arXiv:2611.29607v1 [math.SG] 22 Nov 2026

辛希尔伯特旅馆

Alberto Abbondandolo

摘要

我们构造了一个无限维可分希尔伯特空间上的光滑整体辛同胚，它将一个大半径的球映射到一个小半径圆柱的子集。该辛同胚及其逆映射都将有界集映射到有界集。这个例子表明，若无进一步假设，格罗莫夫非挤压定理无法推广到无限维希尔伯特空间。

引言

将 $\mathbb{C}^n$ 视为一个带有内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle := \mathrm{Re}\ \langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathbb{C}}$、范数 $\|\cdot\| := \langle\cdot,\ \cdot\rangle^{\frac{1}{2}}$ 和辛形式 $\omega_0 := \mathrm{Im}\ \langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathbb{C}}$ 的 $2n$ 维实向量空间，其中 $\langle z,\ w\rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{j=1}^n z_j\bar{w}_j$ 表示标准厄米内积。开子集之间的辛同胚是保持 ω_0 的光滑微分同胚。记

$$B_r := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < r\} \qquad \text{and} \qquad Z_r := \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| < r\}$$

半径为 r 的开球和开圆柱。格罗莫夫非挤压定理 [Gro85] 断言，如果 $R > r$，那么不存在辛同胚能将 B_R 映射到 Z_r 的子集。

自 Kuksin [Kuk95a, Kuk95b] 和 Bourgain [Bou94], 的工作以来，人们一直在研究非挤压定理是否以及在多大程度上可以推广到无限维希尔伯特空间。回顾一下，实希尔伯特空间 $\mathbb{H}$ 上的一个（强）辛形式是一个连续反对称双线性形式 $\omega_0 \colon \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$，其对应的线性映射 $\mathbb{H} \to \mathbb{H}^*$ 是一个同构。为具体起见，我们在此考虑

$$\mathbb{H} := \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \qquad \langle z, w\rangle_{\mathbb{C}} := \sum_{j\in\mathbb{N}} z_j\bar{w}_j,$$

我们将其视为一个实希尔伯特空间，其内积为 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle := \mathrm{Re}\ \langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathbb{C}}$，范数为 $\|\cdot\| := \langle\cdot,\ \cdot\rangle^{\frac{1}{2}}$，$^-$ 辛形式为 $\omega_0 := \mathrm{Im}\ \langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathbb{C}}$。每个带有强辛形式的无限维可分实希尔伯特空间都与此模型同构（参见 [AM15，第2节]）。与有限维情形一样，我们用

$$B_r := \{z \in \mathbb{H} \mid \|z\| < r\} \qquad \text{and} \qquad Z_r := \{z = (z_1, \dots, z_n, \dots) \in \mathbb{H} \mid |z_1| < r\}$$

半径为 r 的开球和开圆柱，以及当 $R > r$ 时，$(\mathbb{H}, \omega_0)$ 的辛同胚是否能够将 B_R 挤压进 Z_r 的问题。

容易证明，对于$(\mathbb{H}, \omega_0)$的线性辛自同构，非挤压成立；对于那些作为线性辛自同构的紧扰动的非线性辛同胚，这一结论仍然成立 [Kuk95a, Rig19]。值得注意的是，对于某些非线性哈密顿偏微分方程的时间演化，即使其流不是线性流的紧扰动，非挤压也成立。对于 $\mathbb{T}$ 上的三次薛定谔方程，情况正是如此：$= \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ [Bou94], on $\mathbb{R}$ [KVZ19], 以及 $\mathbb{R}^2$ [KVZ21], ；对于 $\mathbb{T}$[CKS+05] 以及 $\mathbb{R}$ [Nte22], 上的KdV方程；以及对于 $\mathbb{T}$ [Rou10]上的BBM方程。在所有这些论文中，高度非平凡的有限维约化使得应用格罗莫夫最初的非挤压定理成为可能。此外，还存在本质上无限维的非挤压证明： [AM15] 使用克拉克对偶证明，当球的像为凸集时非挤压成立； [ST16b, ST16a] 使用伪全纯曲线证明了一个抽象的非挤压定理，并将其应用于离散非线性薛定谔方程； [Cic19, Cic21] 则证明了另一个有趣的抽象非挤压定理，重新得到此前提及的关于哈密顿偏微分方程的若干结果。

本文旨在构造一个整体光滑辛同胚 $\mathbb{H}$，将半径为 R 的球挤压到半径为 r 的圆柱中，其中 $0 < r < R$ 为固定值。更准确地说，我们证明以下结果。

THEOREM. 设 $0 < r < R$。存在一个整体光滑辛同胚 φ： $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$，使得

$$\varphi(B_R) \subset Z_r.$$

此外， φ 和 φ^{-1} 都将有界集映射为有界集。

因此，若不作进一步假设，非挤压定理在无限维辛希尔伯特空间上并不成立。我们在上述定理的证明中构造的辛同胚 φ ，对每个 $\rho < r$ 都在 B_ρ 上利普希茨连续，但在 B_r 上并非一致连续（见下文注释 3.4 和 3.5）。特别地，它的微分在 B_r 上无界。由哈密顿偏微分方程产生的辛同胚通常具有良好的导数界。一个有趣的开放问题是：对于其所有导数在有界集上均有界的 $\mathbb{H}$ 的辛同胚，非挤压性质是否成立。

我们以介绍构造这个证明上述定理的例子所涉及的一些想法来结束本引言。起始思路源自希尔伯特旅馆 [Hil13]的第一条性质：把房间 n 里的客人移到房间 $n+1$ ，对每个 $n \geq 1$ 而言，第一个房间就空出来了。换句话说，移位算子（z_1， ...， z_n， ...）$\mapsto$(0， z_1， ...， z_n， ...) 保持 ω_0不变，并且对每个 $r > 0$，都将整个 $\mathbb{H}$映射到 Z_r 的一个子集。当然，这个映射并非真正的辛同胚，因为它不是开映射。不过，将它改造为一个辛同胚并不困难：该辛同胚 ϑ 将整个 $\mathbb{H}$ 映射到圆柱 Z_r的一个开子集。

