arXiv:2611.29586v1 [math.NT] 22 Nov 2026

经认证的 p-进正规形：Eliasson–Vey 定理与轨道的零点集

Kirill Terskii
t02260049@gse.cs.msu.ru

摘要

我利用同调算子的史密斯标准形，构造向量场在 $\mathbb{Z}_p^d$ 上某个平衡点附近的部分 Poincar´é–Dulac 正规形，其系数可被 p 整除（当 $p=2$ 时可被 4 整除）。保留那些移除代价超过固定位数的方向后，对于任意线性部分，都能在一个显式球上得到收敛性。对于多项式向量场，通过对共轭缺陷进行精确的整数检验，可以在缩放坐标中认证所计算的流达到 K 位数。当可积哈密顿系统在秩零点处的二次部分张成一个嘉当子代数时，辛特征坐标中的同调除数都是整数。这使我能够利用牛顿迭代，在每个素数处、对每一种 Williamson 型，都得到精确的 p-进 Eliasson–Vey 正规形。在精确的线性正规坐标中，将多项式限制在一条轨道上会得到指数函数和；对于含有 $s\geq 2$ 个不同指数的非零指数函数和，van der Poorten 的界表明其零点数不超过 $2s-3$。对于多项式映射的整数轨道，我结合精确的模轨道、斯特拉斯曼界和阿基米德估计，进行阿代尔筛法。在每个素数处，增加模深度最终会恰好排除某个时间类，当且仅当沿其中心流形影子进行的插值在 $\mathbb{Z}_p$ 中没有零点。

1 引言

庞加莱´–杜拉克构造通过在每个次数上求解同调方程，简化平衡点附近的向量场 [1]。对于对角线性部分，这意味着要除以形如 $\langle m\text{的数，}\ \lambda\rangle-\lambda_i$，并损失与其赋值相同数量的 p-进位。一般而言，特征值可能低估损失。例如，$k\times k$ 若尔当块 $3I+J$ 在 $\mathbb{Z}_3$上只有特征值 3，但其史密斯指数为 $0,\ldots,0,k$，因此对其求逆需要损失 k 位。

我利用同调算子的史密斯标准形来判断应消去哪些方向，并保留消去代价超过 σ 位的方向。围绕平衡点重缩放，可为每个次数提供所需的位数。对于赋值为 c的向量场，定理3.7 给出半径为p^{-r} 的球上的收敛性，其中 $r=1+\max(\sigma-c,0)$，涵盖共振及非半单线性部分，并对两个级数的尾部给出界。在有限精度下，我直接在计算得到的多项式上评估共轭缺陷。对其赋值作界定，可得球上的流模 p^{K+r} 一致，或者

K缩放坐标中的数字（定理3.12）。如果向量场是幂级数，我还需要对省略系数的赋值给出下界。

Herman 和 Yoccoz 在丢番图条件 [13], 下证明了 Siegel 线性化定理的一个非阿基米德类比，Lindahl 则确定了单变量二次映射的线性化圆盘的大小 [18]。Jenkins 和 Spallone 研究了形式流与解析流，以及恒等映射相切映射的分类 [14]。这一阈值在线性微分方程中也有对应： p-进 Fuchs 定理采用非 Liouville 条件 [16], ， 而 Kedlaya 的 Liouville 分划则按整数差或 Liouville 差对指数进行分组。对于圆盘上满足

Robba 条件的微分模，这些分块给出一个直和分解 [17, 定义 3.4.4 和注 3.4。15]。

史密斯指数是同调算子的 Hodge 斜率，其特征值赋值则是 Newton 斜率。经典比较 [16, 10] 在此给出了单次除法的代价上界。若线性部分在基 S下对角化，命题 3.4给出 $|s_j - v_j| \le (n+1)\kappa($ S)，适用于次数 n对应的有序斜率，其中 $\kappa(S)$ 衡量特征基不为整基的程度。具有整特征基的代数特征值给出 O(对数 n) 上界，而 Liouville 例子展示了在缺少这些假设时指数可能增长得多快。第 5 节还讨论约化核中代数点的对数。在奇素数处且具有整特征基时，精确群运算可给出这些指数，而高度给出它们关于次数的线性上界（对于 $\mathbb{G}_m$）或二次上界（对于椭圆曲线）。对于 $\mathbb{G}_m$，Yu 定理将增长改进为关于 $\log n$ 的多项式，但常数更大 [32]。

如果对易哈密顿量在秩零点处的二次部分张成一个嘉当子代数，那么在辛特征坐标中，除子是赋值不超过次数的对数p 的整数。这给出了一个显式球上的 $\mathcal{H} \circ \Phi = \mathcal{G}(q)$的牛顿迭代（定理4.1）。Crespo 和 Pelayo 提出问题：哪些 Williamson 型具有这种局部形式 [8, 问题 5。14], 而在他们后来的表述中，秩零定理在嘉当条件下涵盖了所有类型和所有素数 [9,定义 3。2]。

在线性正规坐标中，多项式限制在轨道上后会变成指数函数和，其指数来自特征值。对于一个具有 $s \ge 2$ 互异指数的非零和，van der Poorten 和 Schlickewei 给出了一个 $2s - 3$ 对起始点一致的零点上界[29, 30]。在第7 节中，我探讨多项式映射的轨道与超曲面相交的确切整数时刻 [21]。我从模 p^k的轨道开始。当某个时间类在这一层仍然存在时，中心流形影子会告诉我们，提高 k 是否可能将其排除。在幂零循环上，影子上的函数只是常数，它们的赋值给出命题7.4中的深度上界。为了估计轨道有 ′模 $p$étale 周期的频率，我使用了 [5]的随机映射模型。

记 v 为 p-进赋值，取向量各分量或多项式各系数中的最小值。因此 $\|x\| = p^{-\mathrm{v}(x)}$，而 $\mathrm{B}(x,$ $R)$ 表示以 x 为中心、半径为 R 的闭球。对于向量场 f，令 $c = \mathrm{v}(f)$，并假设

$$c > \tfrac{1}{p-1}, \quad \text{that is,} \quad c \ge 1 \text{ for } p \ge 3, \qquad c \ge 2 \text{ for } p = 2. \tag{1}$$

经过时间重标度后，对于任意系数为 p-整数的向量场，乘以 p 或在 $p = 2$ 时乘以 4，即可得到此条件。对于线性向量场，该条件是尖锐的，因为 $f(x)$ 的流 $e^{\lambda t}x = \lambda x$ 当且仅当 $\mathrm{v}(\lambda) > 1/(p-1)$ 时才对所有 $t \in \mathbb{Z}_p$ 有定义。我采用勒让德公式 $\mathrm{v}(n!) = (n - s_p(n))/(p-1) \le (n-1)/(p-1)$，其中 $s_p(n)$ 是 n 的基-p 数位之和。

2 p-进向量场的流

令 $D = \sum_j f_j \partial_j$ 为与 f 关联的导子， $E_n = D^n x/n!$，逐分量作用于坐标函数，并且 $\varphi_t(x)$ $= \sum_{n \ge 0} t^n E_n(x)$。

引理 2.1 ([28, 引理 2.1])。 $\mathrm{赋值}(D^n g) \ge \mathrm{赋值}(g) + nc$ 对每个 $g \in \mathbb{Z}_p[x]$, 且 $\mathrm{赋值}(E_n) \ge nc - \mathrm{赋值}$ $(n!) \ge n\big(c - \frac{1}{p-1}\big) + \frac{1}{p-1}$ 对于 $n \ge 1$。

因此，李级数在 $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^d$ 上收敛；由于 D 是一个导子，它定义了一个流： $\varphi_{s+t} = \varphi_t \circ \varphi_s$，且 $\partial_t \varphi_t(x)$ $= f(\varphi_t(x))$. 在所有由 t 中的幂级数给出的、且在 $\mathbb{Z}_p$ 上收敛的解中，映射 $t \mapsto \varphi_t(x)$ 是唯一满足 $\varphi_0(x) = x$ 的映射，因为这类级数的系数由递归关系确定。对于泰特代数 $\mathbb{Z}_p\langle x \rangle^d$ 中的 f，上述结论也完全成立；该代数由满足以下条件的幂级数组成：

系数趋于零。由引理 2.1 可知 E_n、 $n \ge 1$ 的系数可被 p 整除，因此每个φ_t 都是 $\mathbb{Z}_p^d$的等距映射，即恒等映射加上一个 p^{-1}-利普希茨 [28,节 2]。

引理 2.2 ([28,定理 3.2])。 若 $f(x) \neq 0$，则 $\|\varphi_t(x) - \varphi_s(x)\| = \|f(x)\|\,|t-s|$ 对所有 $s,\ t \in \mathbb{Z}_p$。

3 任意维数下的正规形

在构造正规形之前，就可以对近似平衡点进行认证。对于 $f \in \mathbb{Z}_p[x_1,\dots,x_d]^d$和 $a \in \mathbb{Z}_p^d$，若 $\det Df(a) \neq 0$，令 $m = \mathrm{v}(f(a))$ 和 $e = \mathrm{v}(\det Df(a))$。若 $m > 2e$，则根据亨泽尔引理，在 $\mathrm{B}(a,\ p^{-(m-e)})$ 中存在一个单零点，并且它在更大的球 $\mathrm{B}(a,\ p^{-e-1})$ 中唯一。事实上，伴随矩阵公式给出 $\|Df(a)^{-1}\| \le p^{e}$。在较大的球上，根据关于 a 的泰勒余项估计，映射 $x \mapsto x - Df(a)^{-1}f(x)$ 的利普希茨常数至多为 p^{-1}，且其移动 a 的距离至多为 $p^{-(m-e)}$。因此，它在较小的球中有一个不动点，并且 Df 在较大的球上保持可逆。

在一维简单平衡点 x^* 附近，若 $\lambda = f'(x^*)$ 和 $f(x^*+y) = \lambda y + \sum_{k\ge 2} a_k y^k$，则 Poincar´e–Siegel 坐标 $h(y) = y + \sum_{n\ge 2} h_n y^n$ 满足 $h \circ \varphi_t = e^{\lambda t} h$

$$(n-1)\lambda\, h_n = -\sum_{k=2}^{n} (n-k+1)\, a_k\, h_{n-k+1}.$$

由于 $x^* \in \mathbb{Z}_p$，所有 a_k 和 λ 的赋值都至少为 c。结合 $\ell = \mathrm{v}(\lambda) \ge c$，递归给出 $\mathrm{v}(h_n) \ge (n-1)(c-\ell) - \mathrm{v}((n-1)!)$，因此 h 在 $|y| < p^{-\rho}$ 上收敛，其中 $\rho = \ell - c + 1/(p-1)$，且 $\mathrm{v}(h_n y^n) \ge (n-1)(\mathrm{v}(y) - \rho) + \mathrm{v}(y)$。该坐标提供了一种独立的方法，可通过 $e^{\lambda t}$ 和 p-adic 对数计算 x^* 附近的流和轨道时间。在一维情形下，除子为 $(n-1)\lambda$，因此不存在小除数障碍。

设 x^* 是一个平衡点，且 $A = Df(x^*)$。固定 $r \ge 1$，令 $x = x^* + p^r z$，并

$$\tilde f(z) = p^{-r} f(x^* + p^r z) = Az + \sum_{n\ge 2} \tilde f_n(z), \qquad \mathrm{v}(\tilde f_n) \ge c + r(n-1).$$

与经典理论一样， [1], 我寻找一个坐标变换 $\Phi(z) = z + \sum_{n\ge 2} \Phi_n(z)$ 以及一个向量场$g_{\mathrm{nf}}(z) = Az + \sum_{n\ge 2} R_n(z)$，其中 Φ_n， R_n是次数为 n 的齐次项，使得 Φ 将 g_{nf} 共轭到 f:

$$D\Phi(z)\, g_{\mathrm{nf}}(z) = \tilde f(\Phi(z)). \tag{2}$$

比较次数为 n 的项，得到同调方程

$$L_A \Phi_n + R_n = G_n, \qquad L_A\Phi = D\Phi \cdot Az - A\Phi, \tag{3}$$

$$G_n = \Big[\tilde f_{\ge 2}\big(z + \textstyle\sum_{k<n}\Phi_k\big)\Big]_n - \sum_{\substack{j+k=n+1\\ 2\le j,k<n}} D\Phi_j \cdot R_k,$$

其中 G_n 仅依赖于较低次数的项。若 $R = 0$，则 $\varphi_t(x) = x^* + p^r \Phi(e^{At}\Phi^{-1}((x - x^*)/p^r))$，这就是线性化。一般而言， Φ 将 f 的流共轭到 g_{nf} 的流 ψ_t。

令 V_n 为由次数为 n、变量为 d 的齐次向量多项式构成的自由 $\mathbb{Z}_p$-模，其单项式基为 $z^e\varepsilon_i$，其中 ε_1，……， ε_d 是 $\mathbb{Z}_p^d$ 的标准基。在此基下， L_A 是一个系数取自 $\mathbb{Z}_p$ 的方阵（其元素为 A 乘以指数）。它在 $\mathbb{Z}_p$ 上的史密斯标准形为 [20]

$$P L_A Q = \mathrm{diag}\big(p^{s_1},\dots,p^{s_m}\big), \qquad P, Q \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}_p),$$

其中 $p^{\infty}=0$，实际计算中通过选取最小赋值主元的高斯消元，在工作幂次 p 模下求出分解。令 $\gamma=PG_n$。固定一个整数阈值 $\sigma\geq 0$。若 $s_i\leq\sigma$，则令 $\xi_i=\gamma_i/p^{s_i}$。对于 $s_i>\sigma$，令 $\xi_i=0$，并在正规形中保留 γ_i。除法在 $\mathbb{Q}_p$中进行。定理 3.7给出了保证商为整数的一个充分半径。于是

$$\Phi_n=Q\xi,\qquad R_n=P^{-1}\textstyle\sum_{s_i>\sigma}\gamma_i\varepsilon_i$$

求解（3），因为 $P\,(L_A\Phi_n+R_n)\;=\operatorname{diag}(p^{s_i})\xi+\sum_{s_i>\sigma}\gamma_i\varepsilon_i=\gamma_n$。

引理 3.1。对于任意选择的保留方向，Φ和 g_{nf} 在次数 n 处的截断满足（2），相差的项次数均大于 n。特别是，在 R 中保留可消去项，绝不会使共轭变得不精确。

证明。（$k\leq n$ 2）中次数为 $k\leq n$ 的项恰好对应于方程（3），其中 $k\leq n$；这些方程按构造成立。□

阈值不会影响形式恒等式。它是在定义域大小（定义域会随着被除去的除子而缩小）与 g_{nf} 中剩余项的数量之间进行权衡。精确的零史密斯因子总是保留的。在工作精度为 $W>\sigma$ 时，模 p^W 的零因子意味着 $s_i\geq W$，因此会被保留。由于可消去方向也可能被保留，这属于 Poincar´é–Dulac 型的部分正规化，不一定是只包含共振项的正规形。

命题 3.2。假设 A 在 $\mathbb{Q}_p$的某个有限扩张上可对角化，其特征值为$\lambda_1,\ldots,\lambda_d$。那么 L_A 可对角化，其特征值为 $\langle m,\lambda\rangle-\lambda_i$、$|m|=n$。具有 $s_i=\infty$ 的方向数等于共振 $\langle m,\lambda\rangle=\lambda_i$的数量；若不存在共振，则 $\sum_i s_i=\sum_{|m|=n,\ i}$赋值$\big(\langle m,\lambda\rangle-\lambda_i\big)$。

