arXiv:2611.29636v1 [physics.flu-dyn] 22 Nov 2026

湍流对流中的大尺度环流稳定本征模态

Yin Wang[1]、* Pik-Yin Lai[2]，和 Penger Tong[3]† [1]*Princeton Plasma Physics Laboratory, Princeton University, Princeton, New Jersey 08543, USA*
[2]*Department of Physics and Center for Complex Systems, National Central University, Chungli, Taiwan 320, R.O.C.* [3]*Department of Physics, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong*（日期：2026年11月24日）

湍流瑞利–贝纳德对流（RBC）是研究浮力驱动湍流的典型系统。其显著特征是存在系统尺度大尺度环流（LSC），其动力学反映了相干运动与湍流涨落之间的耦合。从布oussinesq纳维–斯托克斯方程和温度方程出发，我们推导出三个关于大尺度环流角速度及其伴随偶极温度场的耦合随机方程。确定性动力学包含一个不稳定无大尺度环流集合和两个与对称性相关的稳定的有限大尺度环流态。对任一有限大尺度环流态进行线性化，可得到一个纯弛豫特征模态和一对阻尼振荡特征模态，其频率由大尺度环流周转率决定。湍流涨落持续激发后者，为观测到的准周期振荡提供了动力学起源。在薄盘容器中进行的实验直接分辨出这两种特征模态，并显示出其预言的瑞利数标度关系。相同的随机动力学还为罕见的停滞和反转提供了一种途径。这一理论–实验框架为理解相干环流态、内禀模态以及涨落驱动的转变如何在湍流对流中出现，提供了一个易于处理的实例，并对地球物理流动和天体物理流动具有更广泛的意义。

湍流对流流动能够自发组织成相干运动，其尺度远大于产生这些运动的涨落尺度。理解这类大尺度结构如何维持、其稳定性和固有动力学模态由什么决定，以及它们如何响应湍流涨落，是非平衡流体动力学中的一个基本问题。地球物理和天体物理流动中也存在相关问题：相干环流态与强烈涨落并存，而且可能存在多种状态或持续时间很长的振荡模态。例如，大西洋经向翻转环流与其输运的密度场相互作用，并可能呈现多种环流状态和突变 [1, 2]。在太阳对流区，具有确定频率的全球惯性模态能够由湍流对流随机激发 [3, 4]。这些例子引出了一个更广泛的问题：在强湍流环境中，相干环流态及其固有动力学模态如何产生、如何保持可观测，以及如何发生转变?

湍流瑞利–贝纳德对流（RBC）为定量回答这些问题提供了一个典型场景 [5]。在足够大的瑞利数 Ra 下，流动会自发组织成贯穿整个系统的大尺度环流（LSC），并表现出连贯的准周期振荡、间歇性停滞和反转 [6–13]。在圆柱形容器中，这些振荡被认为源于大尺度环流的三维（3D）扭转和晃荡运动，并被现象学地描述为由几何相关回复力产生的阻尼振子 [7, 11, 14,15]。其他模型则将这种振荡归因于内禀整体流动进动 [16], 热羽流发射的延迟耦合 [17], 或频率由平均环流速率决定的行波式速度结构 velocity。当前仍缺少一种动力学框架，能够从耦合的动量和温度动力学中推导出潜在的大尺度环流状态及其内禀稳定模态，并对其衰减率和频率进行定量检验。

在此，我们在一种旨在隔离大尺度环流核心动力学的薄盘对流容器中探讨这一问题。其准二维约束抑制了扭转模态和晃荡模态，而圆形横截面消除了角流，但典型的相干振荡、停止和反转现象依然存在。从 Boussinesq 纳维–斯托克斯方程和温度方程出发，我们推导出三个耦合随机方程，分别描述大尺度环流角速度，以及其偶极温度场的振幅和取向。确定性动力学包含一个不稳定无大尺度环流集合，以及两个由对称性关联的稳定有限大尺度环流态。对任一有限大尺度环流态进行线性化，可得一个纯弛豫特征模态和一对阻尼振荡特征模态。湍流涨落激发这些振荡特征模态，从而产生观测到的准周期振荡，其频率

由大尺度环流周转率决定。与现象学模型不同，本框架根据控制动力学预测不动点结构以及稳定性特征值的实部和虚部。这些预测（包括其 Ra标度关系）通过实验直接检验，而停滞和反转则是在同一框架内由涨落驱动的转变。

实验细节已在其他地方报告 [13], ，此处我们总结其主要特征。如图 1 所示，该实验容器的直径为 $D = 188$ mm，厚度为 $L = 20$ mm，纵横比为 $\Gamma \equiv L/D = 0.106$。上部和

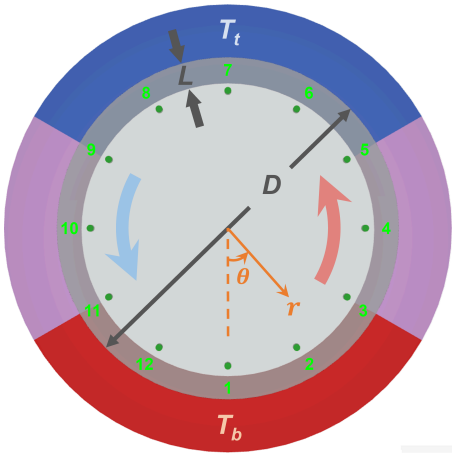

图1. 薄盘对流容器示意图。圆周边缘的下部（三分之一，红色）和上部（三分之一，蓝色）分别保持在温度 T_b 和 T_t；两侧各六分之一（紫色）以及前后端壁均由有机玻璃制成。前端壁内嵌于盲孔中的十二个热敏电阻记录局部温度。箭头表示逆时针方向的大尺度环流及其对应的偶极温度场。极坐标以橙色标出。

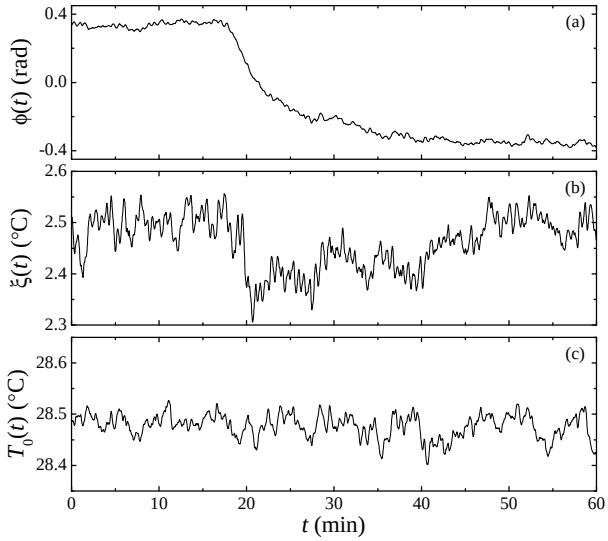

图2. 通过将公式（2）拟合于12个热敏电阻获得的偶极温度场的振幅 $\phi(t)$（a）、方向 $\xi(t)$（b）以及方位角均匀分量 $T_0(t)$（c）的测量时间序列。数据对应于温度为 $Ra = 7.4 \times 10^9$ 且 $Pr = 5.7$的水。

