arXiv:2611.29644v1 [math.DG] 22 Nov 2026

SU(2) 联络在有限图上的逆谱与威尔逊迹

HAOXUAN CHENG

Abstract. 我们通过具有独立可变正边权的完整拉普拉斯谱，研究已知有限标记简单图上的一个固定 SUSU(2) 联络。这一族谱等价于所有顶点简单环迹。对于连通图，它能够精确确定每个顶点规范等价类，适用于树以及具有单个循环块的图，其中该循环块为一个圈、一个 θ图，或一个简单三顶点连通三次图的细分。对于任意图，我们描述完整的纤维，包括退化联络，并给出在受限边控制下实现一般唯一性和威尔逊可观测性的判据。

1. 引言

设 $G = (V,\ E)$ 为一个已知的有限连通标记简单图；因此不存在自环或平行边，并且所有顶点和边的标签均已固定。群 SUSU(2) 由行列式为一的酉 2×2 矩阵组成。一个联络 U 将矩阵 $U_{yx} \in SU$SU(2) 赋予向量在 $\mathbb{C}^2$ 中从 x 传输至 y的过程，并规定 $U_{xy} = U_{yx}^{-1}$ 用于反向边。为每条边选择一个定向后，联络空间可与 SUSU(2)^E 等同。沿着路径 $x_0,\ \ldots\ldots,\ x_k$，传输为 $U_{x_k x_{k-1}} \cdots U_{x_1 x_0}$：第一条经过的边先作用，并且在右侧作用。对于闭合路径C，该乘积就是其全纯，记作 Hol$_U(C)$。

顶点规范变换是在每个顶点处选取 $g_x \in SU(2)$，其作用方式为 $U_{yx} \mapsto g_y U_{yx} g_x^{-1}$。如果某一种这样的选取能同时变换两个联络的所有边矩阵，则称这两个联络规范等价。我们旨在恢复这一等价类，称为顶点规范等价类。这也是单位四元数增益图模型，其中顶点规范变换称为切换 [4, 5]。 [6]讨论了四元数谱表示及余谱增益图的构造。

对于正实边权 $w = (w_e)_{e\in E}$，记 w_{xy} 为 $\{x, y\}$的权重。取顶点测度为一时，联络拉普拉斯算子作用于场 $f : V \to \mathbb{C}^2$，其形式为

$$(L_w(U)f)(x) = \sum_{y:\{x,y\}\in E} w_{xy}\big(f(x) - U_{xy}f(y)\big).$$

顶点规范变换会通过相应的分块酉矩阵对该算子进行共轭，因此保持其谱不变。我们保持 U 固定，独立改变所有正权重，并在每个已知权重向量处记录完整的谱及其重数。这个带权重标签的族能否确定 U的顶点规范等价类?

联络拉普拉斯算子也出现在向量扩散映射 [16] 和群同步 [2],中，其中成对的边变换是输入数据。这里的逆问题所要探究的是，究竟能
否仅凭带权标记的谱恢复相关信息。

谱问题可以精确约化为环路数据。对于闭合路径 C，其威尔逊迹为 $\tau_C(U) = \frac{1}{2}$tr Hol$_U(C)$，其中 tr 是通常的 2×2矩阵迹。这个实数在反转 C、改变起始顶点以及进行顶点规范变换时保持不变。这些环路观测量

2020 *Mathematics Subject Classification.* 05C50,58J53, 81T25.*Key words and phrases.* 联络拉普拉斯算子、逆谱问题、威尔逊环、图子式、规范等价、稳定重构。

源自晶格规范理论 [19]。命题 2.1 表明，整个权标记谱族恰好包含顶点简单环的威尔逊迹；这些环中每个顶点只经过一次。正向约化通过改变权重来分离出一个圈；反向则使用 Kenyon 的自对偶行列式展开 [8, 第 9.1 节，定理 8]。 [9]中给出了四元数单位增益图的拉普拉斯矩阵的相关行列式公式。已知所有闭游走的威尔逊迹能够区分规范等价类 [10, 定理 3.1]。因此，此处需要解决的问题正是对简单圈的限制。

两个在一个顶点相交的圈说明了信息的损失（图 1(a)）。每个简单圈都位于这两个圈之一中，因此观测值分别确定了每个环路全纯性的共轭类。可以对一个全纯性进行共轭变换，同时保持另一个不变，而所有这些迹仍保持不变。然而，共同顶点处的规范变换会同时共轭二者，由此得到的两组全纯性未必等价。因此，即使已测试每个正权重，圈的相交方式仍可能妨碍恢复。

1.1. 在每个联络下均可恢复的图。 主定理给出了唯一恢复的精确图判据。规范类的可分离性意味着，任何两个具有相同观测值的联络都规范等价。割点是指删除后会增加连通分量数目的顶点。若一个图连通且没有割点，则称其为双连通图；循环块是包含圈的极大双连通子图。

