arXiv:2611.29621v1 [math.DS] 22 Nov 2026

# 接触同胚的周期轨道、平移点与短 Floer 条形码的快速增长

Wenmin Gong * Zhiyuan Hu †

**摘要**

我们证明，对于闭双曲曲面的单位余切丛上的接触同胚，不同周期轨道和几何上不同的平移点可以任意快速增长。结论在某个非空 $C^1$-开集的剩余子集上成立，并由 Chaidez 接触混合器和局部化接触扰动推出。对于闭接触流形上一个指定的、解析上可容许的归一化 Rabinowitz Floer 族（该流形具有 Liouville 填充），我们证明固定窗口条形码熵不超过拓扑熵。证明通过接触断层成像和过滤延拓，将长条计数与图体积进行比较。在强平移非退化性条件下，我们证明：紧内部窗口中的平移点对若呈超指数增长，则周围窗口中诞生的短条也呈超指数增长。

## 目录

**1 引言** **2**

**2 预备知识** **7**

2.1 接触同胚、Reeb 流与接触哈密顿流 .72.2 部分双曲性 .72.3 异宿维数循环与搅拌器 .82.4 Liouville 填充与 Floer 约定 .13

**3 接触引理** **14**

3.1 一个接触提升 .153.2 一个接触连接引理.153.3 接触逼近.16

**4 一个接触开集及其基映射23**

4.1 初始模型与持久几何构型.234.2 接触强连接.264.3 基点映射及其稠密性.28

*数学与复杂系统实验室（教育部），北京师范大学数学科学学院，北京，北京，100875，中国。电子邮箱：wmgong@bnu.edu.cn

†清华大学数学科学系，北京，北京，100084，中国。电子邮箱：huzy23@mails.edu.tsinghua.cn

**5 平坦中心方向周期附近的长周期轨道 29**
5.1 双曲通道.315.2 局部接触扰动与中心乘子.355.3 中心乘子为一的长周期轨道.365.4 中心芽的平坦化.40

**6 周期轨道的增长 43**

**7 增长　几何上不同的平移点的增长 4 6**
7.1 有界平移重数 .467.2 平坦中心接触扰动 .477.3 通过局部度实现稳健性 .497.4 关于指数增长和任意快增长的贝尔范畴论证.50

**8 接触图与固定窗口条形码熵 50**
8.1 接触图的光滑紧化 .508.2 Reeb 对角线与接触断层扫描仪 .518.3 解析可容许性与关联条形码 .538.4 固定窗口熵上界 .57

**9 短条的超指数增长 58**

**哈密顿量归一化与延拓 60**
A.1 提升与临界点非退化性 .60A.2 解析性输入与延拓范围 .61

**B Comp　完备滤过与条形码端点 6 2**

# 1 引言

计数周期点是量化动力系统中回归现象的一种基本方式。对于 Axiom A 微分同胚，指数计数界及其与拓扑熵的关系，使指数增长成为一个自然的基准 [13, 14]。在一致双曲性之外，增长速度可能快得多。Arnold 关于沿某个迭代子序列超越预先给定序列的问题，推动了大量关于这一现象的研究 [4, 问题 1989-2]。

接触动力学将这一问题置于一个几何背景中，其中微分同胚保持接触超平面分布。除周期点外，平移点描述了共形因子为一时对 Reeb 轨道的回归。Sandon 引入了这些点 [34, 35], ，它们将接触刚性和不动点问题与 Rabinowitz Floer 理论联系起来 [2]。因此，它们在迭代下的丰富性同时引出了动力学和同调方面的问题。

我们证明，在闭双曲曲面的单位余切丛上，接触同胚的一个非空 $C^1$-开集内，不同周期轨道的增长可以任意快。对于任意给定的正数列，存在一个剩余子集，使得沿着一列无界的最小周期，轨道计数以任意大的倍数超过该数列。我们还证明，对于某个合适的接触形式，在每个固定的正半径平移窗口内，几何上不同的平移点都可以任意快地增长。在

下文所述的 Floer 假设下，熵界控制固定作用量窗口中出生的足够长条形的数量。若再满足短条定理的非退化性和平移点增长假设，充足的平移点便会迫使短条超指数增长。

**周期点的快速增长与搅拌子机制**

设 $(S, h)$ 是一条曲率为常数 $-1$ 的闭定向双曲曲面，并记

$$M = S^*S := \{(q,p) \in T^*S : |p|_h = 1\}, \qquad \alpha_{\mathrm{can}} := \lambda_{\mathrm{can}}|_{S^*S}, \qquad \xi := \ker \alpha_{\mathrm{can}},$$

其中 $\lambda_{\mathrm{can}}$ 是 $T^*S$ 上的李乌维尔一形式。流形 $S^*S$ 是单位余切丛。度量对偶 $(q,v) \mapsto (q, h_q(v,\cdot))$ 将其与单位切丛 $T^1S$ 等同；在此对应下， $\alpha_{\mathrm{can}}$ 的 Reeb 流变为单位速测地流 [25, 第 1 节.5]。我们用 $\mathrm{Cont}^1(M,\xi)$ 表示带有其 $C^1$ 拓扑的保 coorientation 接触同胚空间。余定向保持意味着，定义接触形式的拉回是该形式的正倍数。若一个子集包含开稠密子集的可数交，则称其为剩余的；这里考虑的贝尔空间中，剩余子集是稠密的 [30]。我们在此剩余意义下使用“泛型”一词。

周期点的最小周期是满足 $f^n(x) = x$ 的最小正整数 $n$。令 $O_n(f)$ 表示最小周期为 $n$ 的不同周期轨道数，因此每条轨道只计数一次。早期许多文献统计迭代的不动点，而下文的结论关注的是具有指定最小周期的不同轨道。

Artin 和 Mazur 证明，孤立周期点计数至多呈指数增长的映射是稠密的 [5, 定理 2.2]。然而，剩余子集中的增长情况可能有所不同。Bonatti、Díaz 和 Fisher 证明，对于 $C^1$-泛性微分同胚，包含不同指标鞍点的同宿类内部可以出现任意快的增长 [10], ；而 Asaoka、Shinohara 和 Turaev 则基于具有一维中心和适当异维转迁的部分双曲动力系统，得到了更高正则性的结果 [7]。这种增长也会出现在具有几何约束的类中。Asaoka 证明，二维环面上的实解析哈密顿映射和光滑保面积曲面映射均可出现任意快的增长 [6]。

我们的第一个定理表明，在接触范畴中可以实现任意快的增长，如上文介绍的单位余切丛所示。

**定理 1.1.** 设 $M = S^*S$ 为闭双曲曲面 $S$的单位余切丛，并如上文所述配备其典范接触结构 $\xi$。存在一个非空的 $C^1$-开集 $U \subset \mathrm{Cont}^1(M,\xi)$，使得对于任意正实数序列$(a_n)_{n\geq 1}$，都存在一个余集 $R_a \subset U$，满足

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{O_n(f)}{a_n} = \infty \qquad for\ every\ f \in \mathcal{R}_a.$$

余集可能取决于比较序列。定理 6.3 在任何具有光滑强稳定与不稳定叶状结构的 Anosov Reeb 流的闭接触流形上，也给出了相同的结论。

证明使用了*blender*机制。Bonatti 和 Díaz 在研究鲁棒传递非双曲微分同胚时引入了这一机制 [8], ：即使相关维数通常会妨碍横截性，搅拌子仍能使稳定流形的闭包与适当的开圆盘族鲁棒相交。这种交性质使不同指标的鞍点的不变流形彼此靠近，并在构造鲁棒异维维数循环时发挥核心作用 [9, 12]。Chaidez 接触混合器 [17]使这种几何结构也适用于接触同胚。在我们的情形中，局部化的接触扰动将鲁棒邻近性转化为强异宿连接，而反方向的横截连接则补全一个余指标一周期，其鞍点的不稳定维数相差一。携带这一周期的光滑映射称为基点映射，并且

命题4.5 证明了它们在所选开集中的 $C^1$稠密性。精确的搅拌子和周期约定见第2.3 节及定义4.4。

**平移点及其增长**

固定任意定义 $\xi$ 的光滑接触形式 $\alpha$ 。其 ***Reeb*** 向量场 $R_\alpha$ 由$\alpha(R_\alpha) = 1$和 $\iota_{R_\alpha}\mathrm{d}\alpha = 0$ 唯一确定，我们将其流记为 $R_s^\alpha$。对于 $f \in \mathrm{Cont}^1(M,\ \xi)$，令 $\kappa_f\colon M \to (0,\ \infty)$ 为由 $f^*\alpha = \kappa_f\alpha$ 定义的连续共形因子 。 $f^n$ 的平移点-位移 对是满足以下条件的解 $(x,\ s) \in M \times \mathbb{R}$ :

$$f^n(x) = R_s^\alpha(x), \qquad \kappa_{f^n}(x) = 1. \tag{1.1}$$

相应的平移点 为 $x$，而 $s$ 是其时间位移。闭 Reeb 轨道上的点可能对应多个位移。因此，我们区分平移点-位移对的数量与其几何上不同的底层点的数量。对于 $s_* > 0$ ，定义

$$\mathrm{TP}_n(f; s_*) := \#\big\{(x,s) \in M \times (-s_*, s_*) : f^n(x) = R_s^\alpha(x),\ \kappa_{f^n}(x) = 1\big\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}. \tag{1.2}$$

在同一平移窗口内几何上不同的平移点的数量为

$$N_n(f; s_*) := \#\big\{x \in M : \kappa_{f^n}(x) = 1,\ \exists s \in (-s_*, s_*) \text{ with } f^n(x) = R_s^\alpha(x)\big\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}. \tag{1.3}$$

因此 $N_n$ 对每个点仅计数一次，不论其有多少个允许的平移量，而 $\mathrm{TP}_n$ 则对所有平移点-位移对计数。这两种计数均针对 $n$次迭代，且不施加最小周期条件；形式 $\alpha$ 始终固定。另请参阅 [2,第 3] 节和 [34]中的平移点约定。

**定理 1.2**。 设 $M = S^*S$ 是闭双曲曲面 $S$ 的单位余切丛，并如上赋予其典范接触结构 $\xi$。存在光滑函数 $u$： $M \to (0,\ \infty)$ 以及非空的 $C^1$-开集 $U \subset \mathrm{Cont}^1(M,\ \xi)$ ，使得对于接触形式 $\alpha = u\alpha_{\mathrm{can}}$，以下结论成立。固定 $s_* > 0$。对于每个正整数序列 $(a_n)_{n\geq 1}$ ，存在一个余集 $R_a \subset U$，满足

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{N_n(f; s_*)}{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\mathrm{TP}_n(f; s_*)}{a_n} = +\infty \qquad (f \in \mathcal{R}_a).$$

特别地，存在一个余集 $R_\infty \subset U$，使得

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\max\{1, N_n(f; s_*)\} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\max\{1, \mathrm{TP}_n(f; s_*)\} = +\infty \qquad (f \in \mathcal{R}_\infty).$$

定理 1.1 和 1.2 使用命题 4.1中的同一个开集，其中余集可能取决于序列和平移窗口。证明构造出具有非零局部 布劳威尔度的孤立平移对；这是检测局部映射 [22, 第 1]的零点的整数不变量。其同伦不变性给出稳健的局部计数。引理 7.2 随后界定平移重数，并将增长传递至不同的点。

对于 Reeb 流，Côté 未发表的笔记 [21, 定理 1] 描述了每个维数至少为三的闭连通接触流形上的接触形式：其周期不超过 $k$ 的闭 Reeb 轨道数超过任意给定的递增序列。这个累积流计数不同于定理 1.1 中的最小周期计数，也不同于定理 1.2中固定 Reeb 平移窗口内的计数。

**过滤Floer理论与短条**

上述几何计数的增长速度，可能远快于在固定作用量尺度下检测到的 Floer 复形部分。我们用条形码来体现这一区别：条形码是描述递增过滤中同调类诞生与消亡的区间多重集；参见 [32, 18, 38, 20, 19]。我们的作用量过滤是归一化的 Rabinowitz Floer 过滤，其临界点为平移点-位移对，且

其临界作用量等于 Reeb 位移。该构造采用 Albers–Frauenfelder 的扰动 Rabinowitz 泛函，以及 Albers–Merry 对其作出的接触几何解释 [1, 2]。

设 $(W,\lambda)$ 为一个李乌维尔域，这意味着 $W$ 是紧的，$\mathrm{d}\lambda$ 是辛形式，并且由 $\iota_Z \mathrm{d}\lambda = \lambda$ 定义的向量场 $Z$ 沿 $Y = \partial W$ 向外指。边界接触形式为 $\alpha = \lambda|_Y$；参见定义 2.8 和 [29]。用 $\mathrm{Cont}_0^\infty(Y, \ker\,\alpha)$ 表示那些可由光滑接触同伦与恒等映射相连的光滑接触同胚。对于 $f \in \mathrm{Cont}_0^\infty(Y, \ker\,\alpha)$，令

$$g = \log \kappa_f, \qquad G_n = \sum_{j=0}^{n-1} g \circ f^j, \qquad \Gamma_n = \{(x, f^n(x), G_n(x)) : x \in Y\}.$$

该图上的体积用固定的乘积黎曼度量测量。

我们使用解析可容许族，其精确定义见8.7节定义。这意味着，所指定的分时 Rabinowitz 泛函具备其中要求的正则化、有限窗口复形和延续理论。这一解析假设针对过滤构造，而条形码有限性将在后文证明。关联条形码$\mathcal{B}_n$ 在定义8.9 中定义：它取自作用过滤复形的完备化；对于退化成员，则通过瓶颈距离取极限。该距离使端点位移的最大值最小，并允许未匹配条带，其代价为长度的一半 [18, 第 4 节。2]其中包含条形 $[b,d)$ ，满足 $b \in \mathbb{R}$ 且 $b < d \le +\infty$。所有相关的自由同伦类均包括在内。对于紧区间 $I \subset \mathbb{R}$ 和 $\varepsilon > 0$，设

$$b_\varepsilon^I(\mathcal{B}_n) = \#\{[b,d) \in \mathcal{B}_n : b \in I,\ d - b \ge \varepsilon\}.$$

条形按重数计 算，且无限条的长度为无限。固定窗口条形码 $e$ 熵是

$$h_{\mathrm{TP}}^I(f;\alpha;\{K_{n,\cdot}\}) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \max\{1, b_\varepsilon^I(\mathcal{B}_n)\}.$$

这是 [20]，中条形码增长约定的作用量窗口版本，哈密顿量的选择$K_{n,\cdot}$ 构成过滤构造的一部分。我们将 $h_{\mathrm{top}}(f)$ 记为拓扑熵，其定义为在固定空间尺度下可区分的轨道段的指数增长率，再令该尺度趋于零 [28,第 3] 章。

**定理 1.3**。 设 $(W,\lambda)$ 为边界为 $(Y,\alpha)$ 的李乌维尔域，设 $f \in \mathrm{Cont}_0^\infty(Y, \ker\,\alpha)$，并选择一个如定义 *8.7* 中的解析可容许归一化族。对于每个紧 ***Reeb*** 位移区间 $I$ 以及每个 $\varepsilon > 0$，存在一个常数 $C_{I,\,\varepsilon}$ 其与 $n$ 无关，使得

$$b_\varepsilon^I(\mathcal{B}_n) \le C_{I,\varepsilon}\, \mathrm{Vol}_{\dim Y}(\Gamma_n).$$

因此，

$$h_{\mathrm{TP}}^I(f;\alpha;\{K_{n,\cdot}\}) \le h_{\mathrm{top}}(f).$$

该估计结合了 $\Gamma_n$ 的光滑圆紧化，以及一种接触断层图——一个有限维族，使参数化图交点横截，并将其平均数量限制在图体积之内。该断层图改造了 [20, 第 5 节2]中的拉格朗日方法。随后，条形码稳定性将这一交点上界转化为长度至少达到某个固定正值的条形，而图体积估计则将它们的指数增长与拓扑熵联系起来。

如果一个光滑映射的每个正迭代的每个平移点-位移对都强平移非退化，则称该映射为强平移非退化；这意味着该映射

$$(x,s) \longmapsto (f^n(x), R_s^\alpha(x), G_n(x))$$

在每个解处横截于 $\Delta_Y \times \{0\}$ ；参见定义2.10、命题A.3以及 [2]。对于有界开区间 $I$，定义

$$S_\varepsilon^I(n) = \#\{[b,d) \in \mathcal{B}_n : b \in I,\ 0 < d - b < \varepsilon\}.$$

我们将这些称为诞生于 $I$的短条。当我们改为允许任一有限端点位于 $I$ 中时，记作$S^I_{\varepsilon,\ \mathrm{end}}(n)$。

**定理 1.4**。 假设定理 *1.3* 的假设成立，并且 $f$ 是强平移非退化的。设 $I$ 是一个有界开区间。若某个紧区间 $J \subset I$ 满足

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \max\{1, \#\,\mathrm{TP}(f^n; J)\} = +\infty,$$

那么，对每个固定的 $\varepsilon > 0$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \max\{1, S^I_\varepsilon(n)\} = +\infty.$$

如果增长假设仅在 $I$ 中已知，则对 $S^I_{\varepsilon,\ \mathrm{end}}(n)$，同样的结论仍成立。

在定理 *1.2* 的情形下，可以选取一个 $C^1$-余集 $\widetilde{\mathcal{R}}_\infty \subset \mathcal{U}$，使得关于$\sim I = (-s_*,\ s_*)$ 的结论对每个 $f \in \mathcal{R}_\infty$ 均成立，只要其满足上述光滑性、同伦、非退化性和可容许性假设。

证明对条形码端点进行计数，并利用熵界控制长条的贡献。由于 $J$ 紧包含于 $I$，在 $J$ 中有端点的足够短的条形是在 $I$中出生的。

**概要**

第 2节确立了本文通篇采用的接触、动力系统和 Floer 约定。第 3 节的局部扰动和逼近引理支撑了持久混合器构型的构造，以及第 $C^1$4节中稠密的光滑基映射族的构造。从这些映射出发，第 5 节构造出具有平坦中心芽的长周期轨道。这些轨道为第 6 节的周期轨道增长定理和第 7节的平移点增长定理提供了共同的输入。

Floer 部分始于第 8节，其中图体积估计和归一化滤过构造在所述 Floer 假设下导出了固定窗口条形码熵界。基于这一界，第 9节在附加假设下推导出短条增长定理及其指定增长变体。附录 A验证了哈密顿归一化，并说明了延拓所需的解析性输入；附录 B 则确立了 Floer 论证中所用的完备化和端点计数结果。

## 致谢

两位作者谨向薛锦新教授和张金花教授致以诚挚谢意，感谢他们给予的慷慨帮助和宝贵意见。我们也感谢薛教授的基金资助——国家自然科学基金 11790273 和 12271285，以及新基石研究员项目。

## AI 披露

我们构建并完善了本文的主要框架。在 ChatGPT 的协助下，我们确定了合适形式的接触逼近引理，简化了第 5 节的策略，并构造了引理 8.4 中的浸没，从而得到所需的接触断层图。这个断层图的灵感来自Çineli–Ginzburg–Gürel的拉格朗日断层图。我们也感谢 ChatGPT 在具体计算、图表准备和稿件审阅方面提供的支持。

# 2 预备知识

## 2.1 接触同胚、Reeb 流与接触哈密顿流

我们回顾标准的接触几何约定；参见 [25,第 1.1 节和第 2.3]节或 [24]。在一个 $(2d+1)$ 维流形 $M$ 上，接触形式是一个光滑的 1-形式 $\alpha$，满足 $\alpha\wedge(\mathrm{d}\alpha)^d$ 处处非零。接触结构（或接触分布）是其极大非可积超平面分布 $\xi=\ker\alpha$。通过选取 $\alpha$的正倍数来指定其余定向。与 $\xi$ 相切的 $d$ 维子流形称为 Legendrian；参见 [25, 第 2.3]节。Reeb 向量场 $R_\alpha$ 定义为

$$\alpha(R_\alpha)=1,\qquad \iota_{R_\alpha}\mathrm{d}\alpha=0.$$

若一个 $C^r$ 微分同胚 $f$满足 $f^*\alpha=\kappa_f\alpha$，其中 $\kappa_f$是一个正函数，称为其共形因子，则称其为保余定向的接触同胚。若相对于 $\alpha$ 满足 $\kappa_f\equiv 1$，则称其为严格接触同胚。我们用 $\mathrm{Cont}^r(M,\xi)$ 表示保余定向接触同胚的空间，用 $\mathrm{Cont}^r(M,\alpha)$ 表示严格接触同胚的空间。对于一个 $C^1$ 接触同胚，我们起初只假设其共形因子连续，并将在第 3.3 节证明其具有更高的正则性。

给定 $H$ 上的一个光滑函数 $M$，与之关联的接触哈密顿向量场 $X_H$ 定义如下（采用我们的符号约定）：

$$\alpha(X_H)=H,\qquad \iota_{X_H}\mathrm{d}\alpha=(R_\alpha H)\alpha-\mathrm{d}H \tag{2.1}$$

其中， $R_\alpha$ 是 $\alpha$的 Reeb 向量场。

在达布坐标中，接触形式为 $\alpha_0=\mathrm{d}z-x\cdot\mathrm{d}y$，其 Reeb 向量场为 $R_{\alpha_0}=\partial_z$ [25,定理 2.5。1]。将此形式代入（2.1）得

$$\begin{cases}\dot{x}=(\partial_y H+x\partial_z H),\\ \dot{y}=-\partial_x H,\\ \dot{z}=H-x\partial_x H.\end{cases} \tag{2.2}$$

## 2.2 部分双曲性

我们沿用 [12, 27]中关于支配分裂和不变流形的约定。在 $M$上固定一个黎曼度量，令 $f\in\mathrm{Diff}^1(M)$，并令 $\Lambda$为一个紧致的 $f$-不变集。一个连续的 $Df$-不变分裂 $T_\Lambda M=E_1\oplus\cdots\oplus E_k$ 为维数均为非零常数的丛，若存在支配分裂于 $\Lambda$，使得存在 $N\geq 1$ 和 $0<\theta<1$ 满足

$$\|Df^N|_{E_i(x)}\|\cdot\|(Df^N|_{E_{i+1}(x)})^{-1}\|\leq\theta\qquad(x\in\Lambda,\ 1\leq i<k).$$

我们用 $E_1\prec\cdots\prec E_k$ 表示这一排序。

集合 $\Lambda$若存在这样的支配分裂，便称为部分双曲

$$T_\Lambda M=E^{ss}\oplus E^c\oplus E^{uu},\qquad E^{ss}\prec E^c\prec E^{uu},$$

其两端的丛分别一致收缩和扩张。我们记作 $d_s=\dim E^{ss}$、$d_c=\dim E^c$ 和 $d_u=\dim E^{uu}$。相应的强不变流形记为 $W^{ss}$，$W^{uu}$，下标 loc 表示局部片。在双曲周期点处，$W^s$，$W^u$ 表示完整的稳定流形和不稳定流形，它们也可能包含中心方向。

一个基本的例子是*Anosov* 流 [28, 第 17] 章。在闭流形上的流 $\varphi^t$ 由处处不为零的向量场 $C^1$ $X$ 生成，若它存在连续的$Anosov$ $D\varphi^t$-不变分裂 $TM=$

$E^{ss}\oplus\mathbb{R}X\oplus E^{uu}$，其中强丛非零，且存在常数 $C\geq 1,\lambda>0$，使得$\|D\varphi^t|_{E^{ss}(x)}\|\leq Ce^{-\lambda t}$并且$\|D\varphi^{-t}|_{E^{uu}(x)}\|\leq Ce^{-\lambda t}$ 对所有 $x\in M$ 和 $t\geq 0$ 均成立。由于 $D\varphi_x^t X(x)=X(\varphi^t(x))$，且 $X$ 有界且远离零，沿流方向的导数在正、负时间内均一致有界。因此，时间一映射是具有 $E^c=\mathbb{R}X$ 的部分双曲映射。

## 2.3 异维周期与搅拌器

设 $f$ 是 $M^d$ 上具有分裂 $TM=E^{ss}\oplus E^c\oplus E^{uu}$ 的部分双曲微分同胚。在本小节中，记 $\boldsymbol{d}=(d_s,\ d_c,\ d_u)$。因此 $d=d_c+d_s+d_u$，并且我们对鞍点使用不稳定指标。我们首先回顾搅拌子的拓扑性质，并解释它在产生异宿连接中的作用。然后描述确保这一性质的几何构造。

**异宿维数循环**

异宿维数循环由两个指标不同的传递双曲集 $\Lambda_1$，$\Lambda_2$ 组成，它们的不变流形沿两个方向相交，即 $W^s(\Lambda_1)\cap W^u(\Lambda_2)\neq\varnothing$ 以及 $W^s(\Lambda_2)\cap W^u(\Lambda_1)\neq\varnothing$。对于与周期鞍点相关的循环，我们采用以下横截相交和准横截相交构型，参见 [11, 第 192]页。

**定义 2.1**。与一对鞍点相关的异维循环，或称鞍点循环，由位于不同轨道上的双曲周期点 $P$、$Q$ 组成，满足

- 维 $W^s(P)=d_c+d_s$和维 $W^u(P)=d_u$;
- 维 $W^s(Q)=d_s$和维 $W^u(Q)=d_c+d_u$;
- $W^s(P)$ 与 $W^u(Q)$ 有非空的横截相交;
- $W^u(P)$ 与 $W^s(Q)$ 有非空的准横截交集 $a$，这意味着在选定的异宿点 $a$ 处，$T_aW^u(P)\cap T_aW^s(Q)=\{0\}$。

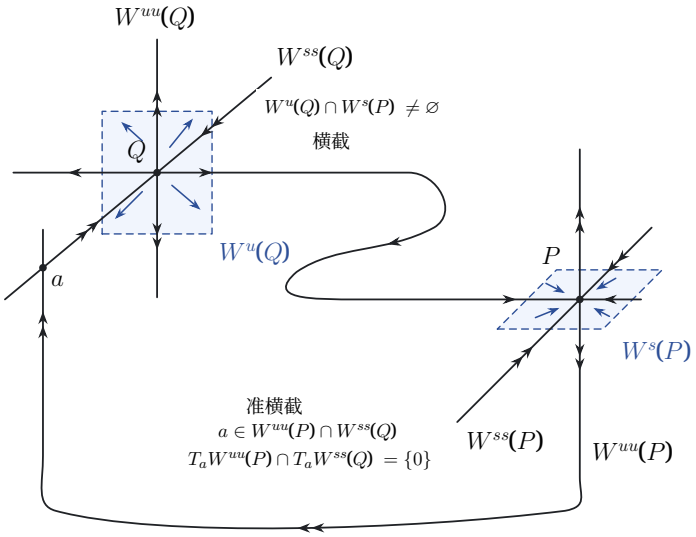



图 1：**异维鞍点循环**。在示意图中，从 $Q$ 到 $P$ 的连接是横截的，而 $a\in W^{uu}(P)\cap W^{ss}(Q)$ 是准横截的。

在此构型中，余指标，即不稳定指标之差，为 $d_c$。在本小节余下部分中，我们取

$$d_c = 1$$

并且在必要时经过迭代后，假设 $P$、$Q$ 都是不动点。因此 $P$ 是中心收缩的，而 $Q$ 是中心扩张的，其中 $W^u(P) = W^{uu}(P)$ 以及 $W^s(Q) = W^{ss}(Q)$。图 1 区分了从 $Q$ 到 $P$ 的横截连接与经过 $a$的准横截强连接；后者缺乏$C^1$-鲁棒性，这正是搅拌子机制的动机。

对于 $k \geq 1$，令 $D^k$ 为一个闭单位圆盘，并令 $\mathcal{D}^k(M)$ 表示其 $C^1$ 嵌入像构成的空间，赋予 $C^1$ 拓扑。固定一个双曲鞍点 $Q$，其 $\mathrm{ind}_u(Q)$ 为 $= d_u + 1$。
定义 2.2（[12], 定义 6.11）。我们称 $f$ 具有一个与 $Q$ 相关的拓扑搅拌器 $\mathfrak{B}$，如果存在一个 $C^1$-邻域 U（属于 $f$）和一个非空的 $C^1$-开族 $\mathsf{R} \subset \mathsf{D}^{d_u}(M)$，使得每个$G \in \mathsf{U}$以及每个圆盘 $D \in \mathsf{R}$ 都满足 $D \cap W^s(Q_G, G) \neq \varnothing$，其中 $Q_G$ 是同一周期的唯一邻近双曲周期点（即 $Q$的双曲延拓）。

族 R 是 $\mathfrak{B} = (f, Q, \mathsf{U}, \mathsf{R})$ 的叠加区域。虽然 $\dim W^s(Q) = d_s$，但其闭包会鲁棒地与一个开族的 $d_u$-圆盘相交，就这一点而言，它的表现仿佛多了一个维度。当 $W^{uu}(P)$ 包含 R 中的一个圆盘时，$W^{ss}(Q)$ 中的点可以任意接近该圆盘，而且这种邻近性在 $C^1$ 扰动下仍然保持。非空的强连接 $W^{uu}(P) \cap W^{ss}(Q)$ 必然在 $M$ 中是非横截的，因为这些流形的维数之和为 $d - 1$。在第 4.2 节中，通过轨道选择和局部接触扰动，可将这种鲁棒邻近性转化为这样的连接。

我们称之为中心不稳定搅拌子，因为参考鞍点具有扩张的中心方向。Bonatti– Díaz 将其称为*cs*-搅拌器，见 [8], ，以强调其稳定流形性质。下面的几何判据沿用了他们的构造。

**锥场**

设 $L^s \oplus L^c \oplus L^u$ 是一个连续分裂，不一定是 $Df$-不变的，它定义在一个坐标邻域上，维数为 $(d_s, 1, d_u)$。按照此分裂记 $v = v^s + v^c + v^u$。对于$0 < \varepsilon < 1$，定义其关联的 $\varepsilon$-锥场为

$$\mathcal{C}^{ss}(p) = \{v : \|v^c\| + \|v^u\| \leq \varepsilon \|v^s\|\}, \qquad \mathcal{C}^{cs}(p) = \{v : \|v^u\| \leq \varepsilon(\|v^c\| + \|v^s\|)\}.$$

锥场$\mathcal{C}^{uu}(p)$ 和 $\mathcal{C}^{cu}$ 也以类似方式定义。令 $\mathcal{C}^c = \mathcal{C}^{cs} \cap \mathcal{C}^{cu}$。当分裂是部分双曲分裂，即 $L^s = E^{ss}$，$L^c = E^c$ 且 $L^u = E^{uu}$ 时，这些锥场称为部分双曲 $\varepsilon$-锥场。

设 $F = f^r$ 是集合 $K$ 上的一个回归分支，且 $K$ 和 $F(K)$ 位于坐标邻域内。根据 [8]，的条件（H3），我们要求扩张锥具有正向不变性，稳定锥具有反向不变性。具体而言，对每个 $p \in K$，

$$\begin{aligned} DF|_p\big(\mathcal{C}^{cu}(p) \setminus \{0\}\big) &\subset \operatorname{int} \mathcal{C}^{cu}(F(p)), \\ DF|_p\big(\mathcal{C}^{uu}(p) \setminus \{0\}\big) &\subset \operatorname{int} \mathcal{C}^{uu}(F(p)), \\ D(F^{-1})|_{F(p)}\big(\mathcal{C}^{ss}(F(p)) \setminus \{0\}\big) &\subset \operatorname{int} \mathcal{C}^{ss}(p). \end{aligned}$$

这里，内部取在切纤维中。我们还要求存在一个常数 $\lambda > 1$，使得

$$\|DF|_p v\| \geq \lambda \|v\| \quad (v \in \mathcal{C}^{cu}(p)), \qquad \|D(F^{-1})|_{F(p)} w\| \geq \lambda \|w\| \quad (w \in \mathcal{C}^{ss}(F(p))).$$

这些将称为分支 $F$ 的中心-不稳定锥条件 。通过反转时间并交换强方向，可得到中心稳定锥条件 。特别地，向前的中心-不稳定锥不变性与向后的中心稳定锥不变性可以同时成立。

**局部坐标图与分量条件**

在 $Q$ 的邻域 $U'$ 中选取坐标 $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d_s} \times \mathbb{R}^{d_u}$，其中 $x$ 是中心坐标，并考虑盒

$$U = I \times D_s \times D_u, \qquad I = [-2, 2], \quad D_s = [-2, 2]^{d_s}, \quad D_u = [-2, 2]^{d_u}.$$

我们允许使用盒和带角圆盘。坐标图延伸至 $U$ 之外，锥场是围绕其坐标分裂 $T\mathbb{R}^{d_s} \oplus T\mathbb{R} \oplus T\mathbb{R}^{d_u}$ 的锥场。在这一构造中，范数和长度均采用坐标图的乘积欧氏度量进行测量。定义稳定面、中心面和不稳定面如下：

$$\partial^s U = I \times \partial D_s \times D_u, \qquad \partial^c U = \partial I \times D_s \times D_u, \qquad \partial^u U = I \times D_s \times \partial D_u,$$

并记为 $\partial^{\pm} U = \{\pm 2\} \times D_s \times D_u$ 分别表示右侧和左侧的中心面，如图 2 所示 .