下部三分之一的圆形侧壁由导热的镀镍铜制成，其余侧壁和两个平坦端壁则由绝缘有机玻璃制成。两片平行的硅橡胶薄膜加热器为底部铜板提供均匀加热，使其温度保持在 T_b；温控冷却器（NESLAB RTE740）则通过循环水将顶部铜板温度维持在 T_t 。每块铜板的温度均由两个经过校准的热敏电阻以 2 Hz 的频率监测，精度为 5 mK。控制参数为 $Ra = \alpha g \Delta T D^3/(\nu\kappa)$ 和普朗特数 $Pr = \nu/\kappa$，其中 $T = T_b - T_t$、 g 为重力加速度， α、 ν和 κ分别为流体的热膨胀系数、运动黏度和热扩散率。我们使用了蒸馏水（$Pr = 5.7$）、10 wt.% 甘油-水溶液（GAS， $Pr = 5.7$）以及 20 wt.% GAS（$Pr = 7.6$），涵盖范围 $2.0 \times 10^9 \lesssim Ra \lesssim 1.3 \times 10^{10}$。在此范围内，流动处于湍流状态，并由一个占据主体区域的单一大尺度环流（LSC）主导 [13, 17, 19]。十二个等间距的热敏电阻位于半径 71 mm 处，距离流体侧端壁表面 0.5 mm；它们以约 1 Hz 的频率采集局部温度，针对每个 Ra连续测量约一个月。

在我们的系统中，狭窄的准二维几何结构抑制了三维次级模态，包括在直立圆柱形对流池中观察到的扭转运动和晃荡运动 [7, 15], ；而圆形横截面则消除了矩形对流池特有的角流 [20]。因此，该系统能够分离出湍流瑞利-贝纳德对流的关键要素：大尺度环流、黏性边界层和热边界层（BL）、热羽流以及湍流涨落。尽管几何结构经过简化，大尺度环流仍保留了在更复杂系统中观察到的关键动力学特征，包括准周期振荡、停滞、反转和小尺度涨落 [13, 17], , 因此非常适合用于识别其潜在物理机制。

对于 $Pr \gtrsim 1$，速度测量表明，主体大尺度环流可以很好地近似为刚体旋转 [21],

$$\mathbf{u}(r, \theta, t) = r\Omega(t)\mathbf{e}_\theta, \tag{1}$$

其中 $\Omega(t)$ 是瞬时角速度。类似的刚体式大尺度环流已在直立圆柱形容器中观测到 [8, 22]。相应的主体温度场由偶极模态主导，其振幅随半径线性增长 [13, 14, 22],

$$T(r, \theta, t) = T_0(t) + \xi(t)\frac{r}{R}\cos[\theta - \phi(t)], \tag{2}$$

其中 $R = D/2$。我们将方程（2）拟合到来自 12 个侧壁热敏电阻的温度时间序列，其中偶极振幅 $\xi(t)$、取向 $\phi(t)$ 和方位角均匀分量 $T_0(t)$ 作为拟合参数。

图 2 展示了一个代表性一小时记录。在$t \lesssim 18$ 分钟内，系统保持统计稳态大尺度环流状态，该状态占测量时间的 90% 以上； $\xi(t)$ 和 $\phi(t)$ 围绕有限均值波动，并带有明显的振荡分量。非零的 ϕ打破了边界加热和冷却所施加的左右对称性，从而产生维持大尺度环流的净浮力力矩 [见式（6）]。在$18 \lesssim t \lesssim 20$ 分钟时，一次强烈的羽流喷发扰乱了大尺度环流 [13], , 导致 ξ 和 ϕ均崩溃，并恢复近似的左右对称性。随后，大尺度环流重新形成，并可呈现任一环流方向。在所示事件中，环流发生反转，同时符号发生变化

在 $\phi(t)$ 中。在整个过程中，$T_0(t)$ 围绕其均值波动，但没有可辨识的相干振荡，这支持了偶极型大尺度环流模态与近似各向同性湍流背景之间的区分。

我们接下来推导一个用于描述大尺度环流动力学的低维随机模型。在 Boussinesq 近似下，流动满足不可压缩 Navier–Stokes 方程和温度方程，

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} - \alpha g(T-T_0)\mathbf{e}_g, \quad (3)$$

$$\frac{\partial (T-T_0)}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla(T-T_0) = \kappa\nabla^2(T-T_0), \quad (4)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \quad (5)$$

其中 $\mathbf{e}_g$ 是向上的单位向量。由于 $T_0(t)$在方位角方向上均匀，将温度方程投影到偶极谐波上时，该项会消失。代入公式（1）和（2）并对整个腔体进行平均后，主体区域的拉普拉斯项被消除。因此，我们使用 Prandtl–Blasius型厚度估算$\lambda_u \sim (\nu/|\Omega|)^{1/2}$ 和 $\lambda_T \sim Pr^{-1/3}\lambda_u$，分别通过黏性边界层和热边界层描述黏性扩散与热扩散 [23]。由此得到三个无量纲方程 [其推导过程见补充材料（SM）]:

$$\dot{\tilde{\Omega}} = -a\,\tilde{\Omega}\sqrt{|\tilde{\Omega}|} + \tilde{\xi}\sin\phi + \eta(t), \quad (6)$$

$$\dot{\tilde{\xi}} = b\sqrt{|\tilde{\Omega}|}\left(c\cos\phi - \tilde{\xi}\right), \quad (7)$$

$$\dot{\phi} = \tilde{\Omega} - bc\sqrt{|\tilde{\Omega}|}\frac{\sin\phi}{\tilde{\xi}}, \quad (8)$$

