arXiv:2611.29601v1 [math.RA] 22 Nov 2026

一个具有阿贝尔极大子群的非交换除环示例

Huynh Viet Khanh[1]

[1]胡志明市师范大学数学与信息学系，越南胡志明市， khanhhv@hcmue.edu.vn

摘要

我们构造了一个次数为 6、中心 F 代数地扩张于 $\mathbb{Q}$的循环除代数 D 。极大子域 K 的乘法群 $K^\times$ 是 $D^\times$的极大子群，从而推翻了 Akbari、Ebrahimian、Momenaee Kermani 和 Salehi Golsefidy 提出的猜想 C。域范数 $N_{K/F}$ 将$K^\times$ 映满 $F^\times$，其核是约化范数一群 $D^{(1)}$的极大子群。商群$D^{(1)}/Z(D^{(1)})$是非阿贝尔单群，其中 ker $N_{K/F}$ 的像是一个阿贝尔极大子群。证明运用了局部域上的矩阵分解、Breuillard 和 Glazer 的卷积定理，以及 Moret–Bailly 关于具有指定分裂性质的扩张域上点的定理。

关键词。循环除代数、阿贝尔极大子群、约化范数、范数一群。

2020 年数学主题分类。主要分类 16K20。次要分类 16U60、20E28。

1 引言

Akbari、Mahdavi-Hezavehi 和 Mahmudi 在第 431] 页的猜想 2 [2, 提出：如果一个除环D 有幂零极大子群，那么它是交换的。该猜想及其阿贝尔情形分别表述为第 202] 页中的猜想 B 和猜想 C [1, 。因此，猜想 C 断言：如果 $D^\times$ 有阿贝尔极大子群，那么 D 是交换的。本文构造了一个次数为 6 的循环除代数，其乘法群具有阿贝尔极大子群。这些子群是幂零的，因此该例子推翻了猜想 B 和猜想 C。

为陈述主要结果，我们先回顾一些记号。设 D 是一个中心有限除环，其中心为 F，极大子域为 K。记 $N_{K/F}\colon K^\times \to F^\times$ 和 $\mathrm{Nrd}_D\colon D^\times \to F^\times$ 分别为域范数和约化范数。令 $D^{(1)} =$ = ker $\mathrm{Nrd}_D = \{d \in D^\times \mid$ = $\mathrm{Nrd}_D(d) = 1\}$。由于 $\mathrm{Nrd}_D|_{K^\times} = N_{K/F}$，我们有 ker $N_{K/F} = \{k \in K^\times \mid N_{K/F}(k) = 1\} = K^\times \cap D^{(1)}$。因此 ker $N_{K/F} \trianglelefteq K^\times \le D^\times$ 且 ker $N_{K/F} \le D^{(1)} \trianglelefteq D^\times$。对于中心单代数 A，我们也以相同含义使用 Nrd_A 和 $A^{(1)}$ 。

定理 1.1. 设 $\mathbb{Q}$ 为有理数域，$\mathbb{Q}_{\mathrm{alg}}$ 为 $\mathbb{Q}$ 的一个固定代数闭包。令 F 为 $\mathbb{Q}$ 的代数扩张，它是在 $\mathbb{Q}_{\mathrm{alg}}$ 中所有使 $\{2,5,11,13\}$ 中每个素数完全分裂的数域的复合域。存在一个次数为 6、中心为 F 且具有极大子域 K 的循环除代数 D，使得以下结论成立。

(1) K/F 的正规闭包的伽罗瓦群为 S_6，且 $N_{K/F}$ 是满射 .

(2) 对于每个 $x \in D^\times \setminus K^\times$，都有 $\langle \ker N_{K/F},\ x(\ker N_{K/F})x^{-1}\rangle = D^{(1)}$。

(3) </style}群和ker $N_{K/F}$ 分别是 $D^\times$ 和 $D^{(1)}$的极大子群。

如命题 2.4 后所示，存在一个循环极大子域 C，使得 Gal$(C/F) = \langle\sigma\rangle$，并且存在一个 $a \in \mathbb{Q}^\times$，满足

$$D \simeq (C/F,\sigma,a) = \textstyle\bigoplus_{i=0}^{5} Cu^i, \quad \text{with} \quad u^6 = a \quad \text{and} \quad uc = \sigma(c)u \text{ for } c \in C.$$

定理 1.1 中的极大子域 K 在 F上不是伽罗瓦扩张，而 $K^\times$ 是 $D^\times$的一个阿贝尔极大子群。

对于非交换中心有限除环 D，由 [2, 定理 7，第 429]页可知，$D^\times$ 的每个幂零极大子群都是某个极大子域的乘法群。对于 $D^\times$的几乎次正规子群，[15, 定理 1.1 和定理 1.2(i)，第 247] 页表明，每个局部幂零极大子群都是阿贝尔的，并且非阿贝尔局部可解极大子群只有在 D 是素次数循环群时才可能出现。[12, 定理 2.7(i)]中的早期结果假设极大子群的导出列中某项关于中心是次正规的且代数的。特别地，由于 deg $D = 6$，我们例子中的 $D^\times$ 的每个局部可解极大子群都是阿贝尔的。

在这个例子中，若极大子群 M of $D^\times$ 不含非循环自由子群，或是有限扩张可解的，那么它也是阿贝尔的。若 M 非阿贝尔，则在第一种情形下（其中 D 局部有限），由 [9, 定理 3.1，第 610] 页；在第二种情形下（其中$|F| \geq 5$），由 [14, 定理 1.1，第 78] 页可知，M 有一个单商群，同构于 Gal(P/F)，其中 P是 D的一个伽罗瓦极大子域。这不可能，因为 $[P:\ F] = 6$，而每个 6 阶群都有一个真正规 Sylow 3-子群。

如 [13, 命题 5.2], 所示，对于中心为 F 的非交换中心有限除环 D，其阿贝尔极大子群 $D^\times$ 是某个极大子域 K的 $K^\times$，并且 $K^\times/F^\times$ 在 $D^\times/F^\times$中是自正规的。推论 3.4 根据不存在真中间域以及命题 2.4(2) 中 Aut$(K/F) = 1$ 这一等式，推出自正规性。关于这些性质及相关交判据，参见 [8, 推论 4 和定理 1，第 40–41] 页。根据 [13, 定理 1.2],，若一个非交换中心有限除环的中心对于某个非平凡赋值是亨泽尔的，且该环对于延拓赋值是温和的，那么其乘法群没有阿贝尔极大子群。如第 2 节所示，定理 1.1 中除环上的每个赋值都是平凡赋值。

在第 2 节中，我们构造了 D_0，其具有极大子域 K_0 以及局部指标 2 和 3。在指定完备化处，乘积范数是满射的，因此将引理 2.5 应用于范数纤维可推出 $N_{K/F}$的满射性。在第3节中，通过对约化迹的计算可以看出，适当的范数核共轭元的乘法映射在单位元组处具有满射微分。在指定完备化上，对初等矩阵进行收缩，随后得到约化范数为 1 的元素的分解。插入单位因子便得到纤维的非奇异局部点。由 [5, 定理8.13(1)，第 128] 页，可推出足够长的乘积的纤维具有几何不可约性。于是，引理 2.5 适用于相应的仿射解集。在 F的有限子域上的所得分解，结合范数满射性，推出这两个极大性断言。

推论 3.4 利用约化怀特海德群的消失性以及定理 1.1 的生成断言，证明 $D^{(1)}/Z(D^{(1)})$是非阿贝尔单群。

对于域 L，记 L_{alg} 为其代数闭包。公共域中一族子域的复合域是它们生成的子域；对于两个子域 P 和 L，记作 $P\cdot L$。对于域扩张 P/L，记 $\mathrm{Aut}(P/L)$ 为其 L-自同构群；当 P/L 为伽罗瓦扩张时，将该群记作 $\mathrm{Gal}(P/L)$。

设 Γ 为加法记号下的全序阿贝尔群。添加 ∞，其中 $\gamma<\infty$ 表示 $\gamma\in\Gamma$，$\gamma+\infty=\infty+\gamma=\infty$ 表示 $\gamma\in\Gamma\cup\{\infty\}$。除环 A 上的赋值是一个映射 $v\colon A\to\Gamma\cup\{\infty\}$，对所有 $x,\ y\in A$ 均满足以下条件（参见 [20, §1.1.1，第 2] 页）。

