, C, J)$ 是一个半鞅。令 $\chi(y) = y\mathbf{1}_{\{|y|\le 1\}}$ 的可预测特征，并令 $\iota(z) := (0, 0, 1, z)$，$Q_4 := \mathrm{diag}(Q, 0_{2\times 2})$。对 $E_t = \exp(\mathrm{i}\theta \cdot Y_{\circ t})$ 应用伊藤公式，并将其可预测有限变差部分与 (A.19) 中的 $P(\theta)\int_0^t E_{s-}\mathrm{d}A_s$ 进行比较，除以 $E_{t-} \ne 0$ 后得到：

$$\mathrm{i}\theta \cdot \mathrm{d}\mathcal{B}_t - \frac{1}{2}\theta\,\mathrm{d}\mathcal{C}_t\,\theta^\top + \int_{\mathbb{R}^4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta\cdot y} - 1 - \mathrm{i}\theta\cdot\chi(y)\right)\mathcal{N}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}y) = P(\theta)\mathrm{d}A_t. \tag{A.24}$$

取等式两边关于A.24局部有限支配测度的拉东–尼科迪姆密度

$$\mathrm{d}A_t + |\mathrm{d}\mathcal{B}_t| + \operatorname{tr}(\mathrm{d}\mathcal{C}_t) + \int_{\mathbb{R}^4} \left(1 \wedge |y|^2\right) \mathcal{N}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}y).$$

由（A.24）得到的密度等式对所有 $\theta \in \mathbb{Q}^4$ 都在同一个零测集之外成立，并且 θ 中的连续性将其推广到每个 $\theta \in \mathbb{R}^4$。由于 $|\iota(z)| > 1$ 对 $z > 0$ 成立，$\chi(\iota(z)) = 0$。将列维–欣钦三元组的唯一性应用于带有符号（A.24）的（A.17），可得

$$\mathrm{d}\mathcal{B}_t = 0, \qquad \mathrm{d}\mathcal{C}_t = Q_4 \, \mathrm{d}A_t, \qquad \mathcal{N}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}y) = \mathrm{d}A_t \int_{(0,\infty)} \delta_{\iota(z)}(\mathrm{d}y)\nu(\mathrm{d}z).$$

在 $\iota((0,\infty))$ 之外的跳跃预期次数为零，而在 $\iota((0,\infty))$ 内的预期次数为$m_0\mathbb{E}[A_T] < \infty$。现在，$\chi$ 的半鞅分解给出

$$(C_t, J_t) = \sum_{\substack{0<r\le t \\ \Delta C_r = 1}} (1, \Delta J_r), \qquad \mathcal{J} = \sum_{\substack{0<r\le T \\ \Delta C_r = 1}} \delta_{(r, \Delta J_r)}.$$

因此，$\mathcal{J}$ 在时间上是简单的。$\mathcal{J}$的连续括号矩阵和可预测补偿子为

$$\left\langle (B, W)^\top \right\rangle_t = Q A_t, \qquad \nu^{\mathcal{J}}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}z) = \mathrm{d}A_t \, \nu(\mathrm{d}z). \tag{A.25}$$

在（A.25）中使用（2.16）可得

$$\langle \mathbf{Z} \rangle = \mathsf{P}^{-1} Q \left(\mathsf{P}^{-1}\right)^\top A = I_2 A.$$

关于$\mathcal{J} - \nu^{\mathcal{J}}$ 的每个平方可积积分都是纯不连续的，因此其与 B, W 的协变差为零。

为恢复标记测度的收敛性，定义 $\widehat{\mathsf{J}}^h := \sum_{0<r\le T:\ \Delta C^h_r = 1} \delta_{(r, \Delta J^h_r)}$，它是 (C^h, J^h) 的函数。根据（A.12），$\mathbb{P}(\widehat{\mathsf{J}}^h \neq \mathsf{J}^h) \le C_T h$。在联合表示下，共同的时间变换最终满足 $\|C^h \circ \lambda_h - C\|_\infty < 1/2$。网格和极限标记计数 $C^h_t = \mathsf{J}^h((0,t] \times (0,\infty))$ 以及 $C_t = \mathsf{J}((0,t] \times (0,\infty))$ 均为整数值。因此，一旦该界成立，对于每个$t \in [0,T]$，都有 $C^h_{\lambda_h(t)} = C_t$。若 $r_1, \dots, r_{C_T}$ 是 C 的跳跃时刻，则 C^h 的跳跃时刻为$\lambda_h(r_j)$，并且

$$\left|\Delta J^h_{\lambda_h(r_j)} - \Delta J_{r_j}\right| \le 2 \left\| J^h \circ \lambda_h - J \right\|_\infty \to 0.$$