其中 $\tilde{\Omega} = \Omega t_f$、$\tilde{\xi} = \xi/\Delta T$以及 $t_f = \sqrt{D/(\alpha g \Delta T)}$是自由落体时间。我们采用白噪声 $\eta(t)$作为未解析湍流强迫的最简有效表征，其中$\langle\eta(t)\eta(t')\rangle = 2W\delta(t-t')$，$W$ 是噪声强度，$\langle\cdots\rangle$ 表示时间平均值。在最低阶近似下，噪声仅被纳入动量方程，因为假设这些涨落通过浮力产生作用。在公式（6）–（8）中，正的无量纲参数为

$$a = \left(6 + \frac{3}{\Gamma}\right) Ra^{-1/4}Pr^{1/4}, \quad (9)$$

$$b = 6NRa^{-1/4}Pr^{-5/12}, \quad (10)$$

$$c = \frac{\sqrt{3}}{\pi N}. \quad (11)$$

此处 $N \geq 1$ 对热羽流导致的偶极温度模态的额外弛豫进行参数化，其中 N =1对应于仅考虑边界层的估计。动量公式（6）类似于早期大尺度环流模型中的边界层阻力–浮力平衡 [14], ，而公式（7）和（8）则动态闭合了温度振幅及其方向。

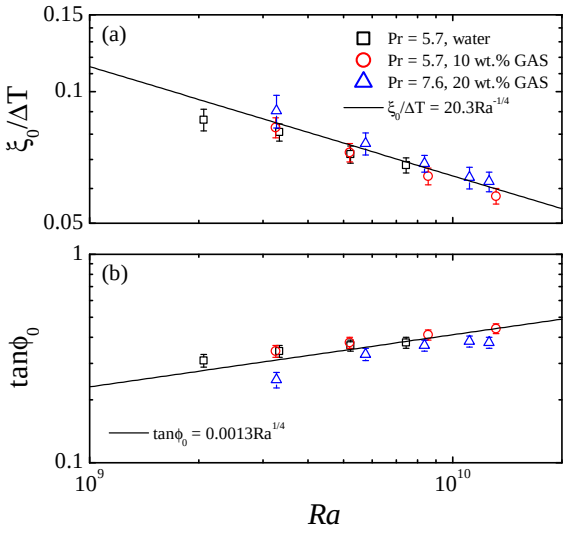

图 3. 三种工作流体在统计稳态大尺度环流区间内的时间平均偶极振幅 $\langle\xi\rangle/\Delta T$ (a) 和取向 $\tan\phi_0$ (b)。实线分别表示测得的幂律趋势 $Ra^{-1/4}$ 和 $Ra^{1/4}$。

公式（6）–（8）的确定性部分允许存在一个无大尺度环流平衡态的连续统，即（Ω, ξ, ϕ）=（0, ξ^*, 0），其中 $\xi^* > 0$。尽管在$\Omega = 0$处向量场并非解析，最低阶扰动分析仍可得到一个不稳定分支 $\propto \exp(\sqrt{\xi^*}\,t)$。因此，无大尺度环流状态是不稳定的，大尺度环流通过自发对称性破缺产生，这与实验观测到的大尺度环流在崩溃后重建的现象一致。

另外还有两个对称相关平衡态 $\tilde{}$（$\pm\Omega_0$, ξ_0, $\pm\phi_0$），它们对应于旋转方向相反的有限大尺度环流。当 Ra 渐近趋于无穷大时，不动点关系为

$$\tilde{\Omega}_0 \simeq \sqrt{bc/a} \simeq 0.31Pr^{-1/3}, \quad (12)$$

$$\tilde{\xi}_0 \simeq a^{1/4}(bc)^{3/4} \simeq 5.93Ra^{-1/4}Pr^{-1/4}, \quad (13)$$

$$\tan\phi_0 \simeq \left(\frac{c}{ab^3}\right)^{1/4} \simeq \frac{0.093}{N}Ra^{1/4}Pr^{1/4}. \quad (14)$$

$\tilde{}$相应的雷诺数 $Re = \Omega_0 RD/(t_f\nu)$具有如下渐近标度

$$Re \simeq 0.16Ra^{1/2}Pr^{-5/6}, \quad (15)$$

这与测得的 Ra 平均环流速度 [17] 依赖关系以及 Grossmann–Lohse标度理论中由边界层主导的分支 [24] 吻合良好。如图5所示，测得的 Ra $\langle\xi\rangle/\Delta T$和$\tan\phi_0$ 的指数与公式（13）和（14）一致。前因子仅在半定量意义上吻合：对于 $Pr = 7.6$，测得的振幅约为领先阶预测值的五倍，而对$\tan\phi_0$ 进行拟合得到 $N \simeq 118.7$，远高于根据模态阻尼（图5）推断出的 $N \simeq 9.8$。这些差异可能反映了简化输运

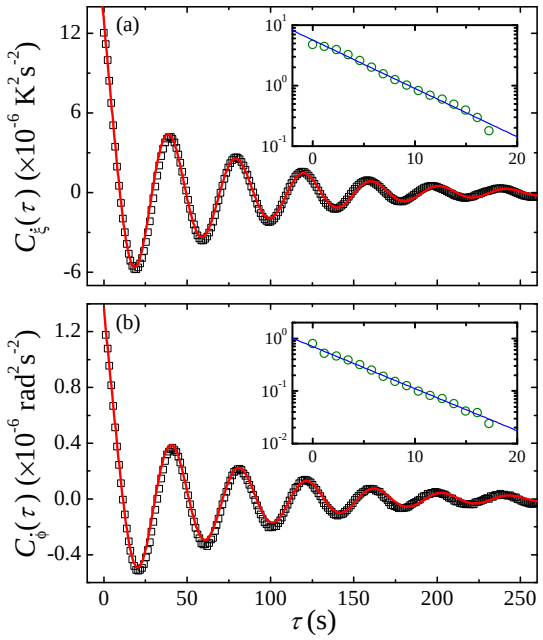

图4. 在大尺度环流处于统计稳态的时间段内，测得水在 $Ra = 7.4\times10^9$ 和 $Pr = 5.7$ 下的 $\dot{\xi}(t)$（a）和 $\dot{\phi}(t)$（b）的自相关函数。红色曲线是采用 $\gamma_1 = 0.184\,\mathrm{s}^{-1}$、$\gamma_2 = 0.0135\,\mathrm{s}^{-1}$ 和 $\omega_0 = 0.155\,\mathrm{s}^{-1}$ 拟合方程（19）得到的结果。插图显示减去拟合的振荡分量后的残差，其中蓝色曲线表示拟合得到的纯指数分量。