三次图的每个顶点的度均为三。θ图由三条内部顶点互不相交且端点相同的路径组成。细分是指用路径替换边，并引入新的内部顶点。三点连通性要求图至少有四个顶点，并且删除任意至多两个顶点后仍保持连通。

定理 1.1。 对于有限连通标记简单图 G，以下条件等价：

(1) 所有简单圈迹都能区分任意一对顶点规范等价类。(2) 所有可独立变化的正边权谱都能区分任意一对顶点规范等价类。(3) G 是一棵树，或者恰有一个循环块，且该块是一个圈、一个 θ图，或一个有限简单三点连通三次图的细分。

树只有一个规范类。在条件 (3) 中，含圈的图等价于在所列循环块上连接若干棵树，每棵树都在一个顶点处与该块相交。图 1(b)–(d) 展示了这三种循环结构；(d) 还展示了细分和树的连接，其起始图为 K_4，即四个顶点的完全图。第 3 节将证明该定理。

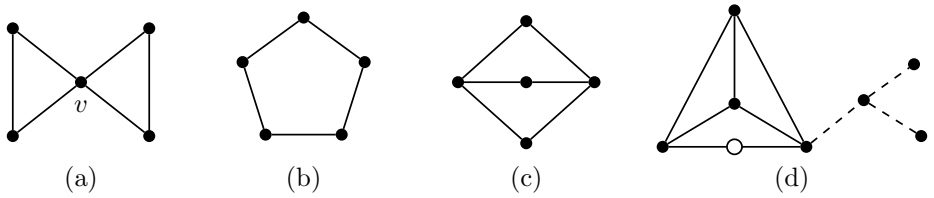


FIGURE 1. 主定理中的图。(a) 两个圈共用一个割点 v，且存在无法唯一恢复的联络；(b) 一个圈；(c) 一个 θ图；(d) 一个经过细分的 K_4，并连接了一棵树。空心顶点表示一条边经过细分；虚线边构成所连接的树。(b)–(d) 展示了定理 1.1； K_4只是三点连通三次核心中的一个代表。所有图示均为示意图：长度和角度不具有度量意义。

证明必须在每个联络处（包括例外情形）通过三次图的变化传递刚性。一个难点是，局部变化后的简单圈可能

变成一条闭游走，它经过两条由一条边连接的、顶点不相交的旧圈。我们证明，这些圈和指定的边都包含在一个三棱柱的细分中；三棱柱由两个互不相交的三角形组成，并在对应顶点间以三条边相连。其简单环数据确定其受限规范类，因而也确定这条连接后闭游走的迹。这使数据比较能够通过局部变化进行。当迹方程的秩下降时，我们确定哪些剩余选择仅在固定旧传输的旋转下有所不同。计算使用单位四元数迹坐标 [18] 和图规范商观点 [15]。

1.2. 恢复不唯一时的歧义。我们还确定了观测值的完整纤维：产生相同数据的所有规范类的集合。对于概率性陈述，$SU(2)$上的Haar测度是其归一化平移不变概率测度。如果某个性质在 $SU(2)^E$ 的一个规范不变开稠密子集上成立，且该子集具有全乘积Haar测度，则称其为一般的。下文中的满测度断言利用了非平凡实解析函数在局部坐标中的零集性质 [11]。

在每个循环块上，纤维都是有限的，且可以递归构造。对于一般连接，纤维包含一个或两个等价类；其恰有一个等价类的情形由图小准则刻画。minor可通过删除顶点或边以及收缩边得到（第 6 节）。对于一般的连通图，所有连续歧义都来自将相容的块联络彼此相对放置，并对公共旋转取模（定理 4.1）。双圈示例就是这种相对自由度的一个实例。我们将说明相容的等价类如何随数据变化而合并，以及连续数据何时能够由连续变化的规范类实现。即便每个单独的数据都可以实现，这种实现也可能失败（第 5 节）。

1.3. 有限测量与受限控制。使用整个权重族会引出另一个问题：实际需要测量其中多少？第 7 节证明，有限个完整谱就能保留每个纤维。该节还选取了数量与圈秩 $\beta = |E| - |V| + 1$（即独立环的数量）成线性的圈迹，并在一般连接处给出对整个纤维的认证小噪声恢复。因此，重构的目标在唯一性成立时是一个等价类，在不成立时则是完整的相容集合。

如果只能改变部分边权，缩减后的族也可能失去威尔逊迹。第 8 节针对任意控制集，以及在 $\mathbb{Q}$ 上代数的固定正权，给出一个精确判定程序，以判断它是否仍能恢复所有原始简单环迹。将这一判定与纤维描述结合起来，便可区分测量中丢失的信息与完全控制下已存在的歧义。算子扩展与高秩障碍在第 9 节讨论；较长的估计和系数计算则见附录。