对于 $g \in C_c([0,T] \times (0,\infty))$，这给出

$$\int_{[0,T]\times(0,\infty)} g \, \mathrm{d}\widehat{\mathcal{J}}^h = \sum_{j=1}^{C_T} g\left(\lambda_h(r_j), \Delta J^h_{\lambda_h(r_j)}\right) \longrightarrow \sum_{j=1}^{C_T} g\left(r_j, \Delta J_{r_j}\right) = \int_{[0,T]\times(0,\infty)} g \, \mathrm{d}\mathcal{J}.$$

由于 $\mathbb{P}(\widehat{\mathcal{J}}^h \neq \mathcal{J}^h) \to 0$，因此$\mathcal{J}^h$ 与步骤 3 中的坐标也满足相同的联合弱收敛。

步骤 5。识别与唯一性。恒等式 $D_\circ = bA + M$ 由步骤 3 中的线性恒等式得出，其中 $M = B + \xi(J - m_1 A)$。（A.25）中的括号和补偿子给出$\langle M \rangle = (c + \xi^2 m_2)A$，因为 B 是连续的，而 $J - m_1 A$ 是纯不连续鞅。由下半连续性可得 $\mathbb{E}[\|V\|_2^2] \le H_T$。对于 $l_p = f_p - K_\alpha$，由伊藤等距和托内利定理可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\int_{[0,t)} l_p(t-s)\mathrm{d}M_s\right|^2 \mathrm{d}t\right] &= \left(c + \xi^2 m_2\right) \mathbb{E}\left[\int_0^T V_s \int_s^T |l_p(t-s)|^2 \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s\right] \\ &\le \left(c + \xi^2 m_2\right) \mathbb{E}[A_T] \|l_p\|_2^2. \end{aligned} \tag{A.26}$$

对漂移积分应用柯西–施瓦茨不等式可得

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|b\int_0^t l_p(t-s)V_s\mathrm{d}s\right|^2 \mathrm{d}t\right] \le b^2 T\mathbb{E}\left[\|V\|_2^2\right]\|l_p\|_2^2. \tag{A.27}$$

将 K_α 替换为 f_p 在鞅卷积和漂移卷积中的均方误差由 (A.26) 和 (A.27) 给出界；根据 ($p\to\infty$, 由 (A.16)。根据 (A.14)，取 $D_\circ = bA + M$时，第 3 步中的光滑近似满足

$$V^p(t) = G_0(t) + b\int_0^t f_p(t-s)V_s\mathrm{d}s + \int_{[0,t)} f_p(t-s)\mathrm{d}M_s.$$

由于 $V^p \to V$在 $L^2(\Omega;\, L^2(0,T))$ 根据第 3 步，两个均方估计表明 V与该空间中 (2.13) 右端相同。

对于价格，$\sum_{i\in\{+,\ -\}} r_i y_i = 0$ 以及$\sum_{i\in\{+,\ -\}} r_i y_i^2 = h$ 根据 (2.8) 及其证明。因此得到 (2.5)
$X^h = W^h - \Lambda J^h - (D_h/h)A^h$，其中

$$\left|\frac{D_h}{h} - \kappa\right| = \frac{1}{h}\left|\sum_{i\in\{+,-\}} r_i\left(\mathrm{e}^{y_i} - 1 - y_i - \frac{1}{2}y_i^2\right)\right| \le \frac{\mathrm{e}^{\max_i|y_i|}}{6h}\sum_{i\in\{+,-\}} r_i|y_i|^3 = \mathcal{O}(h^\alpha).$$