证明。在 A的特征基中，$L_A(z^m\varepsilon_i)=(\langle m,\lambda\rangle-\lambda_i)\,z^m\varepsilon_i$。可对角化算子的核是特征值为 0 的特征空间，其维数就是秩亏，而史密斯标准形可以计数。L_A 的行列式等于其特征值的乘积，而 $\det(PL_AQ)$与之相差一个单位，因此赋值之和相等。□

因此，初等因子承载了经典小除数的信息，而无需计算任何特征值。这一点很有用，因为特征值通常位于$\mathbb{Q}_p$的扩域中：实理论中的复共轭对在这里并无特殊地位，而不可约特征多项式也与其他多项式一样处理。对于若尔当块，s_i 并不是彼此独立的除子：沿着一条链，它们会累加。例如，$k\times k$ 矩阵 $3I+J$（其中 J 为幂零若尔当块，即对角线以上为 1）在 $\mathbb{Z}_3$上的史密斯指数为 0，……，0，k，也就是说，初等因子为 1，……，1，3^k，而其唯一的特征值 3 的赋值为 1。零特征值会产生无穷多个共振：$\langle m,\lambda\rangle=\lambda_i$ 对每个 $m=m'+e_i$都成立，其中 e_i 是 i次单位指数，而 m' 支撑在零方向上；正规形保留相应的级数。

3.1 史密斯指数的界

设 $L_n=L_A|_{V_n}$、$M_n=d\binom{n+d-1}{d-1}$ 和 $r_n=$秩$_{\mathbb{Q}_p}L_n$。将其指数按如下顺序排列

$$s_1(n)\leq\cdots\leq s_{r_n}(n)<\infty,\qquad s_j(n)=\infty\quad(j>r_n).$$

当 $r_n>0$ 时，令 $\mu_n=s_{r_n}(n)$。相关界是这些赋值的上界：除以 $p^{s_{i(n)}}$ 会损失 $s_i(n)$ 位。对于整数矩阵，史密斯指数与特征值赋值何时相等这一问题已在 [10] 中研究。这里的矩阵是 A 的齐次表示 L_n。

用 [16], 的语言来说，$s_j(n$是 L_n的霍奇多边形的斜率，而其特征值的赋值$v_1(n) \le \cdots \le v_{M_n}(n$是 $\langle m,\ \lambda\rangle - \lambda_i$小除数，且 ∞零点对应的斜率，是其牛顿多边形的斜率。当 L_n 可逆时，牛顿多边形位于霍奇多边形上方，且二者端点相同：

$$\sum_{j\le i} s_j(n) \le \sum_{j\le i} v_j(n) \quad (1\le i\le M_n), \qquad \sum_{j\le M_n} s_j(n) = \sum_{j\le M_n} v_j(n) \ \text{ if } r_n = M_n. \tag{4}$$

特别是 $s_1(n) \le v_1(n)$: 最小指数从不超过最小除子的赋值。对于奇异的 L_n, (4) 可通过将可逆情形应用于 $L_n + p^u I$，并令 $u\to\infty$，得出。

命题 3.3 (子式)。设 $r_n > 0$，并令 $a = \min_{i,j} \mathrm{v}(A_{ij})$。若 $\Delta_j(n)$ 是 L_n 的非零 $j\times j$ 子式的最小赋值，其中 $\Delta_0(n) = 0$，则

$$s_j(n) = \Delta_j(n) - \Delta_{j-1}(n) \ \ (1\le j\le r_n), \qquad a \le s_j(n), \qquad \mu_n \le \Delta_{r_n}(n) - (r_n-1)a. \tag{5}$$

证明。这是利用子式描述初等因子 [20, 16]: 由$j\times j$ 子式生成的理想在左右两侧乘以可逆整矩阵后保持不变。对于史密斯对角矩阵，其赋值为 $s_1+\cdots+s_j$，这证明了第一个恒等式。L_n 的每个元素都能被 p^a整除，因此每个有限史密斯指数都至少为 a，从而得到（5）中的最后一个不等式。

□

当 L_n 可逆时，（4）精确计算 $\Delta_{M_n}(n) = \mathrm{v}(\det L_n)$，而（5）的最后一个界变为

$$\mu_n \le \sum_{|m|=n,\ i} \mathrm{v}\big(\langle m,\lambda\rangle - \lambda_i\big) - (M_n-1)a.$$

对于有理的 A，将 Hadamard 不等式应用于 qL_n的一个非零 r_n 阶整数子式，其中q 与 p互素、qA 为整数，且 $H\ge 1$ 是 qA各元素绝对值的上界，可得粗略界 $\mu_n \le r_n \log_p\big(\sqrt{r_n}(n+1)H\big) - (r_n-1)a$。该界只需知道秩，也涵盖共振和不可对角化的 A。

命题 3.4 (半单线性部分)。设 $L/\mathbb{Q}_p$ 是一个有限扩张，其整数环为$\mathcal{O}_L$，其中赋值由 $\mathrm{v}(p) = 1$归一化，并假设 $A = S\Lambda S^{-1}$，其中 $S\in \mathrm{GL}_d(L)$ 且 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_d)$。对矩阵使用最大元素范数，并令

$$\kappa(S) = \log_p(\|S\|\,\|S^{-1}\|), \qquad b_n = \max_{\substack{|m|=n,\ i\\ \langle m,\lambda\rangle\neq\lambda_i}} \mathrm{v}(\langle m,\lambda\rangle - \lambda_i).$$

那么，对每个 j，令 $v_j(n)$ 如 (4)所示，

$$|s_j(n) - v_j(n)| \le (n+1)\kappa(S), \tag{6}$$

其中两边对同一个 j 都为无穷大。特别地，若 $r_n > 0$，

$$\mu_n \le b_n + (n+1)\kappa(S). \tag{7}$$

如果 $S\in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_L)$，有限的 $s_j(n)$ 恰好是非零 $\langle m,\lambda\rangle - \lambda_i$ 的赋值，计入重数。特别地，在一维且 $\lambda\neq 0$ 时，

$$s_1(n) = \mathrm{v}(\lambda) + \mathrm{v}(n-1). \tag{8}$$

证明。 在齐次向量多项式上使用系数高斯范数和坐标变换 $T_n h(z) = S^{-1}h(Sz)$。于是 $T_n L_n = L_\Lambda|_{V_n} T_n$，并且

$$\|T_n\| \le \|S^{-1}\|\|S\|^n, \qquad \|T_n^{-1}\| \le \|S\|\|S^{-1}\|^n.$$

在 $\mathcal{O}_L$ 上、按 $\mathrm{v}(p) = 1$ 归一化的史密斯指数，与在 $\mathbb{Z}_p$ 上的史密斯指数相同，因为子式保持不变。在单项式特征基 $L_\Lambda|_{V_n}$ 中，对角矩阵的对角元为 $\langle m, \lambda\rangle - \lambda_i$，因此其指数为 $v_j(n)$。Hodge 斜率由极小极大原理刻画： $p^{-s_j(C)}$ 是最小的 σ，使得每个 j 维子空间 V 都包含满足 $\|Cv\| \le \sigma\|v\|$ [16] 的 $v \neq 0$。因此，对于可逆的 B 和 B'，有 $s_j(BCB') \ge s_j(C) - \log_p\|B\| - \log_p\|B'\|$。将其应用于 $L_n = T_n^{-1} L_\Lambda T_n$ 和 $L_\Lambda = T_n L_n T_n^{-1}$，便得到 (6)，因为 $\log_p(\|T_n\|\|T_n^{-1}\|) \le (n+1)\kappa(S)$。两个矩阵的秩相同，因此最大的有限 $v_j(n)$ 为 b_n；即使存在共振，(7) 仍然成立。若 S 和 S^{-1} 都是整数，则 $\kappa(S) = 0$，从而证明等式成立。 □

推论 3.5 （代数特征值）。 在命题 *3.4*中，另外假设 λ_i 在 $\mathbb{Q}$上是代数的。令 k 为一个包含它们的数域， $d_k = [k : \mathbb{Q}]$，并选取一个正整数 q，使得所有 $q\lambda_i$ 都是代数整数。令

$$H = \max\bigl(1, \max_{\tau : k \hookrightarrow \mathbb{C},\, i} |\tau(q\lambda_i)|\bigr).$$

那么，每当 $r_n > 0$，

$$\mu_n \le (n+1)\kappa(S) + d_k \log_p((n+1)H) - \mathrm{v}(q). \tag{9}$$

特别地，整特征基给出 $\mu_n = O(\log(n+1))$。这里的代数性假设是关于 $\mathbb{Q}$ 的，而不仅仅是关于 $\mathbb{Q}_p$ 的。

证明。 对于非零 $\beta = \langle m, \lambda\rangle - \lambda_i$，数 $q\beta$ 是一个代数整数。其非零整数范数的绝对值至多为 $((n+1)H)^{d_k}$。它的所有 p-进共轭的赋值均非负，因此所选嵌入处的赋值至多为该范数的赋值。故 $\mathrm{v}(\beta) \le d_k \log_p((n+1)H) - \mathrm{v}(q)$。应用（ 7 ）。 □

注 3.6（为什么系数上的假设很重要）。对于任意 p-进系数， n 中都不存在对数界，即使是对角 2×2矩阵也如此。选取满足$b_{j+1}/p^{b_j} \to \infty$的整数 $1 \le b_1 < b_2 < \cdots$，令 $\alpha = \sum_j p^{b_j}$和 $n_j = \sum_{k \le j} p^{b_k}$，并取 $A = \mathrm{diag}(p^c, p^c\alpha)$，其中 c满足 (1)。在 $z_1^{n_j}\varepsilon_2$ 上，同调算子的特征值为 $p^c(n_j - \alpha)$，其赋值为 $c + b_{j+1}$。由于该算子在整单项式基下是对角的，这就是一个有限的史密斯指数。此处 $n_j \le p^{b_j+1}$，因此沿着这个子序列，指数的增长速度超过线性；对于给定的递增函数 f，选取 $b_{j+1} \ge f(p^{b_j+1})$便可使它们超过 $f(n_j)$。数 α 是一个 p-进 Liouville 数：$\mathrm{v}(\alpha - n_j) = b_{j+1}$ 的增长速度超过n_j 的任意倍数（这一概念见 [16] ）。这种行为说明了小除数条件在完全解析正规化 [13], 中的作用；这与 p-进 Fuchs 定理中的障碍相同：当正则奇异线性系统的指数之差是非 Liouville 数时，该系统可解析地正规化，而 Monsky 的例子表明这一假设不可省略 [16]。定理 3.7 的阈值通过将这类除子保留在 R中来避免这一问题；正如 Liouville 分划在线性联络中将差为 Liouville 数的指数归入同一块 [17, 定义 3.4。4]。上述整数和数域界不适用于这种系数选择。

对于线性部分 $\lambda I + J$，其中 $\lambda \neq 0$ 和 J 幂零， L_n 是 $L_{\lambda I}$ 加上一个幂零算子，因此 L_n^{-1} 是一个有限的诺伊曼级数，其指数可以明确地界定。在平面中，甚至可以从加权路径中直接读出这些指数。下文不需要这样的界，因为阈值会保留所有过小的项。

3.2 收敛与尾项界

如果只去除满足 $s_i(n) \le \sigma$ 的方向，那么无论上述界如何，每个次数至多损失 σ 位数字，而且无需对 A 作任何丢番图假设，归一化过程也会收敛。

定理 3.7 (固定阈值归一化)。 设 $f(z) = Az + \sum_{n\ge 2} f_n(z)$ 满足 $\mathrm{v}(A) \ge c$ 且 $\mathrm{v}(f_n) \ge c + r(n-1)$，其中 $c > 1/(p-1)$ 和 $r \ge 1$ 均为整数。固定一个整数 $\sigma \ge 0$，并在每个次数上使用上述史密斯构造，仅移除满足 $s_i(n) \le \sigma$的方向。令

$$b = \max(c, \sigma), \qquad \eta = r + c - b = r - \max(\sigma - c, 0).$$

若 $\eta \ge 1$，则所有除法均为整数，且对每个 $n \ge 2$，

$$\mathrm{v}(G_n) \ge b + \eta(n-1), \qquad \mathrm{v}(\Phi_n) \ge \eta(n-1), \qquad \mathrm{v}(R_n) \ge b + \eta(n-1). \tag{10}$$

级数 Φ 和 g_{nf} 在泰特代数中于 $\mathbb{Z}_p^d$上收敛，满足 (2)，且 Φ 是 $\mathbb{Z}_p^d$ 的解析双射，且其逆映射为解析映射。对于，它们的尾部满足

$$\mathrm{v}(\Phi - \Phi_{\le M}) \ge \eta M, \qquad \mathrm{v}(g_{\mathrm{nf}} - g_{\mathrm{nf},\le M}) \ge b + \eta M. \tag{11}$$

因此，$r \ge 1 + \max(\sigma - c, 0)$ 是此部分归一化的一个充分半径指数，也适用于非半单及共振线性部分。

证明。 假设 (10) 中的界对直至 $n-1$ 次数都成立。在来自 n 的次数为 $f_l(\Phi)$ 的贡献中，来自 l 的因子次数之和为 n。线性因子的赋值为零，因此该贡献的系数赋值至少为

$$c + r(l-1) + \eta(n-l) = \eta(n-1) + c + (b-c)(l-1) \ge \eta(n-1) + b.$$

在 (3) 中，对 G_n 的其他贡献为 $D\Phi_j \cdot R_k$，其中 $j + k = n + 1$ 且 $2 \le j$，$k < n$。微分保持系数赋值的下界，而归纳法给出这些项满足 $\eta(j-1) + b + \eta(k-1) = b + \eta(n-1)$。这也从 $n = 2$ 开始了归纳，此时不存在这样的乘积。

矩阵 P、Q、P^{-1} 都是整的，因此构造 Φ_n 或 R_n 时唯一的损失来自被移除方向上的除以 p^{s_i}。这些方向上的损失至多为 $\sigma \le b$，从而 $\mathrm{v}(\Phi_n) \ge \eta(n-1)$，而保留方向给出 $\mathrm{v}(R_n) \ge b + \eta(n-1)$。由于 $\eta \ge 1$，这些界保证收敛以及 (11)。于是共轭恒等式在泰特代数中成立，而 $b \ge c$ 将 g_{nf} 置于 $p^c\mathbb{Z}_p\langle z\rangle^d$ 中。

要对 $\Phi = \mathrm{id} + H$ 求逆，解 $z = w - H(z)$。H 的系数都能被 p 整除，因此它在 $\mathbb{Z}_p^d$ 上逐点以及在 w 中泰特代数的单位球上都是压缩映射。因此，从 $z = w$ 开始便能得到泰特代数中的逆映射。 □

这个半径估计较为保守，因为它对每个被删去的方向都计入完整的 σ 位数。若让损失依赖于次数，就能改进这一估计（一维情况下可恢复本节开头 h 的界），但第 3.3 节的证书使得实践中无需进行此类改进：它直接读取计算所得系数的实际赋值。

引理 3.8 （系数截断下流的稳定性）。 设 g、$h \in p^c\mathbb{Z}_p\langle z\rangle^d$，其中 $c > 1/(p-1)$，并假设 $\mathrm{v}(g-h) \ge L$。那么，对所有 $t \in \mathbb{Z}_p$ 和 $z \in \mathbb{Z}_p^d$，它们的流都模 p^L 相等。