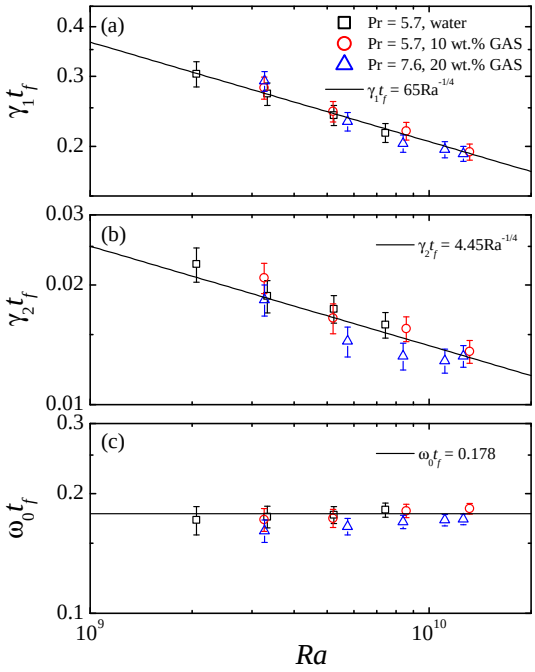

图5。利用三种工作流体的自相关函数获得的归一化衰减率 $\gamma_1 t_f$ (a) 和$\gamma_2 t_f$ (b)，以及振荡频率 $\omega_0 t_f$ (c)。实线为幂律拟合，所用指数由方程（16）以及方程（18）的实部和虚部预测，其中 $N \simeq 9.8$。

闭合处理，尤其是省略了边界层厚度估计中的数量级为一的前因子，并将分段热边界强迫截断为其第一个方位角谐波。可用的 Pr 范围过窄，无法分辨所预测的 Pr 依赖关系。

接下来，我们分析有限大尺度环流态附近的线性扰动。在实验参数范围内，雅可比矩阵有一个实特征值和一对共轭复特征值；当 Ra足够大时，它们

$$\sigma_1 \simeq -2a\sqrt{\tilde{\Omega}_0} \simeq -38.1 Ra^{-1/4} Pr^{1/12}, \qquad (16)$$

$$\sigma_{2,3} = \sigma_r \pm i\sigma_i \simeq \left(\frac{a}{4} - b\right)\sqrt{\tilde{\Omega}_0} \pm i\tilde{\Omega}_0. \qquad (17)$$

因此，当 $b > a/4$时，有限大尺度环流态是稳定的。实特征模态以非振荡方式弛豫，而复特征值对描述阻尼振荡，其主导频率为无量纲大尺度环流周转率。在 $Pr = 7.6$时，方程（17）变为

$$\sigma_r \simeq (5.65 - 1.03N)Ra^{-1/4}, \quad \sigma_i \simeq 0.158. \qquad (18)$$

对于线性随机系统，固定点附近的相关性具有相同的特征模态。因此，我们考察 ξ 和 ϕ的自相关函数（ACFs），$C_\xi(\tau) = \langle\xi(t+\tau)\xi(t)\rangle$和 $C_\phi(\tau) = \langle\phi(t+\tau)\phi(t)\rangle$，它们抑制了缓慢的大尺度环流漂移，同时保留了局部衰减率和振荡频率。图 4 显示，二者都能很好地由.....描述

$$C_{\dot{\xi},\dot{\phi}}(\tau) = A_1 e^{-\gamma_1\tau} + A_2 e^{-\gamma_2\tau}\cos(\omega_0\tau + \varphi_0). \qquad (19)$$

两个自相关函数需要不同的振幅和相位，但在实验不确定度范围内，它们具有相同的 γ_1、γ_2 和 ω_0；如果二者投影到相同的三个特征模态上，这正是预期结果。

图5显示，$\gamma_1 t_f$ 和 $\gamma_2 t_f$ 大致按照 $Ra^{-1/4}$标度变化，而 $\omega_0 t_f$ 几乎与 Ra无关，这与方程（16）和（18）中的主导指数一致。对 $\gamma_2 t_f$ 进行拟合得到 $N \simeq 9.8$，表明羽流增强了偶极温度模态的弛豫；而 $\gamma_1 t_f$ 的拟合前因子是在 $Pr = 7.6$处模型预测值的1.4倍。前因子差异与上文讨论的相同简化边界层和热模态近似相一致。因此，稳健的结果是所预测的模态结构和标度关系：一个快速弛豫模态，以及一对弱阻尼振荡模态，其频率由大尺度环流周转率决定。对它们的直接观测支持了该模型的核心物理图像；据我们所知，这也提供了首个预测大尺度环流稳定性特征模态的最简框架，并能将其衰减率和振荡频率与实验结果进行定量检验。

振荡对背后的物理反馈可由公式（6）–（8）清楚看出。大尺度环流的平流使热偶极子偏离外加加热和冷却的对称轴

；由此产生的横向温度分量提供维持大尺度环流所需的浮力力矩。反过来，热弛豫会驱使偶极子回到外加对称轴。对这一耦合的力矩–弛豫循环进行线性化，会产生复特征值。由于其实部为负，实验中持续的振荡需要湍流涨落不断激发，因此表现为展宽的准周期谱峰，而非自持极限环。同一组随机方程也为停滞和反转提供了一种途径：足够大的涨落可以使轨迹从有限大尺度环流吸引子进入不稳定无大尺度环流集合附近，之后任一大尺度环流分支都可能重新建立。这一动力学图景与实验中观测到的羽流触发崩溃相符 [13], ，而关于转变速率的定量稀有事件理论超出了当前闭合处理的范围。

总之，将布西内斯动量方程和温度方程投影到占主导地位的环流模态和偶极热模态上，可得到一个用于湍流瑞利-贝纳德对流的三变量随机模型。该模型产生两种对称相关环流状态，并预测每种状态附近存在一个纯弛豫模态和一对阻尼振荡模态，其频率由周转率决定。在薄盘容器中的测量解析出了这一模态结构，并再现了其主要Ra标度关系。因此，该框架在统一的简化描述中区分了大尺度环流动力学的三个方面——平均态选择、内禀线性模态和涨落驱动的转变。