该界使用了$\max_i|y_i| = \mathcal{O}(h^\alpha)$，来自 (2.3)。因此，向量 J_1的收敛$(A^h,\ B^h,\ W^h,\ J^h)$联合确定了 $X = W - \Lambda J - \kappa A$与 V、B、W、$\mathcal{J}$。

~为证明唯一性，将方差鞅归一化为$B = B/\sqrt{c}$。(A.25) 中的方差括号矩阵以及 Q在 (2.8) 中的各项给出

$$\left\langle\widetilde{B}\right\rangle = \langle W\rangle = A, \qquad \left\langle\widetilde{B}, W\right\rangle = \rho A.$$

两个归一化驱动过程都是连续局部鞅，并且与关于$\mathcal{J}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z) - \mathrm{d}A_t\,\nu(\mathrm{d}z)$ 的随机积分强正交；这些随机积分是纯跳的。由于 A, B是连续的，且$\mathcal{J}$在时间上是简单的， $D_\circ = bA + B + \xi(J - m_1 A)$ 的跳跃测度为

$$\sum_{\substack{0<s\le T\\ \Delta D_{\circ,s}\neq 0}} \delta_{(s,\Delta D_{\circ,s})} = (\mathrm{id}\times(z\mapsto\xi z))_{\#}\mathcal{J},$$

~其中 # 表示推前。因此，$(V, B, W, \mathrm{J}\ \ X)$ 满足 Wang 等人（2026b，定义 5.4）中的完整典范系统，其参数为 $(\bar{c}_B, \xi, \nu_J)\ = (c, \xi, \nu)$。事实上，通过左微分，可以从 A 的过去恢复 V 的受限 $L^2(0,t)$ 类。反过来，$A_t = \int_0^t V_s\mathrm{d}s$。 C, J 的路径在 t 之前由截至 t 的标记决定，而步骤 4 根据这些标记的跳跃恢复标记。因此，步骤 4 中的滤过与完备化且右连续的典范滤过一致。他们的假设 2.1 成立，因为 $\Lambda \ge 0$, $m_0, m_2 < \infty$，且 ν 的支撑集为 $(0,\infty)$。他们的假设 2.3 中的初始曲线条件也成立：连续非减函数 $G_0(t) = v_0 + \eta G_\alpha(t)$ 对所有 $t \ge 0$ 均有定义。最后，由 (2.8) 得 c, $\xi > 0$ 和 $-1 < \rho < 0$。为在其规定的单位时间区间上应用 Wang 等人（2026b，命题 5.5），令 ^ ~$V_u := TV_{Tu}$, $A_u := A_{Tu}$，其中 $0 \le u \le 1$，并将每个标记 (s,z) 记录在 $(s/T, z)$ 处。归一化鞅 $\widetilde{B}_{Tu}, W_{Tu}$ 的方差括号矩阵为 $\left(\begin{smallmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{smallmatrix}\right)\widehat{A}_u$，标记补偿子为 $\mathrm{d}\,\widehat{A}_u\,\nu(\mathrm{d}z)$。由于 $TK_\alpha(Tu) = T^\alpha K_\alpha(u)$，将 (2.13) 在 Tu 处乘以 T，即可得到单位时间区间参数

$$\widehat{G}_0(u) = TG_0(Tu), \qquad \left(\widehat{b}, \sqrt{\widehat{c}}, \widehat{\xi}\right) = T^\alpha\left(b, \sqrt{c}, \xi\right).$$

$\widehat{A}$ $\widehat{\text{对数价格}}$ X_{Tu} 满足 (2.14)，其时钟为 G_0 且价格载荷相同。重缩放曲线连续且非减，并且 $G_0(0) = Tv_0 \geq 0$。时间变换保留了上述符号与可积性条件。 Wang 等人 (2026b，命题 5.5) 因此给出了 $[0,1]$ 上完整典范律的弱唯一性。逆转时间变换后，得到 $\mathcal{P}_\star$ 在 $\left(V, \widetilde{B}, W, \mathcal{J}\right.$ 上的唯一完整典范律，定义于 $[0,T]$。定义 $F\left(v, \widetilde{b}, w, \mu, x\right) := \left(v, \sqrt{c}\widetilde{b}, w, x, \mu\right)$。对于上述识别出的每个子序列律 $\mathcal{P}$，

$$\mathcal{P} = \mathcal{L}(V, B, W, X, \mathcal{J}) = F_{\#}\mathcal{P}_\star.$$