证明。 令 $D_g = g \cdot \nabla$ 和 $D_h = h \cdot \nabla$。两个李级数之差逐项受以下恒等映射控制

$$D_g^j - D_h^j = \sum_{a=0}^{j-1} D_g^{j-1-a}(D_g - D_h)D_h^a$$

因为每一项都包含一个使系数赋值至少提高 L 的因子，以及 $j-1$个使其至少提高 c的因子。将其作用于 z 并除以 $j!$ 后，其赋值至少为$L+(j-1)c-\mathrm{v}(j!) \geq L$。两个级数均收敛，因此它们的差也满足相同的下界。

□

推论 3.9 (经认证的截断)。 在定理 3.7的条件下，设 $K \geq 1$ 和 $M \geq 1$ 满足 $\eta M \geq K$。设 $\psi_t^{(M)}$ 为多项式向量场 $g_{\mathrm{nf},\leq M}$的流。那么， $\tilde{f}$ 的流 $\tilde{\varphi}_t$ 满足

$$\tilde{\varphi}_t(z) \equiv \Phi_{\leq M}\Big(\psi_t^{(M)}(\Phi_{\leq M}^{-1}(z))\Big) \pmod{p^K} \tag{12}$$

对所有 $t \in \mathbb{Z}_p$ 和 $z \in \mathbb{Z}_p^d$均成立。右侧的逆映射通过压缩映射计算；确定各多项式的系数至相应精度后，所有多项式都可以逐系数模 p^K 约化。

证明。 精确的解析共轭给出 $\tilde{\varphi}_t = \Phi \circ \psi_t \circ \Phi^{-1}$。界 (11) 给出 $\Phi \equiv \Phi_{\leq M}$(模 p^K) 以及 $g_{\mathrm{nf}} \equiv g_{\mathrm{nf},\leq M}$(模 p^K)。两个坐标映射都是等距变换，因为它们是恒等映射加上一个严格压缩映射。因此，它们的逆映射也模 p^K 相等。由引理 3.8， ψ_t 和$\psi_t^{(M)}$ 模 p^K相等。复合中的所有映射都保持同余关系，从而证明了 (12)。回到原变量时使用 $x = x^* + p^r z$。

□

3.3 所计算正规形的证书

精确构造为其自身的系数给出了尾项界。在模 p^W 的计算中，商 γ_i/p^{s_i} 是模 p^{W-s_i} 确定的。某一次数下选取的提升会进入后续次数的方程，而史密斯矩阵本身也是模 p^W 计算得到的。我通过计算（2）中的缺陷来检验所计算的多项式。

引理 3.10 (共轭缺陷)。 设 $c > 1/(p-1)$和 $K \geq c$为整数， $\tilde{f} \in p^c\mathbb{Z}_p\langle z\rangle^d$，并设 $\Phi = \mathrm{id} + H$和 g_{nf} 为满足 $H \in p\mathbb{Z}_p[z]^d$和 $g_{\mathrm{nf}} \in p^c\mathbb{Z}_p[z]^d$的多项式映射。若 $\mathcal{D} = D\Phi \cdot g_{\mathrm{nf}} - \tilde{f} \circ \Phi$满足 $\mathrm{v}(\mathcal{D}) \geq K$，则对所有 $t \in \mathbb{Z}_p$ 和 $w \in \mathbb{Z}_p^d$，都有 $\tilde{\varphi}_t(\Phi(w)) \equiv \Phi(\psi_t(w))$（模 p^K），其中 ψ_t 是 g_{nf}的流。

证明。 将 g_{nf}通过 Φ传输得到向量场 $g = \tilde{f} + \mathcal{D} \circ \Phi^{-1}$，因为 $g \circ \Phi = D\Phi \cdot g_{\mathrm{nf}}$。定理 3.7 的压缩论证给出 $\Phi^{-1} \in \mathrm{id} + p\mathbb{Z}_p\langle z\rangle^d$，并表明 Φ 是等距映射。因而，用 Φ^{-1} 进行代入保持缺陷上的系数赋值界，从而得到 $g \in p^c\mathbb{Z}_p\langle z\rangle^d$ 以及 $\tilde{\mathrm{v}}(g-f) \geq K$。

根据链式法则， $t \mapsto \Phi(\psi_t(w))$ 是 $x' = g(x)$ 的解，且 $x(0) = \Phi(w)$。幂级数解的唯一性表明，它就是 g （第 2 节）的流，而引理 3.8 给出了与$\tilde{}$的流 f的比较。

□

引理 3.11 （截断次数以上的缺陷）。 设 Φ 和 g_{nf} 是次数至多为 M的多项式映射，且 $\Phi - \mathrm{id} \in p\mathbb{Z}_p[z]^d$。假设存在 $b \geq 0$ 和 $\eta > 0$，使得

赋值$(\Phi_n) \geq \eta(n-1), \qquad \mathrm{v}(g_{\mathrm{nf},n}) \geq b + \eta(n-1) \quad (2 \leq n \leq M), \qquad \mathrm{v}(\tilde{f}_n) \geq b + \eta(n-1) \quad (n \geq 2).$

$\mathcal{D}$ 的齐次部分满足 $\mathrm{v}(\mathcal{D}_n) \geq b + \eta(n-1)$ 对每个 $n > M$ 都成立 .

证明。 在 $n > M$ 次数下， $D\Phi \cdot g_{\mathrm{nf}}$ 中唯一可能的项是 $D\Phi_j \cdot g_{\mathrm{nf},\,k}$，其中 $j + k = n + 1$ 和 $2 \leq j, \; k \leq M$。它们的赋值至少为 $\eta(j-1) + b + \eta(k-1) = b + \eta(n-1)$。 f 中次数至多为一的项在这些次数下没有任何贡献。

$\tilde{}$ $\tilde{}$对于 $f_l \circ \Phi$ 中带有 $l \geq 2$的贡献，次数为 n 的乘积包含一个 f_l的系数，以及 l 个 Φ 的系数，它们的次数为 k_1、.....、k_l 且总和为 n。来自 Φ 的每个因子的赋值至少为 $\eta(k_i - 1)$，其中包括 $k_i = 0$、1，这是由 $\Phi - \mathrm{id}$ 的条件所致。因此所得赋值至少为$b + \eta(l-1) + \eta(n-l) = b + \eta(n-1)$。

□

定理 3.12 (认证正规形)。 固定一个整数 $K \geq 1$，其中 $K \geq 2$ 若 $p = 2$。对于 $\tilde{x} \in \mathbb{Z}_p^d$ 和 $r \geq 1$，置 $f(z) = p^{-r} f(\tilde{x} + p^r z)$。假设 $\Phi = \mathrm{id} + H$ 和 g_{nf} 是次数至多为 M 的多项式映射，使得

(i) $H \in p\mathbb{Z}_p[z]^d$，且 g_{nf} 和 $\tilde{f}$ 的系数可被 p 整除（如果 $p = 2$，则由 4 得出）；

(ii) 对于 $0 \leq n \leq M$， $\mathcal{D}_n \equiv 0$（模 p^K）；

(iii) 引理*3.11* 中的界在 $b + \eta M \geq K$下成立，其中次数为 ≥ 2 且模 p^K 为零的系数不予考虑。

那么，对于所有 $t \in \mathbb{Z}_p$ 以及所有满足 $|x - \tilde{x}| \leq p^{-r}$的 x，

$$\varphi_t(x) \equiv \tilde{x} + p^r \, \Phi\big(\psi_t\big(\Phi^{-1}\big((x - \tilde{x})/p^r\big)\big)\big) \pmod{p^{K+r}}. \tag{13}$$

证明。删去次数为 ≥ 2 且模 p^K为零的系数，并将所得多项式或级数记为 $\hat{}\Phi, \hat{g}_{\mathrm{nf}}$、$\hat{}f$。所得多项式或级数的缺陷 $\mathcal{D}$ 与 $\mathcal{D}$ 相差若干项，这些项含有赋值至少为$\widehat{\ }$的系数 K。根据 (ii)，$\mathrm{v}(\mathcal{D}_n) \geq K$ 直到次数 M为止成立，而根据引理 3.11，(iii) 中的明确界在更高次数下也给出相同的不等式。

这为原多项式给出 $\mathrm{v}(\mathcal{D}) \geq K$。在奇素数处使用 $c = 1$，并在 $c = 2$ 处使用 $p = 2$，见引理 3.10。在 $w = \Phi^{-1}(z)$ 处应用后，即得到缩放坐标下的同余式。乘以 p^r 即可得到 (13)。 □

条件 (i)–(iii) 只涉及有限个系数，并通过精确整数运算进行检验。中心 $\tilde{x}$ 无需是精确的平衡点：其中的误差会体现为 $\tilde{f}$ 的常数项，而条件 (ii) 要求该项模 p^K 为零。对于幂级数域，截断阶数之后的系数只通过其赋值下界声明参与计算。

计算时取 $W = K + \sigma + 2$。在每个次数下，计算得到的矩阵满足$PL_nQ \equiv \mathrm{diag}(p^{s_i})$（模 p^W）。我根据已计算出的低次多项式构造 G_n，将满足 $s_i \leq \sigma$ 的方向上的剩余类除以 p^{s_i}，并将其他方向保留在 R_n 中。所得方程 $L_A\Phi_n + R_n \equiv G_n$（模 p^W）给出 $1 \leq n \leq M$ 的 $\mathcal{D}_n \equiv 0$（模 p^W）。

在每个次数之后，我使用计算得到的赋值来寻找满足引理 3.11 的 $b \in [0, K]$ 和 $\eta > 0$。构造在第一个满足 $b + \eta M \geq K$ 的次数 M 处停止。要了解何时能够保证这一点，请使用定理 3.7 的归纳法。对 p^W 取典范剩余类模运算能够保持赋值的下界。将非零剩余类除以 p^{s_i} 会使其赋值恰好降低 s_i。因此，该证明对所计算的多项式给出了相同的界。如果 $f(\tilde{x}) \equiv 0$(模 p^{W+r}) 且 $r = 1 + \max(\sigma - c, 0)$，则这些界可以写成 $b = \max(c, \sigma)$ 和 $\eta = 1$。如果这个 b 值超过 K，则可以将其降低到 K。定理 3.12 的条件 (i) 同样成立，并且由于构造从次数 2 开始，构造在次数 $M \leq \max(K, 2)$ 处成功。实际的系数赋值通常允许更小的 r。

例如，取 $p = 3$和 $f(x) = 3x + 3x^2$在 0 处。令 $r = 1$，重标度后的向量场为 $\tilde{f}(z) = 3z + 9z^2$。在二次项中，同调算子是乘以 3，因此阈值 $\sigma = 1$ 给出 $\Phi(z) = z + 3z^2$和 $g_{\mathrm{nf}}(z) = 3z$。对于 $K = 3$ 和 $M = 2$，缺陷为 $-54z^3 - 81z^4$，直到二次项都没有任何项。Φ 和 f 的二次系数的赋值分别为 1 和 2，因此 $b = \eta = 1$ 给出$b + \eta M = 3$。该证书比较了 $3\mathbb{Z}_3$上模 3^4 的流。

3.4 同调算子的块结构

对 L_n 计算稠密史密斯标准形需要在 W 位整数上进行 $O(M_n^3)$ 次运算，其中 $M_n = d\binom{n+d-1}{d-1}$。这限制了次数和维数。算子的规模仅取决于耦合坐标所需的规模，即 A。

命题 *3.13*（剩余分解）。设 $A = p^a A'$ 满足 A' 可积且 $A' \not\equiv 0 \pmod p$，并设 $\bar{\chi} = G_1 \cdots G_B$ 是 A' 的特征多项式模 p 的一个两两互素因子分解。存在 $T \in GL_d(\mathbb{Z}_p)$，使得 $T^{-1}AT = \mathrm{diag}(A_1, \dots, A_B)$，其中 A_b 的大小为 $d_b = \deg G_b$，且 $p^{-a}A_b$ 的剩余特征多项式为 G_b。在坐标 $w = T^{-1}z$ 中，对于满足 $|\kappa| = n$ 和 $1 \le b \le B$ 的 $\kappa = (n_1, \dots, n_B)$，令 $V_{n,\kappa,b}$ 为由以下单项式张成的空间：其指数在块 β 中的总次数为 n_β，且在块 b 中满足 i。这些空间在 L_n 下不变，维数为 $d_b \prod_\beta \binom{n_\beta + d_\beta - 1}{d_\beta - 1}$；$L_n$ 的史密斯指数是其各个限制的史密斯指数的并集。若对所有 β，$G_\beta = (x - \alpha_\beta)^{d_\beta}$，且 $\sum_\beta n_\beta \alpha_\beta \not\equiv \alpha_b \pmod p$，则 $V_{n,\kappa,b}$ 上的每个指数都等于 a。

证明。由亨泽尔引理，因式分解可提升到 $\mathbb{Z}_p[x]$，相应的$\mathbb{Z}_p[A']$ 幂等元将 $\mathbb{Z}_p^d$ 分解为若干 A-不变子空间，其秩为 d_b。矩阵 T 将坐标块映射到这些子空间。在新坐标中，A 是分块对角的，因此 L_A 的导子部分保持每个块中单项式的次数，而项 $A\Phi$ 保持 i的块不变。通过T 作坐标变换在 V_n 上是幺模的，因此指数与分块对角算子的指数相同。在最后一种情形下，$L_{A'}$ 在 $V_{n,\,\kappa,\,b}$上模 p 只有特征值 $\sum_\beta n_\beta \alpha_\beta - \alpha_b \not\equiv 0$，因此它在$\mathbb{Z}_p$上可逆，且 $L_A = p^a L_{A'}$。

□

因此，对于残余分裂的 A，指数大于 a 的方向仅限于满足$\sum_\beta n_\beta \alpha_\beta \equiv \alpha_b$的部分；这是关于块次数模 p的剩余类的条件。对于 $d = 1$，则是 $p \mid n - 1$。无需对 $\bar{\chi}$作因式分解：对于满足 $\alpha \in \mathbb{F}_p$的 $B = A' - \alpha$，或对于在 $\mathbb{F}_p$上次数整除 k 的特征值 $B = A'^{p^k} - A'$，极限 $\lim_j (B^{e_0})^{p^j}$（其中 $e_0 = p^{\lceil \log_p d \rceil}$ 是$i \le d$$(p^i - 1)$的最小公倍数）是投影到 B 模 p可逆的部分上的幂等元，而 T 由这些投影算子的列组装而成。递归在坐标 w中逐块进行，而第 3.3 节的证书（其引用原坐标）不依赖于 T。

各个部分上的史密斯指数与整体 V_n 的史密斯指数相同，而分解的代价随最大部分的大小增长，而非随 M_n 增长。

该证书针对所选球上模 p^K 的流。例如，在 $(px,\ 2py + p^K x^2)$ 中，共振项在这一精度下不可见，却会保留在精确向量场中。因此，计算得到的线性正规形可能通过检验，而精确向量场中仍有共振项。对于解析输入，该证书还取决于为其尾部提供的赋值界。

4 一个 p-进 Eliasson–Vey 定理

将共振项写成二次部分的函数，可使可积系统能够进行牛顿迭代。在辛特征坐标中，其除子为整数，因此它们的赋值随次数至多按对数增长，并且当次数逐次加倍时，损失可求和。这给出了一个显式半径，并回答了 Crespo 和 Pelayo 关于 Williamson 型 [8, 问题 5.14] 中秩为 0 的部分。