与本研究相关的数字数据可从普林斯顿大学的 DataSpace 获取 [25]。

本研究获得了美国能源部资助（合同编号：DE-AC02-09CH11466）。

* ywang3@pppl.gov[1] H. Stommel，具有两种稳定流动状态的热盐对流，Tellus **13**，224（1961）。[2] W. Weijer、W. Cheng、S. S. Drijfhout、A. V. Fedorov、A. Hu、L. C. Jackson、W. Liu、E. L. McDonagh、J. V. Mecking 和 J. Zhang，大西洋经向翻转环流的稳定性：综述与综合，《地球物理研究杂志：海洋》**124**，5336（2019）。[3] B. L¨optien、L. Gizon、A. C. Birch、J. Schou、B. Proxauf、T. L. Duvall Jr、R. S. Bogart 和 U. R. Christensen，全球尺度赤道罗斯贝波是太阳内部动力学的重要组成部分，《自然·天文学》**2**，568（2018）。[4] Y. Bekki、R. H. Cameron 和 L. Gizon，惯性频率范围内太阳振荡理论：非线性旋转对流模拟中的赤道模态振幅，《天文学与天体物理学》**666**，A135（2022）。[5] G. Ahlers、S. Grossmann 和 D. Lohse，热传递以及湍流瑞利–贝纳德对流中的大尺度动力学，《现代物理学评论》81, 503 (2009)。[6] J. Niemela、L. Skrbek、K. Sreenivasan 和 R. Donnelly，受限热对流中的风，《流体力学杂志》449, 169 (2001)。[7] D. Funfschilling 和 G. Ahlers，圆柱形瑞利–贝纳德单元中的羽流运动与大尺度环流，《物理评论快报》92, 194502 (2004)。[8] C. Sun、K.-Q. Xia 和 P. Tong，圆柱形单元中湍流热对流的三维流动结构与动力学，《物理评论E—统计、非线性与软物质物理》72, 026302 (2005)。[9] E. Brown、A. Nikolaenko 和 G. Ahlers，湍流瑞利–贝纳德对流中大尺度环流的重新定向，《物理评论快报》95, 084503 (2005)。[10] F. F. Araujo、S. Grossmann 和 D. Lohse，湍流瑞利–贝纳德对流中的风反转，《物理评论快报》95, 084502 (2005)。[11] E. Brown 和 G. Ahlers，湍流瑞利–贝纳德对流中大尺度环流振荡的起源，《流体力学杂志》638, 383 (2009)。[12] B. Podvin 和 A. Sergent，矩形腔体中湍流瑞利–贝纳德对流的本征正交分解研究，《流体物理学》24 (2012)。[13] Y. Wang、P.-Y. Lai、H. Song 和 P. Tong，湍流热对流中大尺度流动反转的机制，《科学进展》4, eaat7480 (2018)。[14] E. Brown 和 G. Ahlers，湍流瑞利–贝纳德对流的大尺度环流模型，《物理评论快报》98, 134501 (2007)。[15] H.-D. Xi、S.-Q. Zhou、Q. Zhou、T.-S. Chan 和 K.-Q. Xia，湍流热对流中温度振荡的起源，《物理评论快报》102, 044503 (2009)。[16] C. Resagk、R. du Puits、A. Thess、F. V. Dolzhansky、S. Grossmann、F. Fontenele Araujo 和 D. Lohse，湍流热对流中大尺度风的振荡，《流体物理学》18 (2006)。[17] H. Song、E. Villermaux 和 P. Tong，薄竖直圆盘中湍流瑞利–贝纳德对流的相干振荡，《物理评论快报》106, 184504 (2011)。[18] L. Li、Y. Tian、Z.-Y. Gao 和 S.-D. Huang，重新审视湍流瑞利–贝纳德对流中大尺度环流的振荡：线性放大机制视角，《流体力学杂志》1035, A26 (2026)。[19] Y. Wang、X. He 和 P. Tong，边界层涨落及其对湍流瑞利–贝纳德对流平均温度剖面与方差温度剖面的影响，《物理评论流体》1, 082301 (2016)。[20] K. Sugiyama、R. Ni、R. J. Stevens、T. S. Chan、S.-Q. Zhou、H.-D. Xi、C. Sun、S. Grossmann、K.-Q. Xia 和 D. Lohse，热驱动湍流中的流动反转，《物理评论快报》105, 034503 (2010)。[21] H. Song、E. Brown、R. Hawkins 和 P. Tong，水平圆柱中湍流热对流大尺度环流的动力学，《流体力学杂志》740, 136 2014( )。[22] X.-L. Qiu 和 P. Tong，湍流热对流中的大尺度速度结构，《物理评论E》64, 036304 2001( )。[23] O. Shishkina、R. J. Stevens、S. Grossmann 和 D. Lohse，湍流热对流中的边界层结构

及其对所需数值分辨率的影响，《新物理学杂志》**12**，075022 (2010)。[24] S. Grossmann 和 D. Lohse，热对流中的标度：一种统一理论，《流体力学杂志》**407**，27（2000）。[25] http://arks.princeton.edu/ark:/88435/dsp01x920g025r。

湍流对流中大尺度环流的稳定本征模态：补充材料

Yin Wang[1]、* Pik-Yin Lai[2]，和 Penger Tong[3]† [1] *Princeton Plasma Physics Laboratory, Princeton University, Princeton, New Jersey 08543, USA* [2] *Department of Physics and Center for Complex Systems, National Central University Chungli Taiwan 320 、 、 、 R.O.C.* [3] *Department of Physics, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong*（日期：2026年11月24日）

大尺度环流动力学模型的推导

我们从不可压缩流体的 Boussinesq 纳维–斯托克斯方程和温度方程出发，

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \alpha g(T-T_0)\mathbf{e}_g, \tag{1}$$

$$\frac{\partial (T-T_0)}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla(T-T_0) = \kappa\nabla^2(T-T_0), \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{3}$$

其中 $\mathbf{e}_g$ 是竖直向上的单位向量。由于 $T_0(t)$ 是方位角均匀温度分量，将温度方程投影到下文所讨论的偶极模态时，其时间导数项会消失。鉴于准二维（2D）几何结构，我们使用正文图 1 中定义的极坐标 $(r,\ \theta)$。将主体大尺度环流近似为刚体旋转，

$$\mathbf{u} = \Omega(t)\, r\, \mathbf{e}_\theta, \tag{4}$$

它满足方程 (3)。将相应的主体温度场近似为其第一方位角谐波，

$$T(r,\theta,t) = T_0 + \xi(t)\frac{r}{R}\cos[\theta-\phi(t)]\,, \tag{5}$$

其中 $R = D/2$ 是容器半径。对于这些主体场，

$$\nabla^2\mathbf{u} = 0, \qquad \nabla^2(T-T_0) = 0, \tag{6}$$

因此，黏性和热扩散通过边界层（BLs）发挥作用。

动量方程

将方程 (1) 投影到 方位角方向，并在圆盘面积上取平均，对于非定常项可得 ，

$$\left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial t} \right\rangle_A = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R \int_0^{2\pi} \dot{\Omega} r\, r\, d\theta\, dr = \frac{2R}{3}\dot{\Omega}, \tag{7}$$

其中 $\langle\cdots\rangle_A$ 表示面积平均。对于刚体旋转，非线性平流项的方位角分量为零，

$$\big[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\big]_\theta = u_r\partial_r u_\theta + \frac{u_\theta}{r}\partial_\theta u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} = 0, \tag{8}$$