任意趋于零的网格间距序列都存在一个子序列，其极限分布为此分布，这证明了整个序列的收敛性。证明至此完成。 □

A.3 推论 3.1 的证明

证明。 若 $x_j \to x$ 在 J_1 上 $[0,T]$，则相应的时间变换固定 T，因此 $x_j(T) \to x(T)$。由此，对定理 2.2 应用连续映射定理可得

$$S_T^h = S_0 \mathrm{e}^{X_T^h} \implies S_0 \mathrm{e}^{X_T} = S_T.$$

由于 $s \mapsto (K-s)^+$ 连续且在 K 上 $[0,\infty)$有界，因此 (3.1) 中的第一个极限成立。

对于看涨期权，我们利用 S 验证其鞅性质，依据 Bondi 等人 (2024，定理 3.3 和推论 3.4)。令 $L_\alpha(\mathrm{d}s) = s^{-\alpha}\mathrm{d}s/\Gamma(1-\alpha)$。该测度具有非负、非递增且局部可积的密度。对于 $x,\ y > 0$，欧拉贝塔积分定义了贝塔函数（Askey 和 Roy，2010，公式 (5.12.1)）。

$$\mathrm{B}(x,y) := \int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{y-1}\mathrm{d}v = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{A.28}$$

利用 $v = s/t$ 和 $(x,\ y) = (1-\alpha,\ \alpha)$ 在（A.28）中，我们得到

$$\int_0^t K_\alpha(t-s)L_\alpha(\mathrm{d}s) = \frac{\mathrm{B}(1-\alpha,\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} = 1, \qquad t > 0. \tag{A.29}$$

因此，L_α 是 K_α的第一类预解核。对于 $\varepsilon > 0$，代换 $v = s/(t+\varepsilon)$得到平移卷积

$$q_\varepsilon(t) := \int_0^t K_\alpha(t+\varepsilon-s)L_\alpha(\mathrm{d}s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{t/(t+\varepsilon)} v^{-\alpha}(1-v)^{\alpha-1}\mathrm{d}v, \qquad t \geq 0. \tag{A.30}$$

上限 $t/(t+\varepsilon)$ 在（A.30）中随 t 增大，并且位于 $[0,1)$。由于被积函数非负，q_ε 是单调不减的，并且

$$0 \leq q_\varepsilon(t) \leq \frac{\mathrm{B}(1-\alpha,\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} = 1$$

由（A.28）。因此，

$$\sup_{0<\varepsilon\leq T} \mathrm{Var}_{[0,T]}(q_\varepsilon) = \sup_{0<\varepsilon\leq T}\left(q_\varepsilon(T) - q_\varepsilon(0)\right) \leq 1, \tag{A.31}$$

其中 $\mathrm{Var}_{[0,T]}$ 表示全变差。核 K_α 在 $(0,\ \infty)$ 上为正、非递增且连续可微，并且 $K_\alpha \in L^2(0,\ T)$，因为 $\alpha > 1/2$。此外，$G_0(t) = v_0 + \eta G_\alpha(t)$ 是

连续且非递减，且 $G_0(0) \geq 0$。在标记变换 $y = \xi z$下，测度$\nu_\xi := (z \mapsto \xi z)_{\#}\nu$ 满足$\int_{(0,\infty)} y^2 \nu_\xi(\mathrm{d}y) = \xi^2 m_2 < \infty$，且价格载荷为 $\Lambda/\xi \geq 0$。这些性质以及（A.29）–（A.31）验证了引用结果关于（2.13）–（2.14）的假设。因此， S 是一个鞅。结合命题2.1，可得

$$\mathbb{E}\left[S_t^h\right] = \mathbb{E}[S_t] = S_0, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{A.32}$$