在带有标准辛形式的 $\mathbb{Q}_p^{2n}$ 上，考虑一个解析系统 $\mathcal{H} = (H_1, \dots, H_n)$，它在 0 附近具有 $\{H_i, H_j\} = 0$。假设 $\mathcal{H}(0) = 0$ 且 $d\mathcal{H}(0) = 0$，因此原点是一个秩为 0 的临界点。若将 H_i 的二次部分视为 $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{Q}_p)$ 中的元素后，它们张成一个 n 维的嘉当子代数 $\mathfrak{t}$，其中由相互对易的半单元素构成，则该点称为非退化。选取 $\mathfrak{t}$ 的一组基 $q = (q_1, \dots, q_n)$，例如采用 [8] 意义下的 Williamson 基。经过目标空间上的线性变换后，我取 $\mathcal{H}$ 的二次部分为 q。

定理 4.1. 存在一个解析辛映射 Φ，它将一个以 0 为中心的球映到0的一个邻域上，且 $\Phi(0) = 0$；还存在一个解析映射 $\mathcal{G} : (\mathbb{Q}_p^n, 0) \to (\mathbb{Q}_p^n, 0)$，满足 $d\mathcal{G}(0) = \mathrm{id}$；二者的系数均为

在 $\mathbb{Q}_p$ 中，使得

$$\mathcal{H} \circ \Phi = \mathcal{G}(q_1, \dots, q_n).$$

在引理 4.2的特征坐标中，该球的半径为 $p^{-\rho}$，因此在原坐标中，它包含半径为 $p^{-\rho}\|S^{-1}\|^{-1}$的球，其中 S^{-1} 是映射到特征坐标的线性映射。这里ρ 是任意满足 $\rho > 3r + \mu + L_p + \frac{1}{p-1}$的整数， r 且 μ 测度 $\mathcal{H}$ 如下，并且

$$L_p = \sum_{k\geq 0} \frac{\lfloor \log_p(2^{k+1}+1) \rfloor + \frac{1}{p-1}}{2^k}, \qquad L_2 = 6, \quad L_3 \approx 3.68, \quad L_5 \approx 1.66, \quad L_7 \approx 0.905.$$

引理 4.2 (特征坐标)。 存在一个有限伽罗瓦扩张 $L/\mathbb{Q}_p$，其赋值经归一化后满足 $\mathrm{v}(p) = 1$，以及 L-线性辛坐标 $(z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n)$， $\{z_i, w_j\} = \delta_{ij}$，使得对于 $\zeta_i = z_i w_i$，有 $q = \Lambda\zeta$，其中某个 $\Lambda \in \mathrm{GL}_n(L)$ 满足

$$\{\zeta_i, z^\alpha w^\beta\} = (\beta_i - \alpha_i)\, z^\alpha w^\beta.$$

证明。嘉当子代数在某个有限扩张上分裂，我取其伽罗瓦闭包作为 L 。于是 L^{2n} 是权直线之和，各权 $\pm\varepsilon_1, \dots, \pm\varepsilon_n$ 两两不同且非零。辛形式 ω 的不变性给出 $(\varepsilon + \varepsilon')(T)\ \omega(x, y) = 0$，其中 x、y 的权分别为 ε、ε' 和 $T \in \mathfrak{t}$，因此 ω 仅与 ε_i 所在的直线非退化地配对。选取 e_i、e_i'，使得 $\omega(e_i, e_i') = 1$，即可得到一个辛基，而对偶坐标满足上述括号关系。 $T \in \mathfrak{t}$ 的二次哈密顿量为 $\sum_i \varepsilon_i(T) z_i w_i$，且 $T \mapsto (\varepsilon_i(T))_i$ 是到 L^n 的双射，由此得到 Λ。 □

因此，联合同调算子 $W \mapsto (\{\zeta_i, W\})_i$ 在单项式上是对角的，其特征值为整数向量 $\delta = \beta - \alpha$，而其核为 $L[\zeta] = L[q]$。绝对值至多为 D 的非零整数，最多可被 $p^{\lfloor \log_p D \rfloor}$ 整除，因此对于次数为 D 且满足 $\delta \neq 0$ 的单项式，

$$\min\{\mathrm{v}(\delta_i) : \delta_i \neq 0\} \leq \lfloor \log_p D \rfloor. \tag{14}$$

这些整数的复绝对值至少为 1，这解释了韦伊定理中不存在小除数。 p-进代价至多随次数对数增长。

为追踪系数损失，给出 (z, w) 中次数为 D 的齐次项 f_D 权 $D-2$。对于 $a > 0$，令 $\mathcal{A}_a$ 由系数在 L 上的级数 $f = \sum_{D\geq 2} f_D$ 组成，其中 $\mathrm{v}(f_D) \geq a(D-2)$。它们在闭单位多圆盘上收敛。在变量 $u \in L^n$中，当 $\mathrm{v}(h_\gamma) \geq a(2|\gamma| - 2)$时，记 $h = \sum_\gamma h_\gamma u^\gamma \in \mathcal{U}_a$ 。每个 ζ_i的次数都是二次，因此若 $h(0) = 0$，则 $h(\zeta) \in \mathcal{A}_a$。记 $\mathrm{ad}_W f = \{f, W\}$。

引理 4.3. 设 $a > 0$。

(a) $\{\mathcal{A}_a, \mathcal{A}_a\} \subset \mathcal{A}_a$。 *(b)* 若 $h \in \mathcal{U}_a$, $h(0) = 0$，且 $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{A}_a$ 的次数均不低于 2，则 $h(y) \in \mathcal{A}_a$。

(c) 若 $h \in \mathcal{U}_a$ 的次数不低于 2，则 $u \mapsto u + h(u)$ 有逆映射 $u \mapsto u - h(u)$，且$h \in \mathcal{U}_a$。

(d) 若 $W \in \mathcal{A}_b$ 的次数不低于 $N \geq 3$，且 $f \in \mathcal{A}_b$ 和 $k \geq 1$，则 $\mathrm{ad}_W^k f/k!$ 的权不低于 $k(N-2)$，且属于 $\mathcal{A}_{b-1/((p-1)(N-2))}$。

证明。 括号 $\{f_D, g_{D'}\}$ 的次数为 $D + D' - 2$，因此其权是两个权的和。微分只会使系数乘以整数，而括号的赋值至少为 $a(D-2) + a(D'-2)$。由此得到 (a)。

在 (b) 中， k 个总次数为 $D=\sum D_i$ 的齐次因子的乘积，其赋值至少为$a(D-2k)$。带有 $|\gamma|=k$ 的系数 h_γ 提供了额外的 $a(2k-2)$。采用相同的计数方式，并将每个 u_i 赋予二次次数和零权，可应用于方程 $U=y-h(U)$中的代入。从 $U=y$ 开始迭代会保持在 $\mathcal{U}_a$ 中，并逐个系数确定逆系数，从而得到 (c)。

对于 (d)，在每个括号处应用 (a)。其权至少为 $k(N-2)$，而除以 $k!$ 至多损失 $(k-1)/(p-1)\le$ 权/$((p-1)(N-2))$，从而得到所述界。 □

此外，若 $b(N-2)>1/(p-1)$，则 $\exp(\mathrm{ad}_W)f=\sum_k \mathrm{ad}_W^k f/k!$ 对 $f\in\mathcal{A}_b$ 以及坐标函数都收敛：对于一个坐标函数，ad_W^k会产生次数为 $D\ge 1+k(N-2)$ 且赋值至少为 $b(D-1)$ 的部分，除以 $k!$ 后至少还剩下 $\big(b-\frac{1}{(p-1)(N-2)}\big)(D-1)$。因此，$\exp(\mathrm{ad}_W)$ 是泊松代数的一个自同构，其逆映射为 $\exp(-\mathrm{ad}_W)$；而 $\phi_W=(\exp(\mathrm{ad}_W)z,\exp(\mathrm{ad}_W)w)$ 是单位多圆盘上的解析辛自同构，且 $\exp(\mathrm{ad}_W)f=f\circ\phi_W$。李级数直接构造出时一映射。

命题 4.4（牛顿步）。设 $\mathcal{H}=\zeta+R$ 满足 $\{H_i,H_j\}=0$ 且 $R\in\mathcal{A}_a$ 不含次数低于 $N\ge 3$的项。令 $s_N=\lfloor$对数$_p(2N-3)\rfloor$ 及 $b=a-s_N/(N-2)$，并假设$b(N-2)>1/(p-1)$。存在 $W\in\mathcal{A}_b$，其次数在 $[N,2N-3]$中齐次，以及 $h\in\mathcal{U}_a$，使得 $\mathcal{G}(u)=u+h(u)$，

$$\mathcal{H}'=\mathcal{G}^{-1}\circ\mathcal{H}\circ\phi_W=\zeta+R',\qquad R'\in\mathcal{A}_{a'},\quad a'=a-\frac{s_N+\frac{1}{p-1}}{N-2},$$

R' 不含次数低于 $2N-2$的项，且 $\{H_i',H_j'\}=0$。

证明。 H_i的对易关系给出 $\{\zeta_i,R_j\}-\{\zeta_j,R_i\}=-\{R_i,R_j\}$。由于右侧从次数 $2N-2$开始，低于该次数的单项式 $m=z^\alpha w^\beta$，其中 $\delta=\beta-\alpha$，满足

$$\delta_i R_{j,m}=\delta_j R_{i,m}\qquad\text{for all } i,j. \tag{15}$$

只有次数 N 到 $2N-3$ 会进入修正项。若 $\delta\neq 0$，取 $W_m=-R_{i,m}/\delta_i$，使得 $\delta_i\neq 0$。关系式 (15) 保证这与 i 无关，并且在 $\delta_j=0$ 时强制 $R_{j,m}=0$。因此 $\{\zeta_i,W\}=-R_i^{\mathrm{nr}}$，其中 R^{nr} 由那些满足 $\delta\neq 0$ 的低次项组成。在非零的 δ_i 中选取最小赋值，根据 (14)，对于 $D=\deg m$，有 $\mathrm{v}(W_m)\ge a(D-2)-s_N\ge b(D-2)$。特别地，$W\in\mathcal{A}_b$。

李级数从 $H_i\circ\phi_W$ 的低次项中消去了 R_i^{nr}，留下 $\zeta_i+R_i^{\mathrm{res}}+\mathcal{R}_i$。这里 R^{res} 由次数从 N 到 $2N-3$ 且满足 $\delta=0$ 的项组成，并且

$$\mathcal{R}_i=R_i^{\ge 2N-2}+\sum_{k\ge 1}\frac{\mathrm{ad}_W^k R_i}{k!}+\sum_{k\ge 2}\frac{\mathrm{ad}_W^{k-1}(-R_i^{\mathrm{nr}})}{k!}.$$

与 W 取括号会使次数至少增加 $N-2$，因此 $\mathcal{R}_i$ 的首项次数为 $2N-2$。在权 w 下，来自 W 的因子相对于原斜率 a 至多造成 $(a-b)w=s_Nw/(N-2)$ 的损耗。每个除以 $k!$ 的项，其权至少为 $k(N-2)$，因此阶乘至多造成 $w/((p-1)(N-2))$ 的损耗。由此得到界 $a'w$，进而有 $\mathcal{R}_i\in\mathcal{A}_{a'}$。

令 $R_i^{\mathrm{res}}=h_i(\zeta)$，取 $h_i(u)=\sum_\gamma R_{i,\gamma}z^\gamma w^\gamma u^\gamma$ 在 $2|\gamma|\in[N,2N-3]$ 上。这些项具有$|\gamma|\ge 2$ 和 $h\in\mathcal{U}_a$，因此 $\mathcal{H}\circ\phi_W=\mathcal{G}(\zeta)+\mathcal{R}$ 与 $\mathcal{G}(u)=u+h(u)$。引理 4.3(c) 给出 $\mathcal{G}^{-1}=$恒等式 $-\tilde{h}$，然后

$$\mathcal{H}'-\zeta=\mathcal{R}-\big(\tilde{h}(\mathcal{G}(\zeta)+\mathcal{R})-\tilde{h}(\mathcal{G}(\zeta))\big),$$

差值中的每一项都含有 $\mathcal{R}$这一因子。这保持了最低次数 $2N-2$，且引理 4.3(b) 给出 $\mathcal{H}'-\zeta\in\mathcal{A}_{a'}$。变换 ϕ_W 是辛的，而 $\mathcal{G}^{-1}$ 是目标空间上的变换，因此 $\mathcal{H}'$ 的各个分量仍然泊松对易。

□

定理 4.1 的证明。在引理 4.2 的坐标中， $\Lambda^{-1}\mathcal{H} = \zeta + R$ 其中 $R = \sum_{D\geq 3} R_D$，并且由于 $\mathcal{H}$ 是解析的，存在 r、μ，满足 $\mathrm{v}(R_D) \geq -\mu - rD$ 和 $\mu + 2r \geq 0$。它们包含线性坐标变换的非整性。重缩放 $(z,w) \mapsto (p^\rho z, p^\rho w)$、$\mathcal{H} \mapsto p^{-2\rho}\mathcal{H}(p^\rho \cdot)$ 保持括号和 ζ，并将 R_D 乘以 $p^{\rho(D-2)}$。由于 $\rho(D-2) - \mu - rD - (\rho - 3r - \mu)(D-2) = (D-3)(2r+\mu) \geq 0$，重缩放后的 R 属于 $\mathcal{A}_{a_0}$，其中 $a_0 = \rho - 3r - \mu > L_p + \frac{1}{p-1}$。 ——

从缩放坐标中的 $\mathcal{H}_0 = \Lambda^{-1}\mathcal{H}$ 开始，并令 $N_k = 2^k + 2$，从而有 $N_{k+1} = 2N_k - 2$ 和 $N_k - 2 = 2^k$，且 $a_{k+1} = a_k - (s_{N_k} + \frac{1}{p-1})/2^k$，其中 $s_{N_k} = \lfloor \log_p(2^{k+1}+1) \rfloor$。于是对所有 k，都有 $a_k \geq a_0 - L_p > \frac{1}{p-1}$，并且 ~~$b_k$~~ $\geq a_{k+1}$，因此命题 4.4 的假设在每一步都成立。由此得到 W_k、$\mathcal{G}_k$ 和 $\mathcal{H}_{k+1} = \mathcal{G}_k^{-1} \circ \mathcal{H}_k \circ \phi_{W_k} = \zeta + R_{k+1}$，其中 $R_{k+1} \in \mathcal{A}_{a_{k+1}} \subset \mathcal{A}_{a_0 - L_p}$，且不存在次数低于 N_{k+1} 的项，因此

$$\mathcal{H} \circ \phi_{W_0} \circ \cdots \circ \phi_{W_k} = \Lambda\, \mathcal{G}_0 \circ \cdots \circ \mathcal{G}_k(\zeta + R_{k+1}).$$

在空间变换中， D 的 ϕ_{W_k} –id 的次数为齐次次数 $D \geq N_k - 1$，且根据李级数的坐标估计，其赋值至少为 $a_{k+1}(D-1)$。在目标变换中，项 u^γ 的 $\mathcal{G}_k$ –id 的次数为 $2|\gamma| \geq N_k$，且其赋值至少为 $a_k(2|\gamma| - 2)$。两项估计均给出下界 $(a_0 - L_p)(N_k - 2)$，该下界从第一步起为正，并趋于无穷。利用 $-W_k$ 处理空间逆变换，并利用引理4.3(c)处理目标逆变换，可知逆变换满足相同的估计。变换及其逆变换均为等距变换，因此它们的复合收敛至相应单位多圆盘上的解析自同构。空间极限 Φ是辛的。