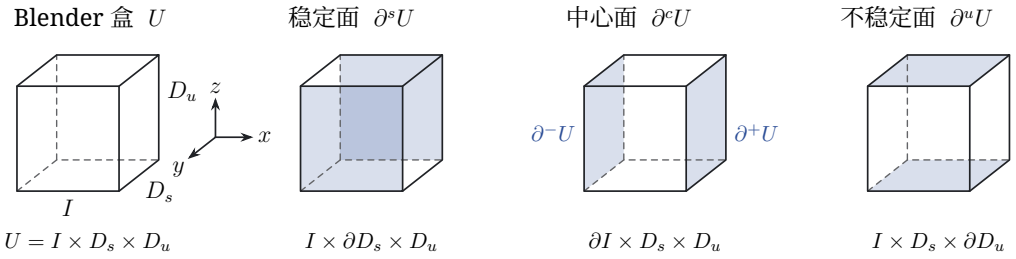



图 2：**Blender 盒及其边界面**。Blender 盒 $U = I \times D_s \times D_u$ 具有分别标记为 $x$、$y$、$z$ 的中心方向、稳定方向和不稳定方向。最后三个立方体分别突出显示稳定面 $\partial^s U$、中心面 $\partial^c U$ 和不稳定面 $\partial^u U$。

主分支具有一个紧致区域 $A \subset U$，使得 $f(A)$ 是 $f(U) \cap U$ 的一个连通分支，包含 $Q$，并满足

$$f(A) \cap \big(\partial^s U \cup f(\partial^c U \cup \partial^u U)\big) = \varnothing.$$

结合锥条件，这些条件给出了 [8, 节 1]的主交叉几何。主分支选取一个局部稳定圆盘 $W_0^s(Q)$ 作为参考稳定圆盘。该圆盘沿稳定方向穿过 $U$，与 $\mathcal{C}^{ss}$相切，并避开 $\partial^c U \cup \partial^u U$。我们称这样的盒 $Q$-相容。

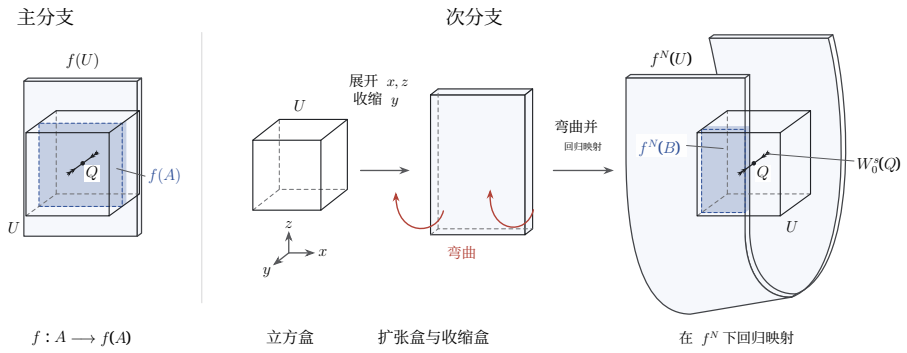



图 3：**主分支与次级搅拌器分支**。主分支 $f(A) \subset f(U) \cap U$包含 $Q$，而次级分支 $f^N(B) \subset f^N(U) \cap U$避开 $Q$并与 $W_0^s(Q)$ 相交。

次分支有一个紧致区域 $B \subset U$和一个回归时间 $N > 1$，使得 $f^N(B)$ 是 $f^N(U) \cap U$的另一个连通分支，与 $Q$不相交，并与 $W_0^s(Q)$相交。其穿越条件为

$$f^N(B) \cap \left(\partial^s U \cup \partial^+ U \cup f^N(\partial^u U)\right) = \varnothing.$$

这些边界避让条件可防止轨道从稳定面或右侧中央面逃逸，也可避免其在不稳定边界的像处被截断。我们称之为 $W^s(Q)$-回归 分支。这里， $N$是一个指定的分支时间，不一定是首次返回时间；轨道在初次访问与最终访问之间可以离开 $U$ 。除了存在回归映射外，几何构造还假设满足这些穿越条件。

各分支的动力学如图3所示。

**叠加区域**

穿过 $U$ 的竖直圆盘是一个 $d_u$ 维圆盘，它是关于 $D_u$ 的图，与 $\mathsf{C}^{uu}$ 相切，边界位于 $\partial^u U$ 上，并且与 $\partial^s U \cup \partial^c U$ 不相交。令 $\mathsf{R}'$ 表示这一族穿越圆盘。我们选取足够小的锥大小 $\varepsilon$，使得与 $W_0^s(Q)$ 不相交的竖直圆盘分为两个同伦类，分别由 $\partial^- U$ 和 $\partial^+ U$ 附近的圆盘代表。这些同伦经过避开 $W_0^s(Q)$ 的竖直圆盘，同时其边界始终位于 $\partial^u U$ 上。按照其所属的类，如 [8, 第 1 节 1] 所示，这样的圆盘或者位于左侧，或者位于右侧。

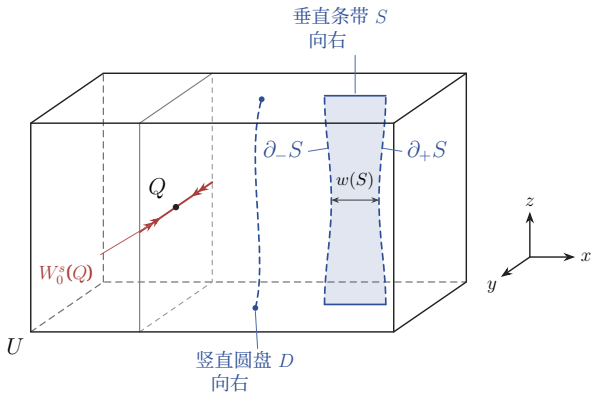



图4：**竖直圆盘与条带**。竖直圆盘 $D$ 和条带 $S$ 位于参考稳定圆盘 $W_0^s(Q)$ 的右侧，其不稳定边界位于 $\partial^u U$ 上。条带的垂直边界分支为 $\partial_- S$ 和 $\partial_+ S$，而 $w(S)$ 表示其宽度。

一条经过 $U$ 的垂直条带是一个嵌入像 $S = \Psi([-1,1] \times D_u) \subset U$，与$\mathcal{C}^{cu}$相切，并且每个切片 $\Psi(\{t\} \times D_u)$ 都是一个竖直圆盘。它的两个垂直边界分支为 $\partial_\pm S = \Psi(\{\pm 1\} \times D_u)$，其余边界位于 $\partial^u U$ 上。将这些条带组成的族记为$\mathcal{S}$ 。如果一个条带的所有竖直切片都位于右侧，则称该条带位于右侧。这些定义允许圆盘和条带在其锥体内弯曲，因此在对映射 $f$ 进行小扰动后，它们仍会存在于相应的族中。

宽度 $w(S)$ 是连接 $\partial_- S$ 与 $\partial_+ S$且位于 $S$ 中的曲线长度的下确界。对于固定的盒和足够窄的坐标锥，所有此类条带的宽度均有统一上界 $\nu$ ，见 [8, 引理 1.4]。此外，与中心面分离的竖直圆盘可以沿中心方向加厚为条带。取更薄的子条带，可得到收敛于该圆盘的条带（按豪斯多夫距离衡量），如 [8,引理 1.5]所示。

**动力学搅拌器**

现在，我们按照 [8]上文的分支形式，将这些要素整合为一个几何判据。

**定义 2.3**。 中心-不稳定动力学搅拌器是一个元组 $\mathcal{B} = (f,\ Q,\ U,\ A,\ B,\ N,\ \varepsilon,\ \lambda)$，满足以下条件。

**(H1)** 主分支 $f\colon A \to f(A)$ 满足上述与 $Q$ 相容的穿越条件。

**(H2)** 次分支 $f^N\colon B \to f^N(B)$ 满足上述 $W^s(Q)$-回归穿越条件。

**(H3)** 两个分支都满足中心-不稳定锥条件，且具有相同的锥大小 $\varepsilon$ 和膨胀常数 $\lambda > 1$。

**(H4)** 存在 $\partial^- U$ 的一个邻域 $U_-$，使得每个经过 $U$ 且位于 $W_0^s(Q)$ 右侧的竖直圆盘都与 $U_-$不相交。

（H5）存在邻域 $U_+$和 $\partial^+ U$的邻域 $U_0$（ $W_0^s$），使得每个向右满足$\mathcal{R}'$的竖直圆盘 $D \in$至少满足以下备择情形之一：

（i） $f$（$D$）$\cap f$（$A$）包含一个穿过 $U$、位于 $W_0^s$（$Q$）右侧且与 $U_+$不相交的竖直圆盘；
（ii） $f^N$（$D$）$\cap f^N$（$B$）包含一个穿过 $U$、位于 $W_0^s$（$Q$）右侧且与$U_0$不相交的竖直圆盘。

我们将（H5）称为分支分 *dichotomy*。

为了定义中心-稳定动力学搅拌器，我们将这一构造应用于 $f^{-1}$，并交换强稳定方向与强不稳定方向的作用。若 $A,\ B$ 是相应前向分支 $f|_A$和 $f^N|_B$的定义域，则当逆映射的元组（$f^{-1},\ Q,\ U,\ f$（$A$） $f^N$（$B$） $N,\ \varepsilon,\ \lambda$）构成中心-不稳定动力学搅拌器时，我们称（$f,\ Q,\ U,\ A,\ B,\ N,\ \varepsilon,\ \lambda$）为中心-稳定动力学搅拌器。

本小节的其余部分讨论中心不稳定搅拌器，其中心方向是扩张的，如定义 2.2中所述。

（H4）–（H5）中的固定邻域提供了在扰动下保持性质所需的分离余量。为了了解这些假设如何作用于条带 $S$，考察其竖直切片的像。对于每个切片，二分法给出一个穿越分支，而边界避让条件使选定分支能够贯穿整个条带延续。如果一个次分支到达左侧中央面，则它必定穿过 $W_0^s$（$Q$），而无法到达右侧中央面。如果不存在次级右侧分支，则主分支给出所需的族，其唯一性和连续依赖性已在 [8, 引理 16]中得到证明。

**引理 2.4**。 位于 $W_0^s$（$Q$） 右侧的每个条带 $S \in \mathcal{S}$ 都与 $W^s$（$Q$） 横截相交。

证明。 由 [8, 引理 1 的分支论证，7], 以下两种备择情形之一成立。

**(a)** 要么 $f(S) \cup f^N(S)$ 与 $W_0^s(Q)$ 相交，要么

**(b)** 这些像中的一个包含一个向右延伸的条带 $S_1 \in \mathcal{S}$，其两个垂直边界分支继承自 $S$ 的两个垂直边界分支的像。

在 **(b)** 中， $S_1$ 中连接其垂直边界分支的每条曲线，在选定分支下的逆像都是 $S$ 中连接其垂直边界分支的曲线。因此，$\mathcal{C}^{cu}$ 上的膨胀给出

$$w(S_1) \geq \lambda w(S).$$

假设 $S$ 与 $W^s(Q)$不相交。于是，其正向像也都与该不变流形不相交，因此反复应用 (b) 可得到条带 $S_j$ ，其 $w(S_j) \geq \lambda^j w(S)$的宽度。这些宽度与一致上界 $\nu$矛盾。因此，某个选定的像必与 $W_0^s(Q)$ 相交，而互补的稳定锥和中心不稳定锥使该交点横截。将此交点拉回，即得到与 $W^s(Q)$的所需交点，正如 [8, 引理 1。8]所述。

□

现在固定一个竖直圆盘 $D \in \mathcal{R}'$ 在右侧。根据 [8, 引理 1.5], 它周围存在任意薄的条带$S_j \in \mathcal{S}$，仍位于右侧，且豪斯多夫距离为 $d_H(S_j, D) \to 0$。利用引理 $a_j \in S_j \cap W^s(Q)$选择 2.4。由紧致性可取一个子列，收敛到 $D \cap W^s(Q)$中的一点。这就是引理 1. [8, 中从条带到圆盘的过渡。9]。

为获得在环境空间 $\mathrm{D}^{d_u}(M)$ 中为开的叠加区域，将这样一个圆盘沿着 $U$的不稳定面稍微延伸，同时与其他面以及 $W_0^s(Q)$ 保持正的间距。于是，每个充分 $C^1$ 接近的嵌入圆盘都包含一个向右的 $U$ 竖直横穿子圆盘。我们可以选择延伸后的圆盘，使其相切点严格位于不稳定锥内，并将所得的非空开族记作 R。根据 [8, 引理 1.11], , 所有几何条件都得以保持，包括固定的分离邻域。必要时缩小该族和扰动邻域后，同样的构造适用于每个邻近映射 $G$，其参考圆盘为 $W_0^s(Q_G, G)$。因此，每个 $D \in \mathrm{R}$ 都与 $W^s(Q_G, G)$ 相交，从而得到定义 2.2 意义下的拓扑搅拌子。

**定理 2.5。** 每个中心-不稳定动力学搅拌器都是定义 *2.2* 意义下的中心不稳定拓扑搅拌子。

**定义 2.6。** 若双曲鞍点 $P$与搅拌子 $\mathcal{B}$相连通，则 $\mathrm{ind}_u(P) = d_u$，且 $W^u(P)$ 包含一个圆盘 $D$ ，该圆盘位于$\mathcal{B}$的叠加区域$\mathcal{R}$ 中。

**L引理 2.7。** 若鞍点 $P$与关联于 $Q$ 的搅拌子相连，则 $W^s(P) \subset W^s(Q$ ).

证明。设 $p \in W^s(P)$，并设 $V$是 $p$ 的一个开邻域。取一个经过 $p$ 且与 $W^s(P)$ 横截的小 $d_u$-圆盘 $D_1 \subset V$，并设 $D_3 \subset W^u(P)$ 是 R 中的一个圆盘。由倾斜引理，对于适当的 $m \geq 1$，迭代 $f^m(D_1)$ 包含一个与 $D_3$ 足够接近、因而属于开族 R 的圆盘 $D_2$ 。因此 $D_2$ 与 $W^s(Q)$ 相交，而包含 $D_2$ 的开集 $f^m(V)$ 因此与 $W^s(Q)$ 相交。不变性给出 $V \cap W^s(Q) \neq \varnothing$，从而证明了包含关系。

□

见证该连接的紧致圆盘在 $f$ 的小扰动下仍然存在，而 $\mathcal{R}$ 的开性使该连接具有鲁棒性。因此，引理 2.7 适用于这些延拓。这正是第 4 节中构造基点映射的数学本质。

## 2.4 Liouville 填充与 Floer 约定

定义 2.8（Liouville 填充与完备化）。按照 [29], 的定义，李乌维尔域是一个带边界 $Y = \partial W$ 的紧流形 $W$，配备一个 1-形式 $\lambda$，使得 $\lambda \, \mathrm{d}\, \omega =$ 是辛的，并且⌒李乌维尔向量场 $Z$（定义为 $\iota_Z \omega = \lambda$）在 $Y$ 上指向外侧。其完备化 $W$ 通过粘接端部 $[1, \infty) \times Y$得到，在该端部上 $\lambda = r\alpha$，且 $\alpha = \lambda|_Y$。我们将 $Y$ 的一个双侧领圈与 $(1-\delta, 1+\delta) \times Y$ 认同。

（$Y$， $\alpha$）的辛化为（（0， ∞）$\times Y$，$\mathrm{d}$（$r\alpha$））[25]。对于任意保持 $\xi = \ker \alpha$余定向的接触同胚 $\varphi$，记作 $\varphi^* \alpha = \kappa_\varphi \alpha = e^{g_\varphi} \alpha$。考虑固定映射 $f$时，我们简记$g = g_f$。我们固定 $\omega = \mathrm{d}\lambda$ 以及辛哈密顿约定

$$\iota_{X_H} \omega = -\mathrm{d}H. \tag{2.3}$$

记 $R_s^\alpha$为由 $\alpha$确定的 Reeb 流。恒等式 $\mathrm{d}(r-1) = \mathrm{d}r$ 蕴含 $r$ 和 $r-1$ 具有相同的哈密顿向量场。我们的符号约定在辛化上给出 $X_r = X_{r-1} = R_\alpha$。我们选择 $r-1$ 作为定义哈密顿量，因为 $\Sigma = \{r=1\} = (r-1)^{-1}(0)$。

**定义 2.9**（接触共形因子和平移点）。设 $f \in \mathrm{Cont}(Y,\xi)$ 满足 $f^*\alpha = e^g\alpha$，并且对于 $n \in \mathbb{N}$，令

$$G_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} g(f^j x), \qquad (f^n)^*\alpha = e^{G_n}\alpha. \tag{2.4}$$

$f^n$ 的一个平移点对 是指满足下列条件的一对 $(x,\eta) \in Y \times \mathbb{R}$

$$f^n(x) = R_\eta^\alpha(x), \qquad G_n(x) = 0. \tag{2.5}$$

我们用 $\mathrm{TP}(f^n;\alpha)$ 表示此集合，并类似地用 $\mathrm{TP}(\varphi;\alpha)$ 表示任意接触同胚 $\varphi$ 的相应集合。当接触形式固定时，我们记 $\mathrm{TP}(\varphi;I) := \{(x,\eta) \in \mathrm{TP}(\varphi;\alpha) : \eta \in I\}$。若某个 $\eta$ 使得 $(x,\eta)$ 成为平移点对，则称点 $x \in Y$ 是 $f^n$ 关于 $\alpha$ 的平移点。

**定义 2.10**（非退化平移对）。设

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n : Y \times \mathbb{R} &\longrightarrow Y \times Y \times \mathbb{R}, \\ (x,\eta) &\longmapsto \big(f^n(x), R_\eta^\alpha(x), G_n(x)\big). \end{aligned}$$

若非退化，则称平移点对 $(x,\eta)$ 满足：$\mathcal{T}_n$ 在子流形 $\Delta_Y \times \{0\}$ 上于 $(x,\eta)$ 处横截，其中 $\Delta_Y = \{(y,y) : y \in Y\}$。等价地，下述齐次线性系统只有平凡解 $(\zeta,\sigma) \in T_xY \times \mathbb{R}$。

$$\begin{cases} Df_x^n\zeta - DR_\eta^\alpha|_x\zeta - \sigma R_\alpha(f^n(x)) = 0, \\ \mathrm{d}G_n(x)\zeta = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

如果一个映射对每个正迭代的每一对都满足此条件，则称其为强平移非退化。这是平移点对非退化约定的逐迭代形式。命题A.3 证明了平移点对非退化性与临界点非退化性等价。

$\widehat{\ }$定义哈密顿量 $F_\Sigma$ 是定义在 $W$上的函数，而接触哈密顿量 $k_z$ 是定义在 $Y$上的函数，其时间一映射为 $\varphi_z$。我们用 $u$ 表示普通环，用 $z \in \mathbb{B} \subset \mathbb{R}^N$表示断层成像参数。哈密顿量$K_{n,t}$ 和$L_{z,t}$ 分别生成 $f^n$ 和 $\varphi_z$的逆提升，其时间支集$\widehat{\ }$在第8.3小节中给出。我们用 $X_A$ 表示 $W$ 上的辛哈密顿向量场，用 $X_k^\alpha$ 表示 $Y$上的接触哈密顿向量场。

**引理 2.11**。若 $\alpha = u\alpha_{\mathrm{can}}$ 在 $M = S^*S$上，且 $u > 0$ 光滑，则$(M,\alpha)$ 是 $T^*S$中某个李乌维尔域的接触边界。

证明。令 $\iota_u(q,p) = (q,u(q,p)p)$ 对于 $|p|_h = 1$。典范形式满足 $\iota_u^*\lambda_{\mathrm{can}} = u\alpha_{\mathrm{can}}$。径向图 $\iota_u(S^*S)$ 围成一个紧的纤维方向星形域，该域由零截面以及所有满足 $0 < r \le u(q,p)$、$|p|_h = 1$ 的 $rp$ 组成。该域的边界光滑，且径向李乌维尔向量场沿其边界向外横截。配备限制的典范形式后，它便给出了所需的填充。

□

# 3 接触引理

我们建立构造周期点所需的接触扰动和逼近引理。这些引理考虑了由接触条件产生的导数约束，而这些约束阻碍了直接应用标准扰动工具，例如在 $\mathrm{Diff}^1(M)$ 中表述的 Franks 引理和连接引理。我们在标准接触模型（$\mathbb{R}^{2d+1}$，$\mathrm{d}z - x\cdot\mathrm{d}y$）中开展工作。

## 3.1 接触提升

在第 5.4节中，我们将以下引理应用于局部不变中心曲线上的逆返回芽。该引理通过一个具有紧支集的 $\psi$-小接触映射，在坐标轴上实现了一维芽 $\psi(0)=0$ 和 $\psi'(0)=1$。 $C^1$-小接触映射。

设 $\alpha_0=\mathrm{d}t-x\cdot\mathrm{d}y$。对于任意保定向的 $C^2$ 微分同胚 $\psi:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R},0)$，我们将其标准接触提升定义为

$$\mathcal{L}_\psi(x,y,t)=(\psi'(t)x,y,\psi(t)). \tag{3.1}$$

直接计算可得 $\mathcal{L}_\psi^*\alpha_0=\psi'(t)\alpha_0$，因此 $\mathcal{L}_\psi$ 是接触的。

**引理 3.1** (接触提升)。 考虑 $\alpha_0=\mathrm{d}t-x\cdot\mathrm{d}y$ 上的标准接触形式，其中定义域为 $(x,y,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$。设 $\psi:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R},0)$ 是一个局部 $C^2$ 微分同胚，且满足 $\psi'(0)=1$。那么，对每个 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$ 及一个提升 $L_{\psi,\delta}:\mathbb{R}^{2d+1}\to\mathbb{R}^{2d+1}$，使得

- $L_{\psi,\delta}$ 是接触的，并且紧支于原点的某个小邻域 $U_{cc}$ 内；
- $\|\mathcal{L}_{\psi,\ \delta}-\mathrm{id}\|_{C^1}\le\varepsilon$;
- $\mathcal{L}_{\psi,\ \delta}(0,\ 0,\ t)=(0,\ 0,\ \psi(t))$ 对于 $|t|\le\delta$。

更一般地，对于每个整数 $k\ge1$，如果 $\psi$ 是 $C^{k+1}$，则可以选择该提升使其 $C^k$；当 $\psi$ 是 $C^\infty$时，也可以选择使其 $C^\infty$。

证明。 在 $[-1,1]$ 上选取固定的光滑截断函数 $\zeta=1$，其支集包含于 $(-2,\ 2)$；并在 $B_1^{2d}(0)$ 上选取光滑截断函数 $\chi=1$，其支集包含于 $B_2^{2d}(0)$。令 $e_\delta(t)=\zeta(t/\delta)(\psi(t)-t)$，并令 $\varphi_s(t)=t+se_\delta(t),\ 0\le s\le1$。由泰勒定理可得 $\|e_\delta\|_{C^0}\le C\delta^2$、 $\|e_\delta'\|_{C^0}\le C\delta$ 和 $\|e_\delta''\|_{C^0}\le C$。因此，当 $\delta$ 足够小时， $\varphi_s$ 递增，且其欧拉速度 $v_s=e_\delta\circ\varphi_s^{-1}$ 关于 $s$ 一致满足，

$$\|v_s\|_{C^0}\le C\delta^2,\qquad \|v_s'\|_{C^0}\le C\delta,\qquad \|v_s''\|_{C^0}\le C. \tag{3.2}$$

令 $\rho=\sqrt{\delta},\ \chi_\rho(x,y)=\chi(x/\rho,y/\rho)$，并使用紧支撑接触哈密顿量 $K_s(x,y,t)=\chi_\rho(x,y)v_s(t)$。其向量场为

$$X_{K_s}=(v_s\partial_y\chi_\rho+x\chi_\rho v_s')\cdot\partial_x-v_s\partial_x\chi_\rho\cdot\partial_y+(\chi_\rho-x\cdot\partial_x\chi_\rho)v_s\partial_t. \tag{3.3}$$

由于 $|x|\le2\rho$ 在支集上成立，且 $\|D^j\chi_\rho\|_{C^0}\le C\rho^{-j}$ 对 $j=1$成立，2、(3.2) 和 (3.3) 给出

$$\sup_s\|X_{K_s}\|_{C^0}\le C\delta^{3/2},\qquad \sup_s\|X_{K_s}\|_{C^1}\le C\sqrt{\delta}. \tag{3.4}$$

因此，由流方程和Gronwall不等式，时间一映射 $h_{\delta,1}$ 与恒等映射 $C^1$ 相差不超过 $C^1$。特别地，$\|h_{\delta,1}-\mathrm{id}\|_{C^1}\le e^{C\sqrt{\delta}}-1$。在中心轴附近，向量场为 $xv_s'(t)\cdot\partial_x+v_s(t)\partial_t$，其流是 $\varphi_s$ 的标准提升。因此，对于 $|t|\le\delta$，有 $h_{\delta,1}(0,0,t)=(0,0,\psi(t))$。$h_{\delta,1}$ 的支集包含于 $B^{2d}_{2\sqrt{\delta}}(0)\times(-2\delta,2\delta)$ 中，而后者可包含于原点的任意指定邻域内。取 $L_{\psi,\delta}=h_{\delta,1}$ 并缩小 $\delta$，即可得到所需界。

如果 $\psi$ 是 $C^{k+1}$，那么 $v_s$、 $K_s$ 在空间中是 $C^{k+1}$。向量场 $X_{K_s}$ 和流 $h_{\delta,\ s}$ 因此是$C^k$。这也适用于光滑情形，所得映射也是光滑的。 □

## 3.2 一个接触连接引理

以下点移动引理通过支集位于固定达布邻域内的接触扰动，实现微小位移。我们在第 4.2 节和第 5.2节中都会用到它。

**引理 3.2**（点移动）。设 $V$ 是点 $x_*$ 的一个达布邻域，并设 $y_j \to x_*$。对于所有充分大的 $j$，存在光滑接触同胚 $h_j$，使得

$$\operatorname{supp}(h_j) \subset\subset V, \qquad h_j(x_*) = y_j, \qquad h_j \longrightarrow \mathrm{id} \quad in\ C^1.$$

证明。以 $x_*$ 为中心取达布坐标，使 $\alpha_0 = \mathrm{d}z - x \cdot \mathrm{d}y$，并记 $y_j = (a_j, b_j, c_j)$。选取一个固定的光滑截断函数 $\chi$，其支集包含于该坐标图中，且在原点的某个邻域上恒等于一。令

$$H_j(x, y, z) = \chi(x, y, z)\Big(-b_j \cdot x + a_j \cdot y + c_j - \frac{1}{2} a_j \cdot b_j\Big).$$

由于 $\chi = 1$ 在 $x_*$ 附近，始于原点的接触哈密顿轨迹为

$$x(s) = s a_j, \qquad y(s) = s b_j, \qquad z(s) = s\Big(c_j - \frac{1}{2} a_j \cdot b_j\Big) + \frac{s^2}{2} a_j \cdot b_j.$$

当 $j$ 足够大时，该轨迹在 $\chi = 1$ 区域内保持 $0 \le s \le 1$，其终点为 $y_j$。由于截断函数 $\chi$ 固定，

$$\|H_j\|_{C^2} \le C_\chi\big(|a_j| + |b_j| + |c_j| + |a_j|\,|b_j|\big) \longrightarrow 0.$$

因此，接触哈密顿向量场 $X_{H_j}$ 在 $C^1$ 中趋于零，其时间一映射在 $C^1$ 中趋于恒等映射。用达布坐标图共轭这些映射，并将其按恒等映射延拓，即可证明所述结论。

□

## 3.3 接触逼近

我们在通常的 $C^1$ 拓扑下证明相对光滑化。向量场或曲线称为水平的，若其与 $\xi = \ker \alpha$相切；参见 [25, 第 2 节。1]。对于连续函数 $\lambda$， $X\lambda$ 表示沿光滑水平向量场 $X$的流求导。固定的光滑接触形式给出 $TM = \xi \oplus \mathbb{R}R_\alpha$。在达布坐标 $(q, p, z)$中，黎曼线为 $\mathbb{R}\partial_z$，而垂直拉格朗日子空间张成$\{\partial_{p_i}\}$包含于 $\xi$。

**引理 3.3**（共形因子的赫尔德连续性）。设 $(M^{2d+1}, \alpha)$ 为光滑接触流形，满足 $d \ge 1$，且 $f$ 是保余定向的 $C^1$ 接触同胚，满足 $f^*\alpha = \lambda\alpha$，其中$\lambda > 0$ 最初只假设为连续。于是 $\lambda \in C^{0,\,1/2}$ 局部。

证明。恒等式 $\mathrm{d}(f^*\alpha) = f^*(\mathrm{d}\alpha)$ 在分布意义下成立。因此，

$$\mathrm{d}\lambda \wedge \alpha = f^*(\mathrm{d}\alpha) - \lambda\,\mathrm{d}\alpha. \tag{3.5}$$

若 $X$ 是一个光滑向量场，且与 $\xi = \ker \alpha$ 相切，而 $R_\alpha$ 是 Reeb 向量场，则在 $(X, R_\alpha)$ 上取值可得 s

$$X\lambda = f^*(\mathrm{d}\alpha)(X, R_\alpha).$$

右端是连续的。在 $X \neq 0$ 不为零的点， $X$ 的流形盒将这个分布方程转化为沿流的微积分基本定理，因此水平导数沿相应的流线是经典意义下的导数。在 $X$ 为零处，其流是静止的，等式两边均为零。

在满足 $\alpha = \mathrm{d}z - p \cdot \mathrm{d}q$ 的达布坐标图中，使用水平向量场 $X_i = \partial_{p_i}$ 和 $Y_i = \partial_{q_i} + p_i\partial_z$，其流为

$$\Phi^s_{X_i}(q, p, z) = (q, p + s e_i, z), \qquad \Phi^s_{Y_i}(q, p, z) = (q + s e_i, p, z + s p_i),$$

其中 $e_i$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的第 $i$ 个坐标向量。导数 $X_i\lambda$ 和 $Y_i\lambda$ 在紧子图上连续且有界。对于邻近的点 $x = (q, p, z)$ 和 $x' = (q', p', z')$，令 $u = p' - p$ 和 $v = q' - q$。

先沿水平路径将 $p$ 改为 $p'$，然后将 $q$ 改为 $q'$

$$\gamma_p(t) = (q, p + tu, z), \qquad \gamma_q(t) = (q + tv, p', z + tp' \cdot v), \qquad 0 \le t \le 1.$$

它们分别是 $\sum_i u_i X_i$ 和 $\sum_i v_i Y_i$ 的流段，因此经典水平导数恒等式沿着每一段都成立。第二条路径终止于 $(q',\ p',\ z_*)$，其中 $z_* = z + p' \cdot (q' - q)$，留下 Reeb 位移

$$\Delta := z' - z_* = z' - z - p' \cdot (q' - q), \qquad |\Delta| \le C|x - x'|.$$

令 $a = \sqrt{|\Delta|}$ 和 $b = \operatorname{sgn}(\Delta)\sqrt{|\Delta|}$，使得 $ab = \Delta$。从 $(q',\ p',\ z_*)$ 出发，依次沿着 $aX_1$、$bY_1$、$-aX_1$ 和 $-bY_1$ 的单位时间流前进。它们在 $(q_1,\ p_1)$ 平面上的投影是一个矩形，而它们在 $z$ 中的净变化为 $(p_1' + a)b - p_1' b = ab = \Delta$。因此，这四条水平线段终止于 $x'$，构成与 $[X_1, Y_1] = \partial_z$ 相关联的交换子矩形。当 $\Delta = 0$ 时，取 $a = b = 0$，并省略这四条常数线段。

缩小子图表后，对于足够接近的 $x, x'$，这六条线段都位于一个固定的较大紧子图表中。设 $L$ 在此处对 $|X_i \lambda|$ 和 $|Y_i \lambda|$ 构成上界，其中 $1 \le i \le d$。对水平导数积分可得

$$\begin{aligned} |\lambda(x') - \lambda(x)| &\le L\Big( \sum_{i=1}^{d} (|u_i| + |v_i|) + 2|a| + 2|b| \Big) \\ &\le C\big(|x - x'| + \sqrt{|\Delta|}\big) \le C|x - x'|^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

因此 $\lambda \in C^{0,1/2}_{\mathrm{loc}}$。 □

接下来的两个引理汇总所需的空间估计和半径估计。通常的磨光是标准内容；参见 [36, 关于磨光的补遗，第 25–30]页。下面的加权商还需要一个额外估计，我们将对此给出明确证明。

**卷积记号**

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 为开集。取一个非负对称函数 $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$，其支集包含于闭单位球中，并满足 $\int \rho = 1$。其缩放为 $\rho_t(h) := t^{-m}\rho(h/t)$，其中 $t > 0$。因此 $\int \rho_t = 1$ 且 $\operatorname{supp} \rho_t \subset B_t(0)$。取紧集 $K_0 \subset \operatorname{int} K_1 \subset K_1 \subset \Omega$，以及满足条件 $B_{t_0}(v) \subset K_1$ 的半径 $0 < t_0 \le 1$，对每个 $v \in K_0$ 均成立。

对于 $\Omega$ 上的连续标量值或向量值函数 $u$，这些点处的卷积定义为

$$(u * \rho_t)(v) := \int_\Omega u(y)\rho_t(v - y)\,\mathrm{d}y, \qquad v \in K_0, \quad 0 < t \le t_0.$$

球条件确保下文中使用的所有函数值和线段都位于 $K_1$ 中。对于定义在 $K_1$ 上的连续函数 $g$，其连续模定义为

$$\omega_g(r) := \sup_{v, w \in K_1,\, |v - w| \le r} \|g(v) - g(w)\|.$$

$g$ 的一致连续性意味着，当 $r \to 0$ 趋于 $\to 0$ 时，$\omega_g(r)$ 趋于

接下来两个引理中的所有估计对 $v \in K_0$ 和 $0 < t \le t_0$ 都是一致的。其常数可能依赖于固定的定义域、核和函数，但不依赖于 $v$ 或 $t$。在本小节余下部分，$D$ 表示空间导数，而 $\partial_v$，$\partial_t$ 表示对所示变量的偏导数。

**引理3.4**。在前述设定中，令 $Q \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^k)$，其中 $k \ge 1$，令 $a \in C^{0,1/2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，并令 $W \in C^{1,1/2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$。设 $Q_t := Q * \rho_t$，$a_t := a * \rho_t$，$S(v, t) := (W * \rho_t)(v)$。则以下估计成立。

*(i)* 对于 $C^1$ 函数 $Q$，

$$\|Q_t(v)-Q(v)\|\le Ct,\qquad \|DQ_t(v)-DQ(v)\|\le \omega_{DQ}(t),\qquad \|\partial_t Q_t(v)\|\le C\omega_{DQ}(t). \tag{3.7}$$

特别地，$Q_t\to Q$ 属于 $C^1$ 且 $\partial_t Q_t\to 0$ 为 $t\to 0$。

*(ii)* 对于赫尔德函数 $a$，

$$|a_t(v)-a(v)|\le C\sqrt{t},\qquad \|Da_t\|+|\partial_t a_t|\le Ct^{-1/2}. \tag{3.8}$$

若 $a_*:=\min_{K_1} a>0$，则 $a_t(v)\ge a_*$。

*(iii)* 对于函数 $W$，

$$\begin{aligned} |S(v,t)-W(v)|&\le Ct^{3/2},\\ \|\partial_v S(v,t)-DW(v)\|+|\partial_t S(v,t)|&\le C\sqrt{t},\\ \|\partial_v\partial_t S(v,t)\|+|\partial_t^2 S(v,t)|&\le Ct^{-1/2}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

定义 $S(v,0):=W(v)$，得到一个到 $t=0$ 的 $C^1$ 扩张，其中 $\partial_v S(v,0)=DW(v)$ 且 $\partial_t S(v,0)=0$。

证明。记 $h=t\zeta$。重缩放后的核及其导数的支集包含于 $|h|\le t$，并满足 $\|D\rho_t\|_{L^1}+\|\partial_t\rho_t\|_{L^1}\le C/t$ 和 $\|\partial_t^2\rho_t\|_{L^1}\le C/t^2$。每个导数核 $\partial_i\rho_t$ 和 $\partial_t\rho_t$ 的积分均为零，而 $\rho$ 的对称性也给出 $\int h\rho_t(h)\,\mathrm{d}h=0$。对该恒等式关于 $t$ 求导，即可得到相应的一阶矩消去。

对于 $Q$，标准的中值估计给出 $\|Q_t-Q\|\le Ct$，而 $DQ_t=(DQ)*\rho_t$ 给出导数界。此外，

$$\partial_t Q_t(v)=-\int [DQ(v-t\zeta)-DQ(v)]\zeta\rho(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

从而证明半径—导数估计。对于 $a$，取平均得到 $|a_t-a|\le C\sqrt{t}$，并保持正的下界。在每个导数积分中减去 $a(v)$，并利用核的界，得到

$$\|Da_t(v)\|+\|\partial_t a_t(v)\|\le C\sqrt{t}\big(\|D\rho_t\|_{L^1}+\|\partial_t\rho_t\|_{L^1}\big)\le Ct^{-1/2}.$$

对于 $W$，其一阶泰勒余项 $R_v(y):=W(y)-W(v)-DW(v)\cdot(y-v)$ 在 $v$处有界于 $C|y-v|^{3/2}$。一阶矩消去 $S(v,t)-W(v)=\int R_v(y)\rho_t(v-y)\,\mathrm{d}y$因此给出$|S(v,t)-W(v)|\le Ct^{3/2}$。类似地，对 $DW$进行卷积得到 $|\partial_v S-DW|\le C\sqrt{t}$，因为 $DW$是1/2-Hölder 连续的。将 $\partial_t Q_t$ 的显示公式应用于 $S(v,t)$，得到 $|\partial_t S|\le C\sqrt{t}$。使用以下恒等式

$$\partial_v\partial_t S(v,t)=\int [DW(y)-DW(v)]\,\partial_t\rho_t(v-y)\,\mathrm{d}y,\qquad \partial_t^2 S(v,t)=\int R_v(y)\,\partial_t^2\rho_t(v-y)\,\mathrm{d}y.$$