（1）等式 $v(x)=\infty$ 成立，当且仅当 $x=0$。

(2) 乘积满足 $v(xy)=v(x)+v(y)$。

(3) 和满足 $v(x+y)\geq\min\{v(x)\ v(y)\}$。

其赋值环为 $\mathcal{O}_A=\{a\in A\mid v(a)\geq 0\}$，极大理想为 $\mathfrak{m}_A=\{a\in A\mid v(a)>0\}$。商群 $A=\mathcal{O}_A/\mathfrak{m}_A$ 是 A 的剩余除环。当 A 是一个域时，这个商群就是其剩余域。对于数域 L 和有理素数 p，L 上方的一个赋值，是将 $\mathbb{Q}$上的 p-进赋值 v_p 扩张到 L 后所得扩张的一个等价类，其中赋值按 $v_p(p)=1$归一化。若两个这样的扩张具有相同的赋值环，则它们等价（参见 [11, 定义 1.12、注 1.13 和定义 2.2，第 123,126] 页）。将 L 在 v处的完备化记作 L_v，其构造见 [11, §3.1，第 134–135] 页。依照[17, 第 II 章第 1 节第 39–40], 页，若对每个位于 p上方的赋值 v，典范嵌入 $\mathbb{Q}_p\to L_v$都是同构，则称 p 在 L 中完全分裂。

设 P/k 是 p 进域的有限扩张。分别记 k 的赋值群和剩余域为Γ_k 和 k，并用相应记号表示带有延拓赋值的 P。则 $[P:\ k]=ef$，其中 $e=|\Gamma_P:\ \Gamma_k|$ 是分歧指数，$f=[P:\ k]$ 是剩余次数。当 $e=1$ 时，扩张是非分歧的；当 $e>1$ 时，是分歧的；当 $f=1$ 时，是全分歧的，这等价于 $e=[P:\ k]$（见 [20, 附录 A.1，定义 A.3–A.4，第 586] 页）。对于数域的伽罗瓦扩张 M/L，设 w 是 M 上方、位于 L 的赋值 v 之上的有限素位，令 $G_w=\{\sigma\in\mathrm{Gal}(M/L)\mid\sigma(w)=w\}$。每个 $\sigma\in G_w$ 都延拓为 M_w 的一个自同构，并通过 $\bar{\sigma}(\bar{a})=\sigma(a)$（其中 $a\in\mathcal{O}_{M_w}$）在 M_w 上诱导 $\overline{\sigma}$。w 处的惯性子群是约化映射 $\rho_w\colon\ G_w\to\mathrm{Gal}(M_w/L_v)$ 的核，该映射定义为 $\sigma\mapsto\bar{\sigma}$（见 [20, 附录 A.1，第 589] 页）。因此

$$I_w=\ker\rho_w=\{\sigma\in G_w\mid\sigma(a)-a\in\mathfrak{m}_{M_w}\ \text{for all}\ a\in\mathcal{O}_{M_w}\}.$$

对于有限维交换 L代数 P，范数 $N_{P/L}(u)$和迹$\mathrm{tr}^{P/L}(u)$分别是由 u乘法得到的行列式和迹。用 Trd_A 表示中心单代数 A的约化迹。约化范数在标量扩张下保持不变 [7,§22，定理2，第 148]页。用$\mathrm{Br}(L)$表示 L的布劳尔群。

与 [16, §14，定义（14.1），第 217], 页中一样，若除环在其中心上有限维，则称其为中心有限。对于这样的除环 D，其约化怀特海德群为$\mathrm{SK}_1(D)=D^{(1)}/[D^\times,D^\times]$（参见 [20, 第11章，第 535]页）。若群 H 的子群 B 满足 $B\cap hBh^{-1}=1$ 对每个$h\in H\setminus B$，则称其为自正规。

2 Co除环的构造与范数满射性

固定 $\Sigma=\{2,5,11,13\}$。我们指定局部指标 $d_2=d_{11}=3$和 $d_5=d_{13}=2$。它们的最小公倍数为 6，且这些阶的布劳尔不变量可成对选取，使其在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 中的和为零。局部矩阵阶数 $m_p=6/d_p$ 至少为 2，且对于 $p\in\Sigma,\ \ p\nmid d_p$。

在每个 $p \in \Sigma$ 处，我们寻求 m_p 个次数为 d_p 的域因子。每个因子都分裂局部布劳尔类，且相应的幂等元在局部矩阵代数中的秩为 1。非分歧因子上的单位元范数映到 $\mathbb{Z}_p^\times$，而全分歧因子中一致化元的范数赋值为 1。因此，对于次数为 6 的首一多项式 $f \in \mathbb{Z}[X]$，我们指定模 p $= X^{d_p}\bar{h}_{p,2}\cdots\bar{h}_{p,m_p}$ 的 f，其中 $\bar{h}_{p,i}$ 是次数为 d_p 且常数项非零的互异首一不可约多项式。由于 $f(0) = 2\cdot 5\cdot 11\cdot 13 = 1430$，$X^{d_p}$ 的提升是艾森斯坦多项式。

模 7 的不可约约化确保伽罗瓦作用是传递的。在 3 处，类型为 (1,5) 的平方自由分解使弗罗贝尼乌斯成为一个 5-循环。5 处的分歧二次扩张提供了惯性换位，该换位也用于证明分裂域与 F 线性不交。我们使用以下约化。

p	$f(X) \bmod p$
2	$X^3(X^3+X+1)$
3	$(X-1)(X^5-X+1)$
5	$X^2(X^2-2)((X-1)^2-2)$
7	X^6+2
11	$X^3(X^3+X+4)$
13	$X^2(X^2-2)((X-1)^2-2)$

常数项模相应的素数均与 1430 同余。根据中国剩余定理，$X,\ldots,X^5$ 的系数模 $30030 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$ 确定。取它们在 $[-15015, 15015)$ 中的代表元，我们得到

$$f(X) = X^6 + 14168X^5 - 7413X^4 + 12159X^3 + 5852X^2 + 10010X + 1430.$$

引理 2.1. 多项式 f 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。将 $K_0 = \mathbb{Q}[X]/(f)$ 视为 $\mathbb{Q}_{\mathrm{alg}}$ 的子域，并令 E_0 为其正规闭包。则有以下结论。

(1) 对于 $p \in \Sigma$，存在一个同构

$$K_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \simeq \prod_{i=1}^{m_p} P_{p,i},$$

其中每个 $P_{p,i}$ 都是 $\mathbb{Q}_p$上的次数为 d_p 的域。恰有一个因子是全分歧的，其余因子均为非分歧的。

(2) 对 f 的根的作用将 $\mathrm{Gal}(E_0/\mathbb{Q})$ 与 S_6对应起来，并且 *5* 处的一个惯性子群包含一个对换。

证明。设 α 是 f 模 7 的一个根。由于 $\alpha^6 = 5$ 在 $\mathbb{F}_7^\times$中的阶为 6，α 的阶 n 满足$n/\gcd(n,6) = 6$，因此 $6 \mid n$ 且 $n = 36$。在 $a \mapsto a^7$ 作用下，α^{7^j} 的各个不同迭代构成 α 的弗罗贝尼乌斯轨道，且是 α 在 $\mathbb{F}_7$上的共轭元。由于 $7^m \equiv 1 + 6m$ (模 36)，我们有

$$\alpha^{7^m} = \alpha \quad\Longleftrightarrow\quad 36 \mid 7^m - 1 \quad\Longleftrightarrow\quad 6 \mid m.$$

因此 $[\mathbb{F}_7(\alpha) : \mathbb{F}_7] = \min\{m \geq 1 \mid \alpha^{7^m} = \alpha\} = 6$。由于 f 模 7 是次数为 6 的首一多项式，它就是 α的最小多项式。因此 f 在 $\mathbb{Q}$上不可约，且 $G = \mathrm{Gal}(E_0/\mathbb{Q})$ 在 f的根集 Ω 上传递作用。

固定 $p \in \Sigma$。表中的三次多项式在相应的剩余域中没有根；二次多项式不可约，因为 2 模 5 和 13 是非平方剩余。$h_{p,i}$ 彼此不同，且$h_{p,i}(0) \neq 0$，因此每个指定因子都与其余因子的乘积互素。在完备环 $\mathbb{Z}_p$上对这样的因子对依次应用亨泽尔引理，我们得到 首一提升 $g_p, h_{p,2}, \ldots, h_{p,m_p} \in \mathbb{Z}_p[X]$，满足

$$f = g_p h_{p,2}\cdots h_{p,m_p}, \quad \text{where} \quad g_p \bmod p = X^{d_p} \quad \text{and} \quad h_{p,i} \bmod p = \bar{h}_{p,i} \text{ for } 2 \leq i \leq m_p.$$

由于 g_p 和每个 $h_{p,i}$ 都是首一的，它们的次数等于其约化的次数。对于 $i \geq 2$，不等式 $h_{p,i}(0) \neq 0$ 推出 $h_{p,i}(0) \in \mathbb{Z}_p^\times$。鉴于 g_p 的约化以及 f的因式分解，

$$g_p - X^{d_p} \in p\mathbb{Z}_p[X] \quad \text{and} \quad v_p(g_p(0)) = v_p(f(0)) = 1.$$