由于 $R_k \to 0$，上面的方程给出了缩放坐标下所需的恒等映射，其目标映射为 $\Lambda\mathcal{G}(\Lambda^{-1}\cdot)$，其中 $\mathcal{G}$ 是目标映射复合的极限。撤销重缩放后， Φ 变为 $p^\rho \Phi(p^{-\rho}\cdot)$，它在半径为 $p^{-\rho}$ 的球上是辛的。根据 $q(p^{-\rho}x) = p^{-2\rho}q(x)$，相应的目标映射为 $u \mapsto p^{2\rho}\Lambda\mathcal{G}(p^{-2\rho}\Lambda^{-1}u)$，且在 0 处的导数仍为 id。

为使构造下降到基域，在原空间坐标中进行，并在每个齐次次数上使用算子 ad_{q_j}。它们的联合核与像空间之和互为补空间，这可从特征坐标中的单项式看出。由于 q_j 定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上，这两个空间在 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$ 的作用下都保持不变。给定一个定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上的输入，非共振方程在像空间之和中有唯一解 W_k，而共振投影属于联合核。因此二者都是伽罗瓦不变的。共振投影的每个分量都属于 $L[q]$，且可唯一写成 $P(q)$，其中 $P \in L[u]$；这是因为 q_j 代数独立。 $P(q)$ 的伽罗瓦不变性确定了 P 的每个系数，而不变域为 $\mathbb{Q}_p$。因此，在每一步中，空间变换以及原目标上的修正项 $\Lambda\mathcal{G}_k(\Lambda^{-1}\cdot)$ 都定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上。极限也同样如此。

□

在秩 0 点处， [8] 的 Williamson标准形 $(g_1, \ldots, g_n)$ 是 $\mathfrak{t}$ 的一组基，因此定理 4.1 配合 $q = g$，恰好给出了 [8, 问题 5.14], 中所要求的局部模型，且不对类型作任何限制。这里使用的是上述 Cartan意义下的非退化性，这也是实理论中采用的定义。 [8] 的定义 5.2 要求 Hessian 矩阵线性无关，并要求存在一个组合 $\Omega^{-1}\sum_i a_i\, d^2 H_i(0)$，使其具有 n 互异特征值；该处的注 5.3 指出，这一定义旨在与嘉当定义一致。我将其理解为具有 $2n$ 互异特征值，如 [9, 定义 3.2]中所述。于是该组合是正则半单的，它在 $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{Q}_p)$ 中的中心化子是一个维数为n的嘉当子代数；与之对易的 n 个线性无关的 Hessian 矩阵张成这个中心化子，因此该定义蕴含本文采用的定义。若只有 n 互异特征值，该组合未必是正则的，嘉当条件也可能不成立。

对于 $n = 2$，在具有 $\{z_i, w_j\} = \delta_{ij}$ 的坐标中，函数 $q_1 = z_1 w_1 + z_2 w_2$ 和 $q_2 = z_2 w_1$泊松对易且其 Hessian 线性无关； $q_1 + a q_2$ 的哈密顿矩阵恰有 $n = 2$ 个互异特征值 ± 1，但 q_2 的哈密顿矩阵是幂零的，因此 q_1, q_2 的张成空间不是嘉当子代数。Crespo 和 Pelayo 还计算了 p-adic Williamson 正规

形的有效形式，并证明它们与实数形式无关 [9]；定理 4.1 将这样的正规形转化为该系统在点附近的辛规范化。

环面作用的对应物来自哈密顿量 $\mathcal{G}^{-1}\circ\mathcal{H}$。它们彼此泊松对易，并在坐标 Φ^{-1} 中具有线性流 $(z,\ w)\ \mapsto\ (e^{t\lambda}z,\ e^{-t\lambda}w)$，其权为 λ。取足够大的 l，使指数函数对 $t\in p^l\mathbb{Z}_p^n$ 收敛。由此得到的 $p^l\mathbb{Z}_p^n\simeq\mathbb{Z}_p^n$ 作用保持 $\mathcal{H}$。

5 对数特征值与高度证书

现在我考虑线性部分，其特征值是约化核中的代数点的对数 $\mathbb{G}_m$，或是椭圆曲线上的点的对数。它们的小除数仍是点的对数，因此可以通过群中的精确算术读出史密斯指数，而高度则给出其上界。这类特征值介于代数情形（推论 3.5）与任意情形（备注 3.6）之间。它们出现在有理不动点附近代数映射的生成元中（备注 5.4）。

设 $\mathcal{F}$ 是定义在 $\mathbb{Z}_p$ 上的一维交换形式群律，$\omega(z)\,dz$ 是其标准化不变微分，而 $\log_{\mathcal{F}}(z)=\int_0^z\omega$ 是其对数 [26, 第 IV.4–IV.5] 节。对于 $\mathbb{G}_m$，$\mathcal{F}=X+Y+XY$ 且 $\log_{\mathcal{F}}(z)=\log(1+z)$。对于极小魏尔斯特拉斯方程，参数 $z=-x/y$ 通过群律 $\mathcal{F}$ [26, 定理 VII.2.1–VII.2.2]，将约化核与 $p\mathbb{Z}_p$ 对应起来。

设 p 为奇数，k 为数域，k 的一个素数为 $\mathfrak{p}\mid p$，满足 $k_{\mathfrak{p}}=\mathbb{Q}_p$，我据此将 k 嵌入$\mathbb{Q}_p$。设 G 为 $\mathbb{G}_m$，或是一条由系数属于 k 且在 $\mathfrak{p}$处极小的魏尔斯特拉斯方程给出的椭圆曲线。局部区域是约化核 G_1：对于 $\mathbb{G}_m$，它由满足 $\mathrm{v}(\alpha-1)\ge 1$的 $\alpha\in k$ 构成，参数为 $z(\alpha)=\alpha-1$。对于 E，它由满足 $\mathrm{v}(x)<0$ 的点构成，其中 $z=-x/y$ 且 $\mathrm{v}(z)=-\mathrm{v}(x)/2$，并且 $z(O)=0$。在 G_1 上定义 $\log_G=\log_{\mathcal{F}}\circ z$，即 $\log_p\alpha$ 或 p-进椭圆对数 $\log_E$。由于 p 是奇数，$\log_G$ 是从 G_1 到 $p\mathbb{Z}_p$ 的同态，且 $\mathrm{v}(\log_G Q)=\mathrm{v}(z(Q))$ [26, 定理 IV.6.4 和命题 VII.2.2]。特别地，它是单射，且 G_1 无挠。我将 G 的群律记作加法。

命题 5.1 (对数特征值)。设 $P_1,\dots,P_d\in G(k)\cap G_1$，$\lambda_i=$对数$_G(P_i)$，且$A=S\Lambda S^{-1}$满足 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_d)$ 且 $S\in\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z}_p)$。对于 $|m|=n$和 $1\le i\le d$，令$Q_{m,i}=\sum_j m_jP_j-P_i\in G(k)\cap G_1$。则：

(a) $\langle m,\lambda\rangle-\lambda_i=$对数$_G(Q_{m,i})$，且 L_n 的史密斯指数为赋值$(z(Q_{m,i}))$，其重数相同；

(b) 指数为无穷，当且仅当 $Q_{m,i}=O$ 属于 $G(k)$；若 $P_1,\dots,P_d$ 在 $G(k)$中线性无关，则没有任何 L_n，$n\ge 2$具有零史密斯因子；

(c) 指数为$\mathrm{v}(\alpha^m\alpha_i^{-1}-1)$（对应 $\mathbb{G}_m$，其中 $P_j=\alpha_j$）以及$1\ 2\ \mathrm{v}(1/x(Q_{m,i}))$（对应 E），在 k 中精确计算得出，未对任何 λ_i进行近似。

证明。(a) $\log_G$ 是一个同态；根据命题3.4，当 S 为整数时，L_n 的史密斯指数就是特征值 $\langle m,\lambda\rangle-\lambda_i$ 的赋值，其中零特征值对应无穷大。由于在 G_1 上，$\mathrm{v}(\log_G Q)=\mathrm{v}(z(Q))$，因此它们是 $\mathrm{v}(z(Q_{m,i}))$。(b) $\log_G$ 在 G_1 上是单射。一个包含 $|m|=n\ge 2$ 的关系$\sum_j m_jP_j=P_i$ 是非平凡的，因为 $m\ne\varepsilon_i$。(c) 重述了定义。 □

这些 λ_i 通常并非代数的，因此推论3.5 不适用。

现在，高度可以界定指数，正如命题 3.3 后的 Hadamard 界适用于有理矩阵，以及范数界 (9) 适用于代数特征值一样。令 h 表示绝对对数 Weil 高度，且 $d_k=[k:\mathbb{Q}]$。在 $E(k)$ 上，令 $\hat{h}(Q)=\lim_{j}4^{-j}h(x([2^j]Q))$ 表示 Néron–Tate 高度，$\hat{}$ 是一个半正定二次型，而 μ_E 是一个常数，使得对所有

ˆ$Q \neq O$ 都成立。该 h 是 [26, 第 VIII 节中典范高度的两倍。9], 该节证明了它的性质。 [25] 的定理 1.1 明确界定了该典范高度与 $\frac{1}{2}h(x(Q))$ 之差，其界以 j-不变量和判别式的高度表示，且适用于任意数域，因此给出了一个显式的 μ_E。令 Γ 表示 ˆh 在 $P_1, \ldots, P_d$上的格拉姆矩阵，使得 ˆ$h(\sum_j m'_j P_j) = (m')^{\mathsf{T}}\Gamma m'$，并令 $\lambda_{\max}(\Gamma)$表示其最大特征值。

命题 5.2 （高度证书）。 在命题 *5.1*中，的每个有限史密斯指数 满足

$$s \leq \frac{d_k\big((n+1)h_* + \log 2\big)}{\log p}, \qquad h_* = \max_j h(\alpha_j), \qquad \text{对于 } \mathbb{G}_m, \tag{16}$$

$$s \leq \frac{d_k\big(\lambda_{\max}(\Gamma)(n+1)^2 + \mu_E\big)}{2\log p}, \qquad \textit{for } E. \tag{17}$$

因此，对于 $\mu_n = O(n)$ 和 $\mathbb{G}_m$，以及对于椭圆曲线 $\mu_n = O(n^2)$，均有显式常数，且无需任何超越性输入。

证明。如果 $\beta \in k$ 具有 $\mathrm{v}(\beta) = -e < 0$，那么 $d_k h(\beta) \geq e\log p$，因为 $\mathfrak{p}$ 的局部次数为一，并且对 $d_k h(\beta)$贡献 $\log\max(1, |\beta|_{\mathfrak{p}}) = e\log p$，即 $= \sum_v n_v \log\max(1, |\beta|_v)$。令 $m' = m - \varepsilon_i$，使得 $\sum_j |m'_j| \leq n+1$。对于 $\mathbb{G}_m$，令 $\gamma = \prod_j \alpha_j^{m'_j} \neq 1$和 $\beta = 1/(\gamma - 1)$，于是 $e = s$。然后 $h(\beta) = h(\gamma - 1) \leq h(\gamma) + \log 2 \leq \sum_j |m'_j| h(\alpha_j) + \log 2$，这就得到（16）。对于 E，取 $\beta = x(Q_{m,i})$，于是 $e = 2s$，并且 $h(\beta) \leq (m')^{\mathsf{T}}\Gamma m' + \mu_E \leq \lambda_{\max}(\Gamma)\|m'\|_2^2 + \mu_E$，其中 $\|m'\|_2 \leq \sum_j |m'_j| \leq n+1$。 □

Yu 的下界对于 p-进对数的线性形式将（16）改进为关于 $\log n$ [32]的多项式界，其中较大的常数取决于 p、k 以及 α_j。关于p-进椭圆对数的线性形式的下界在 [23]中进行了研究。命题5.2 是初等且显式的，足以得到以下证书。

推论 5.3 （认证指数与线性初始段）。 设 P_1，……，P_d 在 $G(k)$ 中线性无关，并令 B_n 为 （16）或（17）的右端。

对 L_n 模 p^W 计算得到的史密斯分解中的每个因子，在 $W > B_n$ 下都非零，且计算得到的指数是精确的。特别地，第 p^W*3*节中保留为“模 p^W为零”的方向不会出现。

(b) 对于每个次数 n 且满足 $B_n \leq \sigma$的情形，阈值为 σ, $R_n = 0$。若 $B_2 \leq \sigma$，则这给出直到次数 n_σ 的线性性，其中

$$n_\sigma + 1 = \begin{cases} \lfloor (\sigma\log p/d_k - \log 2)/h_* \rfloor, & \mathbb{G}_m, \\ \left\lfloor \sqrt{(2\sigma\log p/d_k - \mu_E)/\lambda_{\max}(\Gamma)} \right\rfloor, & E. \end{cases}$$

如果 $B_2 > \sigma$，该估计不会给出这样的次数 $n \geq 2$。

证明。 根据命题 5.1(b)，所有指数都是有限的；根据命题 5.2 ，它们至多为$B_n < W$；然后用最小赋值作为主元进行模 p^W 高斯消元，即可准确求出这些指数。对于 (b)，当 $B_n \leq \sigma$ 时，所有方向都会被消去。界 B_n 随 n 增大。 □

注 5.4（对数特征值的来源）。设 p 为奇数，且设 g 为一个系数为有理数的多项式映射，它是满足 (1) 的向量场 f 的时一映射 φ_1。根据引理 2.1，时一映射按系数逐项模 p^c 同余于恒等映射。反过来，若 $g \equiv$按系数逐项模 p^c同余于恒等映射，且 $c > 1/(p-1)$，则 g是向量场 $\sum_{j\geq 1}(-1)^{j-1}\Delta_g^j($恒等映射$)/j$的时一映射，其中 $\Delta_g h = h \circ g - h$满足 (1)；其流是 Poonen 对 g各次迭代的插值

[28, 命题 3.8], [22] （另见 [3] 和 [7, 定理 2.1 及 (A.14)]）。映射 g 的不动点 x^* 是向量场 f的平衡点，因为根据引理 2.2，$\|\varphi_1(x) - x\| = \|f(x)\|$。变分方程给出$Dg(x^*) =$ 指数函数$(Df(x^*))$。若 x^* 为有理的，且 $Dg(x^*)$的特征值 α_i 属于 $\mathbb{Q}_p$，则它们是代数的且属于 $1 + p\mathbb{Z}_p$，而 $Df(x^*)$的特征值为 $\log_p \alpha_i$。因此，代数映射在有理不动点附近的生成元的正规形具有 $\mathbb{G}_m$-对数特征值。此外，若 $Df(x^*) = S\Lambda S^{-1}$，其中 $S \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z}_p)$，这排除了若尔当块和非整特征基，则命题 5.1 和 5.2 可取 $h_* = \max_i h(\alpha_i)$，即 g的乘子高度；对于具有 $S \notin \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z}_p)$的可对角化 $Df(x^*)$，命题 3.4 在这些界的基础上增加损失 $(n+1)\kappa(S)$。