分别得到界 $|\partial_v\partial_t S|\le C\sqrt{t}\|\partial_t\rho_t\|_{L^1}\le Ct^{-1/2}$ 和 $|\partial_t^2 S|\le Ct^{3/2}\big\|\partial_t^2\rho_t\big\|_{L^1}\le Ct^{-1/2}$。这些估计证明了所有断言，包括在 $t=0$ 处的 $C^1$ 扩张及其所述导数。

□

**引理 3.5** (加权卷积)。在相同的条件下，设 $a\in C^{0,1/2}$ 局部(Ω) 为正，并设 $b\in C^1(\Omega\ \mathbb{R}^k)$，其中 $k\ge 1$。令 $a_t=a*\rho_t$ 和 $a_*=$最小值$_{K_1}a>0$，定义加权卷积为

$$b_t(v):=\frac{((ab)*\rho_t)(v)}{a_t(v)}.$$

存在一个常数 $C$，使得

$$|b_t(v)-b(v)|\le Ct,\qquad \|Db_t(v)-Db(v)\|\le C\big(\omega_{Db}(t)+\sqrt{t}\big),\qquad |\partial_t b_t(v)|\le C. \tag{3.10}$$

特别地，$b_t\to b$ 属于 $C^1$，位于 $K_0$ 上，如 $t\to 0$所示。

证明。我们使用核导数公式，$L^1$ 界以及引理3.4中证明的消去性质，它们还给出 $a_t(v) \geq a_* > 0$。令 $L =$ 上确界$_{K_1} \|Db\|$。当 $|y-v| \leq t$时，我们有 $|b(y)-b(v)| \leq L|y-v| \leq Lt$。由于 $a>0$ 且 $\rho_t \geq 0$，加权平均

$$b_t(v) - b(v) = \frac{1}{a_t(v)} \int a(y)\rho_t(v-y)[b(y)-b(v)]\,\mathrm{d}y$$

得到 $|b_t(v)-b(v)| \leq Lt$。特别地，当 $|y-v| \leq t$ 时，$|b(y)-b_t(v)| \leq |b(y)-b(v)|+|b(v)-b_t(v)| \leq 2Lt$。定义 $r_v(y) = b(y) - b(v) - Db(v)(y-v)$。引理3.4中用于估计$W$的余项 $R_v(y)$ 的论证，在 $|y-v| \leq t$ 时给出 $|r_v(y)| \leq t\,\omega_{Db}(t)$。

对 $b_t$ 求导，得到

$$\partial_i b_t(v) = \frac{1}{a_t(v)} \int \partial_i \rho_t(v-y)a(y)[b(y)-b_t(v)]\,\mathrm{d}y.$$

将 $a_t(v)$ 移至左侧，并在被积函数中将 $a(y) = a(v) + [a(y)-a(v)]$ 拆开。利用核 $\partial_i\rho_t$ 的常数项和一阶矩恒等式，得到

$$a_t(v)\partial_i b_t(v) = a(v)\partial_i b(v) + a(v)\int \partial_i\rho_t(v-y)r_v(y)\,\mathrm{d}y + \int \partial_i\rho_t(v-y)[a(y)-a(v)][b(y)-b_t(v)]\,\mathrm{d}y.$$

由于 $a$ 有界，我们有 $|a_t\partial_i b_t - a\partial_i b| \leq C(\omega_{Db}(t) + \sqrt{t})$。将其除以 $a_t \geq a_* > 0$ 并利用 $|a_t - a| \leq C\sqrt{t}$，

$$|\partial_i b_t(v) - \partial_i b(v)| \leq \frac{1}{a_t}\,|a_t\partial_i b_t - a\partial_i b| + \frac{|a_t-a|}{a_t}\,|\partial_i b| \leq C\big(\omega_{Db}(t) + \sqrt{t}\,\big).$$

这证明了空间导数估计。对半径进行相同的商求导，得到

$$\partial_t b_t(v) = \frac{1}{a_t(v)} \int \partial_t \rho_t(v-y)a(y)[b(y)-b_t(v)]\,\mathrm{d}y.$$

其绝对值有 $C$ 作为上界，因为 $\|\partial_t\rho_t\|_{L^1} \leq C/t$ 且 $|b(y)-b_t(v)| \leq 2Lt$ 在核的支集上。这就证明了引理。 □

**命题3.6 (相对接触逼近).** 设 $(M^{2d+1}, \alpha)$ 为光滑闭接触流形，其中 $d \geq 1$，且 $f$ 为保余定向的 $C^1$ 接触同胚。对每个紧集 $K \subset O$，若 $O \subset M$ 为开集，且对任意 $\varepsilon_0 > 0$，存在保余定向的 $C^1$ 接触同胚 $\tilde{f}$，使得

$$d_{C^1}(\tilde{f}, f) < \varepsilon_0, \qquad \tilde{f} = f \quad on\ M \setminus O,$$

且 $\tilde{f}$ 在 $K$ 的某个邻域上为 $C^\infty$。此外，只要 $f$ 在 $q$ 的某个邻域上光滑，$f$ 就在每个点 $q$ 处光滑。特别地，取 $K = O = M$ 时，光滑接触同胚在保余定向的 $C^1$ 接触同胚空间中是 $C^1$-稠密的。

证明。我们在边界上趋于零的半径处对局部生成函数进行光滑化，然后拼接有限个这样的修改。光滑生成函数构造是标准的 [33, 第 3.1–3 节。2]；下面的估计说明了如何在 $C^1$ 正则性下重构。

步骤 *1*：局部生成函数。写作 $f^*\alpha = \lambda\alpha$，其中 $\lambda > 0$ 连续。固定一点，并选取源坐标图和目标 Darboux图，两者的接触形式均为 $\mathrm{d}z - p\cdot\mathrm{d}q$。写作

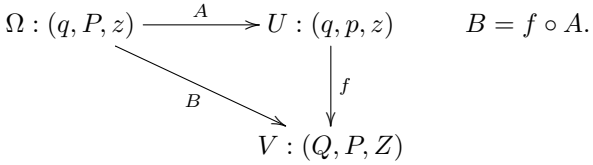
$$f(q,p,z) = (Q(q,p,z), P(q,p,z), Z(q,p,z)).$$

可以选取坐标图，使得 $\partial_p P$ 在基点处可逆。由引理3.3，$Df|_\xi$ 是共形辛的，因此 $Df$ 将源垂直拉格朗日子空间映为

目标接触超平面中的拉格朗日子空间。随后，经过一次辛线性变换及其光滑接触提升，可使该像成为目标竖直子空间。在一个更小的邻域上，混合坐标投影

$$(q,p,z)\longmapsto (q,P(q,p,z),z)$$

因此是一个 $C^1$ 微分同胚。在其像 $\Omega$ 上使用 $(q,P,z)$ 作为自变量，并将原始源 $p$ 坐标记为$H(q,P,z)$。逆混合坐标映射为 $A(q,P,z):=(q,H(q,P,z)\ z)$。今后， $Q(q,P,z)$ 和 $Z(q,P,z)$ 表示与 $A$ 复合后的原始目标坐标函数。令 $a(q,P,z)=\lambda\circ A(q,P,z)$，以及 $B(q,P,z)=f\circ A(q,P,z)$。结合 $U=A(\Omega)$ 和$V=f(U)$，我们得到以下交换图




定义标量局部生成函数 在$\Omega$ 上为

$$W(q,P,z):=Z(q,P,z)-P\cdot Q(q,P,z).$$

通过 $A$ 将接触方程拉回，可得 $\mathrm{d}Z-P\cdot\mathrm{d}Q=a(\mathrm{d}z-H\cdot\mathrm{d}q)$，其中所有函数和微分现在都用混合变量 $(q,P,z)$ 表示。因此

$$\mathrm{d}W=\mathrm{d}Z-\mathrm{d}(P\cdot Q)=a\,\mathrm{d}z-aH\cdot\mathrm{d}q-Q\cdot\mathrm{d}P. \tag{3.11}$$

等价地， $\partial_z W=a>0$、 $\partial_q W=-aH$ 和 $\partial_P W=-Q$。

反过来，这些恒等式

$$H=-\frac{\partial_q W}{\partial_z W},\qquad Q=-\partial_P W,\qquad Z=W+P\cdot Q$$

可由 $W$ 确定 $A=(q,\ H,\ z)$ 和 $B=(Q,\ P,\ Z)$，进而确定源邻域 $U$ 上的 $f=B\circ A^{-1}$。

步骤 2：赫尔德正则性与固定半径卷积。从这一步到证明结束，将混合变量简记为 $v=(q,P,z)$，并令 $m=2d+1$。引理 3.3 给出 $\lambda\in C^{0,1/2}\mathrm{loc}$。由于逆混合坐标映射 $A$ 是 $C^1$， $a=\lambda\circ A\in C^{0,1/2}\mathrm{loc}$ 为正。函数 $H,Q$ 是 $C^1$，因此由 (3.11) 得到 $W\in C^{1,1/2}\mathrm{loc}$。使用引理 3.4 之前确定的磨光子和卷积约定。取足够小的 $t>0$ ，使卷积仍留在 $\Omega$ 内，并令

$$S(v,t)=(W*\rho_t)(v),\qquad a_t=a*\rho_t,\qquad H_t=\frac{(aH)*\rho_t}{a*\rho_t},\qquad Q_t=Q*\rho_t. \tag{3.12}$$

将引理 3.4 应用于 $Q\in C^1$，并将带权重 $a\in C^{0,1/2}{}_{\mathrm{loc}}$ 的引理 3.5 应用于此，分别在 $C^1$ 中得到 $H_t\to H$ 和 $Q_t\to Q$ ，如 $t\to 0$ 所示。

步骤 *3*：在边界处消失的平滑半径。固定一个光滑截断函数 $0\le\beta\le 1$ ，其支集紧包含于 $\Omega$，并设

$$\delta(v)=\eta\beta(v)^4,\qquad \widehat{W}(v)=\begin{cases}S(v,\delta(v)), & \beta(v)>0,\\ W(v), & \beta(v)=0.\end{cases}$$

在这一步中，坐标图和 $\beta$ 始终固定，而正实参数 $\eta$ 将趋于零。选取固定的紧子坐标图 $K_0\subset\mathrm{int}\ K_1\subset K_1\subset\Omega$，使得 $\mathrm{supp}\,\beta\subset\mathrm{int}\ K_0$，并取 $0<\eta\le 1$

充分小，使得以 $K_0$ 为中心的所有卷积球都包含在 $K_1$中。以下所有范数和常数均针对这些固定的紧子坐标图，且常数与 $\eta$无关。

令 $a_* = \text{最小值}_{K_1} a > 0$。将引理 3.4 应用于 $a$ 和 $W$，得到 (3.8) 和 (3.9，以及 $C^1$扩张 $S(v, 0) = W(v)$，其中 $\partial_t S(v, 0) = 0$。因此，与光滑非负函数 $\delta$复合可得 $\widehat{W} \in C^1$。

$\hat{}$ $\frown$从 $W$重构 $f$。定义

$$\bar{a}(v) = a_{\delta(v)}(v), \qquad \bar{H}(v) = H_{\delta(v)}(v), \qquad \bar{Q}(v) = Q_{\delta(v)}(v), \tag{3.13}$$

在 $\beta = 0$ 处使用扩张 $a_0 = a$、 $H_0 = H$、 $Q_0 = Q$。定义协向量 $E(v) = \partial_t S(v, \delta(v))D\delta(v)$，并在 $\beta = 0$处将其延拓为零。于是 $D\widehat{W}(v) = \partial_v S(v, \delta(v)) + E(v)$。写作 $E(v) = (E^q(v)\ E^P(v)\ E^z(v))$，其中 $E^q$、 $E^P$、 $E^z$是协向量 $E$在 $\mathrm{d}q$、$\mathrm{d}P$、$\mathrm{d}z$方向上的分量。在半径 $t = \delta(v)$处，$\frown$(3.11) 和定义 (3.12)、(3.13)，连同 $W(v) = S(v, \delta(v))$，给出

$$\partial_q \widehat{W} = -\bar{a}\bar{H} + E^q, \qquad \partial_P \widehat{W} = -\bar{Q} + E^P, \qquad \partial_z \widehat{W} = \bar{a} + E^z. \tag{3.14}$$

因此，我们可以通过以下方式重构坐标

$$\widehat{Q} := -\partial_P \widehat{W} \qquad \widehat{H} := -\frac{\partial_q \widehat{W}}{\partial_z \widehat{W}} \qquad \widehat{Z} := \widehat{W} + P \cdot \widehat{Q}, \tag{3.15}$$

$\frown$前提是 $\partial_z W$ 为正，稍后将验证这一点。

$C^1$-收敛。我们证明，修正坐标 $\widehat{Q}$、 $\widehat{H}$ 和 $\widehat{Z}$ 分别收敛到 $Q$、 $H$ 和 $Z$，当 $\eta \to 0$时。我们首先控制链式法则修正项 $E$，然后验证 $\bar{Q}$ 和 $\bar{H}$的变半径收敛。记 $E^i$ 为 $E$ 在坐标 $v$中的第 $i$个分量，对$\{\beta > 0\}$ 求导得

$$\partial_j E^i(v) = \big[(\partial_j \partial_t S)(v, \delta(v)) + \partial_t^2 S(v, \delta(v))\partial_j \delta(v)\big]\partial_i \delta(v) + \partial_t S(v, \delta(v))\partial_j \partial_i \delta(v).$$

因此（3.9）给出

$$\|E\| \le C\sqrt{\delta}\, \|D\delta\|, \qquad \|DE\| \le C\big(\delta^{-1/2} + \delta^{-1/2}\, \|D\delta\|\big)\, \|D\delta\| + C\sqrt{\delta}\|D^2\delta\|. \tag{3.16}$$

由于 $\beta$是固定的， $D\delta = 4\eta\beta^3 D\beta$和 $D^2\delta = 12\eta\beta^2 D\beta \otimes D\beta + 4\eta\beta^3 D^2\beta$。令常数 $C$依赖于 $\beta$，得到 $\|D\delta\| \le C\,(\beta)\ \eta\beta^3$ 和 $\|D^2\delta\| \le C\,(\beta)\ \eta\beta^2$。代入（3.16）得到显式界

$$\|E\| \le C\eta^{3/2}\beta^5, \qquad \|DE\| \le C\sqrt{\eta}\,\beta. \tag{3.17}$$

如果某个 $C^1$ 修正项在 $\{\beta > 0\}$ 上的取值为 $O(\beta^\nu)$（其中 $\nu > 1$ 满足某个条件），且其导数在 $\beta \to 0$时趋于零，那么将其在外部定义为零后，就得到一个 $C^1$ 函数。事实上，在每个零点 $v_0$处，Lipschitz界 $\beta(v) \le C|v - v_0|$使得函数值为 $o(|v - v_0|)$，因此扩张后的函数可微，且导数为零；导数界则保证了连续性。将此判据应用于 $E$，得到

$$\|E\|_{C^1(K_0)} \le C(\beta)(\eta^{3/2}\beta^5 + \sqrt{\eta}\beta) \le C(\beta)\sqrt{\eta},$$

当 $\eta \to 0$时趋于零。特别地，对所有充分小的 $\eta$， $\bar{a} + E^z \ge a_* - \|E\| > 0$。

$\bar{}$在 $\{\beta > 0\}$上，链式法则给出 $DH = (D_v H_t + \partial_t H_t D\delta)|_{t=\delta}$和 $DQ = (D_v Q_t + \partial_t Q_t D\delta)|_{t=\delta}$。 $\bar{}$ $\bar{}$引理 3.4 和 3.5 因此推出 $\|H - \bar{H}\| + \|Q - \bar{Q}\| \le C\delta$ 和

$$\|D\bar{H} - DH\| \le C\big(\omega_{DH}(\delta) + \sqrt{\delta} + \|D\delta\|\big), \quad \|D\bar{Q} - DQ\| \le (1 + C|D\delta|)\omega_{DQ}(\delta).$$

值误差为 $O(\eta\beta^4)$，导数误差则趋于零，当 $\beta \to 0$ 时，因此同一判据适用于 $\bar{H} - H$ 和 $\bar{Q} - Q$。于是两个带横线的映射都是 $C^1$，其导数为 $DH$，$DQ$ 在 $\{\beta = 0\}$ 上，并且

$$\|\bar{H} - H\|_{C^1} + \|\bar{Q} - Q\|_{C^1} \le C\big(\omega_{DH}(\eta) + \omega_{DQ}(\eta) + \sqrt{\eta}\big) \longrightarrow 0.$$

此外，根据卷积估计以及对 $E$ 的界，也有 $\|W - W\|_{C^1} \to 0$。接下来需要控制商修正项 $\widehat{H}$。在 $\widehat{H}$ 的表达式中分离出 $\bar{H}$，得到 $\widehat{H} = \bar{H} - \frac{E^q + \bar{H}E^z}{\bar{a} + E^z}$。在 $\{\beta > 0\}$ 上，$D\bar{a}(v) = \big((\partial_v a_t)(v) + (\partial_t a_t)(v)\, D\delta(v)\big)\big|_{t=\delta(v)}$，因此由 (3.8) 得 $\|D\bar{a}\| \le C\delta^{-1/2}(1 + \|D\delta\|)$。将此估计与 (3.17) 结合可得

$$\begin{aligned} \|E\|\,\|D\bar{a}\| &\le C\sqrt{\delta}\,\|D\delta\| \cdot C\delta^{-1/2}(1 + \|D\delta\|) \\ &\le C\,\|D\delta\|\,(1 + \|D\delta\|) \le C\eta\beta^3(1 + \eta\beta^3). \end{aligned} \tag{3.18}$$

其中 $\delta$ 的负次幂被抵消。为对商求导，在 $\{\beta > 0\}$ 上令

$$N = E^q + \bar{H}E^z, \qquad G = \bar{a} + E^z, \qquad F = N/G.$$

我们有 $G \ge a_*/2$，$\|N\| \le C\,\|E\|$，因此 $|F| \le (2C/a_*)\,\|E\| \le C\eta^{3/2}\beta^5$。此外，利用一致$C^1$界 $\bar{H}$可得 $\|DN\| \le C(\|DE\| + \|E\|)$。商法则为 $DF = DN/G - N(D\bar{a} + DE^z)/G^2$。因此，由 (3.17) 和 (3.18)，在 $\{\beta > 0\}$

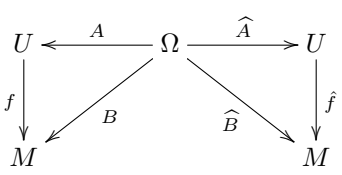
$$\|DF\| \le \frac{2C}{a_*}(\|DE\| + \|E\|) + \frac{4}{a_*^2} \cdot C\,\|E\|\,(\|D\bar{a}\| + \|DE\|) \le C\sqrt{\eta}\beta.$$

$F$ 的函数值和导数界满足相同的判据，因此其零延拓为 $C^1$，且在$\{\beta = 0\}$ 上导数为零，并且$\|F\|_{C^1(K_0)} \le C\sqrt{\eta}$。由于 $H = H - F$和 $Z - Z = (W - W) + P\cdot(Q - Q)$，这些估计给出

$$\|(\widehat{H}, \widehat{Q}, \widehat{Z}) - (H, Q, Z)\|_{C^1(K_0)} \le C\big(\omega_{DH}(\eta) + \omega_{DQ}(\eta) + \sqrt{\eta}\big) \longrightarrow 0.$$

因此，在固定坐标图和 $\beta$ 的情况下，减小 $\eta$ 就能使重构坐标与原坐标任意 $C^1$接近。当 $\beta > 0$时，所有重构量都是光滑的。

步骤 **4**：局部相对扰动。令 $A(v) = (q, H(v)\ z)$，并令 $B(v) = (Q(v)\ P, Z(v))$。映射 $\widehat{A}\circ A^{-1}$ 与恒等映射 $C^1$-接近，并且在源坐标图的一个紧子集之外等于恒等映射。用欧几里得坐标将其按恒等映射扩张。当 $\eta$充分小时，该扩张是一个微分同胚，因此 $\widehat{A}$ 将 $\Omega$ 微分同胚地映到 $A(\Omega)$。在 $A(\Omega)$上定义 $\hat{f} = \widehat{B}\circ \widehat{A}^{-1}$，并在该坐标图之外使用 $f$。这些定义在其边界附近一致。当 $U = A(\Omega) = A(\Omega)$时，原映射和重构映射构成下面的两个交换三角图，其中目标映射的取值属于 $M$。




$$\begin{aligned} B &= f \circ A, \\ \widehat{B} &= \hat{f} \circ \widehat{A}, \\ d_{C^1}(f, \hat{f}) &\ll 1. \end{aligned}$$

生成恒等式给出

$$\mathrm{d}\widehat{Z} - P \cdot \mathrm{d}\widehat{Q} = \mathrm{d}\widehat{W} + \widehat{Q} \cdot \mathrm{d}P = (\partial_z \widehat{W})(\mathrm{d}z - \widehat{H} \cdot \mathrm{d}q),$$

因此，所得映射是接触且保 coorientation 的。它在 $C^1$ 中趋于 $f$，并且当 $\eta$ 足够小时是整体微分同胚。

若 $C \subset U$ 是源Darboux图内的一个紧区域，则在 $A^{-1}(C)$ 的某个邻域上选取 $\beta = 1$。当 $\eta$ 足够小时，正的裕度以及逆映射的收敛性保证 $C \subset \widehat{A}(\{\beta > 0\})$。ˆ因此， $f$ 在 $C$ 附近是光滑的。

$f$ 的已有光滑性也得以保留。事实上，对于满足 $f$ 光滑的源点 $y$，写作$v = \widehat{A}^{-1}(y)$。若 $\beta(v) > 0$，则新映射在 $y$ 附近光滑。若 $\beta(v) = 0$，则 $\widehat{A}(v) = A(v) = y$，且原混合坐标映射以及 $W$ 在 Ω 中该点附近光滑。在此处，表达式$S(v, t) = \int W(v - t\zeta)\rho(\zeta)\, d\zeta$ 可经由 $t = 0$ 光滑延拓。它与 $t = \delta(v)$ 的复合在该点附近光滑 ˆ，因此 $f$ 在 $y$ 附近再次光滑。

˜步骤 *5.* 有限覆盖与连续光滑化。 若 $K = \varnothing$，取 $f := f_0$。否则，步骤 1 给出有限个有界开集 $U_i$, $U_i$, $1 \leq i \leq N$，满足 $C_i := U_i \subset U_i$ 且 $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_i$，使得每个 $U_i$ 都紧含于 $O$ 内的一个源Darboux图中，其在 $f$ 下的像紧含于一个目标Darboux图中，并且混合坐标投影在 $U_i$ 附近是微分同胚。选取 $\varepsilon_{\text{chart}} > 0$，使得只要 $d_{C^1}(g, f) < \varepsilon_{\text{chart}}$，这些坐标图条件就成立。

从 $f_0 := f$ 开始，在 $U_i$ 中依次应用步骤 4。对于 $f_{i-1}$ 的逆混合坐标映射 $A_i$，选取一个支集紧包含于 $A_i^{-1}(U_i)$ 且在 $A_i^{-1}(C_i)$ 附近等于 1 的光滑截断函数 $\beta_i$。充分小的光滑化参数 $\eta_i > 0$ 可得到一个接触同胚 $f_i$，它在 $C_i$ 附近光滑，在 $U_i$ 之外等于 $f_{i-1}$，并满足 $d_{C^1}(f_i, f_{i-1}) < \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_{\text{chart}}\}/2N$。对于每个 $1 \leq j \leq N$，由三角不等式可得

$$d_{C^1}(f_j, f) \leq \sum_{i=1}^{j} d_{C^1}(f_i, f_{i-1}) < \frac{j}{2N} \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_{\text{chart}}\},$$

因此，在整个构造过程中，坐标图条件始终成立。

每次修改都通过步骤 4 保持已有的光滑性，因此由归纳法可知，在 ˜$C_1 \cup \cdots \cup C_i$ 附近光滑。因此， $f := f_N$ 在 $K$ 附近光滑，满足 $d_{C^1}(f, f) < \varepsilon_0$，并且在 $M \setminus O$ 上与 $f$ 一致。取 $K = O = M$ 即可证明全局逼近结论。 □

注 3.7: 生成函数 $W$ 通过混合坐标重构编码一个有限的局部接触同胚。光滑的含时接触哈密顿量 $h_s$ 则通过向量场 $X_{h_s}$ 指定其无穷小运动，该向量场由 $\alpha(X_{h_s}) = h_s$ 和 $\iota_{X_{h_s}} \mathrm{d}\alpha = (R_\alpha h_s)\alpha - \mathrm{d}h_s$定义。对该向量场进行积分即可得到一个接触同伦；参见 Geiges [24, 第 2 节。3]。

# 4 一个接触开集及其基点映射

本节构造一个非空的接触开集$\mathcal{U}$，其中具有一个持久混合器构型，并证明其光滑基映射是 $C^1$-稠密的。Bonatti–Díaz 的相对接触逼近和几何条带论证给出了具有稳定端点和局部化的正向轨道的光滑映射，随后，在一个固定的达布盒中进行接触扰动，即可产生强连接。

## 4.1 初始模型与持久几何构型

**初始 Reeb流设置**

设 $(M^{2d+1}, \xi)$, $d \geq 1$ 是一个闭合连通定向接触流形，并固定一个光滑接触形式 $\alpha_0$，使得 $\ker \alpha_0 = \xi$。假设其 Reeb 流 $\varphi^t$ 是 Anosov，且其强稳定叶层和强不稳定叶层均为 $C^\infty$。特别地，它们的切丛是光滑的。不变分裂为

$$TM = E^{ss}_\varphi \oplus \mathbb{R}R_{\alpha_0} \oplus E^{uu}_\varphi, \qquad \xi = E^{ss}_\varphi \oplus E^{uu}_\varphi, \qquad \dim E^{ss}_\varphi = \dim E^{uu}_\varphi = d.$$

恒等式 $\xi = E^{ss}_{\varphi} \oplus E^{uu}_{\varphi}$ 由 $\alpha_0$ 的不变性以及相应时间方向上的收缩性得到。类似地，$\mathrm{d}\alpha_0$ 的不变性使两个强丛在 $\xi$ 中均为各向同性；由于它们共同张成 $\xi$，因此各自都是拉格朗日的。取一条周期为 $T > 0$ 的闭 Reeb 轨道 $\Gamma$，并令 $\Phi_0 := \varphi^T$。于是 $\Phi_0^*\alpha_0 = \alpha_0$，且 $\Gamma$ 是 $\Phi_0$ 的一个不动点正规双曲圆。在本节中，$\mathrm{Cont}^1(M, \xi)$ 表示具有 $C^1$ 拓扑的保余定向接触同胚 $C^1$。

**一个具体实现**

取一闭定向曲面 $(S, h)$，其曲率为常数 $-1$，并令

$$M = S^*S := \{(q,p) \in T^*S : |p|_h = 1\}, \qquad \alpha_0 = \lambda_{\mathrm{can}}|_{S^*S},$$

其中 $\lambda_{\mathrm{can}} = p\,dq$ 是典范（Liouville）1-形式。音乐同构 $(q,v) \mapsto (q, h_q(v,\cdot))$ 将 $S^*S$ 与单位切丛等同；在此等同下，$\alpha_0(\zeta) = h_q(v, D\pi(\zeta))$。其 Reeb 流是单位速测地流 [25, 第 1 节。5]，，且它是 Anosov；对于常负曲率，其强稳定与不稳定叶状结构是光滑的 horocycle 叶状结构（见 [28, 第 17] 章）。一条闭测地线给出 $\Gamma$，其周期为 $T$。因此，初始设置得以实现，其中 $\dim M = 3$，且 $d = 1$。

**混合器模型的预备步骤**

我们采用 [17, 定理 4.4] 证明中的预备步骤，以得到 [17, 设置 4.1]的构型。此预备步骤可以将 $\alpha$ 替换为光滑正倍数 $\alpha = u\alpha_0$，使其在 $\Gamma$ 附近等于 $\alpha_0$，并使用其 Reeb 流的时间-$T$ 映射 $\Phi$。这一修改用于调整一条辅助闭轨道的周期，且可以取得任意小。选定相位 $P$，$Q \in \Gamma$ 及其异宿连接由 [17, 引理 4.5], 给出，这实质上就是 [8, 引理 4.3]。特别地，$\Phi$ 与 $\Phi_0$的距离为 $C^1$，且相对于 $\alpha$ 是严格的。我们固定所得的构型，它具有以下性质。

(a) $\Phi$是部分双曲的，其中

$$TM = E^{ss}_{\Phi} \oplus E^{c}_{\Phi} \oplus E^{uu}_{\Phi}, \qquad \xi = E^{ss}_{\Phi} \oplus E^{uu}_{\Phi}, \qquad E^{c}_{\Phi} = \mathbb{R}R_{\alpha}.$$

(b) $\Gamma$ 是关于 $\alpha$ 的一个闭 Reeb 轨道，也是被 $\Phi$逐点固定的一个正规双曲圆。

(c) 在 $\Gamma$的邻域 $V$ 上，存在一个光滑可积的秩-$d$ 子丛 $E^{ss}_{\mathrm{sm}} \subset \xi$，在其有定义处被 $\Phi$ 一致收缩；它沿着 $\Gamma$的局部稳定流形与 $E^{ss}_{\Phi}$一致。此处无需要求修正后的流的强叶状结构具有全局光滑性，[17, Setup 4.1(c)] 中的局部光滑稳定延拓便已足够。

(d) 不同的不动点 $P$、$Q \in \Gamma$ 之间存在一条从 $P$到 $Q$的强异宿轨道。在该轨道上的一点 $a$ 处，

$$a \in W^{uu}(P,\Phi) \cap W^{ss}(Q,\Phi), \qquad T_aM = T_aW^{uu}(P,\Phi) \oplus \mathbb{R}R_{\alpha}(a) \oplus T_aW^{ss}(Q,\Phi).$$

形式 s $\alpha$ 和 $\alpha_0$ 定义了相同的接触结构 $\xi$。我们保留 $\alpha$ 作为 th 中的背景形式 e 随后 的共形因子恒等式。

对于这一构型，[17, 定理 4.3] 给出一个光滑族 $\Psi_r$，其中 $\Psi_0 = \Phi$，使得当正参数 $r$充分小时，$\Psi_r$具有一个接触搅拌器。固定一个这样的参数 $r_*$，并令 $f_* := \Psi_{r_*}$。我们用 $p_*$，$q_*$ 表示该构造中记作 $P$，$Q$ 的点，其中 $p_*$ 为中心收缩，$q_*$为中心扩张。我们的指标是不稳定指标，因此

$$\mathrm{ind}_u(p_*) = d, \qquad \mathrm{ind}_u(q_*) = d+1.$$

这一 意不同于 [17]相应表述中所采用的稳定指标约定 .