下面给出构造过程。我们先考虑一个保范数的辛同胚 θ： $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ ，它在原点附近是恒等映射，并且在半径为 r 的球外与映射 $(z_1, z_2) \mapsto (z_2, -z_1)$ 一致。例如， θ 可以是由以下哈密顿量定义的哈密顿系统的时间-1 映射

$$H(z_1, z_2) = \frac{\pi}{2}\chi(|z_1|^2 + |z_2|^2)\,\mathrm{Im}\,(\bar{z}_1 z_2) \qquad \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,$$

其中光滑截断函数 χ 满足：当 ρ 接近 0 时，$\chi(\rho) = 0$；而当 $\rho \geq r^2$ 时，$\chi(\rho) = 1$（关于哈密顿向量场的符号约定，见下文第1节）。这些性质意味着，对于每个 $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$，我们都有

$$|z_2| < r \qquad \Rightarrow \qquad |\pi_1 \theta(z_1, z_2)| < r, \tag{1}$$

其中 $\pi_1 \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ 表示到第一因子的投影。我们将 $\theta_n \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$记为通过对第 n 个和第（$n+1$）个坐标施加 θ 而得到的辛同胚。然后我们定义 $\vartheta \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 为极限

$$\vartheta := \lim_{n \to \infty} \theta_1 \circ \theta_2 \circ \cdots \circ \theta_n.$$

容易证明上述极限在局部稳定，因此它定义了到 $\mathbb{H}$的某个开子集上的光滑辛同胚。性质（1）意味着 $\vartheta(\mathbb{H})$包含于 Z_r中。事实上，任意 $z \in \mathbb{H}$ 都满足：当 n 足够大时有 $|z_{n+1}| < r$，因此由（1）可得$|\pi_n \theta_n(z)| < r$，这意味着 $|\pi_{n-1} \theta_{n-1} \circ \theta_n(z)| < r$，反复应用这一点，我们得到

$$|\pi_1 \vartheta(z)| = |\pi_1 \theta_1 \circ \theta_2 \circ \cdots \circ \theta_n(z)| < r.$$

这个简单例子的缺点在于，它不是$\mathbb{H}$上的整体辛同胚，因为它不是满射。实际上，不可能在大球 B_R 之外对其进行修改，使其成为 $\mathbb{H}$ 上的整体辛同胚，并将 B_R 映射到$\sim Z_r$ 的一个子集。事实上，若 $\vartheta \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 是一个在 B_R 上与 ϑ 重合、因而也在其闭包上重合的同胚，那么同胚保持边界这一事实，以及 ϑ 保持范数这一事实意味着

$$\partial \vartheta(B_R) = \partial \widetilde{\vartheta}(B_R) = \widetilde{\vartheta}(\partial B_R) = \vartheta(\partial B_R) \subset \partial B_R,$$

这表明开集 $\vartheta(B_R)$在 B_R中是相对闭的。由于后一个空间是连通的，这意味着 $\vartheta(B_R) = B_R$，这与 $\vartheta(B_R) \subset Z_r$矛盾。

上述定理中的整体辛同胚 φ 将由复合$\varphi = \psi \circ \tau$给出，其中 τ将第二个坐标 z_2平移 $R+s$，而 ψ是 $\mathbb{H}$ 的一个保范数整体辛同胚，它将圆柱 $\{|z_2| < s\}$ 的补集映射到 Z_r的一个子集。这里，s 是任意给定的正数。关键在于构造一个具有上述性质的映射ψ。

下面我们要用到希尔伯特旅馆的第二个性质：通过考虑奇数和偶数房间，旅馆包含两个自身的副本。ψ 的构造利用了将 $\mathbb{H}$ 分解为由奇数坐标和偶数坐标张成的子空间。偶数坐标充当控制变量，减弱变换对奇数坐标的影响。这正是满射性得以实现的关键。为便于记账，我们将使用 $\ell^2(\mathbb{Z},\ \mathbb{C})$，而不是 $\ell^2(\mathbb{N},\ \mathbb{C})$，并区分正指标和负指标，而非奇数和偶数指标。

致谢。作者在共形辛动力学与几何特别年期间驻留高等研究院时完成了这项工作；该特别年由一位匿名捐赠者资助。高等研究院提供的人工智能工具在寻找本文构造的例子时给予了极大帮助。本文的阐述由人类完成。

1 设置与进一步评论

使用希尔伯特空间

$$\mathbb{H} := \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}),$$

更为方便，它当然同构于 $\ell^2(\mathbb{N},\ \mathbb{C})$。实内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 和辛形式 ω_0 分别是标准厄米内积

$$\langle z, w\rangle_{\mathbb{C}} := \sum_{j\in\mathbb{Z}} z_j \bar{w}_j$$

在 $\mathbb{H}$ 上。对于由光滑哈密顿量 H 在 $(\mathbb{H},\ \omega_0)$ 上诱导的向量场 X_H，我们采用以下约定：

$$\omega_0(X_H, \cdot) = dH.$$

由于 $\omega_0(x,\ y) = \langle -ix,\ y\rangle$ 且 $dH = \langle \nabla H,\ \cdot\rangle$，因此该约定表示为

$$X_H = i\nabla H = 2i\frac{\partial H}{\partial \bar{z}}, \tag{2}$$

其中 Wirtinger 导数 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 逐分量作用。当 X_H 完备时，我们用 ϕ_H^t 表示其流。两个哈密顿量的泊松括号为

$$\{H, K\} := \omega_0(X_H, X_K) = 4\,\mathrm{Im}\left\langle \frac{\partial H}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial K}{\partial \bar{z}}\right\rangle_{\mathbb{C}}. \tag{3}$$