方位角平均压力梯度项也为零，

$$\left\langle \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} \right\rangle_A = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R dr \int_0^{2\pi} \frac{\partial p}{\partial\theta}\, d\theta = 0. \tag{9}$$

我们使用 Prandtl–Blasius边界层厚度 [1] 来模拟黏性扩散

$$\lambda_u \sim \sqrt{\frac{\nu}{|\Omega|}} \tag{10}$$

其中 $\lambda_u \ll R,\ L,\ L$ 是单元厚度。在黏性边界层内，方位角黏性扩散近似为 $\nu[\nabla^2\mathbf{u}]_\theta \simeq -\nu\Omega R/\lambda_u^2$。考虑圆周边缘以及前后端壁处的黏性边界层后，黏性贡献总量为

$$\nu\left\langle\left[\nabla^2\mathbf{u}\right]_\theta\right\rangle_V \simeq -\nu\frac{\Omega R}{\lambda_u^2}\,\frac{2\pi R^2\lambda_u + 2\pi RL\lambda_u}{\pi R^2 L} = -\left(2+\frac{1}{\Gamma}\right)\sqrt{\nu}\Omega\sqrt{|\Omega|}, \tag{11}$$

其中，$\Gamma = L/D$ 是对流单元的纵横比。在式（11）中，$1/\Gamma$ 项表示前后端壁边界层带来的额外黏性扩散；其余各项均由二维极坐标描述涵盖。

方位角浮力贡献为

$$\alpha g\left\langle\left[(T-T_0)\mathbf{e}_g\right]_\theta\right\rangle_A = \frac{\alpha g}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^{2\pi}\xi\frac{r}{R}\cos(\theta-\phi)\sin\theta\, r d\theta dr = \frac{\alpha g}{3}\xi\sin\phi. \tag{12}$$

将式（7）–（12）合并，得到

$$\dot{\Omega} = -\left(3+\frac{3}{2\Gamma}\right)\frac{\sqrt{\nu}}{R}\Omega\sqrt{|\Omega|} + \frac{\alpha g}{2R}\,\xi\sin\phi. \tag{13}$$

式（13）的推导采用了与参考文献 [2] 中大尺度环流振幅方程相同的方法。

温度方程

接下来，我们将温度方程投影到偶极模态上。对非定常项和平流项进行径向平均，得到

$$\left\langle\frac{\partial(T-T_0)}{\partial t}\right\rangle_r = \frac{2}{R^2}\int_0^R\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial t}\Big[\xi(t)\cos[\theta-\phi(t)]\Big]\,rdr = \frac{2}{3}\left(\dot{\xi}\cos\phi - \xi\dot{\phi}\sin\phi\right)\cos\theta + \frac{2}{3}\left(\dot{\xi}\sin\phi + \xi\dot{\phi}\cos\phi\right)\sin\theta, \tag{14}$$

$$\langle\mathbf{u}\cdot\nabla(T-T_0)\rangle_r = \frac{2}{R^2}\int_0^R\Omega\frac{\partial(T-T_0)}{\partial\theta}\,r\,dr = \frac{2\Omega\xi}{3}\left[\sin\phi\cos\theta - \cos\phi\sin\theta\right], \tag{15}$$

其中 $\langle f\rangle_r = (2/R^2)\ \int_0^R f\,r dr$。热扩散采用相应的层流边界层估算值 [进行建模 1],

$$\lambda_T \simeq Pr^{-1/3}\sqrt{\frac{\nu}{|\Omega|}}. \tag{16}$$

施加的恒温加热和冷却边界剖面的第一方位角谐波为

$$\frac{\sqrt{3}\Delta T}{\pi}\cos\theta, \tag{17}$$

其中，偶极系数 $\sqrt{3}\Delta T/\pi$ 由恒温边界加热与冷却剖面的第一傅里叶投影得到，

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(T_{\rm wall}(\theta)-T_0)\cos\theta\,d\theta = \frac{\sqrt{3}\Delta T}{\pi}, \tag{18}$$

其中，冷热导热弧段各自跨越 $2\pi/3$。因此，在热边界层内，径向平均的扩散项近似为

$$\kappa\left\langle\nabla^2(T-T_0)\right\rangle_r \simeq \frac{2\kappa}{R\lambda_T}\left[\frac{\sqrt{3}\Delta T}{\pi}\cos\theta - N\xi\cos(\theta-\phi)\right] = \frac{2\sqrt{\kappa}}{R}Pr^{-1/6}\sqrt{|\Omega|}\left[\frac{\sqrt{3}\Delta T}{\pi}\cos\theta - N\xi\cos(\theta-\phi)\right]. \tag{19}$$

这里的 $N \geq 1$ 是一个唯象增强因子，用于计入羽流介导输运对体相偶极温度模态的额外弛豫。壁面驱动本身仍由施加的边界温度剖面决定。

将式 (14)、(15) 和 (19) 合并，并收集 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的系数，得到

$$\dot{\xi}\cos\phi - \xi\dot{\phi}\sin\phi + \Omega\xi\sin\phi + \frac{3\sqrt{\kappa}}{R}Pr^{-1/6}\sqrt{|\Omega|}\left(N\xi\cos\phi - \frac{\sqrt{3}\Delta T}{\pi}\right) = 0, \tag{20}$$

$$\dot{\xi}\sin\phi + \xi\dot{\phi}\cos\phi - \Omega\xi\cos\phi + \frac{3\sqrt{\kappa}}{R}Pr^{-1/6}\sqrt{|\Omega|}N\xi\sin\phi = 0. \tag{21}$$

由于 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 线性独立，方程 (20) 和 (21) 必须分别成立。解这两个方程，得到关于 ξ 和 ϕ 的

$$\dot{\xi} = \frac{3\sqrt{\kappa}}{R}Pr^{-1/6}\sqrt{|\Omega|}\left[\frac{\sqrt{3}\Delta T}{\pi}\cos\phi - N\xi\right], \tag{22}$$

$$\dot{\phi} = \Omega - \frac{3\sqrt{3\kappa}\Delta T}{\pi R}Pr^{-1/6}\sqrt{|\Omega|}\frac{\sin\phi}{\xi}. \tag{23}$$