更准确地说， [17, 定理 4。3] 为一个迭代 $B_*$ 提供了一个 Blender 盒 $f_*^\ell$，其中有 $\ell \geq 1$，以及一个位于其叠加区域内的竖直圆盘 $W^u\left(p_*,\ f_*\right)$。这里 $W^u\left(p_*\right)\ = W^{uu}\left(p_*\right)$。从 $q_*$ 到 $p_*$ 的横截连接以及横截同宿点由 [17, 引理 5。14]给出。取一点

$$b_* \in W^u(q_*, f_*) \pitchfork W^s(p_*, f_*).$$

关于长回归的边界条件，值得与所引用的搅拌构造作明确比较。设 $C$ 为 Blender 盒， $F$ 为其定义映射， $A'$ 为 $C \cap F^m(C)$的选定分支，输入域为 $B\ =\ F^{-m}(A')$。这些分别对应定义 2.3 中的 $U$、 $f$、 $f^N(B)$和 $B$，其中 $m\ =\ N$。由单射性可得 $[A' \cap F^m(\partial^u C)\ = \varnothing] \Longleftrightarrow\ [B \cap \partial^u C\ = \varnothing]$，而 $[A' \cap F(\partial^u C)\ = \varnothing] \Longleftrightarrow\ [F^{m-1}(B)\ \cap \partial^u C = \varnothing]$。第二个不相交条件见[8, 第 365 页、条件 (H2)] 以及定义 3.22(b)和引理 6.10], ，而我们的逐分支判据使用第一个条件。它们针对回归的不同阶段，不能互换。

输入域与 $\partial^u C$ 的分离确保延拓的横截圆盘不会终止于其输入圆盘的不稳定边界。结合其他边界避让条件，这使选定的回归条带能够包含两个原始端圆盘，因此中心-不稳定扩张给出了 [8, 引理 1.7] 中使用的宽度不等式。后续的轨道选取论证使用这一选定条带结论及其两种可能的回归时间。整体分支分离为该结论提供了一个充分的几何条件。对于 [8,第 377 页引理 2.11] 的证明中的具体构造，也验证了这一条件。

对于接触模型，这种分离可由 [17] 中已建立的估计推出。记 $F_r\ =\ \Psi_r^\ell$，其中 $\ell$ 在该论文中记作 $N$；并用 $m_0$ 表示构造 5.5 中固定的往返整数，将 $m_r$ 留作记号 5.15 中长回归的整数。$C_r = B_r(Q)$ 的不稳定半径为 $\rho_r = l\mu^{-m_r}$。对于 $z \in A_r'$，令 $y = F_r^{-m_r}(z)$ 和 $w = F_r^{-m_0}(z)$。根据 [17, 引理 6.14], $w$ 位于固定邻域 $W$ 内，且从 $y$ 到 $w$ 的每次中间迭代都处于坐标图中。取满足 $|u| \leq K$ 位于 $W$ 上的 $K$。对 [17, 引理 5.10] 中的坐标扩张进行迭代，得到

$$|u(F_r^{-m_r}(z))| \leq K\mu^{-(m_r - m_0)} = \frac{K\mu^{m_0}}{l}\,\rho_r.$$

常数 $\ell$， $\mu$， $m_0$， $W$在 $l$之前确定，且 $m_r$独立于 $l$。构造 5.17 只要求对 $l$给出一个下界，因此我们选取 $l > 2K\mu^{m_0}$，并结合该下界，再令 $r_*$ 充分小。因此 $F_{r_*}^{-m_{r_*}}(A_{r_*}')\ \subset \{|u| < \rho_{r_*}/2\}$，这就确立了判据中所用的长回归分离。

固定 $r_*$ 和回归时间后，这种严格分离对于标记回归点所选定的分支仍然成立。引理 6.5], 的证明中的构造，再结合上述严格界，使该点及其原像分别位于输出盒和输入盒的内部。因此，保持其原像不变，就能为邻近映射保留一个延续的标记点。所选紧致连通分支的任何豪斯多夫极限都包含于原交集中，并包含极限标记点，因而位于原选定分支内。逆回归映射的一致收敛继而保持其与输入不稳定边界的分离。我们在下文的持久几何构型中保留这些选择。

**命题 4.1** （持久几何构型）。 存在一个非空的 $C^1$-开邻域 $U$，它是 $f_*$ 在 $\mathrm{Cont}^1$（$M$、 $\xi$） 中的开邻域，使得每个 $f \in U$ 都具有以下性质。

*(i)* 存在部分双曲分裂 $TM = E_f^{ss} \oplus E_f^c \oplus E_f^{uu}$，其中一维丛$E_f^c$ 与 $\xi$一致横截。*(ii)* 不动点 $p_*$、 $q_*$ 有双曲延拓 $p_f$、 $q_f$。对于一个与$f \in U$ 无关的常数 $\eta > 0$，

$$\zeta_c(p_f; f) < -\eta < 0 < \eta < \zeta_c(q_f; f),$$

其中 $\zeta_c = \log \lambda_c$ 表示不动点处正中心乘子的对数。

*(iii)* 存在横截连接 $W^u(q_f, f) \pitchfork W^s(p_f, f) \neq \varnothing$。

*(iv)* $f_*^\ell$ 的搅拌器构型对 $f^\ell$ 持久存在，同时相应叠加区域中还存在一个 $W^{uu}(p_f, f)$ 圆盘。

证明。 构造从一个中心方向与 $\xi$ 横截的部分双曲时间映射开始，并且可以将模型 $f_*$ 选取得足够接近该映射。部分双曲性的持久性及其丛的连续性随后建立了 (i)，其中包括在缩小邻域 $\mathcal{U}$ 后的一致横截性。双曲延拓和中心乘子的连续性意味着 (ii)。由于余定向得到保持且不变中心直线与 $\xi$ 横截，这些乘子为正。 $b_*$ 附近的一个紧横截交点具有持久性，从而确立 (iii)。最后，构造所提供的搅拌子及入射圆盘在充分小的 $C^1$ 扰动下保持持久。 $f \mapsto f^\ell$ 的连续性为同一个整数 $\ell$ 给出了 (iv)。

□

我们在全文中使用命题 4.1给出的持久部分双曲分裂。竖条带论证所需的锥不变性和膨胀包含在 [17, 定理 4.3] 提供的几何搅拌器中，并通过 [8, 引理 1.4–1.8]使用。

更具体地说，我们使用命题 4.1(iv) 中的具体回归结构。对于固定参数$r_*$， [17] 的构造 5.17 给出一个紧盒 $C = B_{r_*}(Q)$，满足 $p_* \notin C$。事实上， $C$ 上的中心坐标满足 $|t| \le r_*(1 - e^{-8\ell r_*}) < L$，而 $t(p_*) = L$。对于 $F = f^\ell$，有两个回归分支，其长度分别为 1 和 $m$；选定 $r_*$后， $m$ 固定。缩小 U 后，对于每个 $f \in$ U，同一个盒和相同的回归长度仍满足搅拌机性质，并且 $p_f \notin C$。这就是几何搅拌机公理的持久性；参见 [8, 引理 1.11] 以及 [17,定义 3.22 和注 3.23]。主分支定义参考局部稳定圆盘 $W_0^s(q_f)$，其向前 $F$次迭代始终留在 $C$中并收敛到 $q_f$；参见 [8,引理 1.6]。入射竖直圆盘是 $W^{uu}(p_f, f)$中的一个圆盘，位于 $W_0^s(q_f)$右侧。

## 4.2 接触强连接

我们使用下面的轨道选择来应用点移动引理3.2，且所有扰动的支集都包含在预先选定的固定邻域中，再将位移取得足够小。

对每个 $f \in \mathcal{U} \cap C^\infty$，选取一个横截异宿点 $b_f$，如命题4.1(iii) 中所述，并置

$$K_f^{\pitchfork} := \{p_f, q_f\} \cup \mathrm{Orb}(b_f, f).$$

这是一个紧不变集。下面的引理验证所选接触开集的轨道选择性质。

引理*4.2*（通过搅拌子的轨道选择）。设 $f \in U \cap C^\infty$ 满足 $W^{uu}(p_f, f) \cap W^{ss}(q_f, f) = \varnothing$。那么，存在一个非周期点 $x_* \in W^{uu}(p_f, f)$、 $V_*$的达布邻域$x_*$以及收敛到 $x_*$的点列 $y_j \in W^{ss}(q_f, f)$，使得 $V_* \cap K_f^{\pitchfork} = \varnothing$, $f^{-i}(x_*) \notin V_*(i \ge 1)$，并且对所有充分大的 $j$， $f^i(y_j) \notin V_*(i \ge 1)$。邻域 $V_*$ 固定为 $j \to \infty$。

证明。 固定 $f$如陈述中所述，并省略其在 $p$上的下标， $q$。记 $F = f^\ell$并保留 $C$、返回长度 $m$以及上文指定的局部稳定圆盘 $W^{ss}_{\mathrm{loc}}(q, f)$。 前述验证（包括长返回输入边界分离）给出了定义 2.3中的分支几何判据。我们使用其选定条带结论，以及 [8, 引理 1.4–1.8]中的宽度和加厚估计。锥比较见 [17,备注 3。24]。

步骤 *1.* 稳定端点及其返回符号序列。设 $D \subset W^{uu}(p, f) \cap C$是位于 $W^s_{\mathrm{loc}}(q, f)$ 右侧的一个入射竖直圆盘。应用搅拌器分支之一，并将 $D$替换为其选定的

竖直子圆盘后，我们可以假设 $D$ 避开 $C$的两个中心边界面。主分支产生一个与右侧边界面分离的圆盘，另一个分支则落入一个与该边界面不相交的连通分支中；每个右侧竖直圆盘都避开左侧边界面的一个邻域。所得圆盘仍属于 $W^{uu}(p,\ f)$。

根据 [8, 引理 1.5], 将 $D$ 延伸为一条垂直条带，并依次取围绕 $D$ 越来越窄的闭子条带 $S_j$。因此， $S_j$ 是经过 $C$ 的（$d+1$）维垂直条带，且都位于 $W^{ss}{}_{\mathrm{loc}}(q,f)$ 的右侧，并且$d_H(S_j, D) \to 0$当 $j \to \infty$时成立。这里 $d_H$是豪斯多夫距离。

我们在 [8, 引理 1.8]的证明中使用局部化论证。从 $S_j$出发，该文的引理 1.7 要么通过两个分支中的一个得到与 $W^{ss}{}_{\mathrm{loc}}(q,f)$ 的交点，要么选取 $C$ 中另一条右侧条带，其宽度至少是前一条的 $\lambda > 1$ 倍。在后一种情况下，选定条带包含于前一条带经过 $F$ 或 $F^m$ 作用后的像中，正如该引理中的连通分支构造。根据引理 1.4 [8], ， $C$ 中竖直条带的宽度有一个共同上界，因此该迭代经过有限步后终止。将最终交点沿选定分支拉回，即得到 $z_j \in S_j$ 及迭代次数

$$0 = t_{j,0} < t_{j,1} < \cdots < t_{j,k_j}, \qquad t_{j,a+1} - t_{j,a} \in \{\ell, \ell m\},$$

当 $f^{t_{j,a}}(z_j) \in C$对每个 $0 \le a \le k_j$和 $f^{t_{j,k_j}}(z_j) \in W^{ss}{}_{\mathrm{loc}}(q,f)$ 均成立。因此

$$f^n(z_j) \in T_f := \bigcup_{a=0}^{\ell m} f^a(C) \quad (n \ge 0), \qquad z_j \in W^{ss}(q,f). \tag{4.1}$$

事实上，在最终相交之前，每次中间迭代都位于一条长度至多为 $\ell m$、起始于 $C$ 的分支上。相交之后，连续的 $\ell$ 步迭代仍留在 $C$中。紧集 $T_f$ 避开$p$，因为若 $p \in f^a(C)$，恒等映射 $f^{-a}(p) = p$ 将推出 $p \in C$。我们使用 $T_f$ 来包含所选的正向轨道。

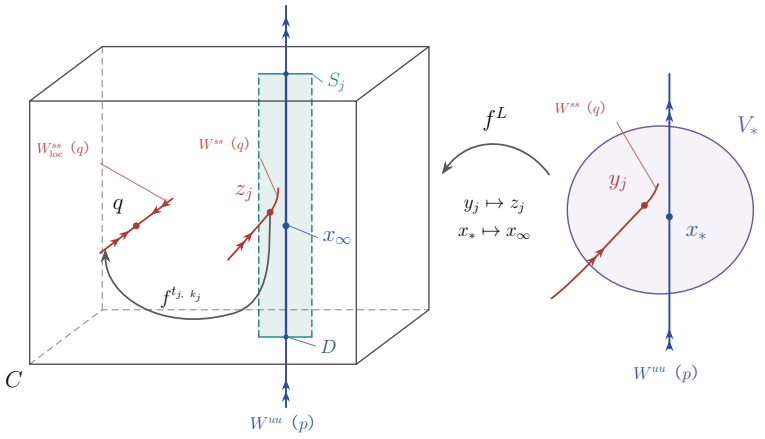



图5：轨道选择与固定扰动区域。围绕 $D \subset W^{uu}(p)$ 的细条带 $S_j$ 给出满足 $f^{t_j,\ k_j}(z_j) \in W^{ss}\mathrm{loc}(q)$ 的点 $z_j \to x_\infty \in D$。对于固定的 $L$ 和充分大的 $j$，拉回$y_j = f^{-L}(z_j) \to x_* = f^{-L}(x_\infty)$ 位于固定的达布邻域 $V_*$ 中，并具有引理4.2所述的轨道避开性质。

紧致性和 $d_H(S_j,\ D) \to 0$在取一个子序列后给出 $z_j \to x_\infty \in D$。该点不同于 $p$，且属于 $W^{uu}(p,\ f)$，因此其反向轨道收敛到 $p$，且它不是周期点。

步骤 2。固定扰动区域。由于 $T_f$ 是紧致的，且避开 $p$，选取足够大的 $L \geq 1$，使得

$$x_* := f^{-L}(x_\infty) \notin T_f, \qquad y_j := f^{-L}(z_j) \longrightarrow x_*.$$

这些点 $y_j$属于 $W^{ss}(q,\ f)$。考虑紧集 $A_- = \{p\} \cup \{f^{-i}(x_*) :\ i \geq 1\}$ 以及有限集 $A_+ = \{f^i(x_*) :\ 1 \leq i \leq L\}$。由非周期性可知，这两个集合都不包含 $x_*$。此外，$x_* \notin K_f^{\pitchfork}$，因为它与两个不动点均不同，且其后向极限为 $p$，而 Orb($b_f$，$f$) 中每个点的后向极限都是 $q$。因此

$$x_* \notin T_f \cup K_f^{\pitchfork} \cup A_- \cup A_+.$$

选取一个包含 $V_*$ 且其闭包避开这个紧集并集的达布邻域 $x_*$。这样的选择使反向轨道和标记横截连接满足所需的轨道避让条件。当 $j$充分大时，由于迭代 $1 \leq i \leq L$的有限次迭代具有连续性，且结合 $x_*$ 的选取，便可确保 $f^i(y_j) \notin V_*$。对于 $i \geq L$，等式（4.1）给出 $f^i(y_j) = f^{i-L}(z_j) \in T_f$，因此满足其余的正向轨道避让条件。$V_*$ 的选取独立于 $j$，符合要求。

□

**命题 4.3** (强连接的接触实现)。对于每个 $f \in U \cap C^\infty$ 以及 $C^1$ 的每个邻域 $V \subset U$（其中 $f$ 属于 接触同胚群$^1(M, \xi)$），存在 $g \in V \cap C^\infty$，使得

$$W^{uu}(p_g, g) \cap W^{ss}(q_g, g) \neq \varnothing.$$

从 $q_g$ 到 $p_g$ 的横截连接以及搅拌器构型仍然持久存在。

证明。如果所需的交点已经存在，就取光滑映射 $g = f$。否则，应用引理 4.2 和 3.2，得到支集位于 $V_*$ 中的光滑接触同胚 $h_j$，满足 $h_j(x_*) = y_j$ 且 $h_j \to$ 在 $C^1$ 中为恒等映射。令 $g_j = h_j \circ f$。每个 $g_j$ 都是光滑的，且当 $j$ 足够大时，$g_j \in$ V。此外，$g_j$ 在 $f^{-1}(V_*)$ 外与 $f$ 一致。我们省略 $g_j$ 的下标 $j$。

令 $z_* = f^{-1}(x_*)$。引理 4.2 中确立的轨道避让条件蕴含

$$g^{-i}(z_*) = f^{-i}(z_*) \quad (i \geq 0), \qquad g^i(z_*) = f^{i-1}(y_j) \quad (i \geq 1).$$

第一条轨道在反向迭代下趋于 $p_f$，第二条轨道在正向迭代下趋于 $q_f$。由于支集避开了 $p_f$，$q_f$的邻域，这些不动点与原来的不动点重合，即 $p_g = p_f$ 和 $q_g = q_f$。因此，$z_*$ 是 $g$所需的强异宿点。其相交是准横截的，因为强切空间属于横截丛 $E_g^{uu}$和 $E_g^{ss}$。由$C^1$-小性可知，当 $j$充分大时，横截相交和搅拌器构型都会保持。

□

## 4.3 基点映射及其稠密性

**定义 4.4**。A基点映射 是集合中的一个映射

$$\mathcal{B} = \{g \in \mathcal{U} \cap C^\infty : W^{uu}(p_g, g) \cap W^{ss}(q_g, g) \neq \varnothing\}.$$

每个基点映射都有一个余指标一周期，因为从 $q_g$ 到 $p_g$ 的横截连接在整个$\mathcal{U}$中已经存在。

**命题 4.5** (基于点映射的稠密性)。光滑基映射在所选的接触开集 $U$ 中是 $C^1$-稠密的，即$\mathrm{clos}_{C^1}(\mathcal{B}) \cap U = U$。

证明。令 $f_0 \in$ U，并令 $\mathrm{V}_0 \subset$ U 为 $C^1$ 的任意接触开邻域。由命题3.6，结合 $K = O = M$，可得 $f_\infty \in \mathrm{V}_0 \cap C^\infty$。选取一个包含于 $\mathrm{V}_0$ 的 $C^1$ 开邻域 $\mathrm{V}_\infty$，使其包含 $f_\infty$。对 $f_\infty$ 和 $\mathrm{V}_\infty$ 应用命题 4.3，得到具有所需强连接的光滑映射 $g \in \mathrm{V}_\infty$。于是 $g \in \mathrm{V}_0 \cap$B。由于 $f_0$ 和 $\mathrm{V}_0$ 是任意的，稠密性得证。

□

每个基点映射都是光滑的，而环境开集 $\mathcal{U}$ 由 $C^1$ 个接触同胚组成。第 5.4 节会用到光滑性，而 $C^1$-正则性足以满足论证其他部分的需要。

固定一个基点映射 $g$，并省略其鞍点上的下标 $g$。选择

$$a \in W^{uu}(p,g) \cap W^{ss}(q,g), \qquad b \in W^{u}(q,g) \pitchfork W^{s}(p,g).$$

用于后续扰动的紧不变环为 $K_g := \{p,\ q\} \cup$ 轨道$(a,\ g) \cup$ 轨道$(b,\ g)$。$a$和 $b$ 的选取不必依赖于 $g$连续变化。

固定互不相交的鞍点邻域 $U_p$、$U_q$，并沿其轨道移动标记点，使得$a \in U_p$ 和 $b \in U_q$。选取整数 $T_a$，$T_b \geq 1$，使得 $a' = g^{T_a}(a) \in U_q$ 且 $b' = g^{T_b}(b) \in U_p$。在这些点的小邻域上，迭代定义了光滑接触过渡映射

$$A = g^{T_a} : U_a \longrightarrow U_{a'}, \qquad B = g^{T_b} : U_b \longrightarrow U_{b'}.$$

过渡邻域可选为其闭包紧含于坐标邻域中。缩小邻域后，任意固定有限个互异标记轨道点的邻域都可以两两不相交。

注 4.6（过渡时间的选取）。标记点和整数 $T_a$，$T_b$ 是辅助选取。当选取更小的鞍片或扰动邻域时，可以对它们进行调整。更明确地说，对于非负整数$i,\ j,\ k,\ \ell$，将 $(a,\ a')$ 替换为 $(g^{-i}(a)\ g^{j}(a'))$，并将 $(b,\ b')$ 替换为 $(g^{-k}(b)\ g^{\ell}(b'))$，会分别将过渡时间替换为 $T_a + i + j$和 $T_b + k + \ell$，并使端点更靠近相应的鞍点。我们对新的端点和时间仍使用相同的记号。这些变化保留了异宿轨道，因此也保留了 $K_g$。

这种自由度用于预先选择层片、标记点和盒。一旦为某个构造选定这些对象以及鞍点族 $F_t$，$T_a$，$T_b$ 便是固定的有限整数，且与 $n,\ m,\ t$无关。

在每个标记点处选取一个达布坐标图，并考虑命题 $Dg$中的不变部分双曲分裂 $TM = E^{ss}_g \oplus E^{c}_g \oplus E^{uu}_g$，见 4.1。两个强丛不可能在某个开邻域内都成为常值坐标分布，因为它们的和是不可积的接触分布 $\xi$。这一障碍涉及整个邻域内的丛，但并不排除在单个点处使它们的纤维对齐。

相对于固定的全局接触形式 $\alpha$，记作 $g^*\alpha = \kappa_g \alpha$。那么

$$\kappa_{g^N}(x) = \prod_{j=0}^{N-1} \kappa_g(g^j(x)),$$

对每个 $N \geq 1$ 都成立。

# 5 A 平坦中心方向周期附近的长周期轨道

本节的主要结果是定理 5.2，这是 [9,定理 2。3]中平坦芽结论的接触类比。证明采用 [10, 9]中的策略。在第 5.1–5.3 节中，我们利用 $C^1$ 估计构造中心乘子为一的长周期轨道。在第 5.4 节中，我们再应用接触提升，得到恒等中心芽。该构造以第 $\mathcal{B}$ 节中定义的光滑基点类 4.3为起点，所有邻域和扰动大小均按 $C^1$ 拓扑度量。

接触条件阻碍了直接应用这些工作中使用的仿射模型构造和显式中心特征值计算。具体而言，$\mathcal{U}$ 中元素的过渡映射不必具有分块形式。

为克服这些困难，我们首先构造长周期轨道，并渐近估计其中心特征值。随后，我们引入一族支集位于鞍点附近的局部扰动，并应用介值定理，使中心特征值恰好等于 1。

更准确地说，对于每个 $g \in \mathcal{B}$，我们构造扰动 $g_k \to g$ in $C^1$，它们保持鞍点$p$，$q$ 且具有受控的支集，并构造周期点 $w_k$，其最小周期为 $N_k \to \infty$，使得

$$\mu_{w_k,g_k} \xrightarrow{*} \theta_g \delta_p + (1-\theta_g)\delta_q, \quad \text{where} \quad \theta_g = \frac{\zeta_c(q;g)}{\zeta_c(q;g) - \zeta_c(p;g)}.$$

这里，对于一个部分双曲周期点 $w$，其所属映射为 $g$，本原周期为 $N$，$\mu_{w}$表示周期轨道$\mathrm{Orb}(w,g)$上的等分布测度，而 $\zeta_c(w;g) = \frac{1}{N}\log\lambda_c(w;g)$ 表示其中心方向特征值的归一化对数。此记号与命题4.1中的记号一致。

从几何上看，轨道$\mathrm{Orb}(w_k,g_k)$ 在 $p$ 附近迭代约 $\theta_g N_k$ 次，并在$(1-\theta_g)N_k$附近迭代约 $q$次。因此，$\zeta_c(w_k;g_k) \to 0$。事实上，引理5.7 给出

$$\zeta_c(w_k;g_k) = \int \log \kappa_{g_k} \, \mathrm{d}\mu_{w_k,g_k},$$

并且 $g_k \to g$ 在 $C^1$ 中的收敛意味着 $\log\kappa_{g_k}$ 到 $\log\kappa_g$的一致收敛。因此，积分收敛到 $\theta_g\zeta_c(p;g) + (1-\theta_g)\zeta_c(q;g) = 0$，因为 $\kappa_g \approx \kappa_g(\bullet) = \lambda_c(\bullet;g)$ 在鞍点 $\bullet = p,q$附近。尽管如此，中心特征值 $\lambda_c(w_k;g_k) = \exp(N_k o_k(1))$ 可能很大，因此，仅在轨道的一个点上进行 $C^1$-小的修改或许不足以达到 $\lambda_c = 1$。因此，我们在邻域 $U_p$内对中心特征值进行修改，该邻域包含轨道上约 $\theta_g N_k$ 个点。

对轨道上多个点进行这种修正，是通过周期轨道的连续族以及命题5.8中的一致平均估计实现的。命题 5.9 中的平衡选取随后给出所需的序列，使得 $\zeta_c(w_k;\ g_k) = 0$ 恰好成立。引理 5.4 给出了鞍点附近的过渡段。引理 5.5应用于命题 5.8证明中的步骤 2，将这些位于 $p$，$q$ 附近的过渡段与它们之间的过渡相连接。

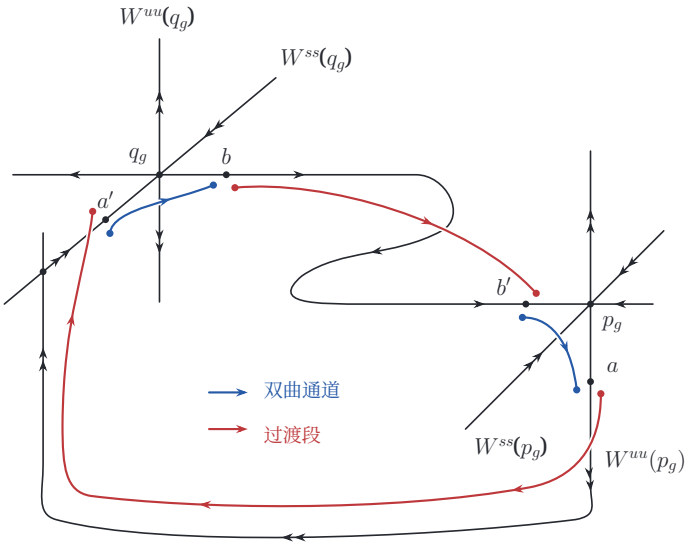



图 6：**两个通道和两个过渡段**。蓝色曲线示意表示 $q_g$ 和 $p_g$ 附近的局部双曲通道，红色曲线表示异宿轨道序列 $b \to b'$ 和 $a \to a'$ 附近的过渡段。随后，通过一个 $C^1$-小的接触扰动，将所选通道和过渡段的端点连接起来。

**定义 5.1**。 设 $p$ 是部分双曲微分同胚 $f$ 的一个周期点，周期为 $N$。那么 $T_pM$ 可分解为 $E^{ss}(p) \oplus E^c(p) \oplus E^{uu}(p)$。若 $p$ 满足鞍结点 条件，则称其为鞍结点：$Df^N|_{E^c(p)} = \mathrm{id}$。

**定理 5.2**。 设 $g \in B$。对于每个整数 $r \geq 1$、 $g$的每个 $C^1$-邻域 $V$，以及每个 $N_* > 0$，都存在

$$G \in \mathcal{V} \cap \mathcal{U} \cap \mathrm{Cont}^r(M, \xi)$$

以及一个关于 $G$ 的周期点 $w$，其最小周期为 $N > N_*$，并且存在一条经过 $w$ 的 $C^r$ 曲线 $C$，满足 $T_wC = E^c$（$w$， $G$），在该曲线上， $G^N$ 在 $w$ 处的芽是恒等映射。特别地， $w$ 是一个具有恒等中心芽的鞍结点。

## 5.1 双曲通道

一个双曲通道 是指这样一个有限轨道段：它从指定的局部稳定点附近进入，在鞍点附近停留，并从指定的局部不稳定点附近离开。令 $W^s_{\mathrm{loc}}(p, g; V)$ 表示其正向轨道始终留在 $V$ 中并收敛到 $p$ 的点，而不稳定集 $W^u_{\mathrm{loc}}(p, g; V)$ 则用反向轨道来定义。我们来考虑下面这个玩具模型。

例 5.3. 设 $g = (S, U)$ 是 $\mathbb{R}^{d_s} \times \mathbb{R}^{d_u}$ 上的一个双曲映射，其坐标为 $(s, u)$，且不动点为 $p = (0, 0)$。假设 $S = S(s)$ 和 $U = U(u)$ 分别是一致收缩和一致扩张的。则 $W^s(p) = \mathbb{R}^{d_s} \times \{0\}$ 且 $W^u(p) = \{0\} \times \mathbb{R}^{d_u}$。使用最大乘积范数，并令 $V = B_\rho(p)$。对于任意 $x = (x_s, 0) \in W^s\text{loc}(p; V)$ 以及任意 $y = (0, y_w) \in W^u_{\mathrm{loc}}(p; V)$，都存在点 $(z_n)$，使得

$$z_n \to x, \qquad g^n(z_n) \to y, \qquad \{g^k(z_n) : 0 \leq k \leq n\} \subset V.$$

证明。 只需将 $z_n = (x_s, U^{-n}(y_u))$ 放置好。由于数对 $(S, U)$ 是一致双曲的，因此 $z_n \to (x_s, 0)$ 和 $g^n(z_n) = (S^n(x_s)\ y_u) \to (0, y_u)$ 均如 $n \to \infty$。此外，根据构造，每个 $g^k(z_n)$ 都位于 $V$ 中。 □

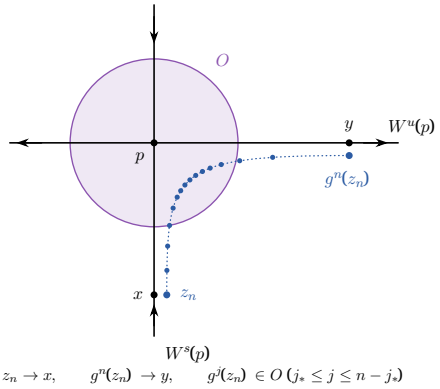



图 7：**穿过双曲鞍点**。 蓝色点表示一个离散轨道段，其中 $z_n \to x \in W^s{}_{\mathrm{loc}}(p)$ 且 $g^n(z_n) \to y \in W^u_{\mathrm{loc}}(p)$。对于 $p$ 的任意邻域 $O \subset U_p$，当 $n$ 足够大时，所有中间迭代 $g^j(z_n)$、 $j_* \leq j \leq n - j_*$ 都位于 $O$ 中，其中 $j_*$ 与 $n$ 无关。

对于一族连续的一参数$(F_t)^{t\in[-\delta_0,\delta_0]}$ 双曲映射，它们具有共同的双曲不动点 $p$，引理 5.4 在环境流形上建立了一个内禀版本，并构造了依赖于 $t$ 且满足等分布测度一致估计的过渡。随后，我们在 $p$， $q$ 处应用过渡构造，并将中心乘子认定为共形余循环。这些动力学要素将用于接下来两个小节中的局部扰动和周期轨道构造。

**引理 5.4** (参数族的一致鞍点通过)。 令 $t \mapsto F_t$ 为映入空间 $\mathrm{Diff}^1(M)$的连续映射，在 $t=0$附近定义，且对每个 $F_t$都有共同的双曲不动点 $p$。将区间 $I=[-\delta_0,\delta_0]$充分缩小后，存在大小一致的局部稳定片和不稳定片，满足以下性质：若

$$e_t \in W^s_{\mathrm{loc}}(p,F_t), \qquad d_t \in W^u_{\mathrm{loc}}(p,F_t)$$

在足够小的紧子片中连续选取，则对每个充分大的 $n$，都存在一个连续选取 $x_n(t)$，其轨道段 $[F_t^j(x_n(t))]_{j=0}^n$ 始终位于 $p$ 的某个固定邻域内，并具有以下性质。

(*i*) 对 $t \in I$一致地，

$$x_n(t) \longrightarrow e_t, \qquad F_t^n(x_n(t)) \longrightarrow d_t.$$

特别地，对每个固定的 $i \geq 0$，当 $n \to \infty$时，我们有一致的进入极限和离开极限

$$F_t^i(x_n(t)) \longrightarrow F_t^i(e_t), \qquad F_t^{n-i}(x_n(t)) \longrightarrow F_t^{-i}(d_t). \tag{5.1}$$

(*ii*) 对 $p$的每个邻域 $O$，都存在 $j_*=j_*(O)$，与 $n$、$t$无关，使得

$$F_t^j(x_n(t)) \in O \qquad (j_* \leq j \leq n-j_*). \tag{5.2}$$

特别地，对每个连续函数 $\varphi$： $I \times M \to \mathbb{R}$，

$$\sup_{t\in I}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(t,F_t^j(x_n(t))) - \varphi(t,p)\right| \longrightarrow 0. \tag{5.3}$$

证明。步骤 1。一致坐标。设 $d=d_s+d_u$。固定一个光滑环境坐标图 $\chi$： $(M,p) \to (\mathbb{R}^d,0)$，其中 $\chi(p)=0$。令 $E^s=E^s(p,F_0)$ 和 $E^u=E^u(p,F_0)$，并将其视为固定的向量空间。双曲子空间 $E^s(p,F_t)$ 和 $E^u(p,F_t)$ 的维数分别为常数 $d_s$、$d_u$，且随 $t$连续变化。选取连续线性同构 $L_t: T_pM \to T_0\mathbb{R}^d$，将两个因子 $E^s$ 和 $E^u$分别映到 $D\chi(p)E^s(p,F_t)$ 和 $D\chi(p)E^u(p,F_t)$。坐标图 $\Theta_t=\chi^{-1}\circ L_t$ 将 $T_pM \simeq \mathbb{R}^d$ 中 0 的一个邻域与 $M$中 $p$ 的邻域对应起来。记 $\widetilde{F}_t=\Theta_t^{-1}\circ F_t \circ \Theta_t$。因此 $D\widetilde{F}_t(0)$ 保持固定的坐标因子不变。

由 $C^1$ 连续性可知，在 $\Theta_t$ 坐标中，稳定片和不稳定片是映射的图像

$$\sigma_t : B^s_{r_0} \longrightarrow E^u, \qquad \varrho_t : B^u_{r_0} \longrightarrow E^s,$$

其中 $B^s_{r_0} \subset E^s$ 和 $B^u_{r_0} \subset E^u$ 是固定的小球。更确切地说，稳定片由点 $\Theta_t(s,\ \sigma_t(s))$组成，而不稳定片由点 $\Theta_t(\varrho_t(u)\ u)$组成。由分解可得，$\sigma_t(0)=\varrho_t(0)=0$，$D\sigma_t(0)=D\varrho_t(0)=0$。定义局部坐标变换

$$\Psi_t(s,u)=(s+\varrho_t(u),\, u+\sigma_t(s)).$$

由于 $D\Psi_t(0)=\mathrm{id}$，在 $t$ 中一致地缩小定义域，可使这些映射成为到其像上的 $C^1$ 微分同胚。此外，$s$，$u$轴分别映到图状层片上。

在得到的坐标中，令 $\widehat{F}_t := \Psi_t^{-1}\circ \widetilde{F}_t \circ \Psi_t$。定义线性映射 $S_t: E^s \to E^s$ 和 $U_t: E^u \to E^u$，使得 $DF_t(0)(s,u)=(S_ts, U_tu)$。若 $R_t=(R_t^s,R_t^u)$ 是 $F_t$ 的非线性余项，则

$$\widehat{F}_t(s,u)=(S_ts+R_t^s(s,u),\, U_tu+R_t^u(s,u)), \tag{5.4}$$

其中 $R_t(0) = 0$ 且 $DR_t(0) = 0$。层片的不变性意味着，在这些局部表达式有定义的地方，坐标轴也具有不变性。因此

$$R_t^s(0,u) = 0, \qquad R_t^u(s,0) = 0. \tag{5.5}$$

为双曲映射在 $t = 0$ 处选择固定的适配范数 $E^s, E^u$。缩小 $I$ 后， $S_t$ 和 $U_t^{-1}$ 的连续性保证存在 $0 < \rho < 1$，使得对于 $t \in I$， $\|S_t\|, \|U_t^{-1}\| \le \rho$。在直积上赋予范数 $\|(s,u)\|_{\max} := \max\{\|s\|, \|u\|\}$，并记 $Q_r = \{(s,u) : \|s\| \le r,\ \|u\| \le r\}$。当 $r$ 足够小时，映射 $\Psi_t$ 因而 $F_t$ 有定义。

由于 $t \mapsto R_t$ 关于 $C^1$ 连续，且 $DR_t(0) = 0$，减小 $r$ 可得 $\sup_{t\in I}\sup_{z\in Q_r} \|DR_t(z)\| \le \varepsilon$。由 $Q_r$ 的凸性和中值估计可知，对于 $z, z' \in Q_r$,

$$\|R_t(z) - R_t(z')\|_{\max} \le \varepsilon \|z - z'\|_{\max}, \qquad \|R_t(z)\|_{\max} \le \varepsilon \|z\|_{\max}.$$

选取 $0 < \varepsilon < 1 - \rho$，并相应地缩小 $r$。特别地， $\rho\varepsilon < 1$，且

$$\tau := \max\{\rho + \varepsilon, \rho(1+\varepsilon)\} < 1, \qquad \gamma := \max\left\{\rho + \varepsilon, \frac{\rho}{1 - \rho\varepsilon}\right\} < 1.$$

步骤 *2.* 边值压缩。如有必要，缩小 $W^s_{\mathrm{loc}}(p, F_t)$ 和 $W^u_{\mathrm{loc}}(p, F_t)$，便可将给定端点写为 $e_t = \Theta_t\Psi_t(e_t^s, 0)$、 $d_t = \Theta_t\Psi_t(0, d_t^u)$，其中 $\|e_t^s\|, \|d_t^u\| \le r/2$。对于固定的整数 $n$，定义相空间

$$\mathcal{X}_n := (Q_r)^{n+1} = \{Z = [z_j]_{j=0}^n = [(s_j, u_j)]_{j=0}^n : (s_j, u_j) \in Q_r \text{ for } 0 \le j \le n\},$$

配备范数

$$\|Z - \widetilde{Z}\|_n := \max_{0\le j\le n} \max\{\|s_j - \tilde{s}_j\|, \|u_j - \tilde{u}_j\|\}.$$

对于任意输入序列 $Z$，将$\mathcal{T}_{n,t}Z$ 的输出坐标定义为

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_{n,t}Z)_0^s &= e_t^s, \qquad & (\mathcal{T}_{n,t}Z)_j^s &= S_t s_{j-1} + R_t^s(s_{j-1}, u_{j-1}), \qquad & (1 \le j \le n),\\ (\mathcal{T}_{n,t}Z)_n^u &= d_t^u, \qquad & (\mathcal{T}_{n,t}Z)_j^u &= U_t^{-1}u_{j+1} - U_t^{-1}R_t^u(s_j, u_j), \qquad & (0 \le j < n). \end{aligned} \tag{5.6}$$

因此，稳定坐标在入口处给定，非稳定坐标在出口处给定，而其余坐标，即 $(\mathcal{T}_{n,t}Z)_0^u$、$(\mathcal{T}_{n,t}Z)_n^s$ 和 $(\mathcal{T}_{n,t}Z)_j$, $1 \le j < n$，则由输入 $Z$ 决定。

由 (5.4)，若 $\mathcal{T}_{n,t}Z = Z$，则 $Z = [(s_j, u_j)]_{j=0}^n$ 是 $F_t$ 的一个轨道段，其入口稳定坐标为 $e_t^s$，出口非稳定坐标为 $d_t^u$。因此，我们应用巴拿赫不动点定理，在$\mathcal{X}_n$中找到这样一个不动点。