作为圆柱 Z_r，我们现在考虑集合

$$Z_r := \{z \in \mathbb{H} \mid |z_0| < r\}.$$

给定 $s > 0$，我们还考虑集合

$$C_s := \{z \in \mathbb{H} \mid |z_{-1}| \geq s\}.$$

正如引言中所预期的，挤压辛同胚的构造基于以下结果。

Proposition 1.1. 对于每个 $r > 0$ 和 $s > 0$，都存在一个光滑保范全局辛同胚 $\psi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$，使得

$$\psi(C_s) \subset Z_r.$$

引言中陈述的定理是上述命题的直接推论。事实上，令 $\tau\colon \mathbb{H}\to\mathbb{H}$ 为将 $R+s$ 加到分量 z_{-1}上的平移，并设

$$\varphi := \psi\circ\tau.$$

该映射是一个整体辛同胚。由于 τ 将 B_R 映射到 C_s的一个子集，命题 1.1 蕴含 $\varphi(B_R)\subset Z_r$。由于 τ和 τ^{-1} 是等距变换，且 ψ 和 ψ^{-1} 保范数，因此 φ 和 φ^{-1} 都将有界集映射为有界集。通过线性辛等距变换，将 $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ 与 $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ 认同，并使指标为 $0\in\mathbb{Z}$ 的坐标与指标为 $1\in\mathbb{N}$的坐标相对应，由此便完成了定理的证明。

Remark 1.2. 在这个例子中，我们还有

$$\varphi(B_R)\subset B_{2R+s},$$

其中 s 可以任意小。

Remark 1.3. 辛同胚 φ是哈密顿的，这意味着存在一个光滑时变哈密顿函数 $H\colon [0,1]\times\mathbb{H}\to\mathbb{R}$，使得相应时变哈密顿向量场的时间一映射为 φ。事实上，对于 $(\mathbb{H},\omega_0)$ 的每个整体辛同胚，这一点都成立，因为基于亚历山大技巧的常见有限维证明同样适用于无限维希尔伯特空间。为方便读者，我们简要说明其论证。公式

$$\psi_t(z) := \frac{\varphi(tz)-\varphi(0)}{t} = \int_0^1 d\varphi_{stz}(z)\,ds$$

定义了 $(\mathbb{H},\ \omega_0)$ 上一条光滑的整体辛同胚路径，使得 $\psi_1=\varphi-\varphi(0)$，且$\psi_0=d\varphi_0$ 是线性的。回顾一下，$(\mathbb{H},\ \omega_0)$ 的线性辛群是连通的，因为极分解给出了它与酉群的同伦等价，而后者被视为 $\mathbb{H}$ 上的复希尔伯特空间时是连通的（根据库伊珀定理，它甚至是可缩的）。因此，由 $\{\psi_t\}_{t\in[0,1]}$ 我们很容易得到一条光滑的辛同胚路径 $\{\varphi_t\}_{t\in[0,1]}$，使得 φ_0 是恒等映射，且 $\varphi_1=\varphi$。 φ_t 保持 ω_0 这一事实意味着，向量场 $X_t := (\frac{d}{dt}\varphi_t)\circ\varphi_t^{-1}$与 ω_0 的内积是闭一形式。由于 $\mathbb{H}$ 是单连通的，这个一形式是恰当的，因此我们得到一个光滑的单参数哈密顿量族 $\{H_t\}_{t\in[0,1]}$，使得 $\omega_0(X_t,\ \cdot)=dH_t$。

Remark 1.4. 也可以通过自治哈密顿向量场的时间一映射，将半径为 R 的球挤入半径为r 的圆柱。这可以通过提升到时间-能量扩展相空间来实现。事实上，假设$\varphi\colon \mathbb{H}\to\mathbb{H}$ 是一个整体辛同胚，将 B_R 映射到 Z_r的一个有界子集。正如注 1.3 所示，存在一个光滑的时变哈密顿量 $H\colon [0,1]\times\mathbb{H}\to\mathbb{R}$，其非自治流 φ_t 满足 $\varphi_1=\varphi$。考虑扩展相空间 $\widehat{\mathbb{H}} := \mathbb{R}^2\oplus\mathbb{H}$，其坐标为 $(x,\ y,\ z)$，辛形式为 $\widehat{\omega}_0 = (dx\wedge dy)\oplus\omega_0$。空间 $(\mathbb{H},\ \widehat{\omega}_0)$ 与 $(\mathbb{H},\ \widehat{\omega_0})$ 在辛结构和度量上等价，因此只需构造一个

$\widehat{}$在 $\mathbb{H}$ 上的自治哈密顿向量场，其时间一映射将半径为 $\backsim R$ 的球挤入半径为 r的圆柱。在 $\mathbb{H}$上，我们考虑自治哈密顿量

$$\widehat{H}(x,y,z) := 3R\big(y+\rho'(x)H(\rho(x),z)\big),$$

其中， $\rho:\mathbb{R}\to[0,1]$ 是一个光滑函数，在（$-\infty,R]$ 上取值为 0，在 $[2R,+\infty$上取值为 1）。曲线 $t\mapsto(x(t)\ y(t)\ z(t))$ 是 $X_{\widehat{H}}$ 的积分曲线，当且仅当

$$\dot{x} = \frac{\partial\widehat{H}}{\partial y}(x,\ y,\ z) = 3R, \tag{4}$$

$$\dot{y} = -\frac{\partial\widehat{H}}{\partial x}(x,y,z) = -3R\Big(\rho''(x)H(\rho(x),z)+\rho'(x)^2\frac{\partial H}{\partial t}(\rho(x),z)\Big), \tag{5}$$