2. Spectral data and quaternion coordinates

保留上文引入的联络、路径顺序、规范作用和拉普拉斯算子约定。记 $n = |V|$、$m = |E|$ 和 $\beta = m - n + 1$；对于连通子图 H，其圈秩为 $|E(H)| - |V(H)| + 1$。该联络空间的紧致规范商为 $X_G = SU(2)^E / SU(2)^V$，而 $[U] \in X_G$ 表示 U 的等价类。图标签在此商作用下保持不变。记 Q^* 为共轭转置，记 I_d 为 d 维单位矩阵。

$L_w(U)$ 的标量度数对角矩阵随 w 变化。记 $\lambda_1(w,U) \le \cdots \le \lambda_{2n}(w,U)$ 为其特征值，并按重数列出。全权重谱观测是映射

$$\Sigma_G(U) : (0,\infty)^E \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}, \qquad w \longmapsto \big(\lambda_1(w,U), \dots, \lambda_{2n}(w,U)\big).$$

因此，对于每个 $w > 0$，$\Sigma_G(U) = \Sigma_G(V)$ 表示在相同权重向量下谱相等。参数 w 是数据的一部分。

设 $\mathcal{C}(G)$ 为顶点简单环的有限集合，其中未指定定向和起始顶点。对于 $Q \in SU(2)$，令 $\tau(Q) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\ Q$，其中 tr 是通常的 2×2 矩阵迹，并令

$$\tau_C(U) = \tau(\mathrm{Hol}_U(C)), \qquad W_G : X_G \longrightarrow [-1,1]^{\mathcal{C}(G)}, \quad [U] \longmapsto (\tau_C(U))_{C\in\mathcal{C}(G)}.$$

$SU(2)$迹为实数，并且在求逆或共轭下保持不变，因此这些定义与圈的选择及规范变换无关。我们用 $W_G(U)$表示 $W_G([U])$。对于固定的联络 U，其完整观测纤维为

$$\mathcal{F}_U := W_G^{-1}(W_G(U)) = \{[U'] \in X_G : W_G(U') = W_G(U)\}.$$

因此，纤维由所有与数据相容的规范等价类组成。下面的命题将其与 Σ_G的纤维对应起来。全文中，Tr 表示整个 $2n$维顶点空间上的迹，而 $\|v\|_\infty = \max_j |v_j|$ 表示有限实坐标向量。

命题 2 **.1.** 对于所有联络 U, V, $\Sigma_G(U) = \Sigma_G(V)$ 当且仅当 $W_G(U) = W_G(V)$.

证明。 对于长度为 ℓ的圈 C，将其边权设为 1，并将所有其他权重设为 $t > 0$；将此权重向量记为 $w_C(t)$。令 I 也表示平凡联络，其中每个传输都等于 I_2。定义标量谱矩多项式 $F_U(t) = \mathrm{Tr}\, L_{w_C(t)}(U)^\ell$。它是一个次数至多为 ℓ的多项式，因此正测量值确定 $F_U(0)$。在零点处，图为 C 和孤立顶点。一个在 C 周围绕行、经过 ℓ 步的游走会使用每条环边，且不经过对角步；每种定向都有 ℓ 个起点。零绕行数的闭游走可化为回溯对，其传输相互抵消；插入标量对角步不会改变这一点。因此，只有 2ℓ 绕行数的游走依赖于联络。每个这样的游走对全迹的贡献为$(-1)^\ell \mathrm{tr}\ \mathrm{Hol}_U(C) = (-1)^\ell 2\tau_C(U)$，从而得到下面的因子 4ℓ。因此

$$F_U(0) - F_I(0) = (-1)^\ell 4\ell\big(\tau_C(U) - 1\big). \tag{2.1}$$

反之，首先取 $z \in \mathbb{R}$。对于一个 2×2 复块 B，令 $\widetilde{B} = \mathrm{adj}\, B$ 表示其伴随矩阵。当 $M_{yx} = M_{xy}$时，分块矩阵 $M = (M_{xy})$ 是自对偶的；此时其对角块必为标量。由于对于 $U \in SU(2)$ 有 $\widetilde{U} = U^{-1}$，而对于实 w 有 $\widetilde{wU} = wU^{-1}$，矩阵 $zI - L_w(U)$ 具有这种结构。这就是复表示中的四元数自对偶性。Kenyon 的置换展开 [8, 第 9.1 节，定理 8] 利用长度至少为三的环的简单环数据、单环的标量对角元以及二环的标量边范数，给出了其四元数行列式。复行列式是其平方。因此，相同的简单环数据会得到相同的特征多项式。这些多项式恒等式可扩展到所有 $z \in \mathbb{C}$，包括奇异矩阵和零边块。□