步骤 *3*。巴拿赫不动点定理的应用。为检验$\mathcal{T}_{n,t}$ 是一个自映射，任取$Z \in \mathcal{X}_n$。每个输入坐标的范数至多为 $r$，因此 $R_t(0) = 0$推出 $\|R_t^s(s_j, u_j)\|, \|R_t^u(s_j, u_j)\| \le \varepsilon r$。由（5.6），对于 $0 \le j < n$ 我们得到

$$\|(\mathcal{T}_{n,t}Z)_{j+1}^s\| \le \rho\|s_j\| + \varepsilon r \le (\rho + \varepsilon)r \le \tau r, \qquad \|(\mathcal{T}_{n,t}Z)_j^u\| \le \rho\|u_{j+1}\| + \rho\varepsilon r \le \rho(1+\varepsilon)r \le \tau r.$$

两个边界输出坐标的范数至多为 $r/2$。由于 $\tau < 1$，每个输出坐标的范数至多为 $r$，从而证明了 $\mathcal{T}_{n,t}(\mathcal{X}_n) \subset \mathcal{X}_n$。

接下来取 $Z$， $Z \in \mathcal{X}_n$。边界输出与输入无关，因此它们的差为零。对于其余坐标和 $0 \le j < n$，我们有

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{T}_{n,t}Z)_{j+1}^s - (\mathcal{T}_{n,t}\widetilde{Z})_{j+1}^s\| &\le \rho\|s_j - \tilde{s}_j\| + \varepsilon\|z_j - \tilde{z}_j\|_{\max} \le (\rho + \varepsilon)\|Z - \widetilde{Z}\|_n,\\ \|(\mathcal{T}_{n,t}Z)_j^u - (\mathcal{T}_{n,t}\widetilde{Z})_j^u\| &\le \rho\|u_{j+1} - \tilde{u}_{j+1}\| + \rho\varepsilon\|z_j - \tilde{z}_j\|_{\max} \le \rho(1+\varepsilon)\|Z - \widetilde{Z}\|_n. \end{aligned}$$

对所有坐标取最大值，即可证明

$$\|\mathcal{T}_{n,t}Z - \mathcal{T}_{n,t}\widetilde{Z}\|_n \le \tau\|Z - \widetilde{Z}\|_n, \tag{5.7}$$

特别地，$\|\mathcal{T}_{n,\,t}\|_{\mathrm{Lip}} \le \tau < 1$，其中 $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ 表示利普希茨常数。常数 $\tau$ 以及自映射估计均与 $n$ 和 $t$无关。

巴拿赫不动点定理给出了唯一的不动点序列 $Z_n(t) = [(s_j(t)\ u_j(t))]_{j=0}^n$，其$\widehat{}$边界坐标满足 $s_0(t) = e_t^s$ 以及 $u_n(t) = d_t^u$。因此，$z_{j+1}(t) = F_t(z_j(t))$。特别地，定义$x_n(t) = \Theta_t\Psi_t(z_0(t))$，即可得到 $F_t$ 的一个轨道，并且满足 $F_t^j(x_n(t)) = \Theta_t\Psi_t(z_j(t))$。

此外，$t \mapsto Z_n(t)$ 是连续的。为说明这一点，注意到

$$\begin{aligned}\|Z_n(t) - Z_n(t_0)\| &\le \|\mathcal{T}_{n,t}Z_n(t) - \mathcal{T}_{n,t}Z_n(t_0)\| + \|\mathcal{T}_{n,t}Z_n(t_0) - \mathcal{T}_{n,t_0}Z_n(t_0)\| \\ &\le \tau\,\|Z_n(t) - Z_n(t_0)\| + \|\mathcal{T}_{n,t} - \mathcal{T}_{n,t_0}\|\cdot r.\end{aligned}$$

由于 $t \mapsto \mathrm{T}_{n,t}$ 是连续的，我们得到，当 $t \to t_0$ 时，$\|Z_n(t) - Z_n(t_0)\| \le \frac{r}{1-\tau}\,\|\mathrm{T}_{n,t} - \mathrm{T}_{n,t_0}\| \to 0$。第 4 步。一致的端点和中间部分估计。由 (5.5) 可得 $\|R_t^s(s,u)\| \le \varepsilon\|s\|$ 以及$\|R_t^u(s,u)\| \le \varepsilon\|u\|$。因此，稳定递推意味着

$$\|s_{j+1}\| \le \|S_t\|\,\|s_j\| + \|R_t^s(s_j,u_j)\| \le (\rho+\varepsilon)\|s_j\|.$$

不稳定递推的逆向形式给出

$$\|u_j\| \le \rho\|u_{j+1}\| + \rho\varepsilon\|u_j\| \quad \text{so that} \quad \|u_j\| \le \frac{\rho}{1-\rho\varepsilon}\|u_{j+1}\|.$$

因此，根据 $\gamma$ 的定义，对 $j$ 归纳可得

$$\|s_j(t)\| \le r\gamma^j, \qquad \|u_j(t)\| \le r\gamma^{n-j} \qquad (0 \le j \le n), \tag{5.8}$$

关于 $t$ 一致成立。

回到环境流形，回想一下，在坐标图 $(\Theta_t\Psi_t)^{-1}$，$e_t$ 和入口 $x_n(t)$ 具有相同的稳定坐标，而 $d_t$ 和出口 $F^n(x_n(t))$ 具有相同的不稳定坐标。因此，利用紧参数区间上的一致坐标界，(5.8) 给出

$$d(x_n(t), e_t) + d(F_t^n(x_n(t)), d_t) \le C\gamma^n, \qquad d(F_t^j(x_n(t)), p) \le C(\gamma^j + \gamma^{n-j}).$$

利用每个固定有限次迭代 $F_t^i$或 $F_t^{n-i}$的统一连续性，可得 (5.1) 和 (5.2 ).

对于联合连续的测试函数 $\varphi : I \times M \to \mathbb{R}$，略去其平均值的首尾 $j_*$ 项。其余各项均一致接近其在 $p$处的函数值，而略去部分的贡献至多为$4j_*\|\varphi\|_\infty/n$。这就证明了 (5.3)，并完成证明。

□

将引理 5.4 应用于常值族 $g$，其中 $(x,y)$ 在 $p$ 处满足 $= (b', a)$，且 $(x,y)$ 在 $q$ 处满足 $= (a', b)$，可得点 $x_n, y_m$，对任意分别充分大的 $n, m$ 均成立，使得

$$x_n \to b', \qquad g^n(x_n) \to a, \qquad y_m \to a', \qquad g^m(y_m) \to b. \tag{5.9}$$

这些通过段分别停留在 $U_p$ 和 $U_q$中，其占据测度分别趋于 $\delta_p$ 和 $\delta_q$。当 $n$足够大时，$m$，引理 5.5 通过两个 $C^1$-小的接触修正连接它们的转移端点，同时保持中间迭代不变。命题 5.8 沿参数族连续地完成这一匹配。

## 5.2 局部接触扰动与中心乘子

我们先准备两种局部扰动工具。对于（ $x_n, y_m$ ）中的通过点，5.9，下一个引理在转移端点处选取两个互不相交的盒，并运用点移动引理 3.2 将每次最终到达点与下一次通过入口匹配，同时保持中间迭代不变。第二种工具则构造一个在 $p$处改变中心指数的参数族。所有支撑邻域都在选定较长的通过长度之前固定。我们在第 5.3 节结合这些工具并选取参数。

**引理 5.5** (固定盒、避开与接触修正)。存在互不相交的达布盒$V_{a'}$， $V_{b'}$，其闭包避开 $p$， $q$，使得 $V_{a'} \cap K_g = \{a'\}$ 且 $V_{b'} \cap K_g = \{b'\}$。设 $x_n$ 和 $\overline{y_m}$ 为引理5.4证明之后构造的点。对于所有充分大的 $n$， $m$，按所示顺序排列的以下点中，

$$g^j(x_n) \qquad (1 \le j \le n + T_a), \qquad g^j(y_m) \qquad (1 \le j \le m + T_b), \tag{5.10}$$

在 $V_{a'}$ 中唯一的点是 $g^{n+T_a}(x_n)$，而在 $V_{b'}$ 中唯一的点是 $g^{m+T_b}(y_m)$。此外， $y_m \in V_{a'}$ 和 $x_n \in V_{b'}$。而且，对所有充分大的 $n$、 $m$，存在光滑接触同胚$h_{n,\,m}^{a'}$和$h_{n,\,m}^{b'}$，它们的支集紧包含于相应的盒中，使得

$$h_{n,m}^{a'}(g^{n+T_a}(x_n)) = y_m, \qquad h_{n,m}^{b'}(g^{m+T_b}(y_m)) = x_n.$$

两个修正及其复合$h_{n,\,m}^{b'} \circ h_{n,\,m}^{a'}$，当$\min\{n, m\} \to \infty$时，在 $C^1$ 中趋于恒等映射 .

证明。这两条标记异宿轨道的唯一聚点是 $p$， $q$。因此， $a'$， $b'$ 在 $K_g$中是孤立的。首先选取互不相交的小盒，将这两点分别隔离；然后取小的闭鞍点邻域，使其与这些盒的闭包互不相交。由（5.2），对于所有充分大的通过时间，通过过程的中间部分都一致地位于这些鞍点邻域内。有限多个剩余的入口点、出口点和过渡点分别收敛到相应的标记轨道点。在列表（5.10）中， $a'$， $b'$ 唯一的极限出现位置是最后两次到达。必要时稍微缩小这些盒，即可证明避开性断言。端点的包含关系由（5.9）得出。

为构造接触修正，我们在一个固定的盒内连接两个变化的端点。若 $r_k$， $s_k \to c$位于固定的达布盒 $V$内，则应用引理 3.2 两次，得到 $R_k(c) = r_k$ 和 $S_k(c) = s_k$，这两个映射的支集都紧包含于 $V$ 中，并且在 id处于 $C^1$时趋于

$$h_k := S_k \circ R_k^{-1}, \qquad h_k(r_k) = s_k,$$

其支集紧包含于 $V$，并且在 $C^1$ 中趋于 id，这由求逆与复合的连续性可知。截断函数可固定在 $V$ 的一个紧子集上。

在 $V_{a'}$ 中对 $g^{n+T_a}(x_n)$ $y_m \to a'$ 以及在 $V_{b'}$ 中对 $g^{m+T_b}(y_m)$ $x_n \to b'$应用这一观察。这些极限由（5.9）以及固定过渡段的连续性得出。因此，该构造给出了由$(n, m)$索引的所需修正。它们的复合在 id 中也趋于 $C^1$。由于这些盒互不相交，且每个修正都将自己的盒映射到自身，因此复合实现了预先指定的两个端点移动，彼此互不干扰。

□

之后将把这些闭合修正与 $p$ 附近的一个参数族结合起来。我们先在鞍点的一个固定邻域内构造该参数族，再选取长周期轨道。

**引理 5.6** （改变 $p$ 处中心指数的局部族）。 存在 $\delta_0 > 0$、 $p$ 的一个固定达布邻域 $B_p$，以及一个族 $F_t = h_t \circ g$, $|t| \le \delta_0$，它关于 $C^1$ 拓扑连续，并且满足 $h_0 =$ 恒等映射且 支集 $h_t \subset\subset B_p$。因此，

$$F_t = g \quad on\ M \setminus g^{-1}(B_p).$$

$p$ 和 $q$ 仍是固定的双曲鞍点，且指标不变，并且

$$\zeta_c(p;F_t)=\zeta_c(p;g)+t,\qquad \zeta_c(q;F_t)=\zeta_c(q;g). \tag{5.11}$$

集合 $B_p\cup g^{-1}(B_p)$ 可以选在 $p$ 的任意指定邻域内。此外，

$$\sup_{|t|\le\delta}\|F_t-g\|_{C^1}\longrightarrow 0\quad as\ \delta\to 0.$$

证明。选取足够小的 $B_p$，使其及其在 $g$ 下的原像都包含在 $p$ 的指定邻域内。特别地，它们可以避开闭合盒、$q$ 的一个闭邻域，以及有限个过渡段的所有标记点。在以 $p$ 为中心的达布坐标中，取 $\alpha_{\mathrm{std}}=\mathrm{d}z-x\cdot\mathrm{d}y$，选取一个支集包含于 $B_p$ 且在原点附近恒等于一的固定光滑截断函数 $\eta$。令 $h_t$ 为接触哈密顿量的时间一映射

$$H_t(x,y,z)=t\eta(x,y,z)\Big(z-\frac{1}{2}x\cdot y\Big).$$

在原点的一个足够小邻域上，对小的 $|t|$ 一致地，其流给出

$$h_t(x,y,z)=\big(e^{t/2}x,e^{t/2}y,e^t z\big),\qquad h_t^*\alpha_{\mathrm{std}}=e^t\alpha_{\mathrm{std}}.$$

特别地，$h_t(p)=p$。从达布坐标变回流形时，坐标变换及其逆变换的共形因子在这个不动点处相互抵消，因此相对于全局接触形式，$\kappa_{h_t}(p)=e^t$ 也成立。于是 $\kappa_{F_t}(p)=e^t\kappa_g(p)$，引理 5.7 便证明了 (5.11)。扰动后的映射在 $q$ 附近与 $g$ 一致。固定截断函数使 $h_t$ 关于 $t$ 光滑，并且当 $t\to 0$ 时与 id 的距离为 $C^1$。缩小 $\delta_0$ 后，双曲性、指标以及属于 U 这一性质仍然成立。 □

剩下的辅助事实指出，中心乘子是后续参数选择所要控制的量。当周期轨道上的中心方向与接触分布横截时，该乘子等于沿轨道的共形因子的乘积。

**引理 5.7**。设 $G$ 是一个满足 $G^*\alpha=\kappa_G\alpha$ 的接触同胚，且 $w$ 是一个本原周期为 $N$ 的周期点。假设 $G$ 沿轨道 $(w)$ 存在部分双曲分裂 $TM=E^{ss}\oplus E^c\oplus E^{uu}$，满足维数 $E^c=1$ 且 $E^c\pitchfork\xi$，其中 $\xi=\ker\alpha$。那么

$$\lambda_c(w;G)=\kappa_{G^N}(w)=\prod_{j=0}^{N-1}\kappa_G(G^j(w)). \tag{5.12}$$

证明。若 $v_c\neq 0$ 属于 $E^c(w)$，则将 $\alpha$ 作用于 $DG^N(w)v_c=\lambda_c(w)v_c$ 可得

$$\kappa_{G^N}(w)\alpha(v_c)=\alpha(DG^N(w)v_c)=\lambda_c(w)\alpha(v_c).$$

由于 $E^c\pitchfork\xi$，$\alpha(v_c)\neq 0$，因此 $\lambda_c(w)=\kappa_{G^N}(w)$。 □

回忆命题 4.1 为$E^c$ 到 $\xi$ 中每个映射的$\mathcal{U}$提供了部分双曲分裂和一致横截性。因此，该引理适用于下文构造的周期轨道，它们的中心乘子为正。

## 5.3 中心乘子为一的长周期轨道

固定一个基点映射 $g\in\mathcal{B}$。我们将第 5.1 节的一致鞍点通过与第 5.2 节的局部接触扰动结合起来。在命题 5.8 中，我们选取鞍点族和两个闭合盒，然后为每一对充分大的 $(n,\ m)$ 构造周期轨道。这些轨道随 $t$ 连续变化，并满足一致的指数和轨道平均估计。在命题 5.9 中，我们再选取一对平衡的通过长度 $(n,\ m)$，并固定这对长度，同时改变 $t$，使中心乘子等于一。

**命题 5.8**（长周期轨道的连续族）。 固定 $g \in \mathcal{B}$，并记

$$\zeta_p = \zeta_c(p; g) < 0, \qquad \zeta_q = \zeta_c(q; g) > 0.$$

存在 $\delta_0 > 0$ 以及一个族 $F_t$，如引理 5.6 所述，使得对于每个充分大的 $n, m$，都存在接触同胚 $G_{n,m,t} \in U$ 和点 $w_{n,m}(t)$，它们分别关于 $t \in [-\delta_0, \delta_0]$ 中的 $C^1$ 拓扑和流形拓扑连续，并具有以下性质。

*(i)* 鞍点 $p, q$ 保持不动，且 $w_{n,m}(t)$ 的最小周期为 $N_{n,m} = n + m + T_a + T_b$。存在$\omega(\delta) \to 0$，使其作为 $\delta \to 0$ 和 $\varepsilon_{n,m} \to 0$，满足 $\min\{n, m\} \to \infty$，使得

$$\sup_{|t| \le \delta} \|G_{n,m,t} - g\|_{C^1} \le \omega(\delta) + \varepsilon_{n,m} \qquad (0 < \delta \le \delta_0). \tag{5.13}$$

给定 $K_g$ 的任意邻域，先限制 $\delta$，再令 $n, m$ 足够大后，所有这些周期轨道都位于其中。

*(ii)* 归一化中心乘子

$$E_{n,m}(t) := \zeta_c(w_{n,m}(t); G_{n,m,t}) = \frac{1}{N_{n,m}} \log \lambda_c(w_{n,m}(t); G_{n,m,t})$$

是连续的，并且

$$\sup_{|t| \le \delta_0} \left| E_{n,m}(t) - \frac{n(\zeta_p + t) + m\zeta_q}{N_{n,m}} \right| \longrightarrow 0 \quad as \ \min\{n, m\} \to \infty. \tag{5.14}$$

此外，令 $\mu_{n,m,t}$ 表示等分布测度 $\mu_{w_{n,m}(t)G_{n,m,t}}$。对于每个连续的 $\psi : M \to \mathbb{R}$，

$$\sup_{|t| \le \delta_0} \left| \int \psi \, \mathrm{d}\mu_{n,m,t} - \frac{n\psi(p) + m\psi(q)}{N_{n,m}} \right| \longrightarrow 0 \quad as \ \min\{n, m\} \to \infty. \tag{5.15}$$

证明。步骤 *1*：选择这一族及各段轨迹。为 $g$ 在引理 5.4中选择小层片，并利用注记 4.6 中的自由度，将标记点 $a, a', b, b'$ 置于更小的紧子片中。然后固定过渡时间以及引理 $V_{a'}, V_{b'}$ 中的盒，这些来自引理 5.5。选择引理 5.6 中的支撑邻域，使得 $B_p \cup g^{-1}(B_p)$ 避开闭合盒的闭包、包含 $q$ 段轨迹的闭邻域，以及有限条过渡轨迹。这些紧集避开 $p$，因此可以作出所需选择。有限个过渡点的小邻域也同样满足避开条件。

构造出 $F_t$后，利用 $C^1$ 在 $t = 0$ 处的连续性缩小参数区间，使所选的较小层片位于共同的坐标邻域中，并满足引理 5.4的估计。此时，无需再改变标记点或过渡时间。 的稳定片和不稳定片随着 $p$ 在 $C^1$ 中的变化而连续变化，其中 。选择连续变化的标记点 $b'_t, a_t$ 位于这些层片上，使其满足$b'_0 = b'$ 和 $a_0 = a$，例如固定它们的片坐标。取 5.4 中的 $e_t = b'_t$ 和$d_t = a_t$ 应用引理，得到 $x_n(t)$。

在 $q$ 处，使用 $y_m$ 引理 5.4 中常值族对应的点。对于充分大的 $T_b$，它们的经过段及其后续长度为 $F_t$ 的过渡段与 $g$ 相同，因为这些经过段和所有过渡到达点都避开了 $m$。定义 $B_p$

$$c_t = F_t^{T_a}(a_t), \qquad r_n(t) = F_t^{n+T_a}(x_n(t)), \qquad s_m = F_t^{m+T_b}(y_m).$$

$q$ 通行段及其后续的有限过渡均避开 $B_p$，因此 $s_m = g^{m+T_b}(y_m)$。参数区间的紧致性以及固定过渡迭代的连续性给出

$$r_n(t) \longrightarrow c_t, \qquad s_m \longrightarrow b', \qquad c_0 = a', \tag{5.16}$$

关于 $t$的一致结论。特别是，当 $t \to 0$时， $c_t \to a'$ 。起点 $a_t$ 随 $t$变化，尽管有限过渡映射在原有轨道序列附近与原映射一致。

步骤 *2*：一致避开与连续修正。缩小 $\delta_0$后，闭合盒 $V_{a'}$、$V_{b'}$ 中由引理 5.5 给出的列表

$$F_t^j(x_n(t)) \quad (1 \le j \le n + T_a), \qquad g^j(y_m) \quad (1 \le j \le m + T_b)$$

分别为 $r_n(t) = F_t^{n+T_a}(x_n(t)) \in V_{a'}$ 和 $s_m = g^{m+T_b}(y_m) \in V_{b'}$；此外还有 $y_m \in V_{a'}$ 和 $x_n(t) \in V_{b'}$。为统一处理无界的通过长度，先选取与两个闭合盒均不相交的闭鞍点邻域。引理 5.4 保证每个中间迭代点都位于这些邻域内，并对所有参数给出统一的进入/退出界 $j_*$。其余的进入、退出和过渡列表都是有限的。在 $t = 0$ 处，除指定的最终到达点外，其极限标记点与闭盒之间均有正的间距。缩小参数区间以保持这些间距，然后利用有限次迭代极限的一致性增大 $n, m$ 。这就证明了所述避开在 $t, n, m$ 中是一致成立的。

引理 3.2 中的构造对每个 $c \in \{a', b'\}$给出一个光滑族 $P_{c;z}$，其中包含定义在 $z$ 附近的光滑接触映射，满足 $c$，使得

$$P_{c;z}(c) = z, \qquad P_{c;c} = \mathrm{id}, \qquad \operatorname{supp} P_{c;z} \subset L_c \subset\subset V_c.$$

固定截断函数以及哈密顿系数对目标坐标的光滑依赖性保证了所要求的光滑族。其支集包含于固定集合 $L_c$ 中。令

$$H_{n,m,t}^{a'} = P_{a';y_m} \circ P_{a';r_n(t)}^{-1}, \qquad H_{n,m,t}^{b'} = P_{b';x_n(t)} \circ P_{b';s_m}^{-1}. \tag{5.17}$$

这些映射分别将 $r_n(t)$ 映到 $y_m$，并将 $s_m$ 映到 $x_n(t)$。由复合与求逆的连续性可知，它们关于 $t$ 在 $C^1$ 中连续，并且在两个互不相交的盒中具有固定的紧支集。令

$$G_{n,m,t} = H_{n,m,t}^{b'} \circ H_{n,m,t}^{a'} \circ F_t, \qquad w_{n,m}(t) = x_n(t). \tag{5.18}$$

由于 $n \to \infty$ 和 $m \to \infty$，我们有 $x_n(t) \to b'_t$， $y_m \to a'$， $r_n(t) \to c_t$，并且 $s_m \to b'$。因此，当 $n$ 趋于 $m \to \infty$ 时，映射族 $G_{n,m,t}$ 的极限为

$$G_{\infty,t} = P_{b';b'_t} \circ P_{a';c_t}^{-1} \circ F_t.$$

端点的一致收敛以及点移动族在紧参数集上的一致连续性推出

$$\varepsilon_{n,m} := \sup_{|t| \le \delta_0} \|G_{n,m,t} - G_{\infty,t}\|_{C^1} \longrightarrow 0. \tag{5.19}$$

由于 $G_{\infty,0} = g$ 且 $t \mapsto G_{\infty,t}$ 是 $C^1$-连续的，令 $\omega(\delta) = \sup_{|t| \le \delta} \|G_{\infty,t} - g\|_{C^1}$ 即可证明（5.13）。特别地，对于固定的非零 $t$，修正项不一定趋于恒等映射。缩小 $\delta_0$ 并提高 $n, m$ 的共同阈值，即可确保 $G_{n,m,t} \in \mathcal{U}$。

步骤 *3*：精确轨道序列和最小周期。 刚刚证明的回避性质和后复合顺序给出了以下精确恒等式

$$\begin{aligned} G_{n,m,t}^{j}(x_n(t)) &= F_t^j(x_n(t)) \quad (0 \le j < n + T_a), \\ G_{n,m,t}^{n+T_a+j}(x_n(t)) &= g^j(y_m) \qquad (0 \le j < m + T_b), \\ G_{n,m,t}^{n+m+T_a+T_b}(x_n(t)) &= x_n(t). \end{aligned} \tag{5.20}$$

在从 0 到 $n + m + T_a + T_b - 1$ 编号的 $n + m + T_a + T_b$ 个点中， $V_{b'}$ 中唯一的点是 $x_n(t)$，而 $V_{a'}$ 中唯一的点是 $y_m$。如果最小周期是 $n + m + T_a + T_b$ 的真因子，

那么初始点就会在这个列表中再次出现。因此，它的最小周期恰好是 $N_{n,\ m} = n + m + T_a + T_b$。这些修正固定了 $p$，$q$ 的邻域，因此这些邻域在 $G_{n,\ m,\ t}$ 下保持不变。

要验证轨道包含于 $K_g$的给定邻域中，可在其中选取较小的鞍点邻域。鞍点邻域之外的进入段和离开段长度一致有界，且它们在 $t = 0$处的极限连同有限个过渡点都属于 $K_g$。先缩小参数区间，使这些有限个极限仍处于指定邻域内，然后增大 $n$，$m$。公式（5.20）证明了 (i)。

步骤 *4*：一致平均与共形余循环。令 $\varphi(t, z) = \log \kappa_{F_t}(z)$，它在 $I \times M$上联合连续。相对于 $F_t$，两个闭合修正仅在 $r_n(t)$ 和 $s_m$处贡献额外的共形因子。因此，引理 5.7 给出精确等式

$$\begin{aligned}\log \lambda_c(w_{n,m}(t); G_{n,m,t}) = &\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(t, F_t^j(x_n(t)))}_{\text{passage near } p} + \underbrace{\sum_{j=n}^{n+T_a-1} \varphi(t, F_t^j(x_n(t)))}_{\text{transition } a\to a'} \\ &+ \underbrace{\sum_{j=0}^{m-1} \varphi(t, g^j(y_m))}_{\text{passage near } q} + \underbrace{\sum_{j=m}^{m+T_b-1} \varphi(t, g^j(y_m))}_{\text{transition } b\to b'} \\ &+ \underbrace{\log \kappa_{H^{a'}_{n,m,t}}(r_n(t))}_{\text{point-moving correction in } V_{a'}} + \underbrace{\log \kappa_{H^{b'}_{n,m,t}}(s_m)}_{\text{point-moving correction in } V_{b'}}.\end{aligned} \tag{5.21}$$

每一项在 $n, m$固定时都关于 $t$ 连续，从而证明了 $E_{n,m}$ 的连续性。

对于 $p$附近的经过段，将引理 5.4 应用于联合连续的 $\varphi$，可知第一个和除以 $n$ 等于 $\varphi(t, p) + o_n(1) = \zeta_p + t + o_n(1)$，且关于 $t$一致。对于 $q$附近的经过段，第三个和除以 $m$ 等于 $\zeta_q + o_m(1)$，且关于 $t$一致，因为 $F_t = g$ 在 $q$ 经过段邻域上。第二个和与第四个和对应于过渡段，分别只包含 $T_a$ 项和 $T_b$ 项，因此一致有界。两个闭合对数项也一致有界，因为它们的端点取值于固定的紧邻域中，且点移动族及其逆映射关于 $C^1$ 连续，并具有正共形因子。因此，存在 $o_n(1)\ o_m(1) \to 0$ 和一个常数 $C$，与 $n$、$m$、$t$ 无关，使得

$$\left| E_{n,m}(t) - \frac{n(\zeta_p + t) + m\zeta_q}{N_{n,m}} \right| \le \frac{no_n(1) + mo_m(1) + C}{N_{n,m}}.$$

这就证明了对于任意充分大的 $n$，$m$，(ii) 成立。

为证明 (5.15)，固定一个连续的 $\psi\colon\ M \to \mathbb{R}$。相同的过渡段估计给出

$$\eta_n(\psi) := \sup_{|t|\le\delta_0} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi(F_t^j(x_n(t))) - \psi(p) \right| \longrightarrow 0, \quad \zeta_m(\psi) := \left| \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \psi(g^j(y_m)) - \psi(q) \right| \longrightarrow 0.$$

由精确轨道序列 (5.20)，其余 $T_a + T_b$ 个轨道点属于两个过渡段。每个过渡段的绝对值贡献至多为 $\|\psi\|_\infty$。因此

$$\sup_{|t|\le\delta_0} \left| \int \psi \, d\mu_{n,m,t} - \frac{n\psi(p) + m\psi(q)}{N_{n,m}} \right| \le \frac{n\eta_n(\psi) + m\zeta_m(\psi) + (T_a + T_b)\|\psi\|_\infty}{N_{n,m}} \longrightarrow 0.$$

因此 (5.15) 也成立。 □

现在我们利用一致估计来选取一列平衡的经过长度。对于每一对足够长的轨道，我们在参数变化时保持周期不变，并运用介值定理得到中心乘子为一。

**命题 5.9** (中心乘子为一的长周期轨道)。 对于每个 $g \in B$、每个 $C^1$ $g$ 的邻域 $V$、每个 $K_g$ 的邻域 $O$，以及每个 $N_* > 0$，都存在一个接触同胚$G \in V \cap U$ 和一个最小周期为 $N > N_*$ 的周期点 $w$，使得

$$\mathrm{Orb}(w, G) \subset \mathcal{O}, \qquad \lambda_c(w; G) = 1.$$

点 $p, q$ 对于 $G$ 仍是不动点。特别地，可以在 $C^1$ 中选取一个序列 $G_k \to g$，其最小周期为 $N_k \to \infty$，乘子为 $\lambda_c(w_k;\ G_k) = 1$，并且

$$\mu_{w_k, G_k} \xrightarrow{*} \theta_g \delta_p + (1 - \theta_g)\delta_q.$$

这里 $\theta_g = \zeta_q/(\zeta_q - \zeta_p) \in (0,\ 1)$。

证明。 使用命题 5.8中的族。取 $n_k = \lfloor \theta_g k \rfloor$， $m_k = k - n_k$，令 $k$ 足够大。于是 $N_k = k + T_a + T_b \to \infty$，而一致指数估计给出

$$u_k := \sup_{|t| \le \delta_0} |E_{n_k, m_k}(t) - \theta_g t| \longrightarrow 0.$$

当 $k$ 足够大时，端点 $-\delta_0$ 和 $\delta_0$ 处的指数异号。由介值定理，取一个零点 $t_k$ 。关键是，$\theta_g |t_k| = |\theta_g t_k - E_{n_k,\ m_k}(t_k)| \le u_k$，因此 $t_k \to 0$。令 $G_k = G_{n_k,\ m_k,\ t_k}$以及 $w_k = w_{n_k,\ m_k}(t_k)$。结合误差项为 (5.19) 和 $\omega(0) = 0$ 的闭合估计，得到

$$\|G_k - g\|_{C^1} \le \omega(|t_k|) + \varepsilon_{n_k, m_k} \longrightarrow 0,$$

其中情形 $t_k = 0$ 直接由 $G_{\infty,0} = g$得出。乘子恰为 $1$，最小周期为$N_k$，且该扰动保留鞍点。命题5.8的轨道包含结论与 $t_k \to 0$共同保证，对于所有足够大的 $k$，轨道都位于 $K_g$ 的任意指定邻域内。其一致平均估计给出

$$\int \psi \, \mathrm{d}\mu_{w_k, G_k} = \frac{n_k \psi(p) + m_k \psi(q)}{N_k} + o(1) \longrightarrow \theta_g \psi(p) + (1 - \theta_g)\psi(q).$$

取 $k$ 充分大，也就证明了逐个存在性断言。 □

## 5.4 中心芽的平坦化

根据第 4 节中的构造，$\mathcal{B}$ 中的每个基点映射都是光滑的，该节以及第 5.2–5.3 节中使用的所有接触扰动也都是光滑的。因此，命题 $G_k$ 所给出的每个映射 5.9 都是光滑的。

固定这样一个映射和轨道，并记

$$G = G_k, \qquad w = w_k, \qquad N = N_k, \qquad R = G_k^{N_k}.$$

因此 $R(w) = w$ 和 $DR(w)|_{E^c(w)} =$ 恒等。我们用 $R$ 表示回归映射。对于任意指定的有限正则性，$R$ 的光滑性都能提供一条具有足够高有限正则性的局部不变中心曲线。我们用接触坐标将这条曲线拉直，并将引理 3.1 应用于回归芽的逆映射。所得映射具有指定的正则性，且与 $G$任意接近。后续的轨道分裂构造只需要有限正则性。

**命题 5.10** (中心芽的平坦化)。 设 $G \in \mathrm{Cont}^\infty(M, \xi)$，且 $w$ 是最小周期为 $N$ 的周期点。假设回归映射 $R = G^N$ 具有不变部分双曲分裂$T_w M = E^{ss}(w) \oplus E^c(w) \oplus E^{uu}(w)$，其中中心方向 $E^c(w)$ 是一维，且

$$DR(w)|_{E^c(w)} = \mathrm{id}, \qquad E^c(w) \pitchfork \xi_w.$$

对于每个整数 $r \geq 1$、$G$ 的每个 $C^1$-邻域 $\mathcal{W}$，以及每个 $w$ 的邻域 $V$（其闭包避开轨道$(w, G)$的其他点），都存在 $G \in \mathcal{W} \cap \mathrm{Cont}^r(M, \xi)$，以及一条经过 $w$ 且与 $E^c(w)$相切的 $C^r$ 曲线 $C$，使得

$$\widetilde{G} = G \text{ on } M \setminus V, \qquad \mathrm{Orb}(w, \widetilde{G}) = \mathrm{Orb}(w, G), \qquad D\widetilde{G}(x) = DG(x) \quad (x \in \mathrm{Orb}(w, G)),$$

且扰动回归映射 $\widetilde{R} = \widetilde{G}^N$ 满足 $\widetilde{R}|_C = \mathrm{id}$，作为 $w$ 处的芽。

证明。固定整数 $r \geq 1$，并选取一个更小的邻域 $V_0$，使其包含 $w$，且 $V_0 \subset V$满足以下集合$G^j(V_0)$、$0 \leq j < N$两两不交。我们首先构造一条不变中心曲线 $C$ 以及一个与 $C$相适配的接触坐标图。由于回归映射 $R = G^N$ 是光滑的，有限正则性中心流形定理 [27] 给出一条局部 $C^{r+3}$ 不变中心曲线 $C$，满足

$$w \in C, \qquad T_w C = E^c(w), \qquad R(C) \subset C$$

作为 $w$ 处的芽。注意，这里并未声称该曲线唯一。由于 $E^c(w) \pitchfork \xi_w$，缩小 $C$ 后，我们有 $TC \pitchfork \xi$ 在 $C$ 的每一点处成立。选取一个 $C^{r+3}$ 参数化 $\Gamma\colon (-\varepsilon,\ \varepsilon) \to C$，使得 $\Gamma(0) = w, \alpha(\Gamma(t)) = 1$ 对每个充分小的 $t$ 都成立。

在 $R$ 下 $C$ 的不变性通过以下方式定义了一维芽 $R_c$

$$R(\Gamma(t)) = \Gamma(R_c(t)). \tag{5.22}$$

特别地，我们有 $R_c(0) = 0$。在 $t = 0$ 处对这个恒等映射求导，得到 $DR(w)\Gamma(0) = R_c'(0)\Gamma(0)$。由于 $\Gamma(0) \in E^c(w)$ 且 $DR(w)|_{E^c(w)} = \mathrm{id}$，因此可得 $R_c'(0) = 1$。