$$\dot{z} = 3R\rho'(x)X_{H(\rho(x),\cdot)}(z). \tag{6}$$

（4–6）的解满足 $x(0)=x_0$、 $y(0)=y_0$ 和 $z(0)=z_0$，为

$$x(t) = x_0+3Rt, \tag{7}$$

$$y(t) = y_0+\rho'(x_0)H(\rho(x_0),z_0)-\rho'(x(t))H(\rho(x(t)),z(t)), \tag{8}$$

$$z(t) = \varphi_{\rho(x(t))}\circ\varphi^{-1}_{\rho(x_0)}(z_0). \tag{9}$$

事实上，对（4）和（6）积分可得（7）和（9），而（8）则由能量守恒得出

$$\widehat{H}(x(t),y(t),z(t)) = \widehat{H}(x_0,y_0,z_0).$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$这表明 $X_{\widehat{H}}$是完备的。如果（x_0,y_0,z_0）属于半径为 R的球 B_R，且该球位于 $\mathbb{H}$中，那么 $|x_0|<R$，因此 $x(1)>2R$，这意味着 $\rho'(x_0)=\rho'(x(1))=0$。因此，（7–9）给出

$$\widehat{\varphi}(x_0,y_0,z_0) := \phi^1_{\widehat{H}}(x_0,y_0,z_0) = \big(x_0+3R,y_0,\varphi(z_0)\big).$$

包含关系 $\varphi(B_R)\subset Z_r$从而给出 $\widehat{\varphi}(\widehat{B}_R)\subset\widehat{Z}_r$，其中 $\widehat{Z}_r:=\mathbb{R}^2\times Z_r$。因此，自治哈密顿微分同胚 $\widehat{\varphi}$ 将半径为 R 的球挤入半径为 r的圆柱 $\widehat{}$中。此外， $\widehat{\varphi}(B_R)$ 有界。

2 构件

本文的其余部分致力于证明命题 1.1。数值$r>0$ 和 $s>0$ 是其陈述中确定的常数。在 $\mathbb{H}$ 上，我们考虑二次哈密顿量

$$K_n(z) := \frac{\pi}{2}\mathrm{Im}\left(\bar{z}_0z_n+\bar{z}_{-n}z_{-n-1}\right) = \frac{\pi}{4i}(\bar{z}_0z_n-z_0\bar{z}_n+\bar{z}_{-n}z_{-n-1}-z_{-n}\bar{z}_{-n-1}).$$

由 (2) 可知，其哈密顿向量场的形式为

$$X_{K_n}(z) = \frac{\pi}{2}J_nz,$$

其中 J_n： $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 是一个斜自伴算子，它将坐标 $(z_{-n-1},\ z_{-n},\ z_0,\ z_n)$ 映射到 $(-z_{-n},\ z_{-n-1},\ z_n,\ -z_0)$，并将其他坐标映射为零。 X_{K_n} 的流是酉流

$$\phi^t_{K_n}(z) = e^{\frac{\pi}{2}tJ_n}z, \qquad \forall (t,z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{H}. \tag{10}$$

特别地,

$$\phi^1_{K_n}(z) = U_n z, \tag{11}$$

其中 $U_n := e^{\frac{\pi}{2}J_n}$ 是将坐标 $(z_{-n-1}、\ z_{-n}、\ z_0、\ z_n)$ 映射到 $(-z_{-n}、\ z_{-n-1}、\ z_n、\ -z_0)$，并保持其他坐标不变的酉算子。

设 $(a_n)_{n\geq 1}$ 是一个满足以下条件的序列:

$$0 < a_n < 1, \qquad (a_n) \text{ is nondecreasing}, \qquad a_n \to 1.$$

对于每个整数 $n \geq 1$，令 χ_n： $\mathbb{R} \to [0,1]$ 为满足以下条件的光滑函数:

$$\chi_n = 0 \quad \text{on } (-\infty, a_n], \qquad \chi_n = 1 \quad \text{on } [1,+\infty).$$

在 $\mathbb{H}$ 上，我们考虑二次函数

$$p_n(z) := \frac{1}{r^2}\Big(|z_0|^2 + \sum_{j\geq n}|z_j|^2\Big), \qquad q_n(z) := \frac{1}{s^2}\sum_{j\leq -n}|z_j|^2,$$

以及光滑哈密顿量

$$H_n := \chi_n(p_n)\chi_n(q_n)K_n.$$

LEMMA 2.1. X_{H_n} 的流是完备的，并保持函数 K_n、 p_n、 q_n以及 $\mathbb{H}$的范数不变。辛同胚

$$\psi_n := \phi^1_{H_n} \tag{12}$$

满足:

(a) 若 $p_n(z) \geq 1$ 且 $q_n(z) \geq 1$ ， 则 $\psi_n(z) = U_n z$;

(b) 若 $p_n(z) \leq a_n$ 或 $q_n(z) \leq a_n$ ， 则 $\psi_n(z) = z$;

(c) ψ_n 改变坐标$(z_{-n-1}, z_{-n}, z_0, z_n)$，将坐标 z_j 乘以 $j \leq -n-2$ 或 $j \geq n+1$ 的模为一的因子，并保持坐标 z_j 及 $1 \leq |j| \leq n-1$ 不变。

证明。 根据 (2)，二次函数 p_n 和 q_n 的哈密顿向量场为

$$X_{p_n}(z) = \frac{2i}{r^2}\Pi^+_n z, \qquad X_{q_n}(z) = \frac{2i}{s^2}\Pi^-_n z \qquad \forall z \in \mathbb{H},$$