2.1. 四元数坐标。 我们将 $SU(2)$ 识别为四元数的单位球面 $S^3 \subset \mathbb{R}^4$。这里 $S^d = \{v \in \mathbb{R}^{d+1} : |v| = 1\}$，其中 $|\cdot|$ 为欧几里得范数。令复数虚数单位为 i，泡利矩阵为

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

四元数 $(a,\ u) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ 表示矩阵 $aI_2 + i(u_1\sigma_x + u_2\sigma_y + u_3\sigma_z)$；其标量部分和虚部分别为 $\mathrm{Re}(a,\ u) = a$ 和 $\mathrm{Im}(a,\ u) = u$。在此基底下，乘积为

$$(a,u)(b,v) = (ab - u\cdot v,\ av + bu - u\times v), \qquad \mathrm{Re}(PQ^{-1}) = \langle P, Q\rangle \quad (P, Q \in S^3).$$

点积、叉积和 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 分别是 $\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{R}^4$中的通常欧几里得运算。在同时进行矩阵共轭下的迹不变量由 Procesi[13]处理；Goldman [7] 为行列式为一的复 2×2 矩阵发展了迹坐标。格拉姆矩阵记录两两内积；$\det(u,\ v,\ z)$表示以所示三个向量为列的行列式。我们用 $O(d)$表示实正交群，用 $SO(d)$表示其

行列式为一的子群。旋转通过 $R\cdot(a,\ u)=(a,\ Ru)$作用于四元数。共轭在虚部上诱导出 $SO(3)$。独立的左、右单位乘法诱导出整个 $SO(4)$：它们保持定向，并且其六个独立的无穷小生成元张成其李代数。它们的核是共同的一对符号。生成树规范将树边设为恒等式。树外的边称为弦，随后携带 β 任意单位四元数，并模去一次共同共轭。给定树传输后，这些弦变量彼此独立，服从 Haar变量分布，即从 $SU(2)$上的归一化平移不变概率测度中采样。弦边组的有效稳定子由 $SO(3)$中固定该弦边组内每个四元数的旋转组成。固定一个非零虚向量的旋转，就是绕其轴旋转。因此，如果所有虚部都为零，有效稳定子为 $SO(3)$；如果它们的张成空间是一条直线，则为$SO(2)$；如果其张成空间的维数至少为二，则稳定子为平凡群。

如果联络的基点全纯群包含于 $\{\pm1\}$，我们称其为中心的；如果该子群是阿贝尔群，则称其为可交换的。在树规范下，这些条件针对的是弦边组；它们并不要求原始边矩阵彼此可交换。

3. Proof of all-connection rigidity

证明分为正向和反向两部分。正向部分中，我们证明两个小型核心具有刚性，并说明这种刚性在生成简单三连通三次图的局部操作下仍然成立。反向部分中，我们先排除具有多个循环块的图，再确定单个循环块内产生反射歧义的割。本节中，我们始终用 $\mathrm{P}(H)$ 表示每个规范类都能由 H的简单圈区分。对于下文的圈词计算，令 $T_{xy}=U_{yx}^{-1}$，并按路径顺序将这些变量相乘。这样得到原路径传输的逆，同时保留每条闭路径的迹。规范作用为 $T_{xy}\mapsto g_xT_{xy}g_y^{-1}$。在具体的四元数示例中，选取互相垂直的虚单位 $i,\ j$，并令 $k=ij$。这就确定了这些示例所用的哈密顿约定。

3.1. **两个刚性核心**。

引理3.1。 K_4 的七个简单圈迹确定了每个联络，且仅相差规范变换。

证明。 将与顶点 0 相连的三条边规范变换为恒等元，并记作 $A=U_{21}$、 $B=U_{31}$、$C=U_{32}$。观测值是以下对象的半迹:

$$A,\ B,\ C,\ BA^{-1},\ C^{-1}B,\ CA,\ B^{-1}CA.$$

对于 $A=(a,\ u)$、 $B=(b,\ v)$、 $C=(c,\ z)$，前六个给出了所有标量部分和虚部格拉姆矩阵:

$$u\cdot v=\tau(BA^{-1})-ab,\quad v\cdot z=\tau(C^{-1}B)-bc,\quad u\cdot z=ac-\tau(CA).$$

这里 $\tau(Q)=$迹 $Q/2$。最后一个给出

$$\det(u,v,z)=abc-b(u\cdot z)+c(u\cdot v)+a(v\cdot z)-\tau(B^{-1}CA).$$

格拉姆矩阵对角项也已知，因为 $|u|^2=1-a^2$、 $|v|^2=1-b^2$ 和 $|z|^2=1-c^2$。两个具有相同格拉姆矩阵的三元组可由其张成空间之间的等距变换联系起来，而该变换可扩展为 $O(3)$的一个元素。秩为三时，所示行列式迫使该元素的行列式为一。秩较低时，如有必要，可将其与一个逐点固定目标张成空间的反射复合。所得映射属于 $SO(3)$，且仍与所有三个向量匹配。四元数共轭实现了这一旋转，因此在所有情形下这些联络都是规范等价的。□

引理 3.2. 三棱柱及其任意细分都具有该性质 P.