6 沿线性正规形轨道的零点

为计算零点，我使用线性正规坐标，并将函数取为这些坐标的多项式。设 $L/\mathbb{Q}_p$ 为有限集，其整数环为 $\mathcal{O}_L$，$\mathrm{v}(p) = 1$，并假设在某个平衡点附近存在解析坐标 w，使得流为 $w(t) = e^{\Lambda t}w(0)$，其中 $\Lambda =$=diag$(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$，且 $\lambda_i \in p^c\mathcal{O}_L$ 对于满足 (1) 的整数 c 成立。这类坐标在一维情形下存在（第3节的开头）；当第3节的精确正规形具有 $R = 0$，且 $A = S\Lambda S^{-1}$, $S \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_L)$ 和 $w = S^{-1}\Phi^{-1}(z)$ 时，它们也存在于任意维数中。定理 3.12 的证书无法提供这些坐标，因为它仅将正规形控制在模 p^K 的意义下。对于解析的 $g = \sum_m g_m w^m$ 和 $w_0 = w(0)$,

$$G(t) = g(w(t)) = \sum_{\mu} C_\mu e^{\mu t}, \qquad C_\mu = \sum_{\langle m,\lambda\rangle=\mu} g_m w_0^m,$$

其中 μ 遍历 $\langle m, \lambda\rangle$ 的不同取值，它们全都属于 $p^c\mathcal{O}_L$，且 $C_\mu \to 0$。

引理 6.1 (线性无关性). 设 $\mu \in p^c\mathcal{O}_L$ 两两不同，且 $C_\mu \in L$ 满足 $C_\mu \to 0$。那么，只有当每个 C_μ 都为零时，$\sum_\mu C_\mu e^{\mu t}$ 才在 $\mathbb{Z}_p$ 上恒为零。

证明。由于 $\mathrm{v}(C_\mu\mu^n/n!) \geq \mathrm{v}(C_\mu) + n(c - \frac{1}{p-1})$ 且 $C_\mu \to 0$，项 $C_\mu\mu^n t^n/n!$ 在 (μ, n) 中共同趋于零，并且关于 $t \in \mathbb{Z}_p$一致，因此双重级数可重新排列为幂级数$\sum_n t^n\left(\sum_\mu C_\mu\mu^n\right)/n!$，它在 $\mathbb{Z}_p$ 上收敛。若它在 $\mathbb{Z}_p$ 上恒为零，则由 Strassmann 定理 [27]，每个系数都为零，因此对每个多项式 P，$\sum_\mu C_\mu P(\mu) = 0$。泛函 $\phi \mapsto \sum_\mu C_\mu\phi(\mu)$ 在 $C(p^c\mathcal{O}_L, L)$ 上连续；由卡普兰斯基定理 [15], ，多项式在该空间中稠密，因此它在每个球 $\mathrm{B}(\mu_0, \varepsilon)$ 的示性函数上都为零。给定 $\delta > 0$，只有有限多个 μ 满足 $|C_\mu| \geq \delta$。取ε 小于 μ_0 到其中那些不同于 μ_0 的元素的距离。于是 $0 = \sum_{\mu\in\mathrm{B}(\mu_0,\varepsilon)} C_\mu$ 等于 C_{μ_0} 加上范数小于 δ 的项，所以 $|C_{\mu_0}| < \delta$。由于 δ 任意，故 $C_{\mu_0} = 0$。 □

设 $\Lambda_\lambda = \{k \in \mathbb{Z}^d : \langle k, \lambda\rangle = 0\}$ 是特征值之间的整数关系格 s.

命题 6.2 (子簇内的分支)。设 I 是坐标 w 中的一组解析函数。整个轨道 $\{w(t) : t \in \mathbb{Z}_p\}$ 位于 I 的公共零点集中，当且仅当对于每个 $g \in I$ 和每个类 $m + \Lambda_\lambda$，都有 $\sum_{m'\in m+\Lambda_\lambda} g_{m'} w_0^{m'} = 0$。

证明。 $\langle m, \lambda\rangle = \langle m', \lambda\rangle$ 当且仅当 $m - m' \in \Lambda_\lambda$，因此这些和就是 C_μ的系数 $g(w(t))$，引理 6.1适用于每个 g。 □

L_n 的核只能检测形如 $k = m - \varepsilon_i$ 的关系，其中 $m \in \mathbb{N}^d$ 和 $|m| = n$。对于奇数 p，$\Lambda =$ diag$(2p, 3p)$，$w_0 = (1, 1)$，且 $g = w_1^3 - w_2^2$ 轨道 (e^{2pt}, e^{3pt}) 位于 $\{g = 0\}$ 中，因为 $(3, -2) \in \Lambda_\lambda$，尽管不存在共振，并且每个 L_n，$n \geq 2$ 在 $\mathbb{Q}_p$ 上都是可逆的。

命题 6.3（沿轨道的零点）。设 g 是 w 中的一个多项式，并设 μ_1、…、μ_s、$s \geq 2$ 是 $\langle m$ 在满足 $g_m \neq 0$ 的 m 上的不同取值；若 g 的次数至多为 δ，则 $s \leq \binom{\delta+d}{d}$。那么，对于每个满足 $G \not\equiv 0$ 的 w_0，

$$\#\{t \in \mathbb{Z}_p : G(t) = 0\} \leq s - 1 + \frac{s-2}{(p-1)c - 1} \leq 2s - 3,$$

且零点的数量至多为 $s-1$ 当（$p-1$）$c > s-1$时。

证明。与 van der Poorten 的论证类似，[29] 和 [30, 引理 2], 先考察导数，再比较泰勒系数。设 $G = \sum_n a_n t^n$ 和 $b_n = n!a_n = \sum_j C_j \mu_j^n$，其中 $C_j = C_{\mu_j}$。特征多项式 $\prod_j (x - \mu_j)$ $= x^s + f_1 x^{s-1} + \cdots + f_s$ 给出 $b_n = -\sum_{k=1}^{s} f_k b_{n-k}$，对于$n \geq s$。其系数满足 $\mathrm{v}(f_k) \geq kc$，因为 $\mu_j \in p^c \mathcal{O}_L$。因此 $u_n = \mathrm{v}(b_n) - cn$ 满足$u_n \geq \min_{1 \leq k \leq s} u_{n-k}$，且对所有 n，它都有下界 $m = \min_{k<s} u_k$。该最小值是有限的，因为否则递推关系会给出 $G \equiv 0$。

取 $k_0 < s$，使得 $u_{k_0} = m$。那么 $\mathrm{v}(a_{k_0}) \leq m + c(s-1)$，而对于 $n \geq 1$，$\mathrm{v}(a_n) \geq m + cn - (n-1)/(p-1)$。若 Strassmann 指数 ν 为正，比较这两个界可得 $\nu(c - 1/(p-1)) \leq c(s-1) - 1/(p-1)$。根据 Strassmann 定理，零点个数至多为 ν [27]，因此这就证明了第一个不等式，包括 $\nu = 0$ 的情形。第二个不等式由 (1) 中的 $(p-1)c - 1 \geq 1$ 得出。 □

给定 s，这个界仅取决于 p 和 c。特别是，它对 w_0 以及指数之间的间距都是一致的。对于 $p > s$，该界为 $s-1$，也就是含有 s 项的实指数和的界。证明只用到了 G 在 0 处的导数所满足的线性递推，因此对于已经写成有限和 $\sum_\mu P_\mu(t) e^{\mu t}$、其中多项式为 P_μ 的轨道，证明同样适用，只需将 s 替换为 $\sum_\mu (\deg P_\mu + 1)$。共振正规形可能产生另一类函数。对于奇数 p，向量场 $x' = px^2$ 的线性部分为 0，且含有一个共振二次项；其轨道 $x(t) = x_0/(1 - px_0 t)$ 并非这种形式。原坐标中的代数子簇在经过线性化坐标变换后可能成为解析子簇。截断后使用有限和的界，因而需要对相关系数 C_μ 给出下界。

对于整数时刻，存在另一类界：在特征零域上，阶为 s 的非退化线性递推的整数零点个数，由 s 单独决定，与系数和根 [24, 11]无关。命题6.3计算了插值函数在 $\mathbb{Z}_p$ 中的零点，包括非整数零点；这正是p进制证书必须排除的零点。对于 $s = 2$，这类零点已经会出现：由于 exp 在 $p^c \mathcal{O}_L$上是单射，函数 $C_1 e^{\mu_1 t} + C_2 e^{\mu_2 t}$ 在 $\mathbb{Z}_p$ 中恰有一个零点，当 $-C_2/C_1$ 属于 $\exp((\mu_1 - \mu_2)\mathbb{Z}_p)$ 时；否则没有零点，而且这个零点通常不是整数。

7 轨道的零点集

现在，我将利用模信息和阿基米德信息，为多项式映射的轨道与超曲面相交时的全部整数时刻提供证书。

设 $F\colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}^d$ 是一个多项式映射，$x_0 \in \mathbb{Z}^d$, $x_n = F^n(x_0)$，且 $g \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_d]$。问题是零点集 $Z = \{n \geq 0 : g(x_n) = 0\}$；或者当轨道在 $\mathbb{Z}^d$中反向运行时的 $\{n \in \mathbb{Z} : g(x_n) = 0\}$，例如线性递推或 H´enon 映射。对于线性映射和线性 g，这就是 Skolem 问题；其在四阶以内可判定（参见 [6] 及其中的参考文献），而在更高阶时，对于简单递推，可在 Skolem 猜想和 p-adic Schanuel 猜想 [6] 下判定。对于非线性映射，动力学 Mordell–Lang 猜想预言 Z 是有限个等差数列的并。该猜想对 ´etale 映射以及其他若干情形 [4], 已获证明，但目前尚无判定过程。对于线性递推，Bacik、Ouaknine、Purser 和 Worrell 判定

是否存在 p-adic 插值函数的零点，并精确计算这些零点；其终止性取决于 p-adic Schanuel 猜想 [2], ; 对于映射 $x + p^q\Phi(x)$，Mukhamedov 给出了插值函数 Strassmann 指数的有限证书 [19]。筛法在 Z 其记录排除了更多零点时，就能为此提供证书。命题7.4 给出了一类必然会出现这种情况的轨道。

一条记录汇集了单次计算对有限初始区间之后的零点集所能说明的内容 .

定义 7.1. 记录由一个尾部 $T \geq 0$ 和一个有限的剩余类集合 C c 模 Q（即覆盖）组成，使得每个满足 $n \geq T$ 的 $n \in Z$ 都属于 C 中的某个类；此外，对每个类，还给出一个界 $b \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，用于限制该类中满足 $n \geq T$ 的 $n \in Z$ 的数量。

覆盖为空的记录表示 $Z \subset [0, T)$。当且仅当 $c \equiv c'$（模 gcd(Q, Q')）时，两个类 c 模 Q 和 c' 模 Q' 相交，因此可以精确比较覆盖。记录有三个来源。

Strassmann 记录使用一个素数，此时轨道模 p 的周期具有可逆雅可比矩阵。在该周期的图表中，映射的某个幂逐系数同余于恒等映射（对 $p = 2$ 而言模 4），而 Bell 和 Poonen 的插值 [3, 22], 应用于该幂（另见 [28, 命题 3.8]），将尾部之后每个类 $n \equiv c$ （模 Q）上的 $g(x_n)$ 转化为关于 u 的幂级数，且 $n = c + Qu$。对于固定的 k，覆盖由这些级数可能模 p^k 为零的类构成，而 b 是该类的 Strassmann 界。

只需检查 g 在模 p^k 轨道的周期上的取值，即可得到一份深度记录。

引理 7.2。 设 p 是一个素数，且 $k \geq 1$，并设模 p^k 的轨道具有尾部 T 和周期 P。满足 $T \leq c < T + P$ 且 $x_c) \equiv 0$ (模 p^k)的类 c 模 P，各自具有 $b = \infty$，构成一份记录。若 F 在$(\mathbb{Z}/p^k)^d$ 上诱导一个双射，且逆向轨道包含于 $\mathbb{Z}^d_{(p)}$，则模 p^k 的轨道是纯周期的，并且这些类包含每个满足 $g(x_n) = 0$的 $n \in \mathbb{Z}$ 。

证明。 对于 $n \geq T$, $x_n \equiv x_c$（模 p^k），其中 $c \equiv n$（模 P）属于 $[T, T + P)$，且 $g(x_n) = 0$给出$g($ $x_c) \equiv 0$。有限集合上的双射只有周期，因而对于每个满足 $n \equiv c$（模 P）的 $n \in \mathbb{Z}$，都有 $x_n \equiv x_c$。

□

例如，对于末尾系数与 p 互素的线性递推关系的伴随映射，以及在 $\mathbb{Z}$ 上存在多项式逆映射的映射，这两种情况都成立，例如 H´énon 映射。

阿基米德估计可以给出一个覆盖为空的实数记录。线性递推关系的主根是获得这种估计的一种方法。

命题 7.3. 设 $R_1, \ldots, R_s$ 为尾部为 T_j 的记录，令 $W \geq \max_j T_j$，并假设 $Z_W = Z \cap [0, W]$ 是精确计算的。假设对于某个 i，覆盖 R_i 中每个与覆盖 R_j、 $j \neq i$ 各自的某个类相交的类，都具有 $b < \infty$，且包含至少 b 个属于 Z_W 的 $n \geq T_i$。那么 $Z \cap [0, \infty) = Z_W$。

证明。 设 $n \in Z$，且 $n > W$。那么对每个 j，都有 $n \geq T_j$，所以 n 属于每个覆盖中的某个类，而这些类彼此相交，因为它们都包含 n。因此，包含 n 的 R_i 类具有 $b < \infty$，并且其中已经有 Z_W 的 b 个元素不小于 T_i。加上 n，同一类中就有 $Z \cap [T_i, \infty)$ 的 $b + 1$ 个元素，这与上界矛盾。

□

对于逆向运行的轨道， $n \mapsto -n$也采用同样的论证：在7.2 引理中， F 在模 p^k 意义下为双射的素数处，其记录会反映过来；其他记录则针对逆向轨道计算。线性递推 $u_n = a_0 u_{n-1} + \cdots + a_{k-1} u_{n-k}$在 $a_{k-1} \neq 0$下逆向运行时，对应的整数递推为 $s_m = a_{k-1}^m u_{-m}$，其系数为 $-a_{k-2-j} a_{k-1}^j$ 当$j < k - 1$ 且a_{k-1}^{k-1} 时。

按分支类型进行的阿代尔筛法（ABS）从成本最低的记录开始，逐步收集，直到命题7.3 适用。在素数 p处，计算轨道模 p的周期、其长度 ℓ，以及沿轨道取值并模 p的雅可比矩阵 J_{cyc} 的乘积 F。若 ´分支是 ***étale*** 的，则 J_{cyc} 可逆；若为幂零的，则 $J_{\mathrm{cyc}}^{d} \equiv 0$；若为混合的，则 Fitting 分解的两部分均非零。Strassmann 记录要求分支为 ´étale。每个素数处都存在深度记录，对于 $k = 1$、2、.....。在 ´étale 素数处，深度记录能以较低成本排除一些同余类。计数 b 来自 Strassmann 定理。

对于递推关系，依据引理 a_{k-1} 7.2，不整除最后一个系数的素数处的记录在两个方向上均适用。在其他素数处，两个方向分别处理。随着记录不断添加，窗口 W 会扩展到最大的尾部。对于幂零分支，轨道会趋近于 $\mathbb{Z}_p^d$中的一个有限周期。当且仅当该周期上的每个点处 g 均非零时，深度记录最终才会有空覆盖。