方程 (13)、(22) 和 (23) 构成一个封闭的确定性模型，用于描述大尺度环流角速度、热偶极振幅和取向的耦合演化。

无量纲形式

采用自由落体时间 $t_f = \sqrt{2R/\alpha g\Delta T}$，定义 $\tilde{\Omega} = \Omega t_f$、$\tilde{\xi} = \xi/\Delta T$ 和 $\tilde{t} = t/t_f$。为简洁起见，将 $\tilde{t}$ 重新记为 t，方程 (13)、(22) 和 (23) 可改写为无量纲形式，其中

$$\dot{\tilde{\Omega}} = -a\,\tilde{\Omega}\sqrt{|\tilde{\Omega}|} + \tilde{\xi}\sin\phi, \tag{24}$$

$$\dot{\tilde{\xi}} = b\sqrt{|\tilde{\Omega}|}\left(c\cos\phi - \tilde{\xi}\right), \tag{25}$$

$$\dot{\phi} = \tilde{\Omega} - bc\sqrt{|\tilde{\Omega}|}\frac{\sin\phi}{\tilde{\xi}}, \tag{26}$$

with

$$a = \left(6 + \frac{3}{\Gamma}\right)Ra^{-1/4}Pr^{1/4}, \quad b = 6NRa^{-1/4}Pr^{-5/12}, \quad c = \frac{\sqrt{3}}{\pi N} \tag{27}$$

在方程 (24) 中加入白噪声强迫 $\eta(t)$，其中 $\langle\eta(t)\eta(t')\rangle = 2W\delta(t-t')$，即可得到正文中的方程 (6)–(11)。

线性稳定性分析

引入变量 $X = \xi\cos\phi$ 和 $Y = \xi\sin\phi$，方程 (24)–(26) 可改写为

$$\dot{\tilde{\Omega}} = f_1(\tilde{\Omega}, X, Y) = -a\tilde{\Omega}\sqrt{|\tilde{\Omega}|} + Y, \tag{28}$$

$$\dot{X} = f_2(\tilde{\Omega}, X, Y) = -\tilde{\Omega}Y + b\sqrt{|\tilde{\Omega}|}(c - X), \tag{29}$$

$$\dot{Y} = f_3(\tilde{\Omega}, X, Y) = \tilde{\Omega}X - b\sqrt{|\tilde{\Omega}|}Y. \tag{30}$$

这种表示方式避免了当 ξ 趋近于零时数值上有问题的比值 $\sin\phi/\xi$。对于 $\Omega \neq 0$，方程 (28)–(30) 的雅可比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial\tilde{\Omega}} & \frac{\partial f_1}{\partial X} & \frac{\partial f_1}{\partial Y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial\tilde{\Omega}} & \frac{\partial f_2}{\partial X} & \frac{\partial f_2}{\partial Y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial\tilde{\Omega}} & \frac{\partial f_3}{\partial X} & \frac{\partial f_3}{\partial Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}a\sqrt{|\tilde{\Omega}|} & 0 & 1 \\ -Y + \frac{1}{2}b(c-X)\,\mathrm{sgn}(\tilde{\Omega})/\sqrt{|\tilde{\Omega}|} & -b\sqrt{|\tilde{\Omega}|} & -\tilde{\Omega} \\ X - \frac{1}{2}bY\,\mathrm{sgn}(\tilde{\Omega})/\sqrt{|\tilde{\Omega}|} & \tilde{\Omega} & -b\sqrt{|\tilde{\Omega}|} \end{pmatrix} \tag{31}$$

其中 $\mathrm{sgn}(\ldots)$ 为符号函数。

无LSC平衡集合

方程 (28)–(30) 存在一系列无LSC平衡态,

$$(\tilde{\Omega}, X, Y) = (0, X^*, 0). \tag{32}$$

我们关注 $X^* > 0$，它对应于与施加的第一谐波对齐的热偶极子。由于向量˜场在 $\Omega = 0$ 处不是解析的，因此在此处无法定义传统的三维雅可比矩阵线性化。不过，可以直接得到主导横向动力学。我们引入如下形式的无穷小扰动

$$(\tilde{\Omega}, X, Y) = \left(\tilde{\Omega}', X^*, Y'\right), \tag{33}$$

with

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Omega}' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}, \tag{34}$$

其中 ε_1 和 ε_2 是渐近阶相同的无穷小振幅。保留主导阶后，方程 (28) 和 (30) 可化简为

$$\dot{\tilde{\Omega}}' = Y', \qquad \dot{Y}' = X^* \tilde{\Omega}'. \tag{35}$$

代入方程 (34) 得

$$-i\omega\varepsilon_1 = \varepsilon_2, \qquad -i\omega\varepsilon_2 = X^* \varepsilon_1. \tag{36}$$

消去 ε_2 可得

$$\omega^2 = -X^*, \tag{37}$$

因此

$$\omega = \pm i\sqrt{X^*}. \tag{38}$$

按照约定 $e^{-i\omega t}$，根 $\omega = +i\sqrt{X^*}$ 对应一个指数增长扰动,

$$\tilde{\Omega}', Y' \propto e^{\sqrt{X^*}t}. \tag{39}$$

因此，每个满足 $X^* > 0$ 的无LSC不动点都横向不稳定，其主导增长率为 $\sqrt{X^*}$。

X 中的扰动由方程（29）同时产生。设 $X = X^* + X'$，其主导演化为

$$\dot{X}' \simeq b(c - X^*)\sqrt{|\tilde{\Omega}'|}. \tag{40}$$

尽管这一项是非解析的，且按 $|\tilde{\Omega}'|^{1/2}$标度， X' 仅通过乘积 $\tilde{\Omega}' X'$ 进入 Y 方程，因此不会改变主导横向增长率 $\sqrt{X^*}$。

有限LSC不动点

方程（28）–（30）还存在一对与对称性相关的有限LSC不动点,

$$(\tilde{\Omega}, X, Y) = (\pm\tilde{\Omega}_0, X_0, \pm Y_0), \qquad \tilde{\Omega}, X_0, Y_0 > 0. \tag{41}$$

正分支对应一个LSC方向，而负分支对应方向相反的大尺度环流。

对于正分支，不动点条件为

$$Y_0 = a\tilde{\Omega}_0^{3/2}, \qquad X_0 = ab\tilde{\Omega}_0, \tag{42}$$

and

$$\tilde{\Omega}_0^2 + b^2\tilde{\Omega}_0 - \frac{bc}{a} = 0. \tag{43}$$

具有物理意义的正根为

$$\tilde{\Omega}_0 = \frac{\sqrt{b^4 + 4bc/a} - b^2}{2}. \tag{44}$$

因此，热偶极振幅和取向为

$$\tilde{\xi}_0 = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} = \sqrt{abc\tilde{\Omega}_0}, \tag{45}$$

$$\tan\phi_0 = \frac{Y_0}{X_0} = \frac{\sqrt{\tilde{\Omega}_0}}{b}. \tag{46}$$

~负环流态具有相同的 ξ_0 ，而 ϕ_0相反。
对于固定的 Pr和 N， a， $b \propto Ra^{-1/4}$，而 bc/a与 Ra无关。因此，当 $Ra \to \infty$时，