证明。 使用图 2(a) 中标记的三角形 012、345 以及边 03、14、25。将树 01、02、03、14、25 规范变换为 1，并令 $A = T_{12}$、 $B = T_{34}$、 $C = T_{35}$、 $D = T_{45}$。这十四个简单圈给出了以下半迹

$$A, B, C, D, \quad AC^{-1}, B^{-1}C, DC^{-1}, A^{-1}B^{-1}, D^{-1}B^{-1}, AD^{-1},$$
$$AD^{-1}B^{-1}, A^{-1}DC^{-1}, AC^{-1}B, BDC^{-1}.$$

单变量给出标量部分；单位范数继而给出格拉姆矩阵对角项。若$X = (x_0、\ x)$且 $Y = (y_0、\ y)$，则 $\tau(X^\epsilon Y^\delta) = x_0y_0 - \epsilon\delta\, x \cdot y$对于 ϵ、 $\delta \in \{1, -1\}$。因此，六个二变量词给出了六个不同的虚部内积。对于第三个变量$Z = (z_0、\ z)$，根据我们的乘法约定，有

$$\tau(XYZ) = x_0y_0z_0 - z_0(x \cdot y) - x_0(y \cdot z) - y_0(x \cdot z) + \det(x, y, z).$$

将一个变量替换为其逆元会改变其虚部的符号。因此，最后四个词分别确定三元组$(A、\ B、\ D)$、$(A、\ C、\ D)$、$(A、\ B、\ C)$和$(B、\ C、\ D)$的体积，其系数分别为 -1、 -1、 1、 1。这四个方程中的所有其他项均已知。因此，所有三重体积以及完整格拉姆矩阵都已确定。这些是完备的同时 $SO(3)$不变量：借助这些体积，秩三时的格拉姆等距变换是保定向的；在较低秩时，则可使其在正交补上保定向。细分保持路径传输，且只增加内部顶点规范变换。□

3.2. **通过局部变换传递数据**。 三次核心的局部改变未必能保留哪些闭游走是简单的。因此，我们需要从原始简单环数据中恢复另一种迹：沿一个圈行进，穿过一条连接边，再沿一个不相交的圈行进，最后沿该边返回所得到的迹。棱柱提供了这一信息，同时保留指定的连接边。

引理 3.3。 在简单三连通三次图中，由一条指定边连接的两个顶点不相交的圈，包含在一个棱柱细分中，且该细分包含整条指定边和这两个圈。它们的连接哑铃迹由简单圈确定。

证明。 设 $e = uv$ 连接 C_1， C_2。三点连通性蕴含三边连通性。对于$w \neq u$， v，假设 $G - w - e$ 有 $k \geq 2$ 个连通分支。每个分支都是一个真顶点集，在 G中至少有三条边界边。将它们的边界相加时，与 w 关联的边至多计一次，与 e 关联的边至多计两次，因此总数至多为 $\deg w + 2 = 5$，这与 $3k \geq 6$矛盾。因此， $G - w - e$ 是连通的。

现在令 $A = V(C_1) \setminus \{u\}$和 $B = V(C_2) \setminus \{v\}$。若 $G - \{u, v\}$不存在两条顶点不相交的 A–B路径，则门格尔定理的集合版本会给出一个大小至多为一的 A–B 分隔集。将其记为 $\{w\}$；若它为空，则再删除任意一个不等于 u， v的顶点。由于这些圈的长度至少为三， $A - w$和 $B - w$都仍非空。在 $G - \{u, v, w\}$中，没有任何连通分支同时与两个集合相交。三次性意味着， u除 v 以外的两个邻点都位于 C_1上，而 v 除 u 以外的两个邻点都位于 C_2上。因此，在不含 e 的情况下恢复 u， v ，至多会连接那些仅与 $A - w$ 相交的连通分支； $B - w$ 一侧也同样如此，不可能连接两侧。这与 $G - w - e$的连通性矛盾。