命题 7.4。假设模 p 的轨道有尾部 T_1 和长度为 ℓ 的周期，沿该周期，F 模 p 的雅可比矩阵的乘积 J_{cyc} 是幂零的。那么：

(i) 对于 $0 \le i < \ell$，映射 F^{ℓ} 在 x_{T_1+i}的剩余类圆盘内有唯一的不动点 ξ_i，有$\xi_{i+1} = F(\xi_i)$（指标模 ℓ），且对于每个 $m \ge 0$，$x_{T_1+i+\ell m} \equiv \xi_i$ (模 $p^{1+\lfloor m/d \rfloor}$)。***(ii)*** 如果对于每个 i，$g(\xi_i) \neq 0$，并且 $v_0 =$ 最大$_i$v$(g(\xi_i))$，那么包含 $k = v_0 + 1$ 的深度记录有空覆盖，且尾部至多为 $T_1 + \ell d v_0$。因此，每个零点都满足 $n < T_1 + \ell d v_0$。***(iii)*** 如果对于某个 i，$g(\xi_i) = 0$，那么在 p 处的每个深度记录的覆盖都有一个类，该类与$T_1 + i$ 的类模 ℓ相交。

证明。设 $D_i = x_{T_1+i} + p\mathbb{Z}_p^d$。由于 F具有整数系数，它将 D_i映射到 D_{i+1}中，因此 F^{ℓ}将 D_i映射到自身。沿从 x_{T_1+i} 开始的周期计算的雅可比矩阵之积，是定义 J_{cyc}的乘积的循环移位，因此也是幂零的，因为 XY是幂零的当且仅当 YX 是幂零的。令 $G = F^{\ell d}$。对于 y、$z \in D_i$，利用具有整数系数 Hasse 导数的泰勒公式可得 $G(z) - G(y) = DG(y)(z-y) + R$，其中 R 的每一项关于 $z-y$的次数至少为 2，因此 $\|R\| \le p^{-1}\|z-y\|$。根据链式法则，$DG(y)$是取自与该周期模 p同余的点处的 ℓd 个雅可比矩阵之积，因此它同余于某个幂零 $d \times d$ 矩阵的 d次幂，而该矩阵模 p为 0。于是 $\|G(z) - G(y)\| \le p^{-1}\|z-y\|$，且 G 是完备空间 D_i 上的压缩映射，具有唯一不动点 ξ_i。由于 F^{ℓ} 与 G可交换，$F^{\ell}(\xi_i) \in D_i$是 G的不动点，因此它等于 ξ_i。F^{ℓ}在 D_i中的每个不动点都被 G固定，因此 ξ_i是唯一的不动点，而 $F(\xi_i) \in D_{i+1}$被 F^{ℓ}固定，所以它就是 ξ_{i+1}。由 $x_{T_1+i} \equiv \xi_i$（模 p）以及压缩映射性质可得 $\|x_{T_1+i+\ell dj} - \xi_i\| \le p^{-1-j}$。由于 $F^{\ell s}$是 1-Lipschitz 映射并固定 ξ_i，这就给出了 $m = dj + s$的 (i)。

对于 (ii)，取 $n = T_1 + i + \ell m$，使得 $m \ge d v_0$。根据 (i)，$x_n \equiv \xi_i$（模 p^{v_0+1}），因此 $g(x_n) \equiv g(\xi_i) \neq 0$（模 p^{v_0+1}）。所以，模 p^{v_0+1} 的轨道从时间 $T_1 + \ell d v_0$ 起是周期的，其尾部至多为 $T_1 + \ell d v_0$。其周期中的每个点都会在任意大的时间再次出现，因此它是模 p^{v_0+1} 的 ξ_i 之一，而这些都不是模 p^{v_0+1} 的 g 的零点。该覆盖为空。

对于 (iii)，固定 k。根据 (i)，对于每个足够大的 $n \equiv T_1 + i$，都有 $x_n \equiv \xi_i$（模 p^k），（模 ℓ），因此 $g(x_n) \equiv 0$（模 p^k），而尾部之后这类 n 的类属于该覆盖。 □

ABS 不会计算 ξ_i 或 v_0：它会不断提高 k，直到覆盖为空；根据 (ii)，这最迟会在 $k = v_0 + 1$ 时发生。零点的界可直接从计算出的周期中读出，不涉及任何常数。情形 (iii) 需要轨道在超曲面 $g = 0$ 上的一个 p-adic 极限点。

对于 $F(x, y) = (x^2, y^2)$，取 $x_0 = (2, 0)$、$g(x, y) = x - 4$和 $p = 2$。模 2 的周期是原点，其雅可比矩阵为零，极限点为 $\xi = (0, 0)$。由于 v$(g(\xi)) = 2$，命题 7.4 给出了深度 3 处的空覆盖。模 8 时，轨道为 (2, 0)、(4, 0)、(0, 0).....，因此尾部长度为二，并且

精确值 $g(x_0) = -2$ 和 $g(x_1) = 0$ 给出零点集 $\{1\}$。沿着轨道 $y = 0$，因此 $\det DF = 4xy$ 在那里为零，不存在素数 ´étale。

为处理素数 p 处的所有三种分支类型，考虑首次回归映射的中心流形。若 T_1 和 ℓ 分别是模 p 的尾部和周期长度，令 $a = x_{T_1}$。在坐标 $x = a + py$ 下，首次回归到其剩余类圆盘的映射为

$$\Psi(y) = \big(F^{\ell}(a + py) - a\big)/p.$$

Ψ 的系数都是整数，次数为 $e \geq 1$ 的系数可被 p^{e-1} 整除。其线性部分 $\Lambda = DF^{\ell}(a)$ 模 J_{cyc} 化简为 Λ。对 $\mathbb{Z}_p^d = V_c \oplus V_s$ 的特征多项式应用亨泽尔引理，可将 Λ 分解为两个直和项，它们都具有 $\Lambda_c = \Lambda|_{V_c}$ 不变性，$\Lambda_s = \Lambda|_{V_s}$ 可逆，而 $\Lambda_s^d \equiv 0$ 满足 p（模 ´）。对于 $V_s = 0$，该分支是 $V_c = 0$ etale 的；对于 u，则是幂零的。在适配该分解的坐标 $(c,\ s)$ 下，若 $u \in \mathbb{Z}_p^{\delta}$、$\delta =$ 的秩为 $\mathbb{Z}_p$ V_c，则 Ψ_c 的线性部分不含 s 项，而 Ψ_s 的线性部分不含 u 项。$\mathbb{Z}_p\langle u\rangle$ 中级数的高斯范数是 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^{\delta}$ 上的上确界，因此可以逐点检验下文的估计。

引理 7.5 (中心流形与影子)。*(a)* 存在唯一一个高斯范数不超过 1 的 $\eta \in \mathbb{Z}_p\langle u\rangle^{d-\delta}$，其图像 $\mathcal{A} = \{s = \eta(u)\}$ 满足 $\Psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$，且 $\psi(u) = \Psi_c(u, \eta(u))$ 是 $\mathbb{Z}_p^{\delta}$ 上的等距双射，其逆映射属于 $\mathbb{Z}_p\langle u\rangle^{\delta}$。

(b) 每个 $y \in \mathbb{Z}_p^d$ 都有唯一的 $y^* \in \mathcal{A}$，使得对所有 $m \geq 0$，$\|\Psi^m(y) - \Psi^m(y^*)\| \leq p^{-\lfloor m/d \rfloor}$。

证明。(a) 对于 $\mathbb{Z}_p\langle u\rangle^{d-\delta}$的单位球 $\mathcal{B}$ 中的一个整系数级数 η，其图像上的中心分量为 $\psi_\eta(u) = \Psi_c(u, \eta(u))$. 逐系数约化后得到可逆仿射映射 $u \mapsto b_c + \Lambda_c u$。通过压缩映射求解逆映射，可在 $\mathbb{Z}_p^{\delta}$ 和 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^{\delta}$上得到等距双射，其逆映射属于$\mathbb{Z}_p\langle u\rangle^{\delta}$。因此，$\Psi$ 将 η 的图像映至 $\Gamma(\eta) = \Psi_s(\cdot, \eta(\cdot)) \circ \psi_\eta^{-1}$，后者是 $\mathcal{B}$的另一个元素。

设 $\epsilon = \|\eta_1 - \eta_2\|$。$\Psi_c$ 对 s 的依赖可被 p 整除，因为其线性的 s 项为零，而其高次项可被 p 整除。因此，利用逆映射的等距映射性质，这两个映射 ψ_{η_i} 及其逆映射逐点相差至多 $p^{-1}\epsilon$。映射 Ψ_s 和 η_2 是 1-Lipschitz 的，因此逆映射的变化对图变换的贡献至多为 $p^{-1}\epsilon$。剩余的首项差异为 Λ_s（$(\eta_1 - \eta_2) \circ \psi_{\eta_1}^{-1}$），误差至多为 $p^{-1}\epsilon$。与这些逆映射进行复合会保持高斯范数。经过 d 步后，首项因子为 $\Lambda_s^d \equiv 0$（模 p），因此 Γ^d 以 p^{-1} 的比例收缩。其唯一不动点 η 也被 Γ 固定，因为 $\Gamma(\eta)$ 再次是不动点 Γ^d。令 $\psi = \psi_\eta$。

(b) 令 $\tau(u,\ s) = s - \eta(u)$ 表示到该图像的差，令 $\pi(u,\ s) = (u,\ \eta(u))$ 表示到该图像的投影。图像的不变性给出

$$\tau(\Psi(u,s)) = \big[\Psi_s(u,s) - \Psi_s(u,\eta(u))\big] - \big[\eta(\Psi_c(u,s)) - \eta(\Psi_c(u,\eta(u)))\big].$$

积分差商将每个括号分解为经过 τ 的形式。对于第一个括号，该矩阵模 p 同余于 Λ_s，因为所有高次项都能被 p 整除。对于第二个括号，由于 Ψ_c 中的一次 s 项消失，该矩阵模 p 为零。因此 $\tau(\Psi(z)) = B(z)\tau(z)$，其中 $B \equiv \Lambda_s$ (模 p) 且 $|B| \leq 1$。经过一步迭代，到图像的距离不会增加；每经过 d 步，这些矩阵的乘积就会化为 $\Lambda_s^d = 0$，从而产生因子 p^{-1}。

中心分量也给出 $\|\Psi(\pi z) - \pi\Psi(z)\| \leq |\tau(z)|$，因为图像上各点之间的距离就是其 u 坐标之间的距离。沿图像上的等距映射将 $\pi\Psi^m(y)$ 拉回到 y_m^*，使其满足 $\Psi^m(y_m^*) = \pi\Psi^m(y)$。相邻点满足 $\|y_{m+1}^* - y_m^*\| \leq |\tau(\Psi^m(y))| \leq p^{-\lfloor m/d \rfloor}$，因此其极限 y^* 满足 $\|y_m^* - y^*\| \leq p^{-\lfloor m/d \rfloor}$。取该距离与$|\tau(\Psi^m(y))|$ 中的较大值，即可得到所需的界。两个影子在 Ψ 作用下会始终相距一个常数，因此距离界迫使它们重合。 □

命题 7.6。 对于 ℓ 的某个正整数倍 M，模 M 的每个时间类（由$r_0 \in [T_1, T_1 + M)$ 表示）都有一个级数 $G_{r_0} \in \mathbb{Z}_p\langle t\rangle$，满足

$$\mathrm{v}\big(g(x_n) - G_{r_0}(t)\big) \geq \lfloor (n - T_1)/(\ell d)\rfloor \qquad \textit{for } n = r_0 + Mt,\ t \geq 0.$$

(i) 若 G_{r_0} 在 $\mathbb{Z}_p$ 中没有零点，且 $\nu_{r_0} =$ 最大$^{t\in\mathbb{Z}_p}$赋值$(G_{r_0}(t))$，那么对每个 $k > \nu_{r_0}$，在 p^k 处深度记录的覆盖中没有任何类与 r_0相交。

(ii) 若 G_{r_0} 在 $\mathbb{Z}_p$中有一个零点，那么对每个 k，在 p^k 处深度记录的覆盖中都有一个与r_0相交的类。

在 p 处的深度记录最终具有空覆盖，当且仅当每个 G_{r_0} 在 $\mathbb{Z}_p$上都无零点。在这种情况下，任意 $k >$ 最大$_{r_0}\,\nu_{r_0}$ 均可。

证明。 ψ 的约化是一个可逆仿射映射，因此某个幂 $\phi = \psi^{M_1}$ 逐系数模 p等于恒等映射。对于奇数 p，这个幂已经满足插值假设，因此令 $M_2 = M_1$。若 $p = 2$，写作 $\phi(u) = u + 2h(u)$，其中 $h \in \mathbb{Z}_p\langle u\rangle^{\delta}$。将其代入这个整系数级数，逐系数可得 $h(u + 2h(u)) \equiv h(u)$（模 2），因此

$$\phi^2(u) = u + 2h(u) + 2h(u + 2h(u)) \equiv u \pmod 4.$$

取 $M_2 = 2M_1$ 于 $p = 2$ 意味着，无论哪种情况，ψ^{M_2} –id 的系数的赋值都大于 $1/(p-1)$。Poonen 定理给出 $\Phi \in \mathbb{Z}_p\langle t,\ u\rangle^{\delta}$ 其中 $\Phi(t,\ u) = \psi^{M_2 t}(u)$ 对于 $t \in \mathbb{N}$ [22]成立。令 $M = \ell M_2$，并令 $(w,\ \eta(w))$ 为引理 7.5(b) 中 0 的影子。

每个时间类都有一个代表元 $r_0 = T_1 + i + \ell j$，满足 $0 \leq i < \ell$ 和 $0 \leq j < M_2$。通过在 $a + p(U, \eta(U))$ 处计算 $g \circ F^i$，定义 $G_{r_0}(t)$；其中 $U = \Phi(t, \psi^j(w))$ 以及坐标 (u, s) 都换回原来的坐标。该表达式中的映射都是整的，因此 G_{r_0} 属于 $\mathbb{Z}_p\langle t\rangle$。对于 $m = j + M_2 t$，它在整数 $t \geq 0$ 处的值为 $g(F^i(a + p\Psi^m(w, \eta(w))))$，而 $x_{T_1+\ell m} = a + p\Psi^m(0)$。应用影子估计以及 g 和 F^i 的 1-Lipschitz 界，可得 $\mathrm{v}(g(x_n) - G_{r_0}(t)) \geq 1 + \lfloor m/d\rfloor \geq \lfloor (n - T_1)/(\ell d)\rfloor$ 在 $n = r_0 + Mt$ 处成立。

在 (i) 中，紧致性和零点的缺失使 ν_{r_0} 有限。一旦 $\lfloor (n - T_1)/(\ell d)\rfloor > \nu_{r_0}$，在整个类 r_0 中都有 $\mathrm{v}(g(x_n)) = \mathrm{v}(G_{r_0}(t)) \leq \nu_{r_0}$。若某个被覆盖的类 $c \bmod P$ 在深度 $k > \nu_{r_0}$ 与 r_0 相交，那么根据中国剩余定理，它们的交集将包含任意大的时间。超过模尾部后，这些时间会满足 $g(x_n) \equiv 0 \pmod{p^k}$，这与该界限矛盾。

对于 (ii)，固定 k，并令 $G_{r_0}(t_*) = 0$，其中 $t_* \in \mathbb{Z}_p$。根据连续性，存在一个整数 $e \geq 0$，使得在整个 $t_* + p^e\mathbb{Z}_p$ 中都有 $\mathrm{v}(G_{r_0}(t)) \geq k$。在其中选取一个足够大的整数 t，使 $n = r_0 + Mt$ 超过模尾部，且满足 $\lfloor (n - T_1)/(\ell d)\rfloor \geq k$。于是 $g(x_n) \equiv 0 \pmod{p^k}$，因此该覆盖包含一个与 r_0 相交的类。 □