因此 g_p 是艾森斯坦多项式，$P_{p,1} = \mathbb{Q}_p[X]/(g_p)$ 是次数为 d_p 的全分歧扩张。

对于 $i \geq 2$，由于 $h_{p,i}$ 是首一多项式，因为 $P_{p,i} = \mathbb{Q}_p[X]/(h_{p,i})$ 中 X 的类 β_i 在 $\mathbb{Z}_p$ 上是整的，并且 $h_{p,i}(\beta_i) = 0$。因此

$$d_p = [\mathbb{F}_p(\bar{\beta}_i) : \mathbb{F}_p] \leq [\overline{P_{p,i}} : \mathbb{F}_p] \leq [P_{p,i} : \mathbb{Q}_p] = d_p.$$

因此 $P_{p,i}/\mathbb{Q}_p$ 是非分歧的。这些因子两两互素，因此中国剩余定理给出（1）。

对于 $h = X^5 - X + 1$ 在 $\mathbb{F}_3$上，我们有 $X^9 - X \equiv -X^4 - 1$ (模 h)，因此

$$\gcd(h, X^9 - X) = \gcd(h, X^4 + 1) = \gcd(X + 1, X^4 + 1) = 1.$$

在 $\mathbb{F}_3$ 上的每个次数为 1 或 2 的不可约多项式都整除 $X^9 - X = \prod_{u \in \mathbb{F}_9}(X - u)$，因为它的根都属于 $\mathbb{F}_9$。因此， h 的每个不可约因子的次数至少为 3。由于 $\deg h = 5 < 3 + 3$，多项式 h不可约。

固定 E_0在 3 上方的一个赋值。由于 f是首一多项式， f的根在该处都是整的，而 $\prod_{u \in \Omega}(X - \bar{u}) = (X - 1)$ h 无平方因子。因此，约化将两个根集对应起来。惯性群固定每个 $\bar{u}$，因而固定 Ω 中的每个 $u \in$。在约化后的根上，弗罗贝尼乌斯按 $\bar{u} \mapsto \bar{u}^3$ 作用，其轨道长度为 1 和 5，分别是$X - 1$ 和 h的次数。因此，它在 Ω 上按一个 5-循环作用。

固定 E_0 在 5 上方的一个赋值 w ，并令 U 为 $(E_0)_w/\mathbb{Q}_5$的最大非分歧子扩张。对于 $h_{5,i}$的每个根 u ，扩张 $\mathbb{Q}_5(u)/\mathbb{Q}_5$ 由 (1) 可知是非分歧的，因此 $u \in U$。由于 $U/\mathbb{Q}_5$ 是非分歧的，5 仍是一致化元，并且

$$g_5 \bmod 5 = X^2 \quad \text{in } \overline{U}[X] \quad \text{and} \quad g_5(0) \in 5\mathcal{O}_U \setminus 5^2\mathcal{O}_U.$$

因此， g_5在 U上是艾森斯坦多项式。对于它的根 b， c，由于 g_5是二次的，我们有 $c \in U(b)$。由于$(E_0)_w$是 f 在 $\mathbb{Q}_5$上的分裂域，因此

$$(E_0)_w = U(b) \quad \text{and} \quad [U(b) : U] = 2.$$

$I_w \simeq \mathrm{Gal}((E_0)_w/U)$的非恒等元固定$h_{5,i}$ 的根，并交换 b 和c，因此它的作用是 $\tau = (b\,c)$。

设 a 为该 5-循环的不动点。其稳定子 G_a 在 $\Omega \setminus \{a\}$上传递。由于 G 在 Ω 上传递，因此它是双传递的，并且

$$\{g\tau g^{-1} \mid g \in G\} = \{(g(b)\,g(c)) \mid g \in G\} = \{(u\,v) \mid u, v \in \Omega,\ u \neq v\}.$$

这些对换生成 S_6，因此 $G = S_6$。 □

命题 2.2。 存在一个中心有限除环 D_0， 其次数为6， 中心为 $\mathbb{Q}$， 且包含K_0 作为极大子域。对于 $p \in \Sigma$, 我们有

$$D_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \simeq M_{m_p}(\Delta_p),$$

其中， Δ_p 是一个次数为 d_p 、中心为 $\mathbb{Q}_p$的除环。代数 D_0 在 $\mathbb{Q}$除 Σ之外的每个赋值处都裂开。

证明。对于数域 k 的一个完备化，记 $\mathrm{inv}_k\colon \mathrm{Br}(k) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 为局部不变量映射，其定义见 [20, §1.2.8, 第23–24] 页，适用于非阿基米德 k。在实位处，非零类的不变量为 $1/2+\mathbb{Z}$；在复位处，布劳尔群是平凡的。记 β_L 为 $\beta\in\mathrm{Br}(\mathbb{Q})$到扩张 $L/\mathbb{Q}$的限制，并对 $\mathbb{Q}$的一个赋值 v，置 $\mathrm{inv}_v(\beta)=\mathrm{inv}_{\mathbb{Q}_v}(\beta_{\mathbb{Q}_v})$。

对于中心单代数 A（其上为 L），设 $[A\colon L]=\dim_L A$，且 $\deg A=\sqrt{[A\colon L]}$。指标 $\mathrm{ind}\ A$ 是其布劳尔类的除代数代表元的次数。对于布劳尔类，我们也使用相同的指标记号。

由于给定的不变量在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 中的和为零，阿尔伯特–布劳尔–哈塞–诺特定理（参见 [10, 定理 4, 第 219] 页）保证存在一个类 $\beta\in\mathrm{Br}(\mathbb{Q})$，使得对 $v\notin\Sigma$ 有 $\mathrm{inv}_v(\beta)=0$，且

$$(\mathrm{inv}_2(\beta),\mathrm{inv}_5(\beta),\mathrm{inv}_{11}(\beta),\mathrm{inv}_{13}(\beta))=(1/3,1/2,-1/3,1/2).$$

对于 $p\in\Sigma$，引理 2.1(1) 中的因子满足

$$\mathrm{inv}_{P_{p,i}}(\beta_{P_{p,i}})=[P_{p,i}:\mathbb{Q}_p]\,\mathrm{inv}_p(\beta)=d_p\,\mathrm{inv}_p(\beta)=0$$

根据 [19, 第 XIII 章 §3 命题 7，第 193–194] 页中的限制公式。由于对 $v\notin\Sigma$ 有 $\mathrm{inv}_v(\beta)=0$，K_0 其他赋值处的不变量均为零。因此，根据同一个全局定理，$\beta_{K_0}=0$。

对于 $p\in\Sigma$，令 Δ_p 为 $\beta_{\mathbb{Q}_p}$的除代数代表元，其中 $n_p=\deg\Delta_p=\mathrm{ind}(\beta_{\mathbb{Q}_p})$，并选取一个极大子域 $M_p\subset\Delta_p$。由于 $P_{p,\,i}$ 和 M_p 分裂 Δ_p，指标整除性和限制公式推出

$$n_p\mid[P_{p,i}:\mathbb{Q}_p]=d_p\quad\text{and}\quad 0=\mathrm{inv}_{M_p}(\beta_{M_p})=[M_p:\mathbb{Q}_p]\,\mathrm{inv}_p(\beta)=n_p\,\mathrm{inv}_p(\beta).$$

由于 $\mathrm{inv}_p(\beta)$ 的阶为 d_p，我们有 $d_p\mid n_p$，从而 $n_p=d_p$。通过标量扩张，每个 n_p 都整除 $\mathrm{ind}(\beta)$，且 K_0 分裂 β。因此

$$6=\mathrm{lcm}_{p\in\Sigma}\,n_p\mid\mathrm{ind}(\beta)\mid[K_0:\mathbb{Q}]=6.$$

令 D_0 为 β 的除代数代表元。通过 $D_0\hookrightarrow D_0\otimes_{\mathbb{Q}}K_0\simeq M_6(K_0)$，空间 $V=K_0^6$ 是一个秩为一的左 D_0-模，因为 $\dim_{\mathbb{Q}}V=6[K_0\colon\mathbb{Q}]=36=[D_0\colon\mathbb{Q}]$。标量乘法与矩阵作用可交换，因此我们有嵌入

$$K_0\hookrightarrow\mathrm{End}_{D_0}V\quad\text{defined by}\quad a\longmapsto(v\mapsto av).$$

在正则左模 $D_0\simeq V$ 上的右乘法将 D_0^{op} 识别为 $\mathrm{End}_{D_0}V$。取对环后，得到 $K_0=K_0^{\mathrm{op}}$ 到 D_0 的嵌入。其像是一个极大子域，因为 $[K_0\colon\mathbb{Q}]=\deg D_0$。