对$(s-K)^+ - (K-s)^+ = s - K$ 取期望并利用（A.32），得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(S_T^h - K\right)^+\right] &= \mathbb{E}\left[\left(K - S_T^h\right)^+\right] + S_0 - K \\ &\longrightarrow \mathbb{E}\left[(K - S_T)^+\right] + S_0 - K = \mathbb{E}\left[(S_T - K)^+\right].\end{aligned}$$

这就证明了（3.1）中的第二个极限。 □

A.4 引理的证明 3.2

证明。在一个乘积扩张上，令 $D^\perp$ 为一个与原系统独立的标准布朗运动。设 $A_t = \int_0^t V_s \mathrm{d}s$，令

$$U_t := \int_0^t \sqrt{V_s}\mathrm{d}D_s^\perp, \qquad \sigma_\perp := \sqrt{1-\rho^2} > 0, \qquad W_t' := \rho B_t/\sqrt{c} + \sigma_\perp U_t.$$

独立扩张保留了 $\mathcal{J}$的补偿子。由于 $D^\perp$ 与原滤过独立，$\langle B, D^\perp\rangle = 0$。因此，定义 U 的随机积分满足 $\langle B, U\rangle = 0$ 且 $\langle U\rangle = A$。利用（$\langle B\rangle = cA$，以及（A.25）和（2.8），得到

$$\langle W'\rangle = \frac{\rho^2}{c}\langle B\rangle + \left(1-\rho^2\right)\langle U\rangle = A, \qquad \langle B, W'\rangle = \frac{\rho}{\sqrt{c}}\langle B\rangle = \rho\sqrt{c}\,A.$$

因此，(B, W')和 $\mathcal{J}$满足（A.25）中的括号和补偿子恒等式。补偿后的标记积分是纯跳跃的，因此与连续鞅B、 W'强正交。方差方程（2.13）仅涉及 V、 B、$\mathcal{J}$，并且在扩张上成立。根据定理2.2中联合分布的唯一性， （2.14）中的对数价格与

$$X_t' = g_t + \sigma_\perp U_t, \qquad g_t = \rho B_t/\sqrt{c} - \Lambda J_t - \kappa A_t.$$

在 $[0,T]$上，给定$\mathcal{H} = \sigma(V, B, \mathcal{J})$。此时 U 的被积函数已固定，因此 U 具有条件独立高斯增量，在 $[s,t]$上的方差为 $A_t - A_s$。对于确定性的 $0 < r < T$，记

$$\inf_{r\leq t\leq T} X_t' = \sigma_\perp U_r + \inf_{r\leq t\leq T}\left\{g_t + \sigma_\perp(U_t - U_r)\right\}.$$

给定$\mathcal{H}$后，这两个加项相互独立。在$\{A_r > 0\}$ 上，第一个加项具有方差为 $\sigma_\perp^2 A_r > 0$ 的高斯密度。因此，对于每个 $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left(A_r > 0,\ \inf_{r\leq t\leq T} X_t' = x\right) = 0. \tag{A.33}$$

令 $\tau := \inf\{t \in [0,T] :\ A_t > 0\} \wedge T$，并约定 $\inf \varnothing = \infty$。由 A 的连续性可得 $A_\tau = 0$。停时鞅 B^τ 和 U^τ 的二次变差为零，而补偿子给出 $\mathbb{E}[C_\tau] = m_0\mathbb{E}[A_\tau] = 0$。因此，直到并包括 τ，$X_t' = 0$ 都成立。在 $x < 0$ 的 $\{\inf_{0\leq t\leq T} X_t' = x\}$ 上，我们有 $\tau < T$。由 τ 处的右连续性，存在一个有理数 $r \in (\tau, T)$，使得 $\inf_{0\leq t\leq r} X_t' > x$。于是 $A_r > 0$，且 $\inf_{r\leq t\leq T} X_t' = x$。对 (A.33) 作可数并，便证明了关于 $x = \log(L/S_0) < 0$ 的断言。 □