$$\tilde{\Omega}_0 = \sqrt{\frac{bc}{a}} + O(Ra^{-1/2}). \tag{47}$$

对于 $\Gamma = 0.106$，由此可得

$$\tilde{\Omega}_0 \simeq 0.31Pr^{-1/3}, \tag{48}$$

$$\tilde{\xi}_0 \simeq 5.93Ra^{-1/4}Pr^{-1/4}. \tag{49}$$

$$\tan\phi_0 \simeq \frac{0.093}{N}(RaPr)^{1/4}, \tag{50}$$

这些就是正文方程（12）–（14）中给出的渐近定点标度。

有限 LSC 态附近的特征模态

~ ~两个有限 LSC 态通过 $(\Omega\ X, Y) \to (-\Omega\ X, -Y)$ 相互关联，因此具有相同的特征值。在正固定点处对式 (31) 求值，并利用式 (42)，可得

$$J_0 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}a\sqrt{\tilde{\Omega}_0} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2}a\tilde{\Omega}_0^{3/2} & -b\sqrt{\tilde{\Omega}_0} & -\tilde{\Omega}_0 \\ \frac{1}{2}ab\tilde{\Omega}_0 & \tilde{\Omega}_0 & -b\sqrt{\tilde{\Omega}_0} \end{pmatrix}. \tag{51}$$

特征值 σ 由 $\det(\sigma I - J_0) = 0$ 决定，得到

$$\sigma^3 + \mathcal{A}\sigma^2 + \mathcal{B}\sigma + \mathcal{C} = 0, \tag{52}$$

其中

$$\mathcal{A} = \left(\frac{3}{2}a + 2b\right)\sqrt{\tilde{\Omega}_0}, \tag{53}$$

$$\mathcal{B} = \tilde{\Omega}_0^2 + \left(\frac{5}{2}ab + b^2\right)\tilde{\Omega}_0, \tag{54}$$

$$\mathcal{C} = a\tilde{\Omega}_0^{3/2}\left(2\tilde{\Omega}_0 + b^2\right). \tag{55}$$

引入降次三次方程系数

$$P = \mathcal{B} - \frac{\mathcal{A}^2}{3} = \tilde{\Omega}_0^2 - \frac{\tilde{\Omega}_0}{12}\left(9a^2 - 6ab + 4b^2\right), \tag{56}$$

$$Q = \mathcal{C} - \frac{\mathcal{A}\mathcal{B}}{3} + \frac{2\mathcal{A}^3}{27} = \tilde{\Omega}_0^{5/2}\left(\frac{3}{2}a - \frac{2}{3}b\right) + \tilde{\Omega}_0^{3/2}\left(\frac{a^3}{4} - \frac{a^2 b}{4} + \frac{ab^2}{6} - \frac{2b^3}{27}\right), \tag{57}$$

以及判别式,

$$S = \left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3. \tag{58}$$

在实验参 数范围内， $S > 0$，得到一个实特征值和一对共轭复数对 :

$$\sigma_1 = -\frac{\mathcal{A}}{3} + \left(-\frac{Q}{2} + \sqrt{S}\right)^{1/3} + \left(-\frac{Q}{2} - \sqrt{S}\right)^{1/3}, \tag{59}$$

and

$$\sigma_{2,3} = -\frac{\mathcal{A}}{3} - \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{Q}{2} + \sqrt{S}\right)^{1/3} + \left(-\frac{Q}{2} - \sqrt{S}\right)^{1/3}\right] \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(-\frac{Q}{2} + \sqrt{S}\right)^{1/3} - \left(-\frac{Q}{2} - \sqrt{S}\right)^{1/3}\right], \tag{60}$$

其中立方根取实数值。

对于固定的 Pr， a 和 b 均按 $Ra^{-1/4}$缩放，而 $\tilde{}\Omega_0$ 则趋近于一个与 Ra无关的值。因此，在大Ra 极限下，有

$$P = \tilde{\Omega}_0^2 + \mathcal{O}(Ra^{-1/2}), \tag{61}$$

$$Q = \tilde{\Omega}_0^{5/2}\left(\frac{3}{2}a - \frac{2}{3}b\right) + \mathcal{O}(Ra^{-3/4}). \tag{62}$$

由此可得

$$\sqrt{S} = \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3} \simeq \sqrt{\frac{\tilde{\Omega}_0^6}{27} + \mathcal{O}(Ra^{-1/2})} \simeq \frac{\tilde{\Omega}_0^3}{3\sqrt{3}} + \mathcal{O}(Ra^{-1/2}). \tag{63}$$

在 $Ra^{-1/4}$的一阶近似下,

$$\left(-\frac{Q}{2} + \sqrt{S}\right)^{1/3} \simeq S^{1/6} - \frac{S^{-1/3}}{6}Q + \mathcal{O}(Q^2) \simeq \frac{\tilde{\Omega}_0}{\sqrt{3}} - \sqrt{\tilde{\Omega}_0}\left(\frac{3}{4}a - \frac{1}{3}b\right) + \mathcal{O}(Ra^{-1/2}), \tag{64}$$

$$\left(-\frac{Q}{2} - \sqrt{S}\right)^{1/3} \simeq -S^{1/6} - \frac{S^{-1/3}}{6}Q + \mathcal{O}(Q^2) \simeq -\frac{\tilde{\Omega}_0}{\sqrt{3}} - \sqrt{\tilde{\Omega}_0}\left(\frac{3}{4}a - \frac{1}{3}b\right) + \mathcal{O}(Ra^{-1/2}). \tag{65}$$

代入方程（59）和（60）得

$$\lim_{Ra\to\infty} \sigma_1 = -2a\sqrt{\tilde{\Omega}_0} \simeq -38.1 Ra^{-1/4} Pr^{1/12}, \tag{66}$$

$$\lim_{Ra\to\infty} \sigma_{2,3} = \sigma_r + i\sigma_i = \left(\frac{a}{4} - b\right)\sqrt{\tilde{\Omega}_0} \pm i\tilde{\Omega}_0. \tag{67}$$

T这些是正文方程（16）和（17）中给出的特征值渐近标度 t.

* ywang3@pppl.gov[1] O. Shishkina、R. J. Stevens、S. Grossmann 和 D. Lohse，《湍流热对流中的边界层结构及其对所需数值分辨率的影响》，《新物理学杂志》**12**，075022（2010）。[2] E. Brown 和 G. Ahlers，《湍流瑞利-贝纳德对流的大尺度环流模型》，《物理评论快报》**98**，134501（2007）。