对于 $p\in\Sigma$，局部矩阵大小为 $\deg D_0/\deg\Delta_p=6/d_p=m_p$。在赋值 $v\notin\Sigma$处，等式 $\mathrm{inv}_v(\beta)=0$ 意味着 D_0 分裂。□

Σ 中的素数完全分裂，使命题 2.2 中的局部指标在 F的有限子域上保持不变。在 5 处，它还迫使 $\mathrm{Gal}(E_0/\mathbb{Q})$ 中的惯性固定 $F\cap E_0$。

引理 2.3. 设 F 如定理 *1.1* 所述。Σ 中的每个素数都在 F的每个有限子域中完全分裂。扩张 $F/\mathbb{Q}$ 是伽罗瓦扩张，且 $F\cap E_0=\mathbb{Q}$。

证明。根据 [17, 第 II 章第 1 节第 39–40], 页中的判别准则，素数 p 在数域 L 中完全分裂，当且仅当对于每个嵌入 $\sigma\colon L\hookrightarrow(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{alg}}$，都有 $\sigma(L)\subseteq\mathbb{Q}_p$。对于 F 的有限子域 L，从 F 的定义中选取域 L_1、.....、L_r，使得 $L\subseteq L'=L_1\cdot\ldots\cdot L_r$。对于 $p\in\Sigma$，将任意这样的 σ 延拓为 $\widetilde{\sigma}\colon L'\hookrightarrow(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{alg}}$。于是

$$\sigma(L)\subseteq\widetilde{\sigma}(L')=\widetilde{\sigma}(L_1)\cdot\ldots\cdot\widetilde{\sigma}(L_r)\subseteq\mathbb{Q}_p.$$

因此，每个 $p\in\Sigma$ 都在 L 中完全分裂（参见 [17, 第 II 章第 1 节，SC 1 和 SC 3，第 40] 页）。该判别准则在 $\mathbb{Q}$-共轭作用下保持不变，因此定义 F 的域在自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_{\mathrm{alg}}/\mathbb{Q})$ 的作用下彼此置换。于是，它们的复合域 F 是 $\mathbb{Q}$ 上的伽罗瓦扩张。

取 $M=F\cap E_0$。由引理2.1(2)，选取 E_0 上方位于 5 处的赋值 w，以及一个对换 $\tau\in I_w$。对于 $v=w|_M$，在 5 处完全分裂意味着

$$M\subseteq M_v=\mathbb{Q}_5\subseteq(E_0)_w.$$

每个 $\sigma\in I_w$ 都作用于 $\mathbb{Q}_5$ 上的 $(E_0)_w$，因此 $\sigma|_M=\mathrm{id}_M$。由于 $F/\mathbb{Q}$ 和 $E_0/\mathbb{Q}$ 都是伽罗瓦的，$M/\mathbb{Q}$ 也是如此。因此

$$\tau\in I_w\subseteq\mathrm{Gal}(E_0/M)\trianglelefteq\mathrm{Gal}(E_0/\mathbb{Q})=S_6.$$

由于 τ 的 S_6-共轭元全都是对换，正规性意味着

$$S_6=\langle g\tau g^{-1}\mid g\in S_6\rangle\subseteq\mathrm{Gal}(E_0/M)\subseteq S_6.$$

因此 $M=E_0^{S_6}=\mathbb{Q}$。 □

命题 2.4。固定命题 *2.2* 中的 $K_0\hookrightarrow D_0$。对于等于 F 或 F 的有限子域的 L，令 $D_L=D_0\otimes_{\mathbb{Q}}L$ 和 $K_L=K_0\otimes_{\mathbb{Q}}L$。

(1) 代数 D_L 是一个次数为6 、中心为 L 的除环，并且 K_L 是D_L的极大子域。

(2) K_L/L 的正规闭包是 $E_0\cdot L$，其伽罗瓦群在 L上 K_L 的六个嵌入上的作用为 S_6。扩张 K_L/L 没有真中间域，并且$\mathrm{Aut}(K_L/L)=1$。

证明。代数 D_L 是 L上的中心单代数，次数为 6。对于有限的 $L/\mathbb{Q}$以及位于$p\in\Sigma$之上的赋值 v，引理 2.3 将 L_v 与 $\mathbb{Q}_p$等同，因此

$$D_L\otimes_L L_v\simeq D_0\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p\simeq M_{m_p}(\Delta_p)$$

根据命题 2.2。D_L 的除代数代表元 Δ 满足$\Delta\otimes_L L_v\simeq M_{r_v}(\Delta_p)$，其中$r_v\geq 1$为某个元素，因为标量扩张保持布劳尔等价。因此 $\mathrm{ind}\,D_L=\deg\Delta=r_vd_p$，所以对于每个 $p\in\Sigma$，$d_p\mid\mathrm{ind}\,D_L$，并且

$$6=\mathrm{lcm}_{p\in\Sigma}d_p\mid\mathrm{ind}\,D_L\mid\deg D_L=6.$$

矩阵阶数 $\deg D_L/\mathrm{ind}\,D_L$ 为 1，因此 D_L 是一个除环。对于 $L=F$，每个非零元 $a\in D_F$都属于某个有限子域 L'中的 $D_{L'}$，其中 L'是 F的子域，因此 $a^{-1}\in D_{L'}\subseteq D_F$。

设 $E=E_0\cdot L$ 为 L 上 f 的分裂域。由 $\sigma\mapsto\sigma|_{E_0}$ 定义的限制映射 $\rho\colon\mathrm{Gal}(E/L)\to\mathrm{Gal}(E_0/\mathbb{Q})$ 是单射，因为 E 由 E_0 和 L 生成。根据引理 2.3，像的不动域为

$$E_0^{\mathrm{im}\,\rho}=E_0\cap E^{\mathrm{Gal}(E/L)}=E_0\cap L=\mathbb{Q}.$$

由伽罗瓦对应和引理2.1(2)，我们得到

$$\mathrm{Gal}(E/L)\xrightarrow[\sim]{\rho}\mathrm{Gal}(E_0/\mathbb{Q})=S_6\quad\text{and}\quad[E:L]=[E_0:\mathbb{Q}].$$

次数相等意味着 E_0 与 L 在 $\mathbb{Q}$上线性不交。因此，$K_L\simeq K_0\cdot L$ 是一个域，且 $[K_L:L]=[K_0:\mathbb{Q}]=6=\deg D_L$，并且是 D_L的极大子域。其正规闭包为 E，它的六个 L-嵌入与 f的根相对应，而 ρ 保持其上的作用不变。点稳定子 S_5 是 S_6中的极大子群，因此 K_L/L没有真中间域。S_5的正规化子固定了 S_5固定的唯一一点，因此 $N_{S_6}(S_5)=S_5$ 且 $\mathrm{Aut}(K_L/L)\simeq N_{S_6}(S_5)/S_5=1$。

□

令 $D = D_F$和 $K = K_F$。根据 [3, 第 722], 页，我们可以写成 $D_0 \simeq (C_0/\mathbb{Q},\ \sigma_0,\ a)$，其中 $C_0/\mathbb{Q}$ 是次数为 6 的循环群，σ_0 生成 $\mathrm{Gal}(C_0/\mathbb{Q})$，且 $a \in \mathbb{Q}^\times$。代数 $C = C_0 \otimes_{\mathbb{Q}} F$ 嵌入于 D，因此它是一个关于 F 的 6 维交换整环，故为一个域。自同构$\sigma = \sigma_0 \otimes 1$ 的阶为 6，因此 $\mathrm{Gal}(C/F) = \langle\sigma\rangle$。扩张标量并使用 [16, 第 14 节第 218–219], 页的记号，我们得到

$$D \simeq (C/F, \sigma, a) = \textstyle\bigoplus_{i=0}^{5} Cu^i, \quad \text{with} \quad u^6 = a \quad \text{and} \quad uc = \sigma(c)u \text{ for } c \in C.$$

域 C 是 D 的循环极大子域，因为 $[C:\ F] =$ 次数 D。根据命题 2.4(2)，极大子域 K 在 F 上不是伽罗瓦扩张，其正规闭包的伽罗瓦群为 S_6。定理 1.1(3) 断言，阿贝尔群 $K^\times$ 是 $D^\times$的极大子群。

备注。D 上的每个赋值都是平凡的。事实上，每个 $a \in D^\times$ 都是 $\mathbb{Q}$ 上的代数元，因为它属于某个 D_L，且 $[L:\ \mathbb{Q}] < \infty$。对于 D 上的赋值 w，关系式 $\sum_i c_i a^i = 0$ 中非零项的最小赋值至少出现两次，其中该关系式取自 $\mathbb{Q}$。因此

$$(j-i)w(a) = w(c_i) - w(c_j) \quad \text{for some } i < j \text{ with } c_i c_j \neq 0.$$