取这两条顶点不相交的连接路径。对于每条路径，在它首次接触 C_2 处停止，并从它最后一次先前接触 C_1处开始。所得路径的内部均位于两个环之外。它们在任一环上的端点彼此不同，且均不是 u 或 v，因为这些路径是在 $G - \{u, v\}$中选取的。它们与 e一起构成三条互不相交的边，并且在每个环上都有三个不同的端点。每个环上这些端点之间的弧构成棱柱的两个细分三角形。因此，它们的并集就是所需的棱柱细分，如图 2(b)所示。其简单圈都是 G的简单圈，因此引理 3.2 可恢复其受限规范类，进而恢复连接哑铃迹。□

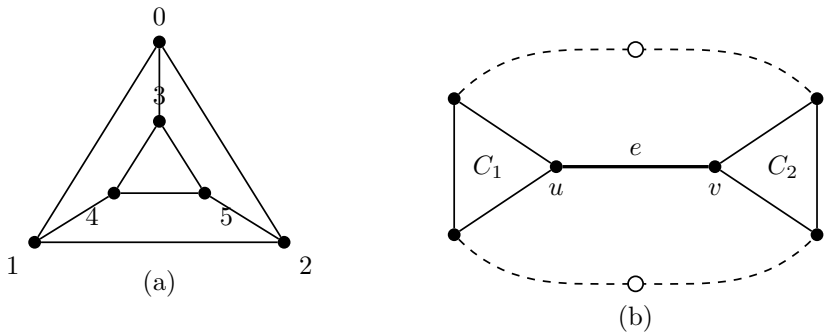


FIGURE 2. 指定哑铃图的棱柱及其补全。（a）三角形 012、345 和边 03、14、25，以及引理 3.2 中使用的标记。（b）引理 3.3 保留了两个顶点不相交的圈 C_1、C_2 以及指定的边 $e = uv$（粗线），并提供另外两条路径（虚线），形成一个棱柱细分。空心顶点表示可能存在的内部顶点；路径长度可以变化。

怀特海德变换将连接两个三价顶点的一条边收缩，并用四个端口的另一种配对方式展开所得的四价顶点（图 3(a)）。如果所得的两个图都是简单三连通三次图，那么

$$\mathsf{P}(G) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathsf{P}(G'). \tag{3.1}$$

为比较这些数据，将中间边的规范变换调整为单位传输。于是，其端点规范变换必须一致，因此两个规范商都可识别为同一个收缩图的规范商。接下来只需根据旧的简单圈迹确定每个新的简单圈迹。避开两个新顶点的圈保持不变。若圈使用了新的中间边，移除该边后会留下一条外部路径：其旧端口要么连接到同一个旧顶点，要么由旧的中间边连接，从而得到一个具有相同迹的旧简单圈。若圈只经过一个新顶点，则用旧的中间边闭合其外部路径。该边的传输为单位传输，因此迹仍然相同。剩下的唯一情形是圈经过两个新顶点，但不使用新的中间边。标记旧端口，使 1、2 相交于一个旧顶点，3、4 相交于另一个旧顶点，而新的配对为 1、3 和 2、4。这个例外圈的两条外部弧在内部不相交。由于它们将两个新顶点连接成一个圈，其端点对要么是 (1、2)、(3、4)，要么是 (1、4)、(2、3)。

在第一种情况下，旧配对将弧闭合成两个不相交的圈，它们由旧中间边连接。新圈的迹就是它们组成的哑铃图的迹，这由引理 3.3 确定。在第二种情况下，两条弧都连接两个旧顶点。它们与旧中间边一起构成一个 θ图。将该边规范变换为单位元后，把两条弧都定向为从第一个旧顶点指向第二个旧顶点，并将它们的传输记为 X，Y。旧简单圈给出 $\tau(X)$ $\tau(Y)$ 和 $\tau(XY^{-1})$，而新圈要求 $\tau(XY)$，差一个求逆。恒等式 $\tau(XY) + \tau(XY^{-1}) = 2\tau(X)\tau(Y)$ 可得所需结果。逆变换同理。因此，在规范商之间的双射下，简单环数据的相等性可双向传递，从而证明了 (3.1)。

开放耳是一条路径，其旧端点互不相同，且内部顶点均为新顶点；缺失边是长度为一的耳。通过添加耳，可以将双连通子图扩展为整个双连通图：连接外部连通分支的两个旧邻点，最后再添加缺失边。每添加一个耳，圈秩就增加一。