其中， Π_n^+ 是投影到与坐标 z_j 对应子空间上的正交投影算子，该子空间满足 $j=0$ 或 $j\geq n$；而 Π_n^- 是投影到与坐标 z_j 对应子空间上的正交投影算子，该子空间满足 $j\leq -n$。它们的流是酉流

$$\phi_{p_n}^t(z)=(\mathrm{id}-\Pi_n^+)z+e^{\frac{2it}{r^2}}\Pi_n^+ z,\qquad \phi_{q_n}^t(z)=(\mathrm{id}-\Pi_n^-)z+e^{\frac{2it}{s^2}}\Pi_n^- z.$$

第一个流将坐标 z_j 和 $j=0$ 或 $j\geq n$ 乘以模为一的因子 $e^{\frac{2it}{r^2}}$，并保持其他坐标不变。第二个流将坐标 z_j 和 $j\leq -n$ 乘以模为一的因子 $e^{\frac{2it}{s^2}}$，并保持其他坐标不变。这两个流显然可交换。它们也与由 (10) 给出的 K_n 的哈密顿流可交换，因为根据 (3)，我们有

$$\begin{aligned}\{K_n,p_n\}&=4\,\mathrm{Im}\left\langle\frac{\partial K_n}{\partial\bar z},\frac{\partial p_n}{\partial\bar z}\right\rangle_{\mathbb{C}}=\frac{\pi}{r^2}\,\mathrm{Im}\left(\frac{z_n\bar z_0-z_0\bar z_n}{i}\right)=0,\\ \{K_n,q_n\}&=4\,\mathrm{Im}\left\langle\frac{\partial K_n}{\partial\bar z},\frac{\partial q_n}{\partial\bar z}\right\rangle_{\mathbb{C}}=\frac{\pi}{s^2}\,\mathrm{Im}\left(\frac{z_{-n-1}\bar z_{-n}-z_{-n}\bar z_{-n-1}}{i}\right)=0.\end{aligned}$$

此外，由于 $\{p_n,q_n\}=0$，K_n、p_n 和 q_n 之间的所有泊松括号都为零，因此这三个线性流各自都保持函数 K_n、p_n 和 q_n 不变。H_n 的哈密顿向量场具有如下形式

$$X_{H_n}=\chi_n(p_n)\chi_n(q_n)X_{K_n}+\chi_n'(p_n)\chi_n(q_n)K_nX_{p_n}+\chi_n(p_n)\chi_n'(q_n)K_nX_{q_n}.$$

由于 K_n、p_n 和 q_n 在这三个线性流下保持不变，上述表达式中的系数沿着 X_{H_n} 的积分曲线保持不变。再结合这三个线性流的可交换性，可知 X_{H_n} 是完备的，且其流具有如下形式

$$\phi_{H_n}^t=\phi_{K_n}^{\chi_n(p_n)\chi_n(q_n)t}\circ\phi_{p_n}^{\chi_n'(p_n)\chi_n(q_n)K_nt}\circ\phi_{q_n}^{\chi_n(p_n)\chi_n'(q_n)K_nt}.\tag{13}$$

该流保持 K_n、p_n、q_n，也保持范数，因为这三个线性流都是酉的。若 $z\in\mathbb{H}$ 满足 $p_n(z)\geq 1$ 且 $q_n(z)\geq 1$，则

$$\chi_n(p_n(z))=1,\quad \chi_n'(p_n(z))=0,\quad \chi_n(q_n(z))=1,\quad \chi_n'(q_n(z))=0,$$

因此

$$\psi_n(z)=\phi_{H_n}^1(z)=\phi_{K_n}^1(z)=U_nz$$

由 (11) 得证 (a)。若 $p_n(z)\leq a_n$ 或 $q_n(z)\leq a_n$，则

$$\chi_n(p_n(z))\chi_n(q_n(z))=\chi_n'(p_n(z))\chi_n(q_n(z))=\chi_n(p_n(z))\chi_n'(q_n(z))=0,$$

因此

$$\psi_n(z)=z,$$

证明 (b)。(c) 由 (13) 以及上文讨论的三个线性流的性质得出。

□

3 辛同胚 ψ 的构造

设 $\Psi_0 :=$id 并且

$$\Psi_n := \psi_n \circ \cdots \circ \psi_1,$$

其中， ψ_k 是式（12）中定义的光滑辛同胚。我们的首要目标是证明，该序列在局部稳定，并且其在 $n \to \infty$ 时的极限定义了 $\mathbb{H}$ 的光滑全局辛同胚。

对于每个 $n \geq 1$，我们考虑函数

$$P_n(z) := r^2 p_n(\Psi_{n-1}(z)) \qquad Q_n(z) := s^2 q_n(\Psi_{n-1}(z)).$$

根据 p_{n+1} 的定义，我们有

$$|\pi_0 \Psi_n(z)|^2 \leq P_{n+1}(z). \tag{14}$$

这里以及下文中， $\pi_k : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ 表示到第 k 个坐标的投影，其中 $k \in \mathbb{Z}$。接下来的两个引理将确立这些函数的一些有用性质。

LEMMA 3.1. 对于每个 $z \in \mathbb{H}$ 和 $n \geq 1$，我们有

$$P_{n+1}(z) = P_n(z) - |\pi_n \Psi_n(z)|^2, \qquad Q_{n+1}(z) = Q_n(z) - |\pi_{-n} \Psi_n(z)|^2.$$

特别地，序列 $(P_n(z))_{n\geq 1}$ 和 $(Q_n(z))_{n\geq 1}$ 都是非增的。

证明。由恒等式 $p_{n+1}(z) = p_n(z) - \frac{1}{r^2}|z_n|^2$，以及 ψ_n 保持函数 p_n 这一事实，根据引理 2.1，我们可推出

$$\begin{aligned} P_{n+1}(z) &= r^2 p_{n+1}(\Psi_n(z)) = r^2 p_n(\psi_n \circ \Psi_{n-1}(z)) - |\pi_n \Psi_n(z)|^2 \\ &= r^2 p_n(\Psi_{n-1}(z)) - |\pi_n \Psi_n(z)|^2 = P_n(z) - |\pi_n \Psi_n(z)|^2, \end{aligned}$$