特别地，在 $\mathbb{Q}$ 上平凡意味着在 D 上平凡。假设 w 非平凡。素因数分解和贝祖等式表明，存在唯一的素数 p，使得 $w(p) > 0$，因为 w 在 $\mathbb{Q}$ 上非平凡，且在非零整数上非负。由于对于 $q \in \mathbb{Q}^\times$，有 $w(q) = v_p(q)w(p)$，所显示的等式推出 $(j-i)w(a) \in \mathbb{Z}w(p)$。因此，赋值群嵌入 $\mathbb{Q}$，且 $w(p)$ 映射到 1。

Let $\widehat{D_0}$ 是规范化 $w|_{D_0}$ 的完备化。若 (a_i) 表示 D_0，则 $w(a_i) = \gamma$ 最终成立，并且

$$w(a_i^{-1} - a_j^{-1}) = w\big(a_i^{-1}(a_j - a_i)a_j^{-1}\big) = w(a_j - a_i) - 2\gamma \longrightarrow \infty.$$

因此逆元构成一个柯西序列，而 D_0 是一个除环。$\mathbb{Q}$ 在 D_0 中的闭包是 $\mathbb{Q}_p$的一个中心副本。乘法诱导出一个含幺嵌入

$$D_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \hookrightarrow \widehat{D_0} \quad \text{defined by} \quad d \otimes q \longmapsto dq$$

因为源是单的。根据命题 2.2，当 $p \in \Sigma$ 时，源的矩阵阶数为 $m_p > 1$，否则为 6。因此，一个非平凡幂等元将嵌入除环 D_0中，这与之矛盾。

我们使用以下引理，将 Σ 以上各赋值处的局部解转化为 F的有限子域上的解。对于 L上的仿射簇 X，记 $X(M)$ 为其坐标属于M的点，其中 M/L 是一个域扩张。

引理 *2.5*。*</style}*设 L 是 F 的一个有限子域，X 是 L 上的一个仿射簇，并且在 L_{alg}上仍然不可约。若对于 Σ以上的每个赋值 v，X 在 L_v 上都有一个非奇异点，则 X 在包含于 F中的某个有限扩张 L'/L 上有一个点。

证明。对于扩张 M/L，记 X_M为 X 到 M的标量扩张。令 $U = X_{\mathrm{sm}}$ 为 X 在 L上的光滑轨迹。对于每个位于 Σ之上的赋值 v，选取一个非奇异点 $x_v \in X_{L_v}(L_v)$，并令 $A_v = \mathcal{O}_{X_{L_v},\ x_v}$，其极大理想为 $\mathfrak{m}_v$，剩余域为 L_v。非奇异性意味着 A_v是正则的，也就是说，

$$\dim_{L_v}(\mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^2) = \dim A_v.$$

由于 L_v 的特征为零，它是完美的，因此 x_v 处的正则性等价于在L_v上的光滑性。对于投影 $\pi_M\colon\ X_M \to X$，光滑性在基域扩张下保持且可由此检测，因此 $(X_M)_{\mathrm{sm}} = \pi_M^{-1}(U) = U_M$。取 $M = L_v$，我们得到

$$x_v \in (X_{L_v})_{\mathrm{sm}}(L_v) = U_{L_v}(L_v) = U(L_v).$$

非空开子簇 $U_{L_{\mathrm{alg}}} \subseteq X_{L_{\mathrm{alg}}}$ 是不可约的，因此 U 是光滑且几何连通的。

应用 [18, 定理 1.3，第 182] 页的形式，即 [4, 命题 3.1.1，第 545–546], 页，其中取 $T = U$、$K_0 = K = K^{(\mathrm{avoid})} = L$，以及 L 在 Σ之上的赋值集合 S。对于 $v \in S$，规定 L_v/L_v 以及非空开集 $\Omega_v = U(L_v)$。所有规定的扩张域都是平凡的，因此伽罗瓦条件、相容性条件和不变性条件均成立。所得有限扩张 L'/L 满足

$$U(L') \neq \varnothing \quad \text{and} \quad [L'_w : L_v] = 1 \quad \text{for every } w \mid v \text{ with } v \in S.$$

嵌入 L' 到 L上的 $\mathbb{Q}_{\mathrm{alg}}$ 中。如果 $p \in \Sigma$ 且 $w \mid v \mid p$，则根据引理 2.3，$[L_v : \mathbb{Q}_p] = 1$，因此

$$[L'_w : \mathbb{Q}_p] = [L'_w : L_v][L_v : \mathbb{Q}_p] = 1.$$

因此，每个 $p \in \Sigma$ 都在 L'中完全分裂。根据 F的定义，我们有 $L' \subseteq F$，其中 $X(L') \supseteq U(L') \neq \varnothing$。 □

命题 2.6. 范数 $N_{K/F} \colon K^\times \to F^\times$ 是满射。

证明。固定 $p \in \Sigma$。根据引理 2.1(1)，代数 $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ 有一个非分歧因子 U 和一个全分歧因子 R，二者的次数均为 d_p。$\mathcal{O}_U^\times$ 上的范数归结为剩余域单位群上的满射范数，因此对于 $u \in \mathbb{Z}_p^\times$，我们可以选取 $z \in \mathcal{O}_U^\times$，使得 $u/N_{U/\mathbb{Q}_p}(z) \in 1 + p\mathbb{Z}_p$。由于 $p \nmid d_p$，亨泽尔引理给出 $t \in 1 + p\mathbb{Z}_p$，使得 $t^{d_p} = u/N_{U/\mathbb{Q}_p}(z)$。于是

$$N_{U/\mathbb{Q}_p}(zt) = N_{U/\mathbb{Q}_p}(z)t^{d_p} = u.$$

对于 R 中的 g_p 的一个根 α，令 $\eta = N_{R/\mathbb{Q}_p}(\alpha) = (-1)^{d_p} g_p(0)$。艾森斯坦条件蕴含$v_p(\eta) = 1$。令其他因子中的元素均为 1，乘积范数可取遍

$$N_{U/\mathbb{Q}_p}(\mathcal{O}_U^\times) N_{R/\mathbb{Q}_p}(\langle \alpha \rangle) = \mathbb{Z}_p^\times \eta^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Q}_p^\times.$$

设 $c \in F^\times$，并选取 F 的一个包含 c 的有限子域 L。在 K_L 所对应的仿射空间中，令 X_c 由方程 $N_{K_L/L}(u) = c$ 定义。在 L_{alg} 上，K_L 的六个嵌入将范数方程与 $u_1 \cdots u_6 = c$ 等同。投影到前五个坐标，将 $(X_c)^{L_{\mathrm{alg}}}$ 等同于

$$\{(u_1, \ldots, u_5) \in \mathbb{A}^5_{L_{\mathrm{alg}}} \mid u_1 \cdots u_5 \neq 0\}, \quad \text{with} \quad u_6 = c/(u_1 \cdots u_5).$$

因此，X_c 在 L_{alg} 上仍不可约且非奇异。对于上述 $p \in \Sigma$ 上方的 v，引理 2.3 将L_v 等同于 $\mathbb{Q}_p$，并将 $K_L \otimes_L L_v$ 等同于 $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$。因此，乘积范数的满射性保证了每个这样的 L_v 上，X_c 都有一个非奇异点。

根据引理 2.5，该方程在 F 内的某个有限扩张 L'/L 中有解 $a \in K_{L'}^\times$。由于范数就是乘法映射的行列式，它与标量扩张可交换，因此 $N_{K/F}(a \otimes 1) = N_{K_{L'}/L'}(a) = c$。 □

注记。引理 2.1 的证明表明，$f \bmod 7$ 不可约。因此，K_0 在 7 上方有唯一的赋值w，其剩余次数为 6。对于标准化赋值，我们有

$$v_7\big(N_{K_0/\mathbb{Q}}(a)\big) = 6v_w(a) \in 6\mathbb{Z} \quad \text{for } a \in K_0^\times.$$

由于 $v_7(7) = 1$，$N_{K_0/\mathbb{Q}}$ 的像不包含 7。

3 极大子群与范数一群

固定 F 的一个有限子域 L 和一个元素 $x \in D_L^\times \setminus K_L^\times$。令 T 和 V 分别为由 $N_{K_L/L} = 1$ 和 $\mathrm{Nrd}_{D_L} = 1$ 定义在 K_L 和 D_L 所对应的仿射空间中的仿射簇。对于每个域扩张 M/L，其点描述如下:

$$T(M) = \{t \in K_L \otimes_L M \mid N_{(K_L \otimes_L M)/M}(t) = 1\} \quad \text{and} \quad V(M) = (D_L \otimes_L M)^{(1)}.$$