三角形扩张需要对低秩路径数据作进一步观察。其表面上的解球面可由旧稳定子消去。下面的引理在不作非退化假设的情况下确定该稳定子。

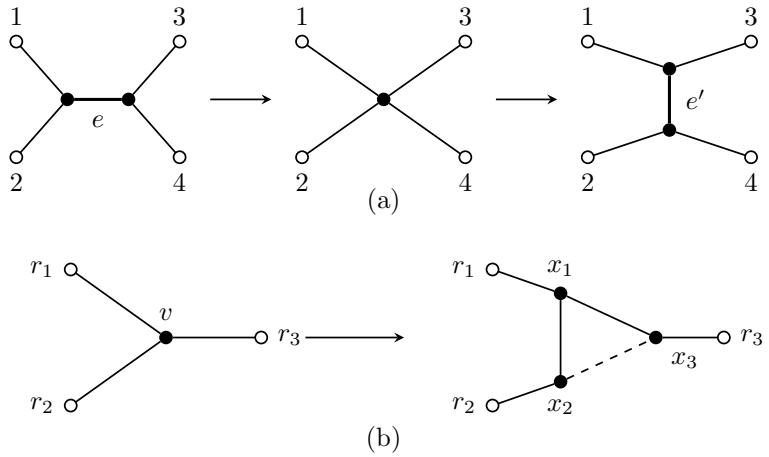


FIGURE 3. 三次核心的两种局部变换。(a) 怀特海德变换通过收缩，将配对 (1,2) | (3, 4) 改为 (1, 3) | (2,4)；粗边分别表示旧的和新的中间边。(b) 一个三次顶点 v 扩展为一个三角形，其中 x_i与原来位于外部的邻点 r_i相连。删除虚线边 x_2x_3 后，得到旧图的一个细分。空心圆标出通向省略的外部图的端口。

引理 3.4。设 H 为双连通图，并且 $a \neq b$。将一条简单的 a–b 路径传输归一化为单位元。若所有此类传输都属于子群 $K \leq SU(2)$，则整个联络都规范等价于一个 K-联络。若旧联络是中心的，或是可交换的非中心联络，则实路径张成空间的维数分别为一或二。随后添加一条耳，对于每个固定的旧等价类及其新的环数据，至多产生一个新的规范类。

证明。首先将顶点排序，使 a 最小、 b 最大，从而每个其他顶点都有一个较小邻点和一个较大邻点。从一条 a–b 路径开始。由于 H 没有割点，排序集合之外的每个连通分支都与其中两个不同顶点相邻。穿过该连通分支，在这两个邻点之间插入一条路径，并重复此过程。将所有边定向为向上。现在存在从 a 到任意顶点以及从该顶点到 b 的递增路径。选取这样的前缀和后缀，其传输分别为 ℓ_x, r_x。对于一条递增边 xy，其所选前缀中的每个顶点都不大于 x，而从 y 开始的后缀中的每个顶点都不小于 $y > x$。因此，将它们拼接起来所得的路径是简单路径。同样的观察也适用于在 y处相接的前缀和后缀。因此， $\ell_x T_{xy} r_y$ 和 $\ell_y r_y$都属于 K，且它们的商为 $\ell_x T_{xy} \ell_y^{-1}$。令顶点规范变换为 ℓ_x ，则每条向上边及其逆边都属于 K。

如果旧联络是中心的，其归一化端点路径都属于 $\{\pm 1\}$，因此它们的实张成空间维数为一。如果它是可交换的，这些路径都属于某个公共圆子群，张成空间的维数至多为二。反过来，归一化张成空间包含单位元。一维张成空间的单位截面为 $\{\pm 1\}$，而二维张成空间由单位元和一个纯虚向量生成，其单位截面是一个圆子群。因此，根据第一条断言，旧联络分别是中心的或可交换的。特别地，交换的非中心连接的路径张成空间恰为二维。在相容树规范下，中心型和可交换型的有效稳定子分别为 $SO(3)$和 $SO(2)$。新的耳总传输 q 与每条旧简单端点路径 P 方向相同。将其归一化传输记为 p_P ，并将由耳和 P的反向路径构成的圈的指定半迹记为c_P 。耳方程为 $\langle q,\ p_P \rangle = c_P$和 $|q| = 1$。这些方程确定其在实路径张成空间上的投影。对于中心的旧联络，只有 q 的标量部分是确定的；其余虚部

向量位于 $\mathbb{R}^3$中的一个球面上，旧稳定子 $SO(3)$在该球面上传递作用。在交换的非中心情形下，标量部分以及沿公共虚轴的分量均已确定。其余两个分量位于一个圆上，而旧稳定子 $SO(2)$在该平面上传递旋转。半径为零时，两种情形都只有一个点；半径不相容时则不存在扩张。因此，每个非空解集都是实际旧稳定子的一个轨道。□

引理 3.5. 将一个顶点扩展为三角形，会在简单三连通三次图中保持 P 。

证明. 设 G_0 具有 P，并将其顶点 v 扩展为 x_1、x_2、x_3，其外部邻点为 r_1、r_2、r_3（图 3(b)）。记作 $R = G_0 - v$。它是连通的（事实上是双连通的），因为删除 v 以及任意另一个顶点后，剩下的 G_0 仍然连通；这三个外部邻点互不相同，因为 G_0 是简单三次图。删除 x_2x_3 后得到 G_0的一个细分 H 。利用 P(G_0)使 H上的两个联络对齐，并通过规范变换将 x_1x_2、x_1x_3 变为单位元。只有 $q = T_{x_2x_3}$ 可能与 q'不同。记作 $P_i = T_{x_ir_i}$。若 H 可交换，则由引理 3.4 即可完成证明。