存在一个适配于这条曲线的显式接触坐标图。在 $\alpha$ 的光滑达布坐标图中，写作$\Gamma(t) = (a(t)\ b(t)\ c(t))$。归一化给出 $c'(t) - a(t) \cdot b'(t) = 1$。定义

$$\vartheta(x, y, t) = \frac{1 + a'(t) \cdot y}{1 + x \cdot b'(t)}, \qquad \Phi(x, y, t) = \big(a(t) + \vartheta(x, y, t)x,\ b(t) + y,\ c(t) + a(t) \cdot y\big). \tag{5.23}$$

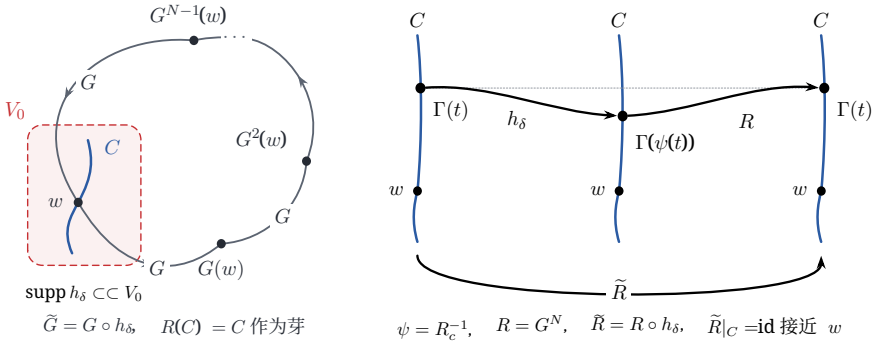
直接计算可得 $\Phi^*(\mathrm{d}z - x\cdot \mathrm{d}y) = \vartheta(\mathrm{d}t - x\cdot \mathrm{d}y)$。因子 $\vartheta$ 在轴附近为正，并且由于 $c' - a\cdot b' = 1$，原点 $(0, 0, 0)$ 处的微分可逆。与环境 Darboux 图复合并缩小定义域后，即得到所需的接触坐标图 $\Phi$，其映入 $V_0$，且满足 $\Phi(0, 0, t) = \Gamma(t)$。公式（5.23）至多损失一个导数，因此其正则性至少为 $C^{r+1}$。回归芽 $R_c$ 及其逆具有引理 3.1 所要求的正则性。

令 $\widehat{R} = \Phi^{-1} \circ R \circ \Phi$。$C$的不变性给出 $\widehat{R}(0,0,t) = (0,0, R_c(t))$。恒等式 $\ker \Phi^*\alpha = \xi_{\mathrm{std}}$意味着包含关系 $\Phi \circ \mathrm{Cont}^r_c(U_\Phi, \xi_{\mathrm{std}}) \circ \Phi^{-1} \subset \mathrm{Cont}^r_c(V_0, \xi)$。

将引理 3.1 应用于 $\psi := R_c^{-1} \in C^{r+1}$，可得到一个 $\delta > 0$ 和一个 $C^1$-小的接触扰动$\mathcal{L}_{\psi,\delta} \in \mathrm{Cont}^r_c(U_\Phi, \xi_{\mathrm{std}})$，使其满足

$$\mathcal{L}_{\psi,\delta}(0, 0, t) = (0, 0, R_c^{-1}(t))$$

对于 $|t| \leq \delta$。这个提升固定原点，且其导数为恒等映射。选择足够小的 $\delta$，使得该提升的支集紧含于 $U_\Phi$中。




**（a）局部化扰动** **（b）消除中心回归**

图 8：**中心芽的平坦化。** (a) 修正 $h_\delta$ 的支集包含于 $V_0$中，而 $V_0$只包含其周期为$N$的轨道上的 $w$，且 $G = G\circ h_\delta$ 保持该轨道及其导数不变。(b) 局部中心曲线 $C$ 的三个副本展示了修正 $\psi = R_c^{-1}$后接回归映射 $R = G^N$，从而使$R|_C =$作为芽在 $w$处等于 id。

通过定义 $h_\delta := \Phi\circ \mathcal{L}_{\psi,\delta} \circ \Phi^{-1}$，将局部化扰动共轭回 $M$，并将其定义在 $\Phi(U_\Phi)$ 上，再将此映射在坐标图外延拓为恒等映射。因此 $h_\delta \in \mathrm{Cont}_c^r(V_0, \xi)$。坐标图在选择 $\delta$之前就已固定，因此 $h_\delta$ 也可以任意接近恒等映射（以 $C^1$ 为度量），并且

$$h_\delta(\Gamma(t)) = \Gamma(\psi(t)) \tag{5.24}$$

当 $t$ 足够小时 . $V$的选取确保对于每个 $1 \le j \le N$，都有 $G^j(\mathrm{supp}\, h_\delta)$ 在包含于 $\mathrm{supp}\, h_\delta$ 成立，并且 $G$ 是一个任意接近$G$的 $C^1$接触同胚。因此，我们可以确保 $G \in$W。由于 $h_\delta(w) = w$、$Dh_\delta(w) = \mathrm{id}$，且支集不包含 $\mathrm{Orb}(w, G)$ 中的其他点，我们有 $\mathrm{Orb}(w, G) = \mathrm{Orb}(w, G)$，并且 $DG(x) = DG(x)$ $(x \in \mathrm{Orb}(w, G))$。特别地，最小周期仍为 $N$。此外，对于每个充分接近 $w$的点，由不相交性可得

$$\widetilde{R} := \widetilde{G}^N = G^N \circ h_\delta = R \circ h_\delta.$$

将此与（5.24）和（5.22）结合，可得对所有充分小的 $t$，

$$\widetilde{R}(\Gamma(t)) = R(h_\delta(\Gamma(t))) = R(\Gamma(\psi(t))) = \Gamma(R_c(\psi(t))).$$

由于 $\psi = R_c^{-1}$，对于所有充分小的 $t$，我们得到 $\widetilde{R}(\Gamma(t)) = \Gamma(t)$。等价地，

$$\widetilde{R}|_C = \mathrm{id}$$

作为 $w$ 处的芽。这就完成了证明。 □

现在我们可以证明本节的主要结果。

**定理 5.2 的证明。** 设 $g \in \mathcal{B}$，固定一个整数 $r \ge 1$、一个 $C^1$-邻域 $\mathcal{V}$ 及其 $g$，并且 $N_* > 0$。取一个更小的邻域 $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V} \cap \mathcal{U}$。命题 5.9 给出了一个映射 $G_0 \in \mathcal{V}_0$，它具有一个周期点 $w$，其最小周期为 $N > N_*$，且中心乘子为 1。映射 $G_0$ 是光滑的，因为 $g$，并且其构造中使用的所有修正项都是光滑的。

应用命题 5.10，以此正则性 $r$ 对 $G_0$ 在 $w$ 的一个邻域内进行扰动，同时避开其余轨道点，并选择足够小的扰动，使其仍属于 $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$。将所得 $C^r$ 映射记为 $G$。该扰动保留了轨道及其导数，因此其最小周期仍为 $N$，且该命题给出一条 $C^r$ 中心曲线 $C$，使得 $G^N|_C = \mathrm{id}$ 在芽的意义下成立。定理得证。

□

# 6 周期轨道的增长

我们继续使用接触开集 $\mathcal{U}$、光滑基映射的稠密集 $\mathcal{B}$以及记号$O_n(f)$，见第 4节。因此， $O_n(f)$ 统计最小周期为 $n$的不同周期轨道的数量，而 $\mathrm{Cont}^1(M,\xi)$表示具有 $C^1$ 拓扑的保余定向接触同胚。我们首先扰动恒等中心芽，以生成大量具有同一个较大最小周期的双曲轨道。随后，利用双曲延拓和贝尔纲定理，得到沿无界周期序列任意快速的增长。这遵循第 [10, 3–4]节的策略。第 [10] 中的构造的接触版本给出两个相邻的不稳定指标 $d$ 和 $d+1$。

**命题6.1** （创造大量周期轨道）。 设 $g \in B$，令 $r \geq 1$ 为一个整数，并令 $(a_n)_{n\geq 1}$为一个正整数序列。对于 $C^1$-开邻域 $V \subset U$ 中的每一个 $g$，以及每个整数 $N_* \geq 1$，存在一个整数 $j \geq N_*$和一个接触同胚 $G \in V \cap C^r$，它具有双曲周期点 $r_i^s, r_i^u, 1 \leq i \leq ja_j$，并满足以下性质。

*(i)* 每个 $r_i^s$和 $r_i^u$的最小周期均为 $j$，且 指标$_u(r_i^s) = d$，指标$_u(r_i^u) = d+1$；

*(ii)* 由这些点表示的所有 $2ja_j$ 周期轨道彼此不同。

证明。将定理 5.2 应用于有限阶 $r_0 = r+2$。存在 $G \in \mathcal{V} \cap \mathrm{Cont}^{r_0}(M,\xi)$，以及一个最小周期为 $j > N_*$ 的周期点 $w$，使得 $R = G^j$ 作为芽在 $w$ 处逐点固定一条 $C^{r_0}$ 横向中心曲线 $C$。选取 $V$ 的一个邻域，使得 $G^\ell(V)$、$0 \leq \ell < j$ 两两不相交。通过 $\alpha(\dot\Gamma) = 1$ 对 $C$ 上的参数进行归一化。公式（5.23）给出一个类为 $C^{r_0-1} = C^{r+1}$ 的接触坐标图

$$\Phi : U_\Phi \longrightarrow V, \qquad \Phi(0,0,t) = \Gamma(t) \in C, \qquad \Phi^*\alpha = \vartheta\alpha_{\mathrm{std}}, \qquad \alpha_{\mathrm{std}} = \mathrm{d}t - x\cdot \mathrm{d}y,$$

其中 $\vartheta > 0$。记 $\widehat{R} = \Phi^{-1}\circ R \circ \Phi$。选择 $\delta > 0$，使紧弧 $\Gamma([-\delta,\delta])$ 位于一条较大弧的内部；在该较大弧上， $R(0,0,t) = (0,0,t)$。必要时缩小 $\delta$，则沿此弧的横向回归导数是一致双曲的，其中 $d$ 为收缩方向， $d$ 为扩张方向。其切向量是一维中心方向。

选取光滑截断函数 $\chi \in C_c^\infty(U_\Phi; [0,1])$，使其在 $\{(0,0,t) : |t| \leq \delta\}$ 的某个邻域上等于 $1$。固定一个偶整数 $k > ja_j$，并令

$$\widehat{H}(x,y,t) = \chi(x,y,t)v(t), \qquad v(t) = \sin(k\pi t/\delta).$$

令 $\hat{}h^s$ 为由 $\widehat{H}$ 相对于 $\alpha_{\mathrm{std}}$ 生成的接触哈密顿流。若 $\chi = 1$，方程 (2.2) 给出 $X_{\widehat{H}} = v'(t)x\cdot\partial_x + v(t)\partial_t$。因此，这些点

$$\hat r_\ell^u = (0,0,2\ell\delta/k), \qquad \ell \in \mathbb{Z}\cap(-k/2,k/2),$$
$$\hat r_\ell^s = (0,0,(2\ell+1)\delta/k), \qquad \ell \in \mathbb{Z}\cap[-k/2,k/2),$$

$\hat{}$是该流的平衡点，也是 $R$的不动点。第一类有 $k-1$ 个点，第二类有 $k$ 个点。由于 $k-1 \geq ja_j$，选取每一类中的 $ja_j$ 个点，并将它们重新标记为 $\hat r_i^u$， $\hat r_i^s$。

在这些点中的任意一点 $\hat r = (0,\ 0,\ t_i)$，

$$D\hat h^s(\hat r) = \mathrm{diag}\big(e^{sv'(t_i)}I_d, I_d, e^{sv'(t_i)}\big).$$

$\hat{}$中心切线在两个导数作用下均保持不变，且 $DR$ 在该切线上是恒等映射。因此，对于 $s > 0$，$h^s \circ R$ 的中心乘子为 $\hat{}\hat{}$

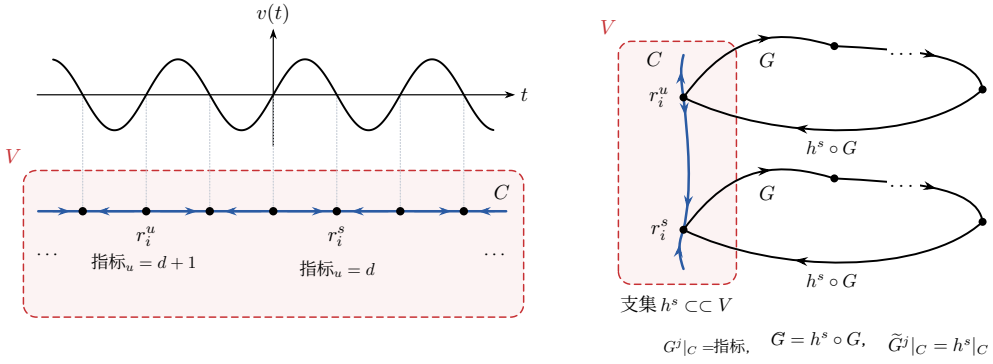
$$\lambda_c(\hat r_i^u) = e^{sk\pi/\delta} > 1, \qquad \lambda_c(\hat r_i^s) = e^{-sk\pi/\delta} < 1.$$

对于充分小的 $s$，在中心切线的商空间上诱导的导数仍然是双曲的，其中 $d$ 的特征值收缩，而 $d$ 的特征值扩张。因此，所选不动点分别是双曲的，其不稳定指标为 $d+1$ 和 $d$。

ˆ 首先选择 $k$ 。对于这个固定的光滑紧支集哈密顿量，其流 $h^s$ 在每个有限 $C^q$ 拓扑中都趋于恒等映射，当 $s \to 0$时。由固定的 $C^{r+1}$ 坐标图进行共轭，因此可得 $C^r$中的收敛。令

$$h^s = \Phi \circ \hat{h}^s \circ \Phi^{-1}, \qquad \widetilde{G} = h^s \circ G,$$

在 $h^s$ 之外用恒等映射延拓 $V$。通过接触坐标图进行共轭会保持接触˜分布，即使 $\vartheta$ 不必是常数。因此 $G$ 至少属于 $C^r$ 类，并且属于$\mathcal{V}$，当 $s > 0$充分小时。图9 展示了 $h^s|_C$ 的交替平衡点如何变为不同的周期鞍点。




**(a) 沿 $C$的流 $h^s$**　　**(b) 最小周期为 $j$的不同轨道**

图 9：**构造多个周期鞍点。(a)** 流 $h^s|_C$ 具有交替的中心吸引平衡点和中心排斥平衡点，从而产生不稳定指标分别为 $d$和 $d+1$的鞍点 $r_i^s$和 $r_i^u$，当~ ~$s > 0$充分小时。**(b)** 在选定的中心弧上，$G = h^s \circ G$ 的回归映射为 $G^j|_C = h^s|_C$。所选的 $2ja_j$ 点具有不同的、最小周期为 $j$的轨道。

在 $V$ 上，中间像互不相交，因此得到

$$\widetilde{G}^\ell = G^\ell \quad (1 \le \ell < j), \qquad \widetilde{G}^j = h^s \circ G^j.$$

˜因此，对于 $\bullet = s,\ u$，每个 $r_i^\bullet := \Phi(\hat{r}_i^\bullet)$ 都是 $G$ 的周期点。它的前 $j-1$ 次迭代都位于 $V$ 之外，因此其最小周期为 $j$。由于每条这样的轨道在一个周期内恰好经过 $V$ 一次，不同的所选点代表不同的周期轨道。证明完毕。 □

记 $O_n^{\mathrm{hyp}}(f)$ 为最小周期为 $n$ 的不同双曲周期轨道的数量。

**命题 6.2**（贝尔性质与开稠密性）。对于闭合共定向接触流形 $(M,\xi)$，空间 $\mathrm{Cont}^1(M,\xi)$ 在其 $C^1$ 拓扑下是完全可度量化的，因此具有贝尔性质。特别地，开集 $U$ 具有贝尔性质。对于每个由正整数组成的序列 $a = (a_n)_{n\ge1}$ 以及每个整数 $N \ge 1$，集合

$$\mathcal{D}_N(a) := \bigcup_{n \ge N} \left\{ f \in \mathcal{U} : O_n^{\mathrm{hyp}}(f) \ge n a_n \right\}$$

在 $U$ 中是开且稠密的。

证明。对于拓扑断言，取一个完备度量 $d$，用于 $C^1(M;M)$，该度量由 $M$ 的光滑欧几里得嵌入得到。$\mathrm{Diff}^1(M)$ 上的相容度量 $d_{\mathrm{Diff}}(f,h)=d(f,h)+d(f^{-1},h^{-1})$ 是完备的。事实上，柯西序列及其逆的极限由复合的连续性满足两个逆映射恒等式。保持余定向的接触同胚在此度量下构成一个闭子集。为此，设 $f_m\to f$ 属于 $\mathrm{Diff}^1(M)$，且 $f_m^*\alpha=\kappa_m\alpha$, $\kappa_m>0$。在 Reeb 向量场 $R_\alpha$ 上求值可得

$$\kappa_m(x)=\alpha_{f_m(x)}(Df_m(x)R_\alpha(x))\longrightarrow\kappa(x)=\alpha_{f(x)}(Df(x)R_\alpha(x))$$

一致地。因此 $f^*\alpha=\kappa\alpha$ 和 $\kappa\geq 0$。由于 $Df$ 可逆且 $\alpha$ 处处非零， $f^*\alpha$ 处处非零，这迫使 $\kappa>0$成立。这证明了闭性和完备可度量性。贝尔纲定理适用于 $\mathrm{Cont}^1(M,\ \xi)$ 及其开子集 $\mathcal{U}$。

固定 $n$，并取一个映射 $f$，它至少有 $na_n$ 个不同的、最小周期为 $n$的双曲周期轨道。选取这些轨道。在足够小的 $C^1$ 邻域内，这些轨道通过双曲延拓保持为有限个轨道。对有限个轨道点取两两不相交的邻域，可确保延拓后的轨道具有相同的最小周期且彼此不同。因此 $\{f\in\mathcal{U}:\ O_n^{\mathrm{hyp}}(f)\geq na_n\}$ 是开集，$a$中的 $\mathcal{D}_N$ 也如此。

为证明稠密性，取非空开集 $\mathcal{V}\subset\mathcal{U}$。命题 4.5 给出 $g\in\mathcal{B}\cap\mathcal{V}$。应用~命题 6.1 于 $\mathcal{V}$，取阈值 $N$，可得 $G\in\mathcal{V}$ 以及 $j\geq N$，其至少有 $ja_j$ 个不同的双曲~周期轨道，最小周期为 $j$。因此 $G\in\mathcal{V}\cap\mathcal{D}_N(a)$，稠密性得证。 □

**定理 6.3**（周期轨道的任意快增长）。设 $(M^{2d+1},\xi)$ 是一个闭接触流形，存在具有 $C^\infty$ 稳定叶层和不稳定叶层的 *Anosov Reeb* 流，如 *[17,*定理 *4。4]*。存在一个非空的 $C^1$-开集 $\mathcal{U}\subset\mathrm{Cont}^1(M,\xi)$，使得对于每个 $(a_n)_{n\geq1}$ 正实数序列，都存在一个剩余子集 $\mathcal{R}_a\subset\mathcal{U}$ 满足

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{O_n(f)}{a_n}=\infty\qquad for\ every\ f\in\mathcal{R}_a.$$

这里， $O_n(f)$ 计数的是最小周期为 $n$ 的不同周期轨道。特别地，对于带有典范接触结构的闭双曲曲面的单位切丛，这一结论同样成立。

证明。在当前假设下，定理 4.3 中的构造以及定理 4.4] 的证明，给出了初始映射 $f_*$、鞍点 $p_*$、 $q_*$、带有入射强不稳定圆盘的搅拌子，以及命题 4.1 中使用的从 $q_*$ 到 $p_*$ 的横截连接。此构型在 $\mathrm{Cont}^1(M,$ $\xi)$ 中的开集 U 内始终保持。第 4 节其余的构造利用 $M$ 的闭性、几何搅拌子及其附属结构，以及局部接触扰动，证明光滑基映射 B 在 U 中稠密。第 5 节使用这一持续存在的几何结构以及维数为 $2d+1$ 时的局部接触引理，因此定理 5.2 和前面的两个命题在此情形下同样适用。

给定$(a_n)$，定义正整数 $b_n=\max\{n,\lceil a_n\rceil\}$，它们满足 $b_n\geq a_n$。根据命题6.2，每个$\mathcal{D}_N(b)$ 在贝尔空间$\mathcal{U}$中都是开且稠密的。因此

$$\mathcal{R}_a:=\bigcap_{N\geq1}\mathcal{D}_N(b)$$

是$\mathcal{U}$的稠密剩余子集。如果 $f\in\mathcal{R}_a$，那么对每个 $N$，都存在 $n\geq N$ 使得 $O_n^{\mathrm{hyp}}(f)\geq nb_n$。选取这些周期构成一个严格递增序列 $n_\ell\to\infty$，我们得到

$$\frac{O_{n_\ell}(f)}{a_{n_\ell}}\geq\frac{O_{n_\ell}^{\mathrm{hyp}}(f)}{a_{n_\ell}}\geq n_\ell\frac{b_{n_\ell}}{a_{n_\ell}}\geq n_\ell\longrightarrow\infty.$$

这证明了该定理。 □

# 7 几何上不同的平移点的增长

固定一个闭合共定向接触流形 $(M^{2d+1},\xi)$ 和一个满足 $\ker\alpha=\xi$ 的光滑接触形式 $\alpha$。我们采用 (1.1) 中的平移点位移约定，以及 (1.2) 和 (1.3) 中的计数函数 $\mathrm{TP}_n(f;\,s_*)$ 和 $N_n(f;\,s_*)$。正共形因子 $\kappa_f$ 和 Reeb 流 $R_s^\alpha$ 也与引言中的相同。在同一个平移点处，不同的位移分别计入成对计数，而每个底层点 $x$ 在几何计数中只计一次。我们的构造产生位移为 0 的新对，尽管经过一次 $C^1$ 扰动后，它们的位移可能变为非零。

**定理 7.1**（由接触搅拌器导致的平移点增殖）。设 $M$，$\xi$）是一个闭合连通余定向接触流形，具有 *Anosov Reeb* 流，其强稳定与不稳定叶状结构（包括其切丛）均为 $C^\infty$。选取接触形式 $\alpha$ 以及非空的 $C^1$-开集$\mathcal{U}\subset\mathrm{Cont}^1$（$M$，$\xi$），它们来自命题 *4.1*中的搅拌构造。对每个 $s_*>0$ 以及每个正整数序列（$a_n$）$_{n\ge1}$，存在一个余集 $\mathcal{R}_a\subset\mathcal{U}$，使得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{N_n(f;s_*)}{a_n}=\limsup_{n\to\infty}\frac{\mathrm{TP}_n(f;s_*)}{a_n}=+\infty\qquad(f\in\mathcal{R}_a).\tag{7.1}$$

特别地，存在一个余集 $R_\infty\subset U$，其中的元素满足

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\max\{1,N_n(f;s_*)\}=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\max\{1,\mathrm{TP}_n(f;s_*)\}=+\infty.\tag{7.2}$$

命题 4.5 给出了一个 $C^1$-稠密的光滑基映射集，而定理 5.2 则构造出任意长、具有任意指定有限正则性的平坦中心芽。对于下面的局部构造，固定一个整数 $r\ge2$，并以阶数 $r_0=r+2$应用定理 5.2。因此，在基点映射的任意指定 $C^1$ 邻域内，我们得到 $G\in\mathrm{Cont}^{r+2}(M,\xi)$，以及一条 $C^{r+2}$ 曲线 $C$；该曲线在点 $w$ 附近被 $G^j$ 逐点固定，而该点的最小周期 $j$可任意大，并且 $T_wC=E^c_G(w)\pitchfork\xi_w$。适配于 $C$ 的接触坐标至多损失一个导数，因此下面的扰动至少具有 $C^r$ 正则性，其平移点方程是 $C^1$。非零局部度随即给出贝尔范畴论证中所用的 $C^1$-开条件。

## 7.1 有界平移重数

以下这个初等的紧性观察将点对计数结论转化为关于几何上不同点的陈述。它不依赖任何搅拌子或双曲性假设。

**引理 7.2.** 设 $M$ 是一个闭接触流形，$\alpha$ 是一个光滑接触形式，并固定 $s_*>0$。存在 $\tau_\alpha>0$，其仅取决于 $\alpha$，使得任何 *Reeb* 轨道都不存在绝对值不超过 $\tau_\alpha$ 的非零回归时间。因此，令 $K_{\alpha,\,s_*}:=1+\lfloor2s_*/\tau_\alpha\rfloor$，则对于每个 $f\in\mathrm{Cont}^1(M,\,\ker\alpha)$ 以及 $n\ge1$，均有

$$N_n(f;s_*)\le\mathrm{TP}_n(f;s_*)\le K_{\alpha,s_*}\,N_n(f;s_*).\tag{7.3}$$

这些不等式对于无限计数也成立，此时将其解释为扩展非负整数。特别地，对于固定的 $s_*$，$\mathrm{TP}_n$ 的任意快增长和超指数上极限增长，分别等价于 $N_n$ 的相应增长陈述。

证明。由于 Reeb 向量场处处非零，对每个 $x\in M$，流盒定理都给出一个流盒$U_x$ 以及 $x$ 的一个更小邻域 $V_x\subset\subset U_x$，使得对某个 $\tau_x>0$，任意$y\in V_x$ 的 Reeb 流在 $|t|\le\tau_x$ 内始终停留于同一流盒中。在流盒坐标中，此流沿一个坐标方向平移，因此只要 $0<|t|\le\tau_x$，就有 $R_t^\alpha(y)\ne y$。利用紧致性，选取由这些 $V_x$ 构成的有限覆盖，并令 $\tau_\alpha$ 为相应正数 $\tau_x$ 的最小值。于是，对所有 $y\in M$ 和 $0<|t|\le\tau_\alpha$，都有 $R_t^\alpha(y)\ne y$。

固定 $f$、$n$，以及由 $N_n(f;\,s_*)$ 计数的平移点 $x$。若 $s$ 和 $s'$ 是该点的两个不同的允许的平移量，则 $R^\alpha_{s-s'}(x)=x$，这意味着 $|s-s'|>\tau_\alpha$。区间 $(-s_*,\;s_*)$ 的长度为 $2s_*$，并且

因此至多包含 $K_{\alpha,\ s_*}$ 个该点的不同允许的平移量。对不同的底层点求和这一一致上界，即得 (7.3)。同样的有限纤维上界表明，若任一计数为无限，则两者均为无限。

对于最后一个断言，除以任意正数列，并通过固定因子$K_{\alpha,\ s_*}$ 进行比较，都会保持上极限发散至 $+\infty$。同样，

$$\max\{1, N_n(f; s_*)\} \le \max\{1, \mathrm{TP}_n(f; s_*)\} \le K_{\alpha,s_*} \max\{1, N_n(f; s_*)\}.$$

取对数并除以 $n$，在计数有限时，两个增长率的差至多为 $(\log K_{\alpha,\ s_*})/n$；当计数为无穷时，相应的对数均为 $+\infty$。这就证明了二者的等价性。

□

定理 *1.2* 的证明。 对于 $S^*S$上的原始测地 Reeb 流，强稳定叶层和强不稳定叶丛都是光滑的，且 Anosov 分裂满足定理7.1的假设。第 4.1节构造了该模型及其持久的接触开集；另见定理 6.3。将定理 7.1应用于第 4.1 节中选取的接触形式 $\alpha$，即可得到两个增长结论。该构造使用与周期轨道论证相同的开集$\mathcal{U}$，但剩余子集需重新选取。

□

## 7.2 平坦中心方向接触扰动

如上所述，固定 $r \ge 2$ 以及一个平坦中心芽 $F = G^j$，其具有 $G$ 和 $C$，且属于 $C^{r+2}$ 类。由于 $F$ 固定 $C$ 和 $T_wC \pitchfork \xi_w$，它在 $T_wM/\xi_w$ 上的诱导乘子为 1。因此，其强收缩和扩张广义特征空间均包含于 $\xi_w$，且两者共同张成该空间，所以 $DF_w|_{\xi_w}$ 是双曲的。缩小 $C$后，连续性保证对于每个 $x \in C$， $TC \pitchfork \xi$ 和 $1 \notin$ 均属于 Spec($DF_x|_{\xi_x}$)。

将 $C^{r+2}$ 参数化 $\Gamma$ 按 $\alpha(\Gamma') = 1$归一化。公式（5.23）给出一个 $C^{r+1}$ 接触坐标图 $\Phi$，它覆盖 $C$ 的一个紧子弧，并满足

$$\Phi(0,0,t) = \Gamma(t) \in C, \qquad \Phi^*\alpha = \vartheta(x,y,t)\alpha_{\mathrm{std}}, \qquad \vartheta > 0, \tag{7.4}$$

其中 $(x,\ y,\ t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$，并缩小坐标图，使得对于 $|t| \le \delta$，

$$\widehat{F}(0,0,t) = (0,0,t), \qquad 1 \notin \mathrm{Spec}\Big(D\widehat{F}_{(0,0,t)}\big|_{\xi_{\mathrm{std}}}\Big). \tag{7.5}$$

$\widehat{\ }$接触平面限制是良定义的，因为 $F$ 保持接触分布。由于 $F$ 逐点固定$C$，且 $TC$ 与 $\xi$横截，

$$\kappa_F\big(\Gamma(t)\big) = 1 \qquad (|t| \le \delta). \tag{7.6}$$

选取 $\chi \in C_c^\infty$，使其在$\{(0,\ 0,\ t) : |t| \le \delta\}$的某个邻域内恒等于 1。

**引理 7.3**。 对于任意整数 $m \ge 1$ 以及 $G$的任意指定邻域，都存在该邻域内的一个接触同胚 $G \in \mathrm{Cont}^r(M, \xi)$，它由回归坐标图中的一次扰动得到，且满足$\sim G^j$ 至少有 $m$ 个不同的平移点对 $(p_i, 0)$。每个点对都是完整$(2d+2)$维平移点方程的一个孤立正则零点。这些点对应于 $G$的两两不同的最小周期-$j$轨道$\widetilde{\ }$。

证明。 取一个足够小的 $\eta > 0$，其大小根据所需的 $C^1$ 容差选定，并选取一个偶整数$k > m+1$。令

$$v_k(t) = \frac{\eta\delta^2}{\pi^2 k^2}\big(1 - \cos(k\pi t/\delta)\big), \qquad H_k(x,y,t) = \chi(x,y,t)v_k(t). \tag{7.7}$$

令 $h_k$ 为紧支撑接触哈密顿量 $H_k$ 关于$\alpha_0 = \mathrm{d}t - x\cdot \mathrm{d}y$的时间一映射。其中 $\chi = 1$,

$$X_{H_k} = v_k'(t)\sum_{r=1}^{d} x_r\partial_{x_r} + v_k(t)\partial_t. \tag{7.8}$$

这直接由 $\alpha_0(X_H) = H$和 $\iota_{X_H}\mathrm{d}\alpha_0 = (\partial_t H)\alpha_0 - \mathrm{d}H$ 得出。对于每个满足 $|\ell| < k/2$ 的整数 $\ell$，令

$$t_\ell = \frac{2\ell\delta}{k}, \qquad z_\ell = (0,0,t_\ell), \qquad p_\ell = \Phi(z_\ell). \tag{7.9}$$

这样的整数有 $k-1 \geq m$ 个，并且

$$v_k(t_\ell) = v_k'(t_\ell) = 0, \qquad v_k''(t_\ell) = \eta > 0. \tag{7.10}$$

由（7.8），局部接触流在每个时刻都固定 $z_\ell$。它在 $z_\ell$ 处的时间一微分是恒等映射，因为线性化 $DX_{H_k}(z_\ell)$ 消失了，这是因为可能非零的 $v_k''$ 项乘以了 $x = 0$。该流在 1 处的共形因子也为 $z_\ell$。

哈密顿量 $H_k$ 及其局部流 $h_k$ 都是光滑的。通过固定的 $C^{r+1}$ 接触坐标图$\Phi$ 进行共轭，并以恒等映射延拓，可得到 $M$ 上一个支集紧的 $C^{r+1}$ 接触同胚 $h_k^M$。在局部化扰动之前选取返回邻域 $V$，使得 $G^\ell(V)$、 $0 \leq \ell < j$ 两两不交。令

$$\widetilde{G} = h_k^M \circ G.$$

对于充分接近所选弧的点，不相交性意味着

$$\widetilde{G}^j = h_k^M \circ G^j = h_k^M \circ F. \tag{7.11}$$

由于 $F$ 固定了 $p_\ell$ 且 $h_k^M$固定了 $p_\ell$，我们有 $\widetilde{G}^j(p_\ell) = p_\ell$。方程（7.6）、接触共形链式法则以及$\kappa_{h_k^M}(p_\ell) = 1$ 进而给出$\kappa_{\widetilde{G}^j}(p_\ell) = 1$。因此$(p_\ell, 0)$ 是一个平移点对。

接下来，我们验证完整的平移点方程的正则性，其非退化条件不同于不动点的双曲性。选取一个光滑坐标图 $\varphi\colon\ U \to \mathbb{R}^{2d+1}$，它定义在 $p_\ell$附近。对于充分接近（$p_\ell, 0$）的$(z,s)$， $G^j(z)$和 $R_s^\alpha(z)$都位于 $U$中，因此我们可以定义

$$\mathcal{T}_{\widetilde{G}^j}(z,s) = \big(\varphi(\widetilde{G}^j(z)) - \varphi(R_s^\alpha(z)),\ \log\kappa_{\widetilde{G}^j}(z)\big). \tag{7.12}$$

映射 $\widetilde{G}$ 至少具有 $C^r$ 正则性，因此其回归映射具有 $C^{r-1}$ 共形因子，且曲线 $C$ 的切空间$\widetilde{G}^j$ 是 $C^{r-1}$，故$C^1$。其目标空间和源空间的维数均为 $2d+2$。在坐标 $\varphi$中，于$(p_\ell,0)$处，

$$D_z\big(\widetilde{G}^j - R_s^\alpha\big)\big|_{s=0} = D(\widetilde{G}^j)_{p_\ell} - I, \qquad \partial_s\big(\widetilde{G}^j - R_s^\alpha\big) = -R_\alpha(p_\ell).$$

使用分解 $T_{p_\ell}M = \xi_{p_\ell} \oplus T_{p_\ell}C$。在 $p_\ell$处， $\widetilde{G}^j$ 的导数保持两个直和项不变，中心导数为 1 ，接触平面限制为 $B_\ell$ ，且满足 $1 \notin \mathrm{Spec}(B_\ell)$。由于 $\alpha(R_\alpha) = 1$ 且 $\alpha|_{TC} \neq 0$，Reeb向量具有非零的中心方向分量。最后，(7.6)使$\log\kappa_F$沿 $TC$的导数为零，而该扰动给出

$$\mathrm{d}(\log\kappa_{\widetilde{G}^j})_{p_\ell}\big(\Gamma'(t_\ell)\big) = v_k''(t_\ell) = \eta \neq 0. \tag{7.13}$$