由于根据命题 2.4(1)， K_L 是 D_L 的极大子域，因此 D_L 上的约化范数限制在 K_L 上就是域范数（参见定理 1.4 证明中的 [20, , 第 12] 页）。通过标量扩张，对每个 M/L，都有$T(M) \subseteq V(M)$。令 $H = \langle T(L),\ xT(L)x^{-1} \rangle \subseteq D_L^{(1)}$。

引理 3.1. 存在 $h_1, \ldots, h_r \in H$，满足 $h_1 = 1$，使得态射

$$\phi\colon T^r \longrightarrow V \quad \textit{defined by} \quad (t_1, \ldots, t_r) \longmapsto \textstyle\prod_{j=1}^r h_j t_j h_j^{-1}$$

has 在(1,. . ., 1)处微分满射。特别地，态射 ϕ 是支配的 $t.$

证明。令 $k = L_{\mathrm{alg}}$并将 $A = D_L \otimes_L k$与 $M_6(k)$等同，使得 $K_L \otimes_L k$为对角矩阵。对于 $u \in K_L$，将其对角元记为 $u_1, \ldots, u_6$。选取 $u \in K_L^\times$，使得对于 $i \neq j$，$(u_i/u_j)^6$ 两两不同且均不等于 1。清除分母后，这些条件等价于避开独立坐标 u_i上的有限个非零多项式的零点，其中包括坐标函数。它们的乘积在 K_L 的一个 L-基的坐标中仍非零，且不会在整个 L^6上恒为零，因为 L 是无限的。令 $t = u^6/N_{K_L/L}(u)$。由于 $[K_L : L] = 6$，我们有 $N_{K_L/L}(t) = 1$ 且$t_i/t_j = (u_i/u_j)^6$。

由命题 2.4(2)，有 $\mathrm{Aut}(K_L/L) = 1$，因此 $D_L^\times$ 中 K_L 的正规化子是 $C_{D_L}(K_L)^\times = K_L^\times$。这些比值意味着 $t \notin L$，从而 $L(t) = K_L$，因为不存在真中间域。令 $h = xtx^{-1} \in H$。若 $h \in K_L^\times$，则由次数可得 $xK_Lx^{-1} = L(h) = K_L$，这与 $x \notin K_L^\times$ 矛盾。设

$$K_L^0 = \ker \mathrm{tr}_{K_L/L} \quad \text{and} \quad W = \sum_{g \in H} g K_L^0 g^{-1} \subseteq \ker \mathrm{Trd}_{D_L},$$

其中，该包含关系可通过在 A 中取矩阵迹得到。由于 $\mathrm{tr}^{K_L/L}(1) = 6$，我们有 $K_L = L \cdot 1 \oplus K_L^0$。因此，$hK_L^0h^{-1} \subseteq K_L$ 将推出 $hK_Lh^{-1} = K_L$，这与 $h \notin K_L^\times$ 矛盾。由于在 A 中 $D_L \cap (K_L \otimes_L k) = K_L$， $hK_L^0h^{-1}$ 中的某个元素具有非零的非对角分量。

设 e_i 为第 i 个对角矩阵单位，令 $W_k = W \otimes_L k$，并令 $c_t\colon\ A \to A$ 由 $a \mapsto tat^{-1}$ 定义。由于 $t \in H$，我们有 $c_t(W_k) = W_k$。算子 c_t 在对角元上作用为 1，在 $i \neq j$ 时对 e_iAe_j 的作用为 t_i/t_j。在互异特征值处进行插值可知，每个投影到满足 $i \neq j$ 的 e_iAe_j 上的投影都属于 $k[c_t]$，且保持 W_k 不变。这样的一个投影在 $hK_L^0h^{-1}$ 上非零，因此 W_k 包含其像线。

在半线性伽罗瓦作用下，我们有 $\sigma(W_k) = W_k$ 和 $\sigma(e_iAe_j) = e_{\sigma(i)}Ae_{\sigma(j)}$，其中指标按照 K_L 的嵌入进行置换。根据命题 2.4(2)，这是 S_6- 作用，它在互异指标组成的有序对上具有传递性。因此， W_k 包含所有满足 $i \neq j$ 的 e_iAe_j。它还包含迹为零的对角元 $K_L^0 \otimes_L k$，且包含于矩阵迹的核中。因此

$$W_k = (K_L^0 \otimes_L k) \oplus \textstyle\bigoplus_{i \neq j} e_iAe_j = \ker(\mathrm{tr}\colon A \to k),$$

因此 $W = \ker \mathrm{Trd}^{D_L}$。

取 $h_1 = 1$， h_2， ....., $h_r \in H$，使得 $W = \sum_{j=1}^r h_j K_L^0 h_j^{-1}$。在 $L[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ 上，范数多项式满足

$$N_{K_L/L}(1 + \varepsilon a) = 1 + \varepsilon\, \mathrm{tr}_{K_L/L}(a) \quad \text{and} \quad \mathrm{Nrd}_{D_L}(1 + \varepsilon b) = 1 + \varepsilon\, \mathrm{Trd}_{D_L}(b).$$

因此 $T_1T = K_L^0$ 和 $T_1V = \ker \mathrm{Trd}^{D_L}$。对于 $a_j \in K_L^0$，定义 ϕ 中的乘法给出

$$\phi(1+\varepsilon a_1, \dots, 1+\varepsilon a_r) = 1 + \varepsilon \textstyle\sum_{j=1}^r h_j a_j h_j^{-1}.$$

特别地，$\mathrm{im}(d\phi_{(1,\dots,1)}) = W = T_1V$。

在 k 上，T 和 V 的定义方程分别为 $t_1 \cdots t_6 = 1$ 和 $\det(a) = 1$。两个簇都是光滑的，因为这两个多项式在其点处沿方向 t 和 a 的导数均为 6。从可逆矩阵开集到 V_k 的态射由 $a \mapsto \mathrm{diag}(\det(a)^{-1}, 1, \dots, 1)a$ 定义，且是满射，因此 V 是几何不可约的。光滑性的微分判据表明，ϕ 在 $(1, \dots, 1)$ 处光滑。因此，其像包含 V 的一个非空开子集，所以 ϕ 是支配的。

□

引理 3。 *对于引理 3.1 中的元素 h_j，以及 L 在 Σ 上方的每个赋值 v，有*

$$(D_L \otimes_L L_v)^{(1)} = \langle h_j T(L_v) h_j^{-1} \mid 1 \le j \le r \rangle.$$

证明。 令 $k = L_v$，并令 J 表示右侧的群。由引理 3.1，ϕ 在 $(1, \dots, 1)$ 处的微分在 k 上是满射。由于 $\phi(T(k)^r) \subseteq J$，k 上的隐函数定理推出，J 包含 $(D_L \otimes_L k)^{(1)}$ 中 1 的一个开邻域。

令 p 为 v 下方的素数，并由引理 2.3 将 k 与 $\mathbb{Q}_p$ 视为同一对象。由命题 2.2 和引理 2.1(1)，可得

$$D_L \otimes_L k \simeq M_m(\Delta) \quad \text{and} \quad K_L \otimes_L k \simeq \textstyle\prod_{\ell=1}^m P_{p,\ell},$$

其中 $m = m_p \ge 2$、$\Delta = \Delta_p$ 和 $[P_{p,\ell} : k] = d_p$。域因子的幂等元 e_ℓ 给出 $\Delta^m = \bigoplus_{\ell=1}^m e_\ell \Delta^m$。由于所有 m 个直和项均为非零元，每一项在 Δ 上的维数均为一。

固定一个适配于这些直和项的基。对于 $i \ne j$ 和 k 的一致化元 π，令 $a = \pi e_i + \pi^{-1} e_j + \sum_{\ell \ne i,\, j} e_\ell$。该矩阵是对角矩阵，且乘积范数为 $\pi^{d_p}\pi^{-d_p} = 1$，因此 $a \in T(k) \subseteq J$，因为 $h_1 = 1$。对于 $b \in \Delta$，令 $u_{ij}(b) = I + bE_{ij}$。在 Δ 的分裂域上，它是分块三角形矩阵，且对角块为单位矩阵，因此 $\mathrm{Nrd}_{M_m(\Delta)}(u_{ij}(b)) = 1$。由于 π 是中心的，

$$a^N u_{ij}(b) a^{-N} = I + (\pi^N b \pi^N) E_{ij} = u_{ij}(\pi^{2N} b) \longrightarrow I \quad \text{as } N \to \infty.$$

由于 J包含 I的一个邻域，当 N足够大时，共轭元属于 J。由于 $a \in J$，我们有$u_{ij}(b) = a^{-N}(a^N u_{ij}(b) a^{-N})a^N \in J$。