在幂零分支上，$\delta = 0$ 且每个 G_{r_0} 都是常数 $g(\xi_i)$，对应于极限环上的相应点。命题7.4 给出了此情形下的深度界。在一个 ´étale 分支上，中心流形就是整个图表，而 G_{r_0} 是用于 Strassmann 记录的 Bell–Poonen 插值。一个 p-进零点 G_{r_0} 会使该类在每个深度都留在覆盖中。在一个 ´étale 分支上，如果已找到的精确零点已达到其 Strassmann 界，仍然可以使该类闭合。非整数零点会妨碍这一数量达到上限，因此筛法此时需要来自另一个位置的记录。

为了构造深度记录，我会考察模 p^k的有限轨道。当某个类存活下来时，我可以提高 k并重复计算。极限环和影子会告诉我何时这样做有用，其依据是与 Ghioca 和 Tucker 关于动力学 Mordell–Lang [12]的研究中出现的同类吸引作用。

筛法多久能创下一个 Strassmann 记录？ Benedetto、Ghioca、Hutz、Kurlberg、Scanlon 和 Tucker 将点模 p 的轨道建模为一个随机映射，该映射作用于一个含有 p^d 个点的集合，其

周期与超曲面 $\det dF \equiv 0$ [5, 第 5]节线性无关。长度为 ℓ 的周期随后避开该超曲面，也就是说，在 p 处分支是 ´étale 的，其概率为 $(1-1/p)^{\ell}$。周期长度通常约为 $p^{d/2}$，但短周期在平均值中占主导地位；对于π_p，分支为 ´étale 的概率为 $(\sqrt{\pi/2}+o(1))\ p^{1-d/2} \approx 1.25\,p^{1-d/2}$，而对于 $d \geq 3$约为 0.6，详见命题5.3和注5.4]。假设不同素数之间具有线性无关性，他们指出不存在 ´étale 素数的概率是一个欧拉乘积；当 $d = 3$、4 时该乘积为零，而当 $d \geq 5$时为正，并在最高三维的情形下检验了该模型，见 [5, 第 5.1.3节和第5.2]节。相同的模型还给出了此类素数数量的速率，以及在截断值以下找不到任何此类素数的概率。

对于将一条曲线压缩为一个点的双有理映射，取一个素数 p，使得约化后仍将该曲线压缩为一个点，在该点之外是单射，并且该曲线是其像的完整原像。如果起始点模 p 不具有周期性，那么它模 p 的最终循环会经过该曲线；在该曲线上，$\det dF$ 模 p 消失，因此在每个这样的素数处，该分支都不是 ´etale。没有被压缩曲线的双有理映射则可能相反：H´énon 映射 $(x, y) \mapsto (y, x + y^2)$ 具有多项式逆映射且 $\det dF = -1$，因此其分支在每个素数处都是 ´etale。无论哪种情况，这类映射都不属于随机映射模型，因此该启发式方法针对的是非双有理映射。一个具有无限轨道的点仍可能在每个奇素数 p 模下都是周期点：对于 $(x, y) \mapsto (x, xy)$，点 (2,1) 具有长度为 $\ell = \mathrm{ord}_p 2$ 的周期，其乘子为 2^{ℓ}，因此其分支在每个奇素数 p 处都是 ´etale。

启发式 7.7 （后接 [5]）。对于系数在 $[-H, H]$ 和 $H \to \infty$ 中均匀分布、且非双有理的 $\mathbb{Z}^d$ 随机二次映射，若随机起始点的轨道无限，则各素数处“p 处分支为 ´*étale*”的事件被建模为相互独立，其概率分别为 $0 \leq \pi_p < 1$ 和 $\pi_p \sim c_d p^{1-d/2}$，其中 $c_d = \sqrt{\pi/2}$ 且 $d \geq 3$。令 $s = d/2 - 1$。该模型给出以下预测。

(*a*) ´个 *étale* 素数的期望数量 $p \leq X$ 对于 $d = 3$ 按 $2c_3\sqrt{X}/$对数 X 的速度增长，对于 $d = 4$ 按 c_4 对数的对数 X 的速度增长，而对于 $d \geq 5$ 则保持有界；(*b*) 没有素数 $p \leq X$ 是 ´*étale* 的概率的对数，对于 $d = 3$ 与 $-2c_3\sqrt{X}/$ 对数 X 渐近等价，而该概率本身对于 $d = 4$ 为（对数 X）$^{-c_4+o\,(1)}$；
(c) 对于 $d \geq 5$，一个素数都不是 ´*etale* 的概率为正，且等于 $\prod_p(1-\pi_p)$，这是当 $P \to \infty$ 时的极限

$$\prod_{p\leq P}(1-\pi_p)\cdot\prod_{p>P}\bigl(1-c_dp^{-s}\bigr),\qquad \prod_{p>P}\bigl(1-c_dp^{-s}\bigr)=\Bigl(\zeta(s)\prod_{p\leq P}(1-p^{-s})\Bigr)^{-c_d}\bigl(1+O(P^{1-2s})\bigr).$$

这三种情形对应于 $\sum_p p^{-s}$：对于 $d = 3$，低于 ζ 在 $s = 1$ 处的极点；对于 $d = 4$，位于极点处；对于 $d \geq 5$，则超过极点。$d \leq 4$ 与 $d \geq 5$ 之间的二分现象属于 [5]。分部求和给出了 $d = 3$ 的速率，而素数的默滕斯定理给出了 $d = 4$ 的速率。对于$d \geq 5$，概率之和收敛，展开尾部乘积的对数即可得到 (c)。在四维情形中，该和以 $\log\log X$ 的速度发散，因此预计 Bell 的单个素数论证适用于几乎所有轨道；但对于截至 X 尚无 ´etale 素数的轨道，其占比仅以 $(\log X)^{-c_4}$ 的速度衰减。

因此，根据启发式 7.7中的线性无关性，Strassmann 记录需要一个 ´étale 素数，因此从五维开始，正比例的轨道将缺少这类记录；而深度记录在每个素数处都存在。

8 后续问题

在秩为 m 的点 $\ell>0$处，令 V为 m处哈密顿向量的张成空间，因此横向系统存在于辛商空间 V^{ω}/V上。经典的 Carath´eodory–Jacobi–Lie 归纳法使用局部流和反函数定理，并建议取 $H_i-H_i(m)=\xi'_i$ 作为 $i\le \ell$的一组辛坐标的一部分。其余积分随后将给出一族由 ξ'参数化的秩为 0 的问题，对于每个参数具有相同的整数除子（14）。若要给出半径关于 ξ' 一致的证明，就需要临界点和特征坐标具有解析依赖性，同时还需要在包含参数变量的高斯范数中执行牛顿步。

对于定理 4.1中的半径，我会从 [8]的四维模型入手。计算r 和 μ ，就能看出特征坐标和 Λ 的贡献如何随 Williamson 型和分歧而变化。关于 p 经由 L_p的依赖关系，其界有多精确?

对于一个线性部分半单且非共振的单个向量场，令 $\omega(D$为除子 $\langle m$的最大赋值， $\lambda\rangle-\lambda_i$ 其中 $|m|\le D$。在可积情形中，总和 $\sum_k s_{N_k}/2^k$ 控制损失，这表明 $\sum_k \omega(2^{k+1})/2^k<\infty$ 可作为单个向量场线性化的条件。备注 3.6 中的 Liouville 例子不满足这一 Brjuno 条件。该条件是否充分？它是否锐利？对于牛顿方案，共振会带来另一个问题：保留的二次项与次数为 N 的修正项的括号，已经会出现在次数 $N+1$上。二次版本的固定阈值构造必须控制这些项。

若 $g(x_n)$ 在 $n=r_0+Mt$ 处 $=0$ ，命题 7.6 迫使 $\mathrm{v}(G_{r_0}(t))\ge\lfloor(n-T_1)/(\ell d)\rfloor$。无限轨道可以有 $G_{r_0}\equiv 0$，例如 $F(x,y)=(3x,3y)$、$x_0=(1,0)$、$g=y$和 $p=3$。对于非零的 G_{r_0}，Weierstrass 预备定理将其表示为 p^{ν} 乘以一个单位和一个多项式。如果存在无穷多个整数零点，那么某个根 τ 必须沿着一个子序列满足 $\mathrm{v}(t-\tau)\ge ct-C$，其中 $c>0$和 C固定。这个逼近使 τ 属于 $\mathbb{Z}_p$，而它不可能是整数，因为非零整数之差的赋值至多随 t 对数增长。代数的 F、x_0 和 g 能否给出这样的逼近？这类似于 [6] 中用于简单递推的超越性问题。

在一个其极限环与 $g=0$相交的幂零分支上，命题 7.4(iii) 在该素数的每条深度记录中都留下类。谢氏定理给出了二维中完整¯零点集的有限个等差数列 $\mathbb{Q}$ [31]，而高维中的相应情形仍未解决。启发式 7.7 针对固定轨道提出了另一个问题：其约化有 ´étale 周期的频率如何？在一维情形中，这引出了关于原像塔和树状伽罗瓦表示的切博塔廖夫问题。对于二维中的扎里斯基稠密轨道，可以问其 ´étale 素数是否具有正密度。

9 代码可用性

Galrax 中的 `galrax.padic`软件包（`https://github.com/NotTruecCoder/galrax`）在 `normal_form.py` 中实现了史密斯标准形及其证书。Eliasson–Vey 计算位于 `IntegrableSystem.normal_form` 中，`integrable.py`。对数特征值的代码位于`formal.py`。记录和筛法位于`adelic.py`。

参考文献

[1]V. I. Arnold. 常微分方程理论中的几何方法. 数学科学基础丛书 250. Springer，第2版，1988年。

[2] P. Bacik, J. Ouaknine, D. Purser, and J. Worrell. 关于 p-赋值 Skolem 问题。载于第43届国际计算机科学理论方面研讨会（STACS 2026），LIPIcs 364，第8:1–8:20页，2026年。doi:10.4230/LIPIcs.STACS.2026.8.[3] J. P. Bell. 仿射簇上的广义 Skolem–Mahler–Lech 定理。J. London Math. Soc., 73(2):367–379, 2006。勘误：78(1):267–272, 2008。[4] J. P. Bell, D. Ghioca, and T. J. Tucker. 动力学 Mordell–Lang 猜想。数学调查与专著 210。美国数学学会，2016年。doi:10.1090/surv/210。[5] R. L. Benedetto, D. Ghioca, B. Hutz, P. Kurlberg, T. Scanlon, and T. J. Tucker. 有理映射模素数的周期。Math. Ann., 355(2):637–660, 2013。[6] Y. Bilu, F. Luca, J. Nieuwveld, J. Ouaknine, D. Purser, and J. Worrell. Skolem 遇上 Schanuel。载于第47届计算机科学数学基础国际研讨会（MFCS 2022），LIPIcs 241，第20:1–20:15页，2022年。doi:10.4230/LIPIcs.MFCS.2022.20。[7] S. Cantat and S. U. Jang. 仿射曲面在 p-赋值域上的自同构群轨道。预印本，arXiv:2410.08579，2024年。[8] L. Crespo and ´A. Pelayo. p-赋值辛可积系统几何与 Weierstrass–Williamson 理论 I。Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F ´ís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM, 121(1)，论文编号10，2027年（2026年在线发表）。doi:10.1007/s13398-026-01904-7。编号沿用 arXiv:2501.14444v3。[9] L. Crespo and ´A. Pelayo. 实可积性与 p-赋值可积性之间的对比。预印本，arXiv:2606.24363，2026年。[10] M. Elsheikh and M. Giesbrecht. p-赋值特征值与局部Smith标准形之间的关系。Linear Algebra Appl., 481:330–349, 2015。doi:10.1016/j.laa.2015.05.001。[11] J.-H. Evertse, H. P. Schlickewei and W. M. Schmidt. 乘法群中元素所满足的线性方程。Ann. of Math., 155(3):807–836, 2002。[12] D. Ghioca and T. J. Tucker. 周期点、线性化映射与动力Mordell–Lang问题。J. Number Theory, 129(6):1392–1403, 2009。doi:10.1016/j.jnt.2008.09.014。[13] M. R. Herman and J.-C. Yoccoz. 小除数若干定理在非阿基米德域上的推广。载于 J. Palis 编，《几何动力学》（里约热内卢，1981），数学讲义 1007，第408–447页。Springer，1983年。[14] A. Jenkins and S. Spallone. 局部解析动力学的 p-赋值方法：与恒等映射相切的解析映射的解析共轭。Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), 18(3):611–634, 2009。doi:10.5802/afst.1217。[15] I. Kaplansky. 带赋值域中的 Weierstrass定理。Proc. Amer. Math. Soc., 1:356–357, 1950。doi:10.1090/S0002-9939-1950-0035760-3。[16] K. S. Kedlaya. p-赋值微分方程。剑桥高等数学研究 125。剑桥大学出版社，2010年。[17] K. S. Kedlaya. 非阿基米德曲线上联络的局部与整体结构。Compos. Math., 151:1096–1156, 2015。doi:10.1112/S0010437X14007830。

[18] K.-O. Lindahl. 二次 p进线性化圆盘的大小。Adv. Math., 248:872–894, 2013. doi:10.1016/j.aim.2013.07.020.[19] F. Mukhamedov. 局部 p进动力学 Mordell–Lang 插值函数的有效 Strassmann 证书。预印本，arXiv:2607.14339, 2026.[20] M. Newman. 整数矩阵。纯数学与应用数学丛书 45。Academic Press, 1972.[21] A. Ostafe and M. Sha. 关于定量动力 Mordell–Lang 猜想。J. Number Theory, 156:161–182, 2015. doi:10.1016/j.jnt.2015.04.011.[22] B. Poonen. p进迭代的插值。Bull. London Math. Soc., 46(3):525–527, 2014. doi:10.1112/blms/bdu010.[23] G. R´emond and F. Urfels. 椭圆 p进对数的丢番图逼近。J. Number Theory, 57(1):133–169, 1996.[24] W. M. Schmidt. 线性递推序列的零点重数。Acta Math., 182(2):243–282, 1999.[25] J. H. Silverman. 椭圆曲线上 Weil 高度与典范高度之差。Math. Comp., 55(192):723–743, 1990. doi:10.1090/S0025-5718-1990-1035944-5.[26] J. H. Silverman. 椭圆曲线的算术。Graduate Texts in Mathematics 106。Springer，第 2 版，2009..[27] R. Strassmann. 关于 p进数域中幂级数的值域。J. Reine Angew. Math., 159:13–28, 1928.[28] K. Terskii. p进流的轨道：球、时一映射与极小群作用。预印本，arXiv:2611.24982, 2026.[29] A. J. van der Poorten. p进指数多项式的零点。Indag. Math. (Proceedings), 79(1):46–49, 1976.[30] A. J. van der Poorten and H. P. Schlickewei. 递推序列的零点。Bull. Austral. Math. Soc., 44(2):215–223, 1991.[31] J. Xie. 仿射平面多项式自同态的动力 Mordell–Lang 猜想。Ast´erisque, 394, 2017.[32] K. Yu. p进对数的线性形式。Acta Arith., 53(2):107–186, 1989. doi:10.4064/aa-53- 2-107-186.