从而证明第一个恒等式。第二个恒等式的证明类似：从 $q_{n+1}(z) = q_n(z) - \frac{1}{s^2}|z_{-n}|^2$ 出发，并利用 $\overline{\psi}_n$ 保持 q_n 这一事实。 □

LEMMA 3.2. 设 $z \in \mathbb{H}$ 满足对每个 $n \geq 1$，都有 $\Psi_n(z) = U_n \Psi_{n-1}(z)$。那么

$$P_{n+1}(z) = \sum_{j \geq n} |z_j|^2 \qquad \forall n \geq 1,$$

并且特别地， $P_n(z) \to 0$。

证明。算子 U_k 只改变坐标 $z_{-k-1}, z_{-k}, z_0, z_k$。根据假设，$\Psi_n(z) = U_n \circ \cdots \circ U_1 z$，因此 $\Psi_n(z)$ 中索引为 $j \geq n+1$ 的坐标保持不变，而

$$\pi_0 \Psi_n(z) = \pi_0 U_n \circ \cdots \circ U_1 z = \pi_n U_{n-1} \circ \cdots \circ U_1 z = z_n.$$

因此，

$$P_{n+1}(z) = |\pi_0 \Psi_n(z)|^2 + \sum_{j \geq n+1} |\pi_j \Psi_n(z)|^2 = \sum_{j \geq n} |z_j|^2.$$

□

在下一个引理中，我们将证明序列 Ψ_n 和 Ψ_n^{-1}在局部稳定。

LEMMA 3.3. 对于每个 $z \in \mathbb{H}$，都存在 z 的一个邻域 U 和 $N \in \mathbb{N}$，使得

$$\Psi_n|_U = \Psi_N|_U \qquad and \qquad \Psi_n^{-1}|_U = \Psi_N^{-1}|_U$$

对于每个 $n \geq N$。

证明。我们断言，存在 $n_0 \geq 1$，使得 $P_{n_0}(z) < a_{n_0} r^2$ 或 $Q_{n_0}(z) < a_{n_0} s^2$。

反设 $P_n(z) \geq a_n r^2$ 且对每个 $n \geq 1$ 都有 $Q_n(z) \geq a_n s^2$。由于数列 $(P_n(z))$ 和 $(Q_n(z))$ 单调不增，且 (a_n) 收敛于 1，我们可推出

$$P_n(z) \geq r^2 \qquad \text{and} \qquad Q_n(z) \geq s^2 \qquad \forall n \geq 1.$$

因此，

$$p_n(\Psi_{n-1}(z)) \geq 1 \qquad \text{and} \qquad q_n(\Psi_{n-1}(z)) \geq 1 \qquad \forall n \geq 1,$$

因此，引理 2.1 (a) 表明，对每个 $n \geq 1$，都有 $\Psi_n(z) = U_n \Psi_{n-1}(z)$。根据引理 3.2，$(P_n(z))$ 趋于零，这就产生了矛盾。由此证明了该断言。

现在假设存在 $n_0 \geq 1$ 使得 $P_{n_0}(z) < a_{n_0} r^2$，情形 $Q_{n_0}(z) < a_{n_0} s^2$ 与之类似。由于函数 P_{n_0} 连续，我们可以找到 z 的一个邻域 U_1，使得在该邻域上 $P_{n_0} < a_{n_0} r^2$。对于 $w \in U_1$ 和 $n \geq n_0$，由引理 3.1 及 (a_n) 的单调性可得

$$r^2 p_n(\Psi_{n-1}(w)) = P_n(w) \leq P_{n_0}(w) < a_{n_0} r^2 \leq a_n r^2.$$

因此，$p_n(\Psi_{n-1}(w)) < a_n$，由引理 2.1 (b) 可得

$$\Psi_n(w) = \psi_n(\Psi_{n-1}(w)) = \Psi_{n-1}(w).$$

这表明，对于每个 $n \geq n_0 - 1$，$\Psi_n = \Psi_{n_0-1}$ 在 U_1 上成立。

现在考虑这些映射

$$\Psi_n^{-1} = \psi_1^{-1} \circ \cdots \circ \psi_n^{-1}.$$

选取 $n_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\sum_{j \leq -n_1} |z_j|^2 < a_1 s^2.$$

若 U_2 是 z 的一个充分小邻域，则

$$\sum_{j \leq -n_1} |w_j|^2 < a_1 s^2 \qquad \forall w \in U_2.$$

对于 $w \in U_2$ 和 $n \geq n_1$，有

$$q_n(w) = \frac{1}{s^2} \sum_{j \leq -n} |w_j|^2 \leq \frac{1}{s^2} \sum_{j \leq -n_1} |w_j|^2 < a_1 \leq a_n,$$

因此，引理 2.1 (b) 表明 $\psi_n(w) = w$，或者等价地，$\psi_n^{-1}(w) = w$。这表明，对于每个 $n \geq n_1$，ψ_n^{-1} 在 U_2 上是恒等映射，因此

$$\Psi_n^{-1}|_{U_2} = \Psi_{n_1-1}^{-1}|_{U_2} \qquad \forall n \geq n_1.$$

由此我们得出，命题在 $U = U_1 \cap U_2$ 和 $N = \max\{n_0, n_1\} - 1$ 的情况下成立。 □

Ψ_n 在局部稳定这一事实意味着

$$\psi := \lim_{n\to\infty} \Psi_n$$

是一个定义良好的光滑映射，从 $\mathbb{H}$ 到 $\mathbb{H}$，并满足 $\psi^*\omega_0 = \omega_0$。由于 Ψ_n^{-1}也在局部稳定，因此