令 $E_m(\Delta) = \langle u_{ij}(b) \mid i \ne j, \quad b \in \Delta \rangle$。由于 $m \ge 2$，Dieudonn´e 行列式 det（见 [20,引理 11.22, 第 549] 页）符合 [6, 定理 1，第 32–33] 页中的正合列

$$1 \longrightarrow E_m(\Delta) \longrightarrow M_m(\Delta)^\times \xrightarrow{\det} \Delta^\times / [\Delta^\times, \Delta^\times] \longrightarrow 1.$$

记 $\overline{\mathrm{Nrd}_\Delta}$ 为由 Nrd_Δ 在 $\Delta^\times$的阿贝尔化上诱导的映射。$\mathrm{Nrd}_{M_m(\Delta)}$ 和 $\mathrm{Nrd}_\Delta \circ \det$ 在 $E_m(\Delta)$ 上均为平凡映射。对于 $d(c) = \mathrm{diag}(c, 1, \dots, 1)$，其中 $c \in \Delta^\times$，我们有

$$\mathrm{Nrd}_{M_m(\Delta)}(d(c)) = \mathrm{Nrd}_\Delta(c) = \overline{\mathrm{Nrd}}_\Delta(\det d(c))$$

根据 [7, §22，第 1 定理和推论 1，第 146–148] 页。矩阵 $d(c)$ 表示模 $E_m(\Delta)$ 的所有陪集，因此

$$\mathrm{Nrd}_{M_m(\Delta)} = \overline{\mathrm{Nrd}}_\Delta \circ \det \quad \text{and} \quad M_m(\Delta)^{(1)}/E_m(\Delta) \xrightarrow[\sim]{\det} \ker \overline{\mathrm{Nrd}}_\Delta = \mathrm{SK}_1(\Delta).$$

由于 $\mathrm{ind}(\Delta) = d_p \in \{2, 3\}$ 是无平方因子的，王氏定理推出 $\mathrm{SK}_1(\Delta) = 1$（见 [20, 命题 11.2，第 536] 页）。因此，

$$E_m(\Delta) \subseteq J \subseteq M_m(\Delta)^{(1)} = E_m(\Delta).$$

□

记 $Y = T^r$。对于 $q \geq 1$，令 $\phi^{*q}\colon Y^q \to V$为由 $(y_1, \ldots, y_q) \mapsto \phi(y_1) \cdots \phi(y_q)$ 定义的态射。对元素 $s \in D_L^{(1)}$ 进行因式分解，相当于在该映射位于 s 上方的纤维中寻找一个点。

命题 3.3。对于每个 $s \in D_L^{(1)}$，在 F 内都存在一个有限扩张 L'/L，使得 $s \in \langle T(L')\ xT(L')x^{-1}\rangle$ 属于 $D_{L'}^{(1)}$。

证明。对于 Σ 上的每个 v，像 $\phi(Y(L_v))$ 都包含每个 $h_j T(L_v) h_j^{-1}$：只需令除第 j 个以外的所有坐标都等于 1。由引理 3.2，我们因此可以写成

$$s = \phi(y_{v,1}) \cdots \phi(y_{v,b_v}), \quad \text{where } y_{v,i} \in Y(L_v).$$

取 $q \geq \max\{35[L\colon \mathbb{Q}]+1,\ 1+\max_{v|\Sigma} b_v\}$，并令 $X_s = (\phi^{*q})^{-1}(s)$。令 $e = (1, \ldots, 1) \in Y(L)$，则有

$$z_v = (y_{v,1}, \ldots, y_{v,b_v}, e, \ldots, e) \in X_s(L_v).$$

令 $\lambda_s\colon V_{L_v} \to V_{L_v}$ 为由 $a \mapsto sa$ 定义的自同构。将前面的因子固定在它们于 z_v 中的取值，可将 ϕ^{*q} 在 L_v 上的限制变为最后一个因子上的 $\lambda_s \circ \phi$，因此

$$d(\phi^{*q})_{z_v}|_{T_e(Y_{L_v})} = d(\lambda_s)_1 \circ d\phi_e.$$

由于 $d(\lambda_s)_1$ 是同构，且根据引理 3.1，$d\phi_e$ 是满射，因此右侧是满射。由于Y^q和 V光滑，微分判别法推出 z_v 在 $(X_s)_{L_v}$上光滑。

在 L的一个 $\mathbb{Q}$-基下，L 上的每个方程都变为 $[L\colon$ 通过比较系数得到 $\mathbb{Q}$上的 $\mathbb{Q}]$ 个方程。这就是魏尔限制 $R_{L/\mathbb{Q}}$ of [20, §12.3，第 577]页。令

$$G = R_{L/\mathbb{Q}}(V) \quad \text{and} \quad \psi = R_{L/\mathbb{Q}}(\phi)\colon R_{L/\mathbb{Q}}(Y) \longrightarrow G.$$

设 $k = \mathbb{Q}_{\mathrm{alg}}$，并令 σ 遍历嵌入 $L \hookrightarrow k$。分解 $L \otimes_{\mathbb{Q}} k \simeq \prod_\sigma k$将 ψ_k 与标量扩张 $\phi_\sigma = \phi \times_L {}_\sigma k$ 的乘积，σk对应起来。每个源 $Y \times_{L,\ \sigma} k$都同构于 $(\mathbb{A}^1_k \setminus \{0\})^{5r}$。因此，$R_{L/\mathbb{Q}}(Y)$光滑且几何不可约，并且根据引理 3.1，$\psi$ 在每个因子上都支配。

G 上的乘法由 D_L上的乘法诱导，而 V 上的求逆映射根据约化特征多项式和 $\mathrm{Nrd}_{D_L} = 1$是正则的。对于这个代数群，

$$G_k \simeq \prod_\sigma \mathrm{SL}_6 \quad \text{and} \quad \dim G = 35[L : \mathbb{Q}].$$

特别地，G 是连通且绝对单连通的。由于 $q \geq \dim G + 1$，根据 [5, 定理8.13(1)，第 128]页，ψ^{*q} 的纤维是几何不可约的。

令 $s_0 \in G(\mathbb{Q})$对应于 s。在 k 上的同一分解将几何纤维识别为

$$\big((\psi^{*q})^{-1}(s_0)\big)_k \simeq \prod_\sigma (X_s \times_{L,\sigma} k).$$

局部点 z_v 表明 X_s 非空，因此每个因子都有一个 k-点。因此，映射到与包含 $L \subseteq k$ 对应的因子的投影是满射。乘积的不可约性意味着$(X_s)_k$ 是不可约的。

约化纤维 $X = (X_s)_{\mathrm{red}}$ 是几何不可约仿射簇。z_v 在 $(X_s)_{L_v}$ 中的一个光滑邻域也是 X_{L_v}中的开集，因此 $z_v \in X_{\mathrm{sm}}(L_v)$。根据引理 2.5，存在一个有限扩张 L'/L 包含于 F中，使得 $X(L') \neq \varnothing$。由于 $T(L) \subseteq T(L')$，子群 $\langle T(L')\ xT(L')x^{-1}\rangle$包含 H，因而包含所有 h_j。因此，对于 $(y_1, \ldots, y_q) \in X(L')$，我们有

$$s = \phi(y_1) \cdots \phi(y_q) \in \langle T(L'), xT(L')x^{-1}\rangle.$$

□

定理 *1.1* 的证明。 (1) 设 $D = D_F$ 和 $K = K_F$。根据命题 2.4 及其后给出的循环表示， D 是一个次数为 6、中心为 F的循环除代数，而 K 是一个极大子域，其在 F 上的正规闭包的伽罗瓦群为 S_6。根据命题 2.6，范数 $N_{K/F}$ 是满射。

(2) 固定 $x \in D^\times \setminus K^\times$。由于 $\ker N_{K/F} = K^\times \cap D^{(1)}$ 和 $D^{(1)} \trianglelefteq D^\times$，(2) 左侧的子群包含于 $D^{(1)}$。反过来，取 $s \in D^{(1)}$，并选取 F 的一个有限子域 L，使得 s， $x \in D_L$。由约化范数与标量扩张的相容性，得到 $s \in D_L^{(1)}$；又由于 $K_L \subseteq K$，因此 $x \in D_L^\times \setminus K_L^\times$。根据命题 3.3，存在 F 内的某个有限扩张 L'/L，使得

$$s \in \langle T(L'), xT(L')x^{-1} \rangle \subseteq \langle \ker N_{K/F}, x(\ker N_{K/F})x^{-1} \rangle,$$

其中，包含关系由 $T(L') = \ker N_{K_{L'}/L'} \subseteq \ker N_{K/F}$ 得出，这是因为域范数与标量扩张相容。

(3) 对于 $y \in D^\times$，根据 (1)，选取 $a \in K^\times$，使得 $N_{K/F}(a) = \mathrm{Nrd}_D(y)$。于是 $a^{-1}y \in D^{(1)}$，因此 $D^\times = K^\times D^{(1)}$。不等式 $[K\colon F] = 6 < 36 = [D\colon F]$ 推出 $K^\times \subsetneq D^\times$。鉴于乘积等式，我们有 $\ker N_{K/F} = K^\times \cap D^{(1)} \subsetneq D^{(1)}$。

对于 $x \in D^\times \setminus K^\times$，(2) 蕴含 $D^{(1)} \subseteq \langle K^\times, x \rangle$，因此 $\langle K^\times, x \rangle = D^\times$。对于 $x \in D^{(1)} \setminus \ker N_{K/F}$，我们有 $x \notin K^\times$，因此根据 (2)，$\langle \ker N_{K/F}, x \rangle = D^{(1)}$。这证明了两个极大性断言。□

生成 公式定理 1.1(2) 将 $D^{(1)}$ 的阿贝尔化与 $\ker N_{K/F}$ 联系起来 .