A.5 推论 3.3 的证明

证明。假设 $x_j \to x$ 在 $[0,T]$ 上属于 J_1。选取递增的时间变换 λ_j，将其映到 $[0,T]$，并满足 $\|\lambda_j - \mathrm{id}\|_\infty + \|x_j \circ \lambda_j - x\|_\infty \to 0$。路径 x_j 一致有界，因此对于 $s_j = S_0 \mathrm{e}^{x_j}$ 和 $s = S_0 \mathrm{e}^{x}$，有 $\|s_j \circ \lambda_j - s\|_\infty \to 0$。特别地，

$$|s_j(T) - s(T)| \ \vee \ \left|\underline{s_j}_T - \underline{s}_T\right| \leq \|s_j \circ \lambda_j - s\|_\infty .$$

在每个连续点 t 处，s，$\lambda_j^{-1}(t) \to t$ 给出 $s_j(t) \to s(t)$。右连续有左极限路径至多有可数个不连续点，因此，对s_j 的统一界和控制收敛定理给出$s_{jT} \to s_T$。对定理 2.2的对数价格坐标应用连续映射定理，得到

$$\left(S_T^h, \overline{S}_T^h, \underline{S}_T^h\right) \implies \left(S_T, \overline{S}_T, \underline{S}_T\right).$$

算术亚式看跌期权收益是平均值的连续函数。对于障碍看跌期权，其不连续点集包含于 $\{S_T = L\}$ 中，而根据引理 3.2，该集合的概率为零。两种看跌期权收益都属于 $[0,K]$，因此依分布收敛可推出其期望收敛。

对于亚式看涨期权，股票价格均值恒等式（A.32）、（3.2）中的网格平均值以及托内利定理给出

$$\mathbb{E}\left[\overline{S}_T^h\right] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E}\left[S_{t_n}^h\right] = S_0 = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}[S_t]\mathrm{d}t = \mathbb{E}\left[\overline{S}_T\right].$$

将收益恒等式 $(x-K)^+ - (K-x)^+ = x - K$ 应用于网格平均值 $x = S_T^h$ 和连续时间平均值 $x = S_T$。取期望并利用 $\mathbb{E}[S_T^h] = \mathbb{E}[S_T] = S_0$，得到

$$\mathbb{E}\left[\left(\overline{S}_T^h - K\right)^+\right] = \mathbb{E}\left[\left(K - \overline{S}_T^h\right)^+\right] + S_0 - K,$$
$$\mathbb{E}\left[\left(\overline{S}_T - K\right)^+\right] = \mathbb{E}\left[\left(K - \overline{S}_T\right)^+\right] + S_0 - K.$$

因此，亚式看跌期权价格的收敛性给出了亚式看涨期权的（3.3）。 □

参考文献

Eduardo Abi Jaber。带有L^1-核的仿射随机 Volterra 方程的弱存在性与唯一性。*Bernoulli*, 27(3):1583–1615，2021年。doi: 10.3150/20-BEJ1284。

Eduardo Abi Jaber、Martin Larsson 和 SergioPulido。仿射 Volterra 过程。《应用概率年刊》，29(5):3155–3200，2019年。doi: 10.1214/19-AAP1477。

A. A. Alzaid 和 M. A. Al-Osh。一个整数值的 p 阶自回归结构（INAR(p)）过程。《应用概率杂志》，27:314–324，1990年。

Richard A. Askey 和 Ranjan Roy。伽马函数。载于 Frank W. J. Olver、Daniel W. Lozier、Ronald F. Boisvert 和 Charles W. Clark（编），*NIST* 数学函数手册，第 135–147 页。剑桥大学出版社，2010 年。网址： https://dlmf.nist.gov/5.12.E1。