$$\xi := \lim_{n\to\infty} \Psi_n^{-1}.$$

对于每个 $z \in \mathbb{H}$，引理 3.3 给出自然数 N 和 M，使得对每个 $n \geq N$都有 $\psi(z) = \Psi_n(z)$，且对每个 $m \geq M$都有 $\xi(\psi(z)) = \Psi_m^{-1}(\psi(z))$。取 $n \geq \max\{N, M\}$，我们得到

$$\xi \circ \psi(z) = \Psi_n^{-1}(\psi(z)) = \Psi_n^{-1}(\Psi_n(z)) = z,$$

这证明了 $\xi \circ \psi = $ 在 $\mathbb{H}$上为恒等映射。类似地，$\psi \circ \xi = $ 在 $\mathbb{H}$上为恒等映射，因此 ψ 是一个整体辛同胚，其逆映射为 ξ。由于所有辛同胚 ψ_n 都保持范数，根据引理 2.1，ψ也保持范数。

现在我们证明

$$\psi(C_s) \subset Z_r. \tag{15}$$

设 $z \in C_s$。根据引理 3.1，非负数列 $(P_n(z))$ 单调不增，因此收敛到某个数 $P_\infty \geq 0$。根据引理 3.3，我们有

$$\psi(z) = \Psi_n(z)$$

对于每个足够大的整数 n，在这种情况下，界 (14) 写作

$$|\pi_0\psi(z)|^2 \leq P_{n+1}(z).$$

对 n 取极限，我们得到

$$|\pi_0\psi(z)|^2 \leq P_\infty,$$

因此，只需证明 $P_\infty < r^2$。

反设 $P_\infty \geq r^2$。那么对于每个 $n \geq 1$，$P_n(z) \geq r^2$，因此

$$p_n(\Psi_{n-1}(z)) = \frac{1}{r^2} P_n(z) \geq 1 \qquad \forall n \geq 1. \tag{16}$$

我们断言，对于每个 $n \geq 1$,

$$|\pi_{-n}\Psi_{n-1}(z)| = |z_{-1}| \qquad \text{and} \qquad \Psi_n(z) = U_n\Psi_{n-1}(z). \tag{17}$$

注意，对于 $n = 1$，(17) 中的第一个等式显然成立。若该等式对某个 $n \geq 1$ 成立，则

$$q_n(\Psi_{n-1}(z)) \geq \frac{1}{s^2}|\pi_{-n}\Psi_{n-1}(z)|^2 = \frac{1}{s^2}|z_{-1}|^2 \geq 1.$$

由引理 2.1 (a)，上述不等式和 (16) 可得 $\psi_n(\Psi_{n-1}(z)) = U_n\Psi_{n-1}(z)$，这就是 (17) 中的第二个等式。由于 U_n 将指标为 $-n-1$ 和 $-n$ 的坐标互换（至多相差一个符号），因此现在有

$$|\pi_{-n-1}\Psi_n(z)| = |\pi_{-n-1}U_n\Psi_{n-1}(z)| = |\pi_{-n}\Psi_{n-1}(z)| = |z_{-1}|,$$

这就是 $n+1$ 的 (17) 中的第一个等式。由此可得，对每个 $n \geq 1$，(17) 都成立。

根据 (17) 中的第二个等式，引理 3.2 给出 $P_n(z) \to 0$，这与 $P_\infty \geq r^2 > 0$ 矛盾。由此得出 (15)，命题 1.1 的证明也随之完成。

在接下来的两条注记中，$\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 表示 $\mathbb{H}$ 的标准希尔伯特基。

REMARK 3.4. 对每个正数 $\rho < r$，映射 ψ 在 $\tau(B_\rho)$ 上是利普希茨连续的，其中 $\tau(z) = z + (R+s)e_{-1}$，因此 $\varphi = \psi \circ \tau$ 在 B_ρ 上也是利普希茨连续的，正如引言中所述。事实上，若 $z = w + (R+s)e_{-1}$ 且 $w \in B_\rho$，则引理 3.1 给出

$$P_n(z) \leq P_1(z) = \sum_{j\geq 0} |w_j|^2 \leq \|w\|^2 < \rho^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

若 $N \in \mathbb{N}$ 满足 $a_N r^2 \geq \rho^2$，则引理 2.1 (b) 意味着 $\psi = \Psi_{N-1}$ 在 $\tau(B_\rho)$ 上成立。每个保范映射 ψ_k 都是由酉流复合而成，其时间是二次型 K_k、p_k 和 q_k 的光滑函数，因此 ψ_k 在有界集上具有有界微分。于是，Ψ_{N-1} 的微分在 $\tau(B_\rho)$ 上有界，因此 ψ 在 $\tau(B_\rho)$ 上是利普希茨连续的。

REMARK 3.5. 映射 ψ 在 $\tau(B_r)$ 上不是一致连续的，因此如引言中所述，$\varphi = \psi \circ \tau$ 在 B_r 上也不是一致连续的。事实上，由于一致连续性可传递到闭包上，只需证明 ψ 在 $\tau(B_r)$ 上不是一致连续的。考虑序列

$$w_n := r\sqrt{a_{n+1}}e_n + (R+s)e_{-1}, \qquad z_n := re_n + (R+s)e_{-1}$$

取值于 $\tau(B_r)$ 中。我们声称

$$\pi_{n+1}\psi(w_n) = 0, \qquad \pi_{n+1}\psi(z_n) = -r. \tag{18}$$

上述等式表明，ψ 在 $\tau(B_r)$ 上不是一致连续的。事实上，$\|w_n - z_n\| = r(1 - \sqrt{a_{n+1}}) \to 0$，而（18）表明 $\|\psi(w_n) - \psi(z_n)\| \geq r$。剩下的工作是证明（18）。由

$$P_k(w_n) \leq P_1(w_n) = a_{n+1}r^2 \leq a_k r^2 \qquad \forall k \geq n+1$$

由引理 2.1 (b) 可推出，对于每个 $k \geq n$，$\Psi_k(w_n) = \Psi_n(w_n)$。因此，$\psi(w_n) = \Psi_n(w_n)$，进而由引理 2.1 (c) 可得 (18) 中的第一个等式。为了证明第二个等式，我们断言

$$\Psi_k(z_n) = U_k\Psi_{k-1}(z_n) \qquad \text{for } 1 \leq k \leq n+1. \tag{19}$$