推论 3.4. 对于定理 *1.1* 的证明中构造的配对 (D, K)，子群 $K^\times/F^\times$ 在 $D^\times/F^\times$ 中是自正规的。此外，我们有 $\mathrm{SK}_1(D) = 1$，且 $D^{(1)}$ 是完美的。商群$D^{(1)}/Z(D^{(1)})$ 是非阿贝尔单群，而$\ker N_{K/F}$ 的像是一个阿贝尔极大子群。

证明。 假设 $x \in D^\times \setminus K^\times$和 $a \in (K^\times \cap xK^\times x^{-1}) \setminus F^\times$。那么根据命题 2.4(2)， $F(a) = K = xKx^{-1}$。由于根据同一命题，$\mathrm{Aut}(K/F) = 1$，我们得到 $x \in C_D(K)^\times = K^\times$，矛盾。因此

$$K^\times \cap xK^\times x^{-1} = F^\times \quad \text{for every } x \in D^\times \setminus K^\times,$$

这证明了自正规性。

由于 $\mathrm{ind}\, D = 6$ 无平方因子， [21] 中的消失定理适用（另见 [20, 命题 11.2，第 536] 页）。因此 $\mathrm{SK}_1(D) = 1$ 且 $D^{(1)} = [D^\times, D^\times]$。$D^{(1)}$的特征子群 $C = [D^{(1)}, D^{(1)}]$ 是 $D^\times$的正规子群。由定理1.1(3)和 $\ker N_{K/F} = K^\times \cap D^{(1)}$，我们可以选取 $x \in D^{(1)} \setminus K^\times$。 x的共轭作用在 $D^{(1)}/C$上平凡，因此定理1.1(2)推出 $D^{(1)} = (\ker N_{K/F})C$。接着，定理1.1(3)证明中的乘积等式推出 $D^\times = K^\times D^{(1)} = K^\times C$。因此 $D^\times/C$是阿贝尔的且 $D^{(1)} = [D^\times, D^\times] \subseteq C$，所以 $D^{(1)}$ 是完美的。

设 N 是 $D^{(1)}$的一个真正规子群。若 $N \not\subseteq \ker N_{K/F}$，则定理1.1(3)中的极大性意味着 $N(\ker N_{K/F}) = D^{(1)}$。于是 $D^{(1)}/N$ 是非平凡阿贝尔群，这与其完美性矛盾。因此 $N \subseteq \ker N_{K/F}$，并由正规性

$$N = xNx^{-1} \subseteq K^\times \cap xK^\times x^{-1} = F^\times.$$

由于 $D^{(1)}$ 是非平凡完美群，其中心是一个真子群。将前述包含关系应用于 $Z(D^{(1)})$，得到

$$Z(D^{(1)}) = F^\times \cap D^{(1)} = \{c \in F^\times \mid c^6 = 1\} \subseteq \ker N_{K/F},$$

其中 $\mathrm{Nrd}_D(c) = c^6$ 对于 $c \in F^\times$。因此， $D^{(1)}/Z(D^{(1)})$ 是单的、非平凡且完美的，因而是非阿贝尔的。阿贝尔子群 $\ker N_{K/F}$ 在该商群中由定理1.1(3)及子群对应可知是极大的。

□

参考文献

[1] S. Akbari、R. Ebrahimian、H. Momenaee Kermani 和 A. Salehi Golsefidy，$\mathrm{GL}_n(D)$ 的极大子群，《代数杂志》259 (2003)，201–225。DOI: 10.1016/S0021-8693(02)00549-5。[2] S. Akbari、M. Mahdavi-Hezavehi 和 M. G. Mahmudi，$\mathrm{GL}_1(D)$ 的极大子群，《代数杂志》217 (1999)，422–433。DOI: 10.1006/jabr.1998.7792。[3] A. A. Albert 和 H. Hasse，关于代数数域上的所有正规除环的确定，《美国数学会汇刊》34 (1932)，722–726。DOI: 10.1090/S0002-9947-1932- 1501659-X。[4] T. Barnet-Lamb、T. Gee、D. Geraghty 和 R. Taylor，潜在自守性与权重变换，《数学年刊》（第2辑）179 (2014)，501–609。DOI: 10.4007/annals.2014.179.2.3。[5] E. Breuillard 和 I. Glazer，词映射与随机词，载于 G. Prasad、A. Rapinchuk、B. Sury 和 A. Tralle（编），《扎里斯基稠密子群、数论与几何应用》，Infosys科学基金会丛书，施普林格，新加坡，2026，第81–133页。DOI: 10.1007/978-981-95-3442-5 4。[6] J. Dieudonn´e，非交换域上的行列式，《法国数学会通报》71 (1943)，27–45。DOI: 10.24033/bsmf.1345。[7] P. K. Draxl，《斜体》，伦敦数学会讲义系列，第81卷，剑桥大学出版社,¯剑桥，1983。DOI: 10.1017/CBO9780511661907。[8] B. X. Hai 和 L. K. Huynh，关于除环中的极大子群，《越南数学学报》30 (2005)，35–43。期刊PDF。[9] B. X. Hai 和 H. V. Khanh，斜线性群的极大子群中的自由子群，《国际代数与计算杂志》29 (2019)，603–614。DOI: 10.1142/S0218196719500164。[10] W. H¨urlimann，阿尔伯特–布劳尔–哈塞–诺特定理的一个简短证明，《Ast´erisque》209 (1992)，215–220。Numdam。[11] F. Jahnke，赋值域导论，载于 F. Jahnke、D. Palac´ın 和 K. Tent（编），《模型论讲座》，M¨unster数学讲义，欧洲数学会出版社，Z¨urich，2018，第119–149页。DOI: 10.4171/184-1/5。[12] H. V. Khanh，关于除环中的局部可解子群，《代数杂志》547 (2020)，220–225。DOI: 10.1016/j.jalgebra.2019.11.015。[13]H. V. Khanh，赋值除代数的阿贝尔极大子群，arXiv:2603.28341v3 (2026)。[14]H. V. Khanh 和 B. X. Hai，$\mathrm{GL}_n(D)$ 的局部可解及有限扩张可解极大子群，《数学出版物》66 (2022)，77–97。DOI: 10.5565/PUBLMAT6612203。[15] H. V. Khanh 和 B. X. Hai，除环中的局部可解极大子群，《京都数学杂志》64 (2024)，245–260。DOI: 10.1215/21562261-2023-0017。[16] T. Y. Lam，《非交换环初级教程》，第2版，《数学研究生教材》第131卷，施普林格出版社，纽约，2001。DOI: 10.1007/978-1-4419-8616-0。[17]S. Lang，《代数数论》，第2版，《数学研究生教材》第110卷，施普林格出版社，纽约，1994。DOI: 10.1007/978-1-4612-0853-2。

[18] L. Moret-Bailly, 《皮卡德群与斯科伦问题。II》, 《高等师范学校科学年鉴》（第4辑）**22**(1989), 181–194。DOI：10.24033/asens.1582.[19] J.-P. Serre, 《局部域》, 数学研究生教材, 第67卷, 施普林格出版社, 纽约, 1979。DOI：10.1007/978-1-4757-5673-9.[20] J.-P.Tignol 和 A. R. Wadsworth, 《单代数上的赋值函数及相关分次环》, 施普林格数学专著, 施普林格, 尚贝里, 2015。DOI：10.1007/978-3-319- 16360-4.[21] S. Wang, 《单代数的交换子群》, 美国数学杂志 **72**(1950), 323–334。DOI：10.2307/2372036。