为验证这一恒等式，注意在中心轴上，（7.8）的时间一映射是 $\dot{t} = v_k(t)$ 的流 $\psi_1$。在满足 $v_k = v_k' = 0$ 的平衡点处，我们有 $\psi_1'(t_\ell) = 1$ 且 $\psi_1''(t_\ell) = v_k''(t_\ell)$。对于共形坐标图 $\Phi^*\alpha = \vartheta\alpha_0$，轴上 $\log\kappa_{h_k^M}$ 的额外贡献为 $\log\vartheta(0,0,\psi_1(t)) - \log\vartheta(0,0,t)$。其导数在 $t_\ell$ 处消失，因为 $\psi_1(t_\ell) = t_\ell$ 且 $\psi_1'(t_\ell) = 1$。

设 $(u+av,\sigma)$ 属于 $D\mathrm{T}\widetilde{G}^j(p_\ell,0)$ 的核，其中 $u\in\xi_{p_\ell}$，且 $v\in T_{p_\ell}C$ 是选定的非零中心向量。将线性化方程的第一分量作用以 $\alpha$。由于 $D\widetilde{G}^j-I$ 将 $\xi$ 映入$\xi$并消去 $v$，因此可得 $\sigma=0$。于是 $(B_\ell-I)u=0$，故 $u=0$。最后一个分量和 (7.13) 可推出 $a=0$。因此雅可比矩阵可逆，从而证明正则性及局部度为 $\pm1$。

最后，这些支集位于一个回归盒中，该盒的前 $j-1$ 个向前像彼此不相交。因此，每个 $p_\ell$ 的最小周期为 $j$。这些点属于不同的周期轨道，因为一个周期为 $j$ 的轨道恰好访问回归盒一次。

由于截断函数和 $\delta$ 在 $k$ 之前已固定，扰动满足

$$\|H_k\|_{C^2}\le C_{\chi,\delta}\eta,\quad \|X_{H_k}\|_{C^1}\le C'_{\chi,\delta}\eta,\quad \|h_k^M-\mathrm{id}\|_{C^1}\le C''\eta, \tag{7.14}$$

其中的常数与 $k$ 无关，只要 $\eta$ 足够小。因此，取 $\eta$ 足够小即可使该扰动属于任意给定的 $C^1$ 邻域，且关于平移对的数量 $k-1$ 一致。 □

注 7.4。 每个选定的 $p_\ell$ 都满足 $D(\widetilde{G}^j)_{p_\ell}v=v$，其中针对的是中心切向 $v$，因此该不动点必然是非双曲的。事实上，如果一个双曲不动点 $p$ 满足 $\kappa_{f^j}(p)=1$，那么 $\alpha_p\circ Df_p^j=\alpha_p$ 将迫使 $Df_p^j$ 的一个特征值为 1。由额外的共形因子方程可知，平移对 具有正则性；该方程与中心方向横截。

## 7.3 通过局部度的稳健性

平移点映射 (7.12) 涉及接触同胚的一阶导数，因此关于 $f$ 在 $C^1$ 拓扑下连续。由于其在正则零点处的导数涉及二阶导数，我们通过局部度来表述稳健性。在有界区域上，连续映射的布劳威尔（拓扑）度是一个整数不变量，前提是目标值在边界上未被取到；在同伦过程中，只要该值始终未在边界上被取到，度便保持不变；参见 [22, 第 1]章。其非零性提供了仅凭导数非退化性无法保证的 $C^1$开条件。

**定义 7.5**。 设 $f\in\mathrm{Cont}^1(M,\xi)$ 和 $(x_0,s_0)$ 满足 (1.1)，其中 $f^n$。若 $W$ 是 $W$ 中的相对紧坐标球 $M\times(-s_*,s_*)$，若 (7.12) 的局部映射 $\mathrm{T}f^n$ 在 $\partial W$ 上非零，并且

$$\deg(\mathcal{T}_{f^n},W,0)\neq 0.$$

该定义允许 $W$ 中存在多个根，并适用于 $C^1$ 接触同胚，因为 $\mathcal{T}f^n$ 是连续的。

**引理 7.6**。 固定 $n$、$m\ge1$ 和 $s_*>0$。按照定义 7.5，具有 $m$ 个两两不交邻域的接触同胚构成的集合 $E_{n,\,m}(s_*)$ 是 $C^1$-开集。引理 7.3 给出的每个接触同胚都属于 $E_{j,\,m}(s_*)$。

证明。 为给定的度本质零点选取 $m$ 个两两不交的闭隔离邻域 $W_i$。对于固定的 $n$，如下赋值

$$f\mapsto\mathcal{T}_{f^n}|_{\overline{W}_i}$$

从接触同胚上的 $C^1$ 拓扑到连续映射上的一致拓扑是连续的，因为复合、一阶导数、正共形因子以及固定的 Reeb 流都连续变化。因此，对于任意充分接近 $f$ 的 $f'$，映射 $\mathcal{T}f'^n$ 和 $\mathcal{T}f^n$ 之间存在一条直线同伦，且在每个 $\partial W_i$ 上都避开零。布劳威尔度的同伦不变性意味着

$$\deg(\mathcal{T}_{f'^n},W_i,0)=\deg(\mathcal{T}_{f^n},W_i,0)\neq 0.$$

因此，每个 $W_i$ 仍包含一个平移点对，从而得到至少 $m$ 个互不相同的平移点对，并证明了开性。对于引理 7.3中的映射，每个构造出的零点都是正则的，因此在足够小且互不相交的球中，其次数为 $\pm1$，这些球选在 $|s|<s_*$内。 □

### 7.4 关于指数增长和任意快增长的贝尔范畴论证

对于 $n,\ m \geq 1$ 记 $\mathcal{E}_{n,\ m}(s_*)$ 为 $C^1$-开映射集，其中的映射至少有 $m$ 对两两不交的隔离邻域，且局部平移点次数非零，如定义 7.5所述。证明中用到的开稠密集为

$$\mathcal{D}_N^{\mathrm{tr}}(a; s_*) := \bigcup_{n \geq N} \mathcal{E}_{n, na_n}(s_*). \tag{7.15}$$

定理 7.1 的证明。对于固定的 $N$，方程 (7.15) 根据引理 7.6 定义了一个开集。为证明稠密性，设 $\mathsf{V} \subset \mathsf{U}$ 非空且 $C^1$ 开。命题 4.5 给出一个光滑基映射 $g \in \mathsf{V} \cap \mathsf{B}$。固定任意整数 $r \geq 2$，并在充分小的、包含于 $\mathsf{V}$ 的 $g$ 邻域中对阶数 $r+2$应用定理 5.2，从而得到 $G \in \mathsf{V} \cap \mathsf{Cont}^{r+2}(M, \xi)$，其中含有一条平坦中心曲线以及一个最小周期为 $j \geq N$ 的点。引理 7.3 在 $m = ja_j$ 下的应用给出一个 $C^r$ 接触同胚 $G \in \mathsf{V}$，并具有所需的正则~平移对。因此 $G \in \mathsf{E}_{j, ja_j}(s_*) \subset \mathsf{D}_N^{\mathrm{tr}}(a;\ s_*)$，从而证明了稠密性。

由命题6.2可知，集合 $\mathcal{U}$ 是贝尔空间。因此

$$\mathcal{R}_a = \bigcap_{N \geq 1} \mathcal{D}_N^{\mathrm{tr}}(a; s_*)$$

在$\mathcal{U}$中是剩余的。对于 $f \in \mathcal{R}_a$，可以选取一个严格递增序列 $n_i \to \infty$，使得 $\mathrm{TP}_{n_i}(f;\ s_*) \geq n_i a_{n_i}$。由引理7.2，其中常数$K = K_{\alpha,\ s_*}$ 与 $n_i$ 和 $f$无关，

$$\frac{N_{n_i}(f; s_*)}{a_{n_i}} \geq \frac{\mathrm{TP}_{n_i}(f; s_*)}{K a_{n_i}} \geq \frac{n_i}{K} \longrightarrow +\infty.$$

这就证明了（7.1）的两个断言。

对于最后一个断言，对每个整数 $r \geq 1$ 取 $a_n^{(r)} = \lceil e^{rn} \rceil$，并令$\mathcal{R}_\infty = \bigcap_{r \geq 1} \mathcal{R}_{a^{(r)}}$，根据贝尔纲定理，它是剩余的。对于每个固定的 $r$ 以及任意 $f \in \mathcal{R}_\infty$，$n$的一个无界子序列满足

$$\frac{1}{n} \log \max\{1, \mathrm{TP}_n(f; s_*)\} \geq r.$$

引理7.2 还给出

$$\frac{1}{n} \log \max\{1, N_n(f; s_*)\} \geq \frac{1}{n} \log \max\{1, \mathrm{TP}_n(f; s_*)\} - \frac{\log K_{\alpha, s_*}}{n}.$$

由于 $r$ 是任意的，且修正项趋于零，（7.2）中的两个上极限都等于 $+\infty$。 □

# 8 接触图与固定窗口条形码熵

我们通过结合余循环图的光滑紧化、有限维接触扰动族以及完备作用量过滤的稳定性，证明熵界。解析可容许性规定了我们据此建立关联条形码局部有限性的 Floer 理论假设。

### 8.1 接触图的光滑紧化

在本小节中，$Y$是任意闭光滑流形。我们将 $\log^+ x = \log \max\{1, x\}$ 记作$x \geq 0$。令 $m = \dim Y$，并在 $Y$上固定一个黎曼度量 $q$。对于 $g \in C^\infty(Y, \mathbb{R})$，定义其加性余循环 $G_n = \sum_{j=0}^{n-1} g \circ f^j$，使得 $G_{n+k} = G_n + G_k \circ f^n$。其余循环图 是嵌入的 $m$-流形

$$\Gamma_n = \{(x, f^n(x), G_n(x)) : x \in Y\} \subset Y \times Y \times \mathbb{R}. \tag{8.1}$$

我们使用乘积度量 $q \oplus q \oplus \mathrm{d}\theta^2$来测量其 $m$-体积。对于 $\Gamma_n$的可测子集，体积表示 $m$维豪斯多夫测度。在接触情形下， $g = \log \kappa_f$且 $(f^n)^*\alpha = e^{G_n}\alpha$。

**引理 8.1**。 设 $Y$为紧度量空间， $f\colon\ Y \to Y$为同胚，且 $g\colon\ Y \to \mathbb{R}$ 连续。对于圆周 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，定义

$$f_{\mathbb{T}} : Y \times \mathbb{T} \to Y \times \mathbb{T}, \qquad (x, \vartheta) \mapsto (f(x), \vartheta + g(x) \bmod \mathbb{Z}).$$

那么 $h_{\mathrm{top}}(f_{\mathbb{T}}) = h_{\mathrm{top}}(f)$。

证明。 投影到 $Y$ 使 $f_{\mathbb{T}}$ 成为 $(\mathbb{T},\mathrm{id}_{\mathbb{T}})$-扩张（按 Bowen 的术语）：它使动力学相互交织，且纤维平移与 $f_{\mathbb{T}}$交换。由 Bowen 扩张公式 [15, 定理 19]可得 $h_{\mathrm{top}}(f_{\mathbb{T}}) = h_{\mathrm{top}}(f) + h_{\mathrm{top}}(\mathrm{id}_{\mathbb{T}}) = h_{\mathrm{top}}(f)$。 □

**定理 8.2** (余循环图 Yomdin 估计)。 设 $Y$为闭光滑流形， $f \in \mathrm{Diff}^\infty(Y)$且 $g \in C^\infty(Y, \mathbb{R})$。对于 (8.1)中的图，

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log^+ \mathrm{Vol}_m(\Gamma_n) \le h_{\mathrm{top}}(f). \tag{8.2}$$

对于每个固定的 $C > 0$，将 $\Gamma_n$ 替换为 $\Gamma_n \cap \{|\theta| \le C\}$ 后，同样的界仍然成立。

证明。 在紧流形 $X = Y_x \times Y_y \times \mathbb{T}_\vartheta$ 上定义

$$T(x, y, \vartheta) = (x, f(y), \vartheta + g(y) \bmod \mathbb{Z}), \qquad D = \{(x, x, 0) : x \in Y\}.$$

于是 $T = \mathrm{id}_Y \times f_{\mathbb{T}}$，因此熵的乘积公式和引理 8.1给出 $h_{\mathrm{top}}(T) = h_{\mathrm{top}}(f)$。此外

$$T^n D = \{(x, f^n(x), [G_n(x)]) : x \in Y\}.$$

$\Gamma_n$ 和 $T^n D$ 的参数化诱导出相同的拉回度量，即

$$q_x + (Df_x^n)^* q_{f^n x} + \mathrm{d}G_n(x) \otimes \mathrm{d}G_n(x).$$

事实上， $\mathbb{R} \to \mathbb{T}$， $\theta \mapsto [\theta]$ 是局部等距映射，而第一因子 $x$ 确保这两个参数化都是单射。因此，对模一取商会保留重数，从而 $\mathrm{Vol}(\Gamma_n) = \mathrm{Vol}(T^n D)$。

Yomdin 光滑体积增长不等式应用于固定子流形时指出，对于紧流形上的光滑映射 $T$ 和紧光滑子流形 $D$，

$$\limsup_{n\to\infty} n^{-1} \log^+ \mathrm{Vol}(T^n D) \le h_{\mathrm{top}}(T).$$

这个不等式由 [39], 推出，而图体积版本见 [31, 定理4.4。1]。这证明了(8.2)，并且对截断子集也有相同的界，因为其测度不超过整个图的测度。 □

## 8.2 Reeb 对角线与接触断层图

回到一个闭接触流形 $(Y,\ \alpha)$。其接触乘积是 $Q = Y_x \times Y_y \times \mathbb{R}_\theta$，其中 $\beta = \alpha_y - e^\theta \alpha_x$；参见 [25]。事实上，

$$\ker \beta = \xi_x \oplus \xi_y \oplus \mathrm{span}\{\partial_\theta, R_\alpha(x) + e^\theta R_\alpha(y)\},$$

并且 $\mathrm{d}\beta$ 在该空间上是非退化的，因为前两个直和项带有 $-e^\theta \mathrm{d}\alpha_x \oplus \mathrm{d}\alpha_y$，而最后一对的配对为 $-e^\theta$，且与前两项正交。 $\varphi$ 的接触图 为 $\Gamma_\varphi = \{(x, \varphi(x) g_\varphi(x))\}$。特别是，

$$\Gamma_n = \{(x, f^n(x), G_n(x)) : x \in Y\} \subset Q \tag{8.3}$$

是 Legendrian，因为其维数为 $(\dim Q-1)/2=m$，且 $\beta$ 的拉回为 $(f^n)^*\alpha-e^{G_n}\alpha=0$。对于一个紧区间 $I\subset\mathbb{R}$，考虑参数化 *Reeb* 对角线

$$\mathscr{D}_I : Y\times I\to Q,\qquad (x,s)\mapsto (x,R_s^\alpha(x),0).$$

闭 Reeb 轨道可能导致其像自相交，因此我们始终计算参数化的交点。对于每个固定的 $s$，其像都是 Legendrian。接触图与参数化 Reeb 对角线的定义自然地将它们的纤维积识别为

$$\Gamma_n\cap_{\mathrm{par}}\mathscr{D}_I \longleftrightarrow \{(x,s): f^n(x)=R_s^\alpha(x),\ G_n(x)=0,\ s\in I\}. \tag{8.4}$$

因此，这些相交恰好是定义 2.9中的平移点-位移对，其中方程$G_n(x)=0$表示在 $\alpha$ 处保持 $x$不变。其预期维数为零，因为 $m+(m+1)=$维数 $Q$。

**引理 8.3**。 存在光滑接触哈密顿量 $k_1,\dots,k_N$，定义在 $Y$ 上，使得对每个 $y\in Y$，这些向量

$$\big(\pi_\xi X_{k_j}^\alpha(y), R_\alpha k_j(y)\big),\qquad 1\le j\le N,$$

张成 $\xi_y\oplus\mathbb{R}$。这里，$X_k^\alpha$由 $\alpha(X_k^\alpha)=k$和 $\iota_{X_k^\alpha}\mathrm{d}\alpha=(R_\alpha k)\alpha-\mathrm{d}k$确定，而 $\pi_\xi(v)=v-\alpha(v)R_\alpha$ .

证明。 固定 $y$ 后，局部光滑函数可以具有任意指定的一阶喷射 $k(y)=0$、$\mathrm{d}k_y|_{\xi_y}=\mu$和 $R_\alpha k(y)=c$。由于 $\mathrm{d}\alpha|_{\xi_y}$ 非退化，因此 $(\pi_\xi X_k^\alpha(y)\ R_\alpha k(y))$ 可以任意指定。利用截断函数，可将有限多个这样的函数延拓到 $Y$，同时保持它们在 $y$处的喷射不变。张成性质在一个邻域内仍成立，而对紧流形 $Y$ 作有限覆盖，即可得到所需的全局列表。

□

设 $k_z=\sum_{j=1}^N z_jk_j$ 并令 $\varphi_z=\phi^1_{,\ k_z}{}^\alpha$ 为 $X_{k_z}^\alpha$的时间一接触流。流对参数的光滑依赖性以及 $Y$ 的紧致性给出 $\varphi_0=\mathrm{id}$，且 $\|\varphi_z-\mathrm{id}\|_{C^\ell}\le C_\ell|z|$，对每个固定的 $\ell$ 以及所有充分小的 $z$均成立。我们将这个有限维探测族称为接触断层图，沿用 [20, 节 5]中的积分几何术语。

**引理 8.4** (接触断层图)。 对于一个充分小且以零为中心的闭参数球 $\mathbb{B}\subset\mathbb{R}^N$，映射

$$\Psi:\mathbb{B}\times Y\times I\to Q,\qquad \Psi(z,x,s)=\big(x,\varphi_z^{-1}(R_s^\alpha(x)),g_{\varphi_z^{-1}}(R_s^\alpha(x))\big) \tag{8.5}$$

是浸没，并且该球的选取可以独立于紧致位移区间 $I$。对于几乎所有的 $z$，同时对所有 $n\ge1$和所有实数位移，$\Psi(z,\bullet,\bullet)$与 $\Gamma_n$横截相交。这些参数化交点对应于 $\varphi_z\circ f^n$ 的平移点-位移对。

证明。 接触提升

$$\mathscr{C}_\varphi(x,y,\theta)=(x,\varphi(y),\theta+g_\varphi(y))$$

满足 $\mathscr{C}_\varphi^*\beta=e^{g_\varphi(y)}\beta$，并将 $\Gamma_{f^n}$映射到 $\Gamma_{\varphi\circ f^n\circ}$ 由于 $g_{\varphi^{-1}}=-g_\varphi\circ\varphi^{-1}$，映射 $\Psi_z$是 $\mathscr{C}_{\varphi_z}^{-1}\circ\mathscr{D}_I$。这证明了所断言的参数化关联对应关系。

$D_x\Psi$ 的第一个分量是恒等映射。消去该分量后，满射性等价于由以下 $z$和 $s$列张成$T_yY\oplus\mathbb{R}$，其中 $y=R_s^\alpha(x)$:

$$\big(\partial_{z_j}\varphi_z^{-1}(y),\partial_{z_j}g_{\varphi_z^{-1}}(y)\big),\quad \big(D\varphi_z^{-1}(y)R_\alpha(y),\mathrm{d}g_{\varphi_z^{-1}}(y)R_\alpha(y)\big).$$

在 $z=0$这些是 $(-X_{k_j}^\alpha(y)\ -R_\alpha k_j(y))$和 $(R_\alpha(y),0)$；根据引理 8.3，它们张成该空间。这些列仅取决于 $(z,\ y)$，因此 的紧致性以及满射性的开性给出了一个参数球，该参数球包含于稍大的开球中，并且对每个平移 $s$均有效。

参数横截性 [26, 第 3], 章应用于每个 $n$ 以及每个开区间$(-j,j)$，得到一个零测度例外参数集。对 $n,j\ge1$取可数并仍为零测度，从而证明了同时成立的断言。

□

**引理 8.5** (紧族克罗夫顿界)。 设 $Z$ 和 $P$ 是带边界的紧致光滑流形，视为包含在开扩张中，且 $Q$ 是一个光滑黎曼流形。假设 $\Psi : Z \times P \to Q$ 可扩张为其紧致区域某个邻域上的光滑满浸，并且 维数$P$ + 维数$V$ = 维数$Q$，其中$V \subset Q$ 是一个嵌入光滑子流形。那么存在一个常数 $C_\Psi$ ，它与 $V$ 无关（取决于固定映射 $\Psi$、度量及其紧致区域），使得只要所指的交集对几乎每个 $z$都是离散的，

$$\int_{\mathcal{Z}} \#\{p \in \mathcal{P} : \Psi(z,p) \in V\}\, \mathrm{d}z \le C_\Psi \operatorname{Vol}_{\dim V}(V \cap \Psi(\mathcal{Z} \times \mathcal{P})). \tag{8.6}$$

可以允许浸入的 $P$，并统计参数化关联。

证明。这是 [20, 引理 5.3],中的积分几何论证，其中明确给出了统一性。我们用有限个相对紧的满浸图覆盖该紧致区域，并为其配备逆坐标映射$\Xi(y,w)$，满足 $\Psi(\Xi(y,w)) = y$。在每个坐标图中，关联流形 $\Psi^{-1}(V)$ 是 $(V \cap U) \times U_{\mathrm{fib}}$，其维数为 $d = \dim Z$。到 Z 的关联投影是 $p = \pi_{\mathcal{Z}} \circ \Xi$。固定的相对紧坐标图上的光滑性给出 $\|Dp\| \le M$，且与 $V$ 无关，因此在每个关联切平面上都有 $J_d p \le M^d$。

限制到 $E$ 位于原区域上方的坐标点所组成的可测集。面积公式 [23, 第 3.2 节3]给出

$$\int_{\mathcal{Z}} \#(p^{-1}(z) \cap E)\, \mathrm{d}z = \int_E J_d p \, \mathrm{d}\operatorname{vol}_d \le C \operatorname{Vol}_{\dim V}(V \cap \Psi(\mathcal{Z} \times \mathcal{P})).$$

这里的 $C$ 包含了有界的坐标畸变和 $U_{\mathrm{fib}}$的体积，二者都与 $V$ 无关。对有限覆盖求和即可证明该界；重叠部分只会使左侧被重复计数。在开扩张中进行处理并限制到 $E$，还可以处理边界。所有计数都在参数域上进行，因此同样的论证适用于浸入族。

□

**定理 8.6**。 对于每个固定的紧 *Reeb* 位移区间 $I$，都存在一个球 $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^N$、上述族 $\varphi_z$，以及常数 $C_I$、$c_I > 0$，它们均与 $n$ 无关，使得

$$\int_{\mathbb{B}} \#\,\mathrm{TP}(\varphi_z \circ f^n; I)\, \mathrm{d}z \le C_I \operatorname{Vol}_m(\Gamma_n \cap \{|\theta| \le c_I\}) \le C_I \operatorname{Vol}_m(\Gamma_n). \tag{8.7}$$

*For* 几乎处处的 $z$，被积函数都计数有限个非退化的平移点-位移对 $s$.

证明。 应用引理 8.5，取 $\mathcal{Z} = \mathbb{B}$，$\mathcal{P} = Y \times I$，$V = \Gamma_n$，以及引理 8.4中的浸没。其像的 $\theta$ 坐标一致有界，因为 $|g_{\varphi_z^{-1}}(y)| \le c_I$ 在紧参数集上。对 (8.4) 中定义的两个方程求导可知，当且仅当相应的图关联是横截的，平移点方程才是横截的。横截关联集是零维的，并且在紧参数域上是紧的，因此是有限集。为纳入 的端点，我们先在稍大的开位移区间上应用横截性。所得紧子区间内的孤立零点仍构成有限集，体积界也随之成立。

□

## 8.3 解析可容许性与关联条形码

接下来，我们将明确一个归一化滤过数据包，其中包括哈密顿代表元、正则 Floer 选择、延拓映射（与这些选择的同伦相关联的链映射），以及扰动的拉比诺维茨-弗洛尔同调（RFH）中的作用量过滤 [1, 定理 2.9 和 2.16]以及 [2, 命题 2.8]。解析可容许性涉及这些选择，而条形码构造则使用持久性测度 [18,第 2]节。

取一个非负的 $\chi \in C_c^\infty((0,1/3))$ 积分为 1 的函数，以及引理 $F_\Sigma$ A.2 中的径向定义函数 . 对每个 $n$，引理 A.1 给出一个紧支集哈密顿量 $K_{n,t}$，其支集位于 (2/3,1) 中，并在相关轨道上生成 $\widehat{}$ 的逆齐次提升 $f^{-n}$。其径向截断函数在 $n$ 之后选取。类似地，选取一个光滑族 $L_{z,t}$，其支集位于 $(1/3, 2/3)$ 和一个固定径向环带中，并沿着来自 $\Sigma$ 的轨道生成 $\widehat{\varphi_z^{-1}}$，其中 $L_{0,t} = 0$。固定截断函数和有界的参数导数给出

$$\int_0^1 \|L_{z,t}\|_\infty \, \mathrm{d}t \le C_L|z|, \tag{8.8}$$

并且，在缩小闭参数球之后，

$$\int_0^1 \|L_{z,t} - L_{w,t}\|_\infty \, \mathrm{d}t \le C_L|z-w|. \tag{8.9}$$

该常数与 $n$ 无关。选取 $K_{n,\bullet}$ 对应的环带，使其包含紧集 $\bigcup_{z\in\mathbb{B}} \widehat{\varphi_z^{-1}}(\Sigma)$ 中所有逆向的 $f^n$ 齐次同伦轨迹。因此，沿每条相关临界轨迹，$K_{n,t}+L_{z,t}$ 生成 $\widehat{f^{-n}\circ\varphi_z^{-1}} = \widehat{\varphi_z} \circ \widehat{f^n}^{-1}$。

对固定的 $n$ 和 $z \in \mathbb{B}$，在 $C^\infty(S^1, \widehat{W}) \times \mathbb{R}$ 上定义泛函

$$\mathscr{A}_{n,z}(u,\eta) = \int_{S^1} u^*\lambda - \int_0^1 (K_{n,t} + L_{z,t})(u(t))\,\mathrm{d}t - \eta\int_0^1 \chi(t)F_\Sigma(u(t))\,\mathrm{d}t. \tag{8.10}$$

这里，$F_\Sigma$ 是固定的实值定义哈密顿量，而 $\varphi_z$ 是用于构造 $L_{z,t}$ 的接触同胚。我们用 $K_{n,\bullet}$ 表示族 $t \mapsto K_{n,t}$。当 $\mathscr{A}_{n,z}$ 的临界点非退化且辅助 Floer 选择正则时，称该参数为正则 。

该作用谱是$\mathscr{A}_{n,z}$的临界值集合。对于不在该谱中的正则端点，$\mathrm{CF}_{n\,z}^{(a,b)}$表示有限窗口 *Floer* 复形，它由 $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 中作用量位于$(a,b)$内的临界点生成。其微分统计正则的指标为一的 Floer 轨迹，并对低作用子复形取商[1, 第 2.3 节，式 (2.43)]。

**定义 8.7**（解析可容许族）。 若满足以下条件，则由其选定的哈密顿代表元和辅助 Floer 选择构成的族$\{\mathscr{A}_{n,\ z}\}_{n\ge1,\ \ z\in\mathbb{B}}$是容许的 ，对每个固定的 $n$均成立。

(i) 正则参数在 $\mathbb{B}$ 中具有满勒贝格测度（因而稠密）。在下文用到的非退化参数处，可以选取正则的辅助选择。对每个正则成员，每个紧作用量窗口内的生成元均有限，且 $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上的有限窗口 Floer 复形存在，其微分严格递减作用量，并具有相容的窗口包含映射和商映射。

(ii) Floer 轨迹、正则成员之间的延拓轨迹，以及标准延拓同伦的参数化轨迹，均具有扰动的拉比诺维茨-弗洛尔同调所要求的紧致性、横截性和拼接性质。特别地，仿射哈密顿量比较及其收缩定义了满足通常作用量—能量估计的链映射和链同伦。

断层扫描仪给出了 (i) 中几乎处处成立的临界点横截性，而 Floer 横截性和相容的模空间构造仍属于解析要求。解析常数可以依赖于 $n$。条形码存在性和局部有限性是下文将证明的推论。

**引理 8.8.** 对于每个 $z$ 充分小的值，$\mathscr{A}_{n,z}$ 的临界点与 $\varphi_z \circ f^n$的平移点对一一对应，且临界作用量为 $\eta$。

证明。 对 $\eta$ 的变分在第一个时间区间内施加 $F_\Sigma = 0$，此时 $u$ 沿着 $\Sigma$上的一条重新参数化的 Reeb 轨道运动。 $\varphi_z$ 的逆齐次提升作用于中间区间，随后

在最后一个区间作用的是 $f^{n}$ 的逆齐次提升。因此，无约束哈密顿部分的时间一映射在相关轨线上为 $\widehat{f^{-n}} \circ \widehat{\varphi_z}^{-1} = \widehat{\varphi_z \circ f^{n}}^{-1}$。闭环方程等价于 $(\varphi_z \circ f^{n})(x) = R_{\eta}^{\alpha} x$，而回归到半径一等价于 $\kappa_{\varphi_z \circ f^{n}}(x) = 1$。反过来，每个平移点对都定义了相应的闭环。沿齐次哈密顿轨线，$\lambda(X_{K_n,t}) = K_{n,t}$，且 $\lambda(X_{L_z,t}) = L_{z,t}$；而在 $\Sigma$ 上，约束 $F_{\Sigma}$ 为零，且 $\lambda(R_{\alpha}) = 1$。代入 (8.10) 得到作用量 $\eta$。这一计算遵循引理 2.2], ，其中分离支撑的排列与复合顺序相匹配。

□

**完备作用量过滤**

固定一个容许族。对于一个正则成员，将 $\mathcal{G}_{n,z} = \mathrm{Crit}\mathscr{A}_{n,z}$ and $A_{n,z}(x) = \mathscr{A}_{n,z}(x)$ 记作$x \in \mathcal{G}_{n,z}$。全文只需考虑奇偶分次，且下文每个条形码计数都对所有次数的重数求和。在每个次数上，我们沿作用量递减的方向取完备化，定义为

$$C_{n,z} = \Big\{ \sum_{x \in \mathcal{G}_{n,z}} a_x x : \; a_x \in \mathbb{F}, \#\{x : a_x \neq 0, \; A_{n,z}(x) \geq r\} < \infty \text{ for every } r \in \mathbb{R} \Big\}. \tag{8.11}$$

令 $C_n^{\leq t}{}_{,z}$ 由支集作用量不超过 $t$ 的和组成。Floer 微分可扩展到这些和上，因为对于任意固定的较低作用量水平，它在给定链上的取值只涉及有限个生成元以及有限窗口微分。窗口微分的相容性给出 $\partial^2 = 0$。对于正则上界 $b$, $C_n^{\leq b}{}_{,z}$ 等价于 $\mathrm{CF}_{n\,z}^{(a,b)}$, 关于正则 $a \to -\infty$ 的链级逆极限。在此完备化之后取同调，我们定义

$$V_{n,z}^{t} = H_*(C_{n,z}^{\leq t}), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{8.12}$$

配备包含诱导的结构映射。引理 B.1 证明了与有限窗口同调逆极限进行所需比较的合理性。

一个持久模是由一族向量空间构成的 $V^t$，并配有映射 $V^a \to V^b$，对于 $a \leq b$，其复合与相应的结构映射一致，且相等参数处的映射是恒等映射 [18, 第 1 节。1]。它的持久图是与该模的矩形值持久性测度相关联的多重集 [18, 第 2.1–2 节。7]。数值端点表示类出现和消失时对应的参数值。瓶颈距离是图表之间部分匹配的代价下确界；匹配的端点移动距离至多为该代价，而未匹配区间的长度必须至多为该代价的两倍 [18, 第 4 节。2]。我们省略端点标记。

定义 8.9（关联条形码）。对于正则成员，$\mathrm{B}_{n,z}$ 是 $V_{n,z}$ 的未装饰持久图中出生坐标有限的部分，表示为条形的多重集 $[p, q)$，其中$p \in \mathbb{R}$ 且 $p < q \leq +\infty$。其存在性由引理 8.10 以及 [18, §§2.4–2.8] 的持久测度构造保证。对于非正则参数，将 $\mathrm{B}_{n,z}$ 定义为正则参数趋近于 $z$时条形码的瓶颈极限。命题 8.13 证明了该极限存在，且与正则化序列无关。令 $\mathrm{B}_n = \mathrm{B}_{n,0}$。

记号 $[p, q)$ 表示数值端点，在瓶颈度量中省略端点标记。我们纳入 $q = +\infty$，并省略零长度条以及在 $-\infty$ 处的出生时刻，因为后者对下文使用的有界出生窗口没有贡献。此约定并不意味着整个完备化模是区间模的直和。该构造取决于指定的完备化、填充和 $K_{n,\bullet}$，但并未声称其与无关的哈密顿延拓无关。

下文中，局部有限条形码 是指，对于每个紧区间 $I \subset \mathbb{R}$ 以及每个 $\varepsilon > 0$,

$$\#\{[p, q) \in \mathcal{B} : p \in I, \; q - p \geq \varepsilon\} < \infty, \tag{8.13}$$

计入重数并允许 $q = +\infty$。用持久性测度的术语来说， $v$-驯性 和$h$-驯性 分别表示在每个与对角线相隔的、垂直方向和水平方向均无界的条带上有限 [18, 第 2 节。8]。所展示的有界出生条件是$v$-驯性的条形码形式，这与他们的命题 2.21 中模 的局部有限性不同。

**引理 8.10.** 对于容许族中的每个正则成员，$V_{n,\,z}$ 都是 $v$-驯服的，也是 $h$-驯服的。其有限出生条形码对每个有界区间 $I$ 都满足，

$$\sum_{[b,d)\in\mathcal{B}_{n,z}} \big(\mathbf{1}_I(b) + \mathbf{1}_I(d)\big) = N_I(n,z), \qquad \mathbf{1}_I(+\infty) = 0, \tag{8.14}$$

其中 $N_I(n,z) = \#\{x \in G_{n,\,z} :\ A_{n,\,z}(x) \in I\}$。特别地，

$$\#\{[b,d) \in \mathcal{B}_{n,z} : b \in I\} \le N_I(n,z) < \infty. \tag{8.15}$$

*Thu*可容许性意味着正则成员具有局部有限性，无需任何额外假设 $n$.