Emmanuel Bacry、Sylvain Delattre、Marc Hoffmann 和 Jean-François Muzy。利用相互激励点过程对微观结构噪声建模。《定量金融》，13(1):65–77，2013 年。doi: 10.1080/14697688.2011.647054。Patrick Billingsley。概率测度的收敛。Wiley，第二版，1999。Alessandro Bondi、Sergio Pulido 和 Simone Scotti。粗糙 Hawkes–Heston 随机波动率模型。《数理金融》，34:1197–1241，2024 年。doi: 10.1111/mafi.12432。Chunhao Cai、Ping He、Qinghua Wang 和 Yingli Wang。重尾近不稳定累积 INAR(∞) 过程的标度极限与粗糙分数扩散。应用概率方法与计算，28:13，2026 年。Francesco Caravenna 和 Ron Doney。局部大偏差与强更新定理。电子概率学期刊，24:1–48，2019年。doi: 10.1214/19-EJP319。论文编号 72。Gijs Custers、Sven Karbach 和 Martin Friesen。Volterra–Heston 模型中离散监测亚式期权的定价与对冲，2026 年。arXiv:2609.07169。Omar El Euch 和 Mathieu Rosenbaum。粗糙 Heston 模型的特征函数。《数理金融》，29:3–38，2019年。doi: 10.1111/mafi.12173。Omar El Euch、Masaaki Fukasawa 和 Mathieu Rosenbaum。杠杆效应与粗糙波动率的微观结构基础。金融与随机学，22:241–280，2018 年。Jim Gatheral、Thibault Jaisson 和 Mathieu Rosenbaum。波动率是粗糙的。《定量金融》，18:933–949，2018 年。Alan G. Hawkes。若干自激与相互激励点过程的谱。*Biometrika*，58:83–90，1971 年。Alan G. Hawkes。Hawkes 过程及其在金融中的应用：综述。《定量金融》，18(2):193–198，2018 年。doi: 10.1080/14697688.2017.1403131。Alan G. Hawkes 和 David Oakes。自激过程的簇过程表示。《应用概率杂志》，11:493–503，1974 年。Ulrich Horst 和 Wei Xu。带标记 Hawkes 点测度的函数极限定理。《随机过程及其应用》，134:94–131，2021 年。doi: 10.1016/j.spa.2020.12.002。Ulrich Horst 和 Wei Xu。具有自激跳跃动力学的随机波动率模型的微观结构。《应用概率年刊》，32(6):4568–4610，2022 年。doi: 10.1214/22-AAP1796。Ulrich Horst、Wei Xu 和 Rouyi Zhang。重尾 Hawkes 过程的收敛与粗糙波动率的微观结构。《数理金融》，2026a。doi: 10.1111/mafi.70064。在线优先发表。Ulrich Horst、Wei Xu 和 Rouyi Zhang。路径依赖分数阶 Volterra 方程与由泊松随机测度驱动的粗糙波动率模型的微观结构。金融与随机学，2026b。即将发表。arXiv:2412.16436。Thibault Jaisson 和 Mathieu Rosenbaum。近不稳定 Hawkes 过程的极限定理。《应用概率年刊》，25:600–631，2015 年。

Thibault Jaisson 和 Mathieu Rosenbaum。粗糙分数扩散作为近不稳定重尾 Hawkes 过程的标度极限。《应用概率年刊》，26：2860–2882，2016。Paul Jusselin 和 Mathieu Rosenbaum。无套利意味着幂律市场冲击和粗糙波动率。《数理金融》，30(4)：1309–1336，2020。doi：10.1111/mafi.12254。Dmytro Karabash 和 Lingjiong Zhu。带标记 Hawkes 过程的极限定理及其在风险模型中的应用。《随机模型》，31(3)：433–451，2015。Matthias Kirchner。Hawkes 和 INAR(∞) 过程。《随机过程及其应用》，126：2494–2525，2016。doi：10.1016/j.spa.2016.02.008。Maxime Morariu-Patrichi 和 Mikko S. Pakkanen。状态依赖 Hawkes 过程及其在限价订单簿建模中的应用。《定量金融》，22(3)：563–583，2022。doi：10.1080/14697688.2021.1983199。Giorgio Enrico Maria Serva。粗糙 Hawkes–Heston 模型的数值方法与 SSR。硕士论文，米兰理工大学，2025。POLITesi 仓库。Haixu Wang。离散时间标记 Hawkes 过程的极限定理。《统计与概率快报》，184：109368，2022。doi：10.1016/j.spl.2022.109368。Yingli Wang、Zhenyu Cui 和 Lingjiong Zhu。粗糙 Heston 模型作为双变量累积重尾 INAR 过程的标度极限：弱误差界与期权定价。《工业与应用数学学会金融数学杂志》，2026a。即将刊出。Yingli Wang、Yinhao Wu 和 Lingjiong Zhu。粗糙 Hawkes–Heston 模型的微观结构基础，2026b。arXiv:2608.07709v1。