假设 (19) 对 $k-1$ 及其 $1 \le k \le n+1$ 成立。由于 U_j 将 $(z_{-j-1},\ z_{-j},\ z_0,\ z_j)$ 映射到 $(-z_{-j},\ z_{-j-1},\ z_j,\ -z_0)$，并保持其他坐标不变，因此 $\Psi_{k-1}(z_n)$ 中唯一非零的坐标是指标为 $-k$ 的坐标，其模为 $R+s$；另一个坐标的指标在 $k \le n$ 时为 n，而在 $k = n+1$ 时为 0，其值为 r。因此，

$$p_k(\Psi_{k-1}(z_n)) = 1 \qquad \text{and} \qquad q_k(\Psi_{k-1}(z_n)) = \frac{(R+s)^2}{s^2} \ge 1,$$

因此，引理 2.1 (a) 给出 $\Psi_k(z_n) = U_k \Psi_{k-1}(z_n)$。这就证明了 (19)。最后一步 U_{n+1} 将值为 r、索引为 0 的坐标以负号移至索引 $n+1$，因此

$$\pi_{n+1}\Psi_{n+1}(z_n) = -r, \qquad \pi_j \Psi_{n+1}(z_n) = 0 \quad \forall j \ge 0,\ j \ne n+1, \tag{20}$$

特别地，$P_{n+2}(z_n) = 0$。根据引理 3.1，$P_k(z_n) = 0$ 对每个 $k \ge n+2$ 都成立，而引理 2.1 (b) 蕴含对每个 $k \ge n+1$，$\Psi_k(z_n) = \Psi_{n+1}(z_n)$。因此，$\psi(z_n) = \Psi_{n+1}(z_n)$，并且 (18) 中的第二个等式由 (20) 得出。

参考文献

[AM15] A. Abbondandolo 和 P. Majer，希尔伯特球的凸辛像非挤压定理，《变分学与偏微分方程》54(2015年)，1469–1506。[Bou94] J. Bourgain，用有限维方程逼近三次非线性薛定谔方程的解¨及其非挤压性质，《国际数学研究通知》（1994年），第2期，79–90。[Cic19] D. Cicmilovi´c，辛非挤压与哈密顿偏微分方程，《奥伯沃尔法赫报告》，第5号报告／2019年，第329–331页。[Cic21] D. Cicmilovi´c，辛非挤压定理与哈密顿偏微分方程，博士论文，波恩莱茵弗里德里希·威廉大学，2021年。[CKS+05] J. Colliander、M. Keel、G. Staffilani、H. Takaoka 和 T. Tao，科尔特韦格–德弗里斯流的辛非挤压，《数学学报》195 (2005年)，197–252。[Gro85] M. Gromov，辛流形中的伪全纯曲线，《数学发明》82(1985年)，307–347。[Hil13] D. Hilbert，《算术与逻辑基础讲义，*1917–1933*》，《大卫·希尔伯特数学与物理学基础讲义：1891–1933》，第3卷，第4章：《无穷讲义》（1924/25、1931、1933），施普林格出版社，柏林，2013年。

[*Kuk95a*] *S. B. Kuksin*，《无限维辛容量与哈密顿偏微分方程的挤压定理》，《数学物理通讯》*167 (1995*年*)*，*531–552*。[*Kuk95b*] *S. B. Kuksin*，《论非线性波动方程中的挤压与能量流》，《几何与泛函分析》*5 (1995*年*)*，*668–701*。[*KVZ*19] *R. Killip*、*M. Visan* 和 *X. Zhang*，《直线上的三次非线性薛定谔方程的辛非挤压》，《国际数学研究通知》（*IMRN*）（*2019*年），第*5*期，*1312–1332*。[*KVZ*21] *R. Killip*、*M. Visan* 和 *X. Zhang*，《直线上三次非线性薛定谔方程的有限维逼近与非挤压》¨，载于《美国数学杂志》*143 (2021*年*)*，*613–680*。[*Nte*22] *M. Ntekoume*，《直线上的 *KdV* 流的辛非挤压》，《纯数学与应用分析》*4 (2022*年*)*，*401–488*。[*Rig*19] *L. Rigolli*，《线性映射的紧扰动的无限维格罗莫夫非挤压定理的另一种证明》 arXiv:1910.13151，*2019*年。[*Rou*10] *D. Roum´egoux*，《*BBM*方程的辛非挤压定理》，《动力系统与偏微分方程》*7 (2010*年*)*，*289–305*。[*ST16a*] *A. Sukhov* 和 *A. Tumanov*，《希尔伯特空间中的伪全纯圆盘与辛结构》，《多复变函数专题》，《当代数学》，第*662*卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，*2016*年，第*23–49*页。[*ST16b*] *A. Sukhov* 和 *A. Tumanov*，《希尔伯特空间中的辛非挤压与离散薛定谔方程》，《不动点理论与应用杂志》*18 (2016*年*)*，*867–888*。

Alberto Abbondandolo 鲁尔大学波鸿分校，数学系，德国波鸿 Universitätsstraße 150，邮编 44801 alberto.abbondandolo@rub.de

高等研究院数学学院，美国新泽西州普林斯顿爱因斯坦大道 1 号，邮编 08540