证明。 可容许性使作用相容基局部有限，而能量恒等式使微分严格降低作用量。因此，完备滤过满足命题 B.2的假设，由此可得端点恒等式和两个驯服性断言。省略非负的死亡计数即可得到出生上界。附录 B 中的证明还验证了，对这些正则复形而言，省略 $-\infty$处的出生时刻不会丢失任何有限死亡端点。

□

注 8.11. 由于作用量没有下界，有限维窗口商未必使 $V^t_{n,\,z}$ 成为有限维的，也未必是 $q$-驯服的（即每个具有 $a < b$ 的结构映射 $V^a \to V^b$ 都具有有限秩）。前述论证通过有限余核和持久性测度证明了条形码的局部有限性，无需援引逐点有限维模的区间分解定理，也无需额外的分析假设。

**引理 8.12** (正则成员的滤过稳定性)。存在一个常数 $C_*$，与 $n$ 无关，使得对于容许族的正则参数 $z$、$w$，

$$d_{\mathrm{bot}}(\mathcal{B}_{n,z}, \mathcal{B}_{n,w}) \le C_* |z - w|. \tag{8.16}$$

证明。考虑仿射同伦 $K_{n,\,t} + L_{z,\,t} + \rho(s)(L_{w,\,t} - L_{z,\,t})$，其中 $\rho(-\infty) = 0$， $\rho(+\infty) = 1$ 且$\rho' \ge 0$。引理 A.4 中的作用量-能量恒等式表明，两个延拓方向上的滤过位移均有如下界

$$\Delta(z,w) := \int_0^1 \|L_{w,t} - L_{z,t}\|_\infty \,\mathrm{d}t \le C_L |z - w|.$$

拼接同伦的标准收缩给出到恒等映射的链同伦，其滤过代价根据同一作用量-能量估计至多为 $2\Delta(z,w)$。相关模空间的存在性及紧化是定义 8.7 中的解析要求。由于对于任意输出作用量阈值，有界的滤过位移只允许来自对应位移后阈值以上有限个输入项的贡献，因此这些映射可延拓到 (8.11)。同样的推理也适用于链同伦。因此，模 $V_{n,\,z}$ 与 $V_{n,\,w}$ 以 $\Delta(z,w)$ 交错；这意味着两个方向上的结构相容映射将参数位移 $\Delta(z,w)$，且它们的复合是位移 $2\Delta(z,w)$ 的结构映射，见第 [18, 节。2]

结合 [18, 引理 3.4 和 4.22、定理 428] 中的插值引理、盒子引理和测度稳定性，可得持久性测度的稳定性，而无需 $q$-驯性。根据引理8.10，两个有限内部都包含整个有限出生区域，包括直线 $q = +\infty$。所得匹配限制在此区域内，因为有限距离匹配无法将有限出生变为 $-\infty$，且该区域内任何未匹配条带的长度至多为 $2\Delta(z,\ w)$。这证明了（8.16），其中

$C_* = C_L$（或任何更大的固定常数）。尽管紧致性常数可能依赖于 $n$，但滤过位移与之无关。

□

**命题 8.13**。对于每个固定的 $n$，正则条形码通过瓶颈极限唯一延拓至每个 $z \in \mathbb{B}$。其个这些极限满足 (8.13)，并且

$$d_{\mathrm{bot}}(\mathcal{B}_{n,z}, \mathcal{B}_{n,w}) \le C_* |z - w| \quad (z, w \in \mathbb{B}). \tag{8.17}$$

特别地，$B_n = B_{n,\,0}$ 定义良好。

证明。固定 $n$、$z_0$ 以及正则 $z_j \to z_0$。根据引理 8.12，条形码 $\mathcal{B}_{n,\,z_j}$ 构成一个瓶颈柯西序列。为了在类（8.13）内构造其极限，取一个子序列，使连续匹配的代价为 $\delta_j$ 且满足 $\sum_j \delta_j < \infty$，并跟踪匹配的条形。对于每条无限延续的轨道，其有限端点收敛，而无穷死亡端点仍保持无穷。保留长度极限为正的轨道，删去那些收敛至对角线的轨道。长度超过剩余匹配总代价两倍的条形不可能消失到对角线中，因此该构造给出一个极限多重集以及瓶颈收敛。在给定阶段之后出生的轨道，其长度极限至多为剩余总代价的两倍。因此，在有界出生窗口内，每个长度至少为 $\varepsilon$ 的极限条形，都可以从某个足够晚的阶段开始进行跟踪；在该阶段，这样的条形只有有限多个。因此，极限满足（8.13）。

更明确地，记 $I^\delta = \{s : \mathrm{dist}(s, I) \le \delta\}$，并令 $b_\varepsilon^I$ 表示（8.13）中的计数。对于 $0 < \delta < \varepsilon/4$以及足够接近的正则逼近 $\mathcal{B}_{n,z_j}$，代价小于 $\delta$ 的匹配给出

$$b_\varepsilon^I(\mathcal{B}_{n,z_0}) \le b_{\varepsilon-2\delta}^{I^\delta}(\mathcal{B}_{n,z_j}) < \infty. \tag{8.18}$$

将两个正则化序列交错，并应用（8.16），可知极限与序列无关。将此不等式取极限，即得（8.17）。若 $z_0$ 本身已正则，则该极限等于其原始条形码。此论证在图表层面进行，无需假设退化参数处存在具有孤立生成元的 Floer复形。

□

## 8.4 固定窗口熵上界

**定义 8.14**（固定窗口 TP 条形码熵）。对于条形码 $\mathcal{B}$ 和紧区间 $I$，记

$$b_\varepsilon^I(\mathcal{B}) = \#\{[b, d) \in \mathcal{B} : b \in I,\ d - b \ge \varepsilon\}.$$

当 $\log^+ \quad x = \log \max\{1, x\}$时，所选归一化族的固定窗口 *TP* 条形码熵 为

$$h_{\mathrm{TP}}^I(f; \alpha; \{K_{n,\bullet}\}) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log^+ b_\varepsilon^I(\mathcal{B}_n).$$

外层极限由单调性保证存在。我们还定义

$$L_{\varepsilon,\mathrm{end}}^I(n) = \#\{[b, d) \in \mathcal{B}_n : d - b \ge \varepsilon,\ b \in I \text{ or } d \in I\}.$$

后者称为双端点长条计数。

这两种计数均采用 [20, 19], 中的长度约定，并施加了指定的有限作用量窗口限制。无限长条的长度计为 $\infty$。

**定理 8.15**。设 $(W,\ \lambda)$ 是一个边界为 $(Y,\ \alpha)$的李乌维尔域，设 $f \in \mathrm{Cont}_0^\infty(Y,\ \ker \alpha)$，并选取一个如定义 *8.7* 所述的解析可容许族。对于每个紧 *Reeb* 位移区间 $I$ 以及每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个常数 $C_{I,\ \varepsilon}$，它与 $n$ 无关，使得

$$b_\varepsilon^I(\mathcal{B}_n) \le L_{\varepsilon,\mathrm{end}}^I(n) \le C_{I,\varepsilon}\, \mathrm{Vol}_{\dim Y}(\Gamma_n). \tag{8.19}$$

因此，

$$h^I_{\mathrm{TP}}(f;\alpha;\{K_{n,\bullet}\}) \le h_{\mathrm{top}}(f). \tag{8.20}$$

证明。 固定 $0<\delta<\varepsilon/4$ 并为 $I^\delta=\{s$ 构造一个接触断层扫描仪：距离$(s,\ I)\ \le\delta\}$。利用命题 8.13中的常数，缩小固定参数球 $\mathbb{B}$，使得在整个参数球内都有 $C_*|z|<\delta$。$\mathcal{B}_n$ 中长度至少为 $\varepsilon$ 的一条条形，不可能以小于 $\delta$ 的代价与对角线匹配。相反，它会与$\mathcal{B}_n$中的$z$一条不同的条形匹配，该条形长度至少为 $\varepsilon-2\delta$，且每个有限端点的移动距离小于 $\delta$。因此，由 $L^I_{\varepsilon,\ \mathrm{end}}(n)$ 计数的每条条形，都与一条端点位于 $I^\delta$ 中的条形匹配。

定理8.6说明，对于几乎所有参数，平移对方程具有横截性，而可容许性则提供正则 Floer 选择。引理 8.10和8.8 于是得到

$$L^I_{\varepsilon,\mathrm{end}}(n) \le \#\,\mathrm{TP}(\varphi_z\circ f^n;I^\delta).$$

事实上，每条匹配的条形至少有一个端点位于该窗口内，因此端点清查将这些条形的数量限制为生成元的数量。对 $\mathbb{B}$ 积分后，再利用接触 Crofton 估计，可得

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{B})L^I_{\varepsilon,\mathrm{end}}(n) \le C_{I^\delta}\,\mathrm{Vol}(\Gamma_n).$$

由于参数球和常数在 $n$ 之前已固定，这就证明了（8.19）。取上指数增长率并应用定理 8.2，再令 $\varepsilon\downarrow 0$，即可得到（8.20）。 □

定理 *1.3* 的证明。这是定理 8.15 中关于出生窗口的部分。 □

该窗口的选取与迭代无关。附录 A.2 介绍了相关的延拓估计及其适用范围，但并未声称在无关的哈密顿截断下具有恰当的不变性。完备作用量过滤也不同于 [16] 的接触参数过滤。

# 9 短条的超指数增长

在强平移非退化性条件下，未经扰动的平移对计数等于第 8.3 小节中完备滤过的生成元计数。仅靠正则化并不能对退化解确立这一等式。

**定义 9.1**（短条计数）。对于有界区间 $I$ 和 $\varepsilon>0$，定义

$$S^I_\varepsilon(n)=\#\{[b,d)\in\mathcal{B}_n : b\in I,\ 0<d-b<\varepsilon\},$$
$$S^I_{\varepsilon,\mathrm{end}}(n)=\#\{[b,d)\in\mathcal{B}_n : 0<d-b<\varepsilon,\ b\in I \text{ or } d\in I\}.$$

这些分别是： $I$ 中出生的短条，以及在 $I$中有一个端点的短条的数量。

这两个数量均指完整完备滤过的条形码，而非截断到 $I$的商复形的条形码。长度约定遵循 [19], ，此处指定的端点限制是定义的一部分。

**引理 9.2**。假设定理*1.3* 的假设成立，且满足强平移非退化性。对于任意有界区间 $K$、任意 $\varepsilon>0$ 以及任意 $H>h_{\mathrm{top}}(f)$，存在一个常数 $C=C(K,\ \varepsilon,\ H,\ f)$，使得

$$S^K_{\varepsilon,\mathrm{end}}(n) \ge \tfrac{1}{2}\#\,\mathrm{TP}(f^n;K) - Ce^{Hn} \qquad (n\ge 1). \tag{9.1}$$

证明。对于未扰动的正则成员，引理8.10 将 $K$ 中的生成元数量与 $K$中的有限条形码端点数量对应起来，按重数计数。每个条形至多贡献两个

这样的端点。将长度小于 $\varepsilon$ 的条形与长度至少为 $\varepsilon$的条形分开，并将无限长条计入后者，可得

$$\#\,\mathrm{TP}(f^n;K)\le 2S^K_{\varepsilon,\mathrm{end}}(n)+2L^K_{\varepsilon,\mathrm{end}}(n).$$

应用定理 8.15 的双端点估计于 $K$，可将最后一个计数上界估计为 $C_{K,\,\varepsilon}\mathrm{Vol}(\Gamma_n)$。定理 8.2 给出 $\mathrm{Vol}(\Gamma_n)\le C_He^{Hn}$；增大 $C_H$ 以覆盖有限多个初始迭代后，即可证明该断言。

□

定理 *1.4* 的证明。假设 $f^n;\ K)$ 具有无限的上指数增长率。紧流形上的光滑映射的熵是有限的 [28, 第 3]章；取 $H>h_{\mathrm{top}}(f)$。对于每个 $A>H$，任意大的 $n$ 都满足 $\#\,\mathrm{TP}(f^n;\ K)\ge e^{(A+1)n}$。引理 9.2 于是给出

$$S^K_{\varepsilon,\mathrm{end}}(n)\ge\tfrac14 e^{(A+1)n}$$

沿着一个无界子序列。令 $A\to\infty$，即可证明端点窗口断言。

现在设 $J\subset I$ 为紧流形，$I$ 为开集，并令 $\rho=\mathrm{dist}(J,\ \mathbb{R}\setminus I)>0$。给定 $\varepsilon>0$，取定 $0<\delta<\min\{\varepsilon,\ \rho\}$。任何长度小于 $\delta$ 且端点位于 $J$ 的条，其出生点都位于 $I$中。事实上，当出生点位于 $J$中时，该断言显然成立；当其死亡点 $d$ 位于 $J$中时，我们有 $d-\delta<b<d$。因此，

$$S^I_\varepsilon(n)\ge S^J_{\delta,\mathrm{end}}(n).\tag{9.2}$$

将证明的第一部分应用于 $J$，即可确立在 $I$中出生的条形具有所述增长。

对 搅拌器应用，在余集的记号中标明平移窗口，并选择 e

$$\widetilde{\mathcal{R}}_\infty=\mathcal{R}_\infty(s_*)\cap\mathcal{R}_\infty(s_*/2).$$

根据定理 1.2，两个集合在同一个 $C^1$-开集 $\mathcal{U}$中都是余集。第二个因子给出了紧内部区间 $J=[-s_*/2,s_*/2]\subset I=(-s_*,s_*)$上的增长假设，而引理 2.11则为 $\alpha=u\alpha_{\mathrm{can}}$提供了一个显式的 Liouville 填充。因此，前述论证证明了满足所述同伦、非退化性和可容许性假设的每个映射都满足最后一项断言。此处的应用不依赖于关于额外交点的任何稠密性或存在性结论。

□

**推论 9.3**。在定理 *1.2*的设定下，固定 $s_*>0$ 和一个正实数序列 $(a_n)$。存在一个 $C^1$-余集 $\mathcal{R}^{\mathrm{short}}_a\subset\mathcal{U}$，使得其中每个满足定理 *1.4* 附加假设的元素，对每个固定的 $\varepsilon>0$，均满足

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S^{(-s_*,s_*)}_\varepsilon(n)}{a_n}=+\infty.$$

证明。在较小的窗口 7.15 中应用显式贝尔构造（$(-s_*/2,\ s_*/2)$，其中正整数 $b_n=\lceil a_n+e^{n^2}\rceil$。该构造给出一个余集和一个无界序列 $n_j$，并且在该窗口中至少有 $n_jb_{n_j}$ 个平移对。对每个固定的 $\varepsilon$，按（9.2）选取一个内部阈值 。引理 9.2 于是得到

$$S^{(-s_*,s_*)}_\varepsilon(n_j)\ge\tfrac12 n_jb_{n_j}-Ce^{Hn_j}\ge\tfrac14 n_jb_{n_j}$$

对所有充分大的 $j$ 都成立。除以 $a_{n_j}\le b_{n_j}$ 即可证明该断言。余集在选取 $\varepsilon$ 之前确定，尽管估计中的阈值和常数可能取决于 $\varepsilon$。

□

备注 9.4。仅在 $I$ 中生成元的增长，并不能迫使 $I$ 中出生时刻的增长。例如，取 $M_n=\lceil e^{n^2}\rceil$ 个独立对 $\partial y_i=x_i$，其作用量为 $A(x_i)=-s_*-\delta_n$ 和 $A(y_i)=-s_*+\delta_n$，其中 $0<\delta_n<s_*$ 和 $\delta_n\to0$。在 $(-s_*,s_*)$ 中有 $M_n$ 个生成元，尽管每个条形码区间

$[-s_*-\delta_n,-s_*+\delta_n)$ 都在该窗口之外出生。这个代数例子解释了定理 1.4 中关于内部窗口的假设，但并未提供接触反例。

上指数增长率无穷大，并不意味着存在一个映射能够支配每个给定的超指数序列。因此，推论 9.3和定理1.2中的余集取决于给定的序列。

# 哈密顿量归一化与延拓

本附录验证归一化泛函（8.10）所需的提升与非退化性结论，并说明从扰动 Rabinowitz Floer 理论中得到的固定迭代解析性输入。

## A.1 提升与临界点非退化性

**引理 A.1** (紧支撑齐次提升)。 设 $f\in \mathrm{Cont}_0^\infty(Y,\ker\ \alpha)$ 并固定 $n\geq 1$。齐次提升

$$\hat{f}^{\,n}(r,x)=(re^{-G_n(x)},f^n(x)) \tag{A.1}$$

保持 $\lambda=r\alpha$。对于任意选定的、从 id 到 $f^n$ 的接触同伦，以及⌒辛化中的任意紧环域，都存在一个作用于 $W$ 上的紧支撑哈密顿同伦，使其在该环域出发的所有轨迹的某个邻域内与相应的齐次提升一致。在这些轨迹上，其哈密顿量$H_t$ 满足 $\lambda(X_{H_t})=H_t$。该同伦可支撑于任意给定的开时间区间内。

证明。 拉回恒等式为 $re^{-G_n}(f^n)^*\alpha=r\alpha$。若 $k_t$ 生成所选的接触同伦，则其齐次提升由 $rk_t(x)$生成；参见 [2, §2，公式 (2.3) 之前]。Liouville 流将⌒§1 中引理 1 之前的整个辛化嵌入 $W$ [2, 。9]紧环域在提升同伦下的像构成该嵌入辛化中的一个紧子集。选取一个径向截断函数，使其在该子集附近等于一，在紧核附近及足够远处为零。由哈密顿轨线的唯一性，即可得到所声称的一致性；在整个过程中，

$$\lambda(X_{H_t})=\mathrm{d}H_t(r\partial_r)=r\partial_r(rk_t)=rk_t=H_t.$$

通过光滑的时间重参数化，可将支集置于指定区间内。截断函数在 $n$之后选取，其大小可以依赖于 $n$。 □

⌒**引理 A.2**。 存在一个光滑函数 $F_\Sigma:\ W\to\mathbb{R}$，使得

$$F_\Sigma^{-1}(0)=\Sigma,\qquad F_\Sigma=r-1\ \textit{near}\ \Sigma,\qquad \mathrm{d}F_\Sigma\ \textit{has compact support.} \tag{A.2}$$

它是常 数，且在紧核上为负；在足够远处为常数且为正，并且 $X_{F_\Sigma}|_\Sigma=R_\alpha$ .

证明。 将 $r-1$ 通过光滑单调的径向轮廓延拓至双侧领圈，使其在两侧均保持原有符号，并在稍大的领圈外为常数。将这些常数延拓至核心和正端。根据哈密顿量约定（2.3），在 $X_{r-1}=R_\alpha$ 附近有 $\Sigma$。这就是 [3, §2.3，式 (2.14)]中使用的定义函数构造。 □

**命题 A.3** （非退化条件）。 在与 $\mathscr{A}_{n,\ z}$ 的一组平移对 $(x,\eta)$ 相对应的临界点处，$f_{n,\ z}:=\varphi_z\circ\ f^n$ 的海森核自然地同构于满足下式的解 $(\zeta,\sigma)\in T_xY\times\mathbb{R}$

$$\begin{cases} Df_{n,z}(x)\zeta-DR_\eta^\alpha(x)\zeta-\sigma R_\alpha(f_{n,z}(x))=0,\\ \mathrm{d}g_{f_{n,z}}(x)\zeta=0. \end{cases} \tag{A.3}$$

因此 因此，临界点是莫尔斯非退化的，当且仅当平移对是非退化的 *e.*

证明。 (8.10) 的一阶变分给出

$$\dot{u} = X_{K_{n,t}+L_{z,t}}(u) + \eta\chi(t)X_{F_\Sigma}(u), \qquad \int_0^1 \chi(t)F_\Sigma(u(t))\,\mathrm{d}t = 0.$$

其线性化刻画了海森核。将微分后的一阶变分与任意环路变分作检验，可得线性化微分方程；而对乘子作变分，则可得线性化积分约束。在第一个时间区间上，$\mathrm{d}F_\Sigma(u(t))\nu(t)$ 是常数，因为 $F_\Sigma$ 在其自身的哈密顿流下保持不变。因此，积分约束和 $\int\chi = 1$ 意味着 $\nu(0) = (0,\ \zeta)$，其中 $\zeta \in T_xY$。在该区间末端，变分为

$$(0, DR_\eta^\alpha(x)\zeta + \sigma R_\alpha(R_\eta^\alpha x)).$$

在临界轨迹附近，剩余的流是 $f_{n,\ z}$ 的逆齐次提升，因此线性化闭环条件为

$$D\hat{f}_{n,z}(1,x)(0,\zeta) = (0, DR_\eta^\alpha(x)\zeta + \sigma R_\alpha(R_\eta^\alpha x)).$$

由于 $g_{f_{n,\ z}}(x) = 0$，左侧等于 $(-\mathrm{d}g_{f_{n,\ z}}(x)\zeta,\ Df_{n,\ z}(x)\zeta)$，从而证明了（A.3）。反过来，根据线性常微分方程解的唯一性，该系统的每个解都对应于一个满足积分约束和闭环条件的唯一解。这就建立了所述的同构。□

## A.2 分析输入与延拓范围

对于固定的 $n$，$z$，分离的时间支集使泛函（8.10）处于扰动 Rabinowitz Floer 理论的框架内。一个 $\omega$ 相容的几乎复结构是一个端同态 $J$，满足$J^2 = -$恒等式，且使得 $\omega(\bullet, J\bullet)$ 成为黎曼度量。在正端，选取 $J$ 在径向缩放下不变、保持 $\xi$，并满足 $J(r\partial_r) = R_\alpha$。这些就是柱状接触型条件，见[2, 命题 2。8],其中关于 $J$ 的约定符号相反。

作用量有界轨道的乘子估计与紧致性由 [1, 引理 2.11、命题 2.10 和定理 2.9]得出。这里这些结果的假设均成立，因为 $W$ 是恰当且在无穷远处凸的，$\lambda|_\Sigma$ 是接触形式，$\mathrm{d}F_\Sigma$ 和扰动具有紧支集，并且 $\lambda(X_{F_\Sigma}) > 0$ 在Σ附近。恰当性排除了球面气泡。所有由此得到的常数都可能依赖于 $n$。

有限窗口微分及其平方为零恒等式遵循 [1, §2.3，公式 (2.43)] 中的构造。能量恒等式

$$E = \mathscr{A}_{n,z}(c_-) - \mathscr{A}_{n,z}(c_+)$$

意味着沿每条非常数轨道作用量都严格下降。Floer 正则性、拼接和参数化构造仍是定义 8.7 的明确要求，并且可能需要依赖乘子的几乎复结构 [3, 备注 2。17]。

由于 $\omega = \mathrm{d}\lambda$，作用量定义在所有自由同伦类上；参见 [3, 备注 2。6]。Floer 圆柱保持其端点的自由同伦类。由于前述估计不使用封盖圆盘，有限窗口构造适用于每个类。对于一个正则成员，一个有界闭窗口在所有类中只包含有限个生成元。事实上，平移对解集在$Y \times [a,b]$ 中是闭的，因而是紧的，而非退化性使其各点都是孤立的。该论证并不能将关于可缩 RFH 的任何特定计算推广到不可缩类。

一个延拓映射统计由依赖于 $s$ 的哈密顿量所得到的解，该哈密顿量在两种选择之间进行插值 [1, 定理 2.16] 的证明。以下恒等映射控制其滤过位移。

**引理 A.4** (延拓能量)。 将 $K_{n,t} + L_{z,t}$ 替换 (8.10) 中的内容为光滑紧支撑同伦 $H_{s,t}$，且该同伦在 $|s|$ 足够大时为常数，并将所得泛函记为 $\mathscr{A}_s$。一个有限能量

渐近行为为 $c_\pm$ 的负梯度解满足

$$E = \mathscr{A}_-(c_-) - \mathscr{A}_+(c_+) - \int_{\mathbb{R}\times S^1} \partial_s H_{s,t}(u(s,t))\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t. \tag{A.4}$$

正则紧连续延拓使滤过的变化至多为 $\int_{\mathbb{R}\times S^1} \|\partial_s H_{s,\ t}\|_\infty\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t$。

证明。 沿负梯度解求导可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathscr{A}_s = -\|\operatorname{grad}\mathscr{A}_s\|^2 - \int_0^1 \partial_s H_{s,t}(u)\,\mathrm{d}t.$$

积分并结合上确界范数界，即可证明这两个断言；参见 [1,引理 2。7]。 □

引理 2.15 中证明的径向截断独立性，以及式 (2.23) 后的讨论 [3, ，适用于他们所选的接触路径泛函。对于具有相同端点接触同胚但彼此无关的哈密顿延拓，我们使用所述的延拓估计，但不声称条形码完全相同。]

# B 完备滤过与条形码端点

我们将为第 8.3 小节的完备滤过证明端点清查。系数取自一个域，且持久性图按 [18, 第 2.1–28] 节。的测度论意义理解。

**引理 B.1** (递减作用量完备化的同调)。 设 $C$ 是一个沿递减作用量方向完备化的链复形，如 (8.11)所示，具有局部有限的作用量相容生成集和严格递减作用量的微分。令 $V^t = H_*(C^{\le t})$。对于正则层级 $a_j \downarrow -\infty$ 和 $t$，存在自然同构

$$V^t \cong \varprojlim_j H_*(C^{(a_j,t]}).$$

此外，

$$\bigcap_j \operatorname{im}(V^{a_j} \longrightarrow V^t) = 0. \tag{B.1}$$

证明。 记 $C_j = C^{(a_j,t]} = C^{\le t}/C^{\le a_j}$。完备化按次数给出 $C^{\le t} = \varprojlim_j C_j$，且每个 $C_j$ 都是有限维的。在有限维向量空间的逆序列中，每个固定项中的像构成一个递减的子空间序列，并最终稳定。因此，链群、周期 $Z_k(C_j)$、边界 $B_k(C_j)$和同调群组成的系统都满足*Mittag–Leffler*条件，这正是像稳定的性质 [37, 定义 12.31。2]。

在此条件下应用逆极限的正合性 [37, 引理 12.31。3]到

$$0 \to Z_k(C_j) \to (C_j)_k \to B_{k-1}(C_j) \to 0, \qquad 0 \to B_k(C_j) \to Z_k(C_j) \to H_k(C_j) \to 0.$$

核与逆极限可交换，而第一个序列将极限微分的像识别为 $\varprojlim B_{k-1}(C_j)$。接着，第二个序列给出了同调同构。最后， $0 \to C^{\le a_j} \to C^{\le t} \to C_j \to 0$ 的长正合列将 $\operatorname{im}(V^{a_j} \to V^t)$ 识别为投影的核 $V^t \to H_*(C_j)$。由于这些投影共同分离其逆极限中的点，故可得式（B.1）。

□

对于下文的每个完备复形 $C$，令$\mathcal{G}$ 为其选定的作用量相容生成集，并令 $A : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ 将作用量（或称滤过值）赋给每个生成元。那么 $C^{\le t}$ 由支集于生成元 $C$ 且满足() $A$ 的完备链组成。

在小节 8.3 中，这些分别是 G = G$_n$、$_z$ 和$A = A_n$、$_z$，其中$A_n$、$_z(x) = \mathscr{A}_n$、$_z(x)$。根据引理 8.8，对应于平移点-位移对$(y, \eta)$的生成元 $x$ 具有作用量$A(x) = \eta$。

**命题 B.2**。 在引理 *B.1*的假设下，假设任意有界作用量区间内的生成元总数有限。持久图在有界区间上具有有限的出生计数和死亡计数。令 $\mathcal{B}$ 为其有限出生部分，包括无限死亡的区间，并省略长度为零的区间。若 $K \subset \mathbb{R}$ 有界，则

$$\#\{x \in \mathcal{G} : A(x) \in K\} = \sum_{[b,d)\in\mathcal{B}} \big(\mathbf{1}_K(b) + \mathbf{1}_K(d)\big), \qquad \mathbf{1}_K(+\infty) = 0. \tag{B.2}$$

计数包含重数以及所有同调次数。

证明。 对于正则的 $a < b$，窗口正合列给出

$$\dim \operatorname{coker}(V^a \to V^b) \le \dim H_*(C^{(a,b]}), \qquad \dim \ker(V^a \to V^b) \le \dim H_*(C^{(a,b]}).$$

对次数求和后，第二个不等式中的同调次数平移便会消去。这两个有限界分别控制持久性测度的竖直条带和水平条带。因此，按照 $v$-驯性和 $h$-驯性的术语，该模是 [18, 第 2 节中所述的。其图在相应的有限区域上有定义。由于滤过在相邻作用量值之间保持不变，有限的图端点出现在这些作用量值处。

固定一个这样的值 $c$，并选取正则的 $c_- < c < c_+$，使两者之间没有其他作用量值。窗口复形的微分为零，因为其所有生成元的作用量均为 $c$。其长正合列给出

$$m_c = \sum_k \dim \operatorname{coker}(V_k^{c-} \to V_k^{c+}) + \sum_k \dim \ker(V_k^{c-} \to V_k^{c+}), \tag{B.3}$$

其中， $m_c$ 是在 $c$处的生成元数量。

To 将第一项与在 $c$处的所有出生时刻对应起来；对于 $t \ge c_+$，考虑有限维商空间 nt

$$Q^t = \frac{\operatorname{im}(V^{c+} \to V^t)}{\operatorname{im}(V^{c-} \to V^t)}.$$

该商空间的结构映射是满射的，而 $Q^{c+}$ 是所指的余核。其维数至多在有限多个时刻下降，存留的商空间对应于 $+\infty$处的死亡时刻。等价地，持久性测度的竖条公式恰好计算了 $c$处长度为正的 $Q^{c+}$ 个出生时刻。

对于死亡时刻，令 $K_c = \text{核}(V^{c-} \to V^{c+})$，其为有限维空间。根据引理 B.1，

$$\bigcap_j \big(K_c \cap \operatorname{im}(V^{a_j} \to V^{c-})\big) = 0.$$

这个递减的子空间序列最终为零。因此，整个死亡重数维数 $K_c$（由水平条带测量）的出生时刻下界是一个有限的 $a_j$。因此，在 $c$ 处的每个死亡时刻，都会在省略 $-\infty$ 处的出生时刻时被计数。在 $(c_-, c_+)$ 中不存在其他作用量值，这也排除了这里的零长度条，因此（B.3）恰好计算了 $c$处的所有端点。对有界区间内有限个这样的值求和，即得（B.2）。 □

这一命题背后的有限维恒等式，是生成元通常的条形码配对：有限条形对应两个生成元，无限条对应一个生成元；参见 [19, 注 2。1]引理 B.1给出了本文所用作用完备化所需的额外论证。

# 参考文献

[1] P. Albers 和 U. Frauenfelder。叶式交与拉比诺维茨-弗洛尔同调。《拓扑分析杂志》2 (2010)，第 1 期，77–98。编号引文对应 arXiv:0810.3845v3。[2] P. Albers 和 W. J. Merry。平移点与拉比诺维茨-弗洛尔同调。《不动点理论与应用杂志》13 (2013)，201–214。[3] P. Albers 和 W. J. Merry。可序性、接触非挤压与拉比诺维茨-弗洛尔同调。《辛几何杂志》16 (2018)，第 6 期，1481–1547。编号引文对应已发表版本。[4] V. I. Arnold（编）。《阿诺德问题》。施普林格，2005。[5] M. Artin 和 B. Mazur。关于周期点。《数学年刊》（第二辑）81 (1965)，第 1 期，82–99。[6] M. Asaoka。保面积二维动力系统中周期点数量快速增长的丰盛性。《数学物理通讯》356 (2017)，第 1 期，1–17。[7] M. Asaoka、K. Shinohara 和 D. Turaev。异维连接所导致的周期点数量快速增长。《组合数学》157 (2021)，第 9 期，1899–1963。[8] C. Bonatti 和 L. J. Díaz。持久非双曲遍历微分同胚。《数学年刊》（第二辑）143 (1996)，第 2 期，357–396。[9] C. Bonatti 和 L. J. Díaz。鲁棒异维环与 $C^1$-泛型动力系统。《朱西厄数学研究所杂志》7 (2008)，第 3 期，469–525。[10] C. Bonatti、L. J. Díaz 和 T. Fisher。同宿类内周期轨道数量的超指数增长。《离散与连续动力系统》20 (2008)，第 3 期，589–604。[11] C. Bonatti、L. J. Díaz、E. R. Pujals 和 J. Rocha。鲁棒遍历集与异维环。《Astérisque》，第 286 期 (2003)，187–222。[12] C. Bonatti、L. J. Díaz 和 M. Viana。超越一致双曲性：全局几何与概率视角。《数学科学百科全书》第 102 卷，Springer-Verlag，柏林，2005。[13] R. Bowen。Axiom A 微分同胚的马尔可夫划分。《美国数学杂志》92 (1970)，第 3 期，725–747。[14] R. Bowen。拓扑熵与 A 公理。载于《整体分析》，纯数学研讨会论文集，第 14 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1970 年，第 23–41 页。[15] R. Bowen。群端同态与齐性空间的熵。《美国数学会汇刊》153 (1971)，401–414。[16] D. Cant。Shelukhin的Hofer距离与接触同胚的辛上同调条形码。《拓扑分析杂志》（2025 年在线发表）。预印本，arXiv:2309.00529。[17] J. Chaidez。接触流形中的鲁棒非凸超曲面。预印本，arXiv:2406.05979v3，2025 年 9 月 27 日。[18] F. Chazal、V. de Silva、M. Glisse 和 S. Oudot。《持久模的结构与稳定性》。《数学Springer简明读本》，施普林格，沙姆，2016。预印本，arXiv:1207.3674v3。

[19] E. Çineli、V. L. Ginzburg 和 B. Z. Gürel。《Floer 条形码的增长》。《现代动力系统杂志》20（2024），275–298。[20] E. Çineli、V. L. Ginzburg 和 B. Z. Gürel。《哈密顿微分同胚的拓扑熵：持久同调与 Floer 理论视角》。《数学杂志》308（2024），第 4 期，论文编号 73，共 38 页。预印本，arXiv:2111.03983。[21] L. Côté。《关于 Reeb 动力学中超指数轨道增长的札记》。未发表札记，未注明日期。[22] K. Deimling。《非线性泛函分析》。施普林格，1985，第 1 章。[23] H. Federer。《几何测度论》。数学科学基础丛书，第 153 卷，施普林格，1969。[24] H. Geiges。《接触几何》。载于《微分几何手册》第 II 卷，爱思唯尔／诺斯荷兰出版社，阿姆斯特丹，2006，第 315–382 页。作者版本。[25] H. Geiges。《接触拓扑导论》。剑桥高等数学研究丛书，第 109 卷，剑桥大学出版社，2008；尤其是第 1.1、1.5 和 2.3 节。[26] M. W. Hirsch。《微分拓扑》。数学研究生教材，第 33 卷，施普林格，1976。[27] M. W. Hirsch、C. C. Pugh 和 M. Shub。《不变流形》。数学讲义，第 583 卷，施普林格，1977。[28] A. Katok 和 B. Hasselblatt。《现代动力系统理论导论》。数学及其应用百科全书，第 54 卷，剑桥大学出版社，1995。[29] D. McDuff 和 D. Salamon。《辛拓扑导论》。第 2 版，牛津数学专著，克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1998。[30] J. C. Oxtoby。《测度与纲》。第 2 版，数学研究生教材，第 2 卷，施普林格，1980。[31] J. G. P. Pelias。《与恒等映射同伦的辛同胚的条形码熵》。博士论文，加利福尼亚大学圣克鲁兹分校，2024。[32] L. Polterovich 和 E. Shelukhin，《自治哈密顿流、Hofer 几何与持久模》，《数学精选》（新系列）22（2016），227–296。[33] S. Sandon。《$\mathbb{R}^{2n}\times S^1$ 中的接触同调、容量与非挤压定理：通过生成函数》。《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）61（2011），第 1 期，145–185。[34] S. Sandon。《$\mathbb{R}^{2n+1}$ 与 $\mathbb{R}^{2n}\times S^1$的接触同胚的迭代平移点》。《国际数学杂志》23（2012），第 2 期，论文编号 1250042。[35] S. Sandon。《球面与射影空间接触同胚的平移点的 Morse 估计》。《几何与拓扑》165（2013），95–110。[36] T. Schmidt。《偏微分方程 I》。讲义，汉堡大学，2026 年 1 月 15 日版本。[37] Stacks Project 作者。《Stacks Project》。第 12.31 节“逆系统”，定义 12.31.2 和引理 12.31.3（标签 02MY ）。

[38] M. Usher 和 J. Zhang。《持久同调与 Floer–Novikov 理论》。《几何与拓扑》**20** (2016)，3333–3430。

[39] Y. Yomdin.体积增长与熵. 《以色列数学杂志》**57** (1987), 285–300.