接下来处理不可交换的 H。外部图 R 的稳定子可能比H更大，因此我们分别讨论中心的情形和非中心的情形。如果 R 是中心的，则将其边规范变换至 ±1 ，并安排 $P_1 = 1$、$P_2 = B$、$P_3 = C$。变量 B、C不可交换。在 R 中为每一对外部邻点选取一条简单路径。三角形树路径 $x_2x_1x_3$ 的传输为单位元。依次考虑

$$x_2r_2 \rightsquigarrow r_1x_1x_3, \qquad x_2x_1r_1 \rightsquigarrow r_3x_3, \qquad x_2r_2 \rightsquigarrow r_3x_3$$

其中每个 $\rightsquigarrow$ 表示在 R中选取的路径。这些路径又给出三条简单路径，其传输分别为 B、C^{-1}、BC^{-1}，符号除外：中心 R内部的所有传输均为 ±1。由于 B、C不可交换，它们的虚部线性无关。前面三个四元数张成由单位元和这两个虚方向构成的空间；第四个四元数沿它们叉积的方向具有非零分量。因此，这四条路径张成 $\mathbb{R}^4$。它们的环迹确定了 q 和q'的全部四个内积，因此 $q = q'$。

若 R 是非中心的，则将其树规范为单位元。保持这些树边不变的规范变换在连通的 R上为常值；要保持其所有边不变，这个公共值 h 必须中心化其弦边组。若该弦边组由可交换的非中心元素组成，则其中心化子 Z 是一个圆子群；若其为非交换的，则 $\{\pm1\}$。对于 $A \in SU(2)$，令 $C_{SU(2)}(A) = \{g \in SU(2) : gA = Ag\}$ 为其中心化子。删除 x_1x_3 并收缩三角形的另外两条边后，在 G_0上得到外部传输组 $(P_1,\ P_2,\ qP_3)$ 和 $(P_1,\ P_2,\ q'P_3)$。它们规范等价。保持前两个传输不变会迫使

$$h \in Z \cap C_{SU(2)}(P_1^{-1}P_2), \qquad k = P_1hP_1^{-1} = P_2hP_2^{-1}$$

收缩后的顶点处满足该条件。第三传输满足 $kqP_3h^{-1} = q'P_3$。若所示交集是中心的，则 $h = k = \pm1$，因此该方程化简为 $q = q'$。改为删除 x_1x_2 ，则得到 $(P_1,\ q^{-1}P_2,\ P_3)$；若 $Z \cap C_{SU(2)}(P_1^{-1}P_3)$ 是中心的，也能得到相同结论。若两个交集都是非中心的，则 Z 必定是一个圆 T。T 中任一非中心元素的中心化子就是 T本身。因此 $P_1^{-1}P_2,\ P_1^{-1}P_3 \in T$。$R$的每条树规范边都与 T可交换，因此也属于 T。在三个三角形树顶点处施加公共规范变换 P_1^{-1}，同时保持 R不变。三个外部传输变为 $\mathbf{1}$，$P_1^{-1}P_2,\ P_1^{-1}P_3$，而三角形树边仍为单位元。现在所有旧传输都属于 T，因此 H 是可交换的，这与假设矛盾。□

3.3. 生成核心并排除其他图。 现在，我们将局部操作与整个图类联系起来。生成步骤最初在两条细分边之间插入一条边。滑动其中一条边可将这一插入化简为三角形扩张，而怀特海德变换则提供了其间的比较。

每个简单三连通三次图都可以通过从 K_4 开始，反复细分两条不同的边，并连接新顶点 [12, 第 4]节生成。将此操作记为 $J(f,\ g)$。

相邻的 f, g 构成一次三角形扩张。否则固定 g，沿最短边链移动 f，直到它首次与 g相邻。对于 $f = uv$, $f' = vw$，其中 f上有细分点 a， g上有点 b，对 av进行怀特海德变换，将 ua, vw替换为 uv, aw，同时保留 av, ab以及 v处的第三条边。这恰好得到 $J(f'$, $g)$。每个 $J(f$, $g)$ 都是简单三次图，因为 f, g是简单三次图中的不同边。为验证三点连通性，考虑删除一对顶点的情况。如果删除的都是旧顶点，则剩余的旧图是连通的。只有当某个细分边连接这两个被删除的顶点时，一个新顶点才会失去两个旧邻点。另一个新顶点仍然至少有一个旧邻点，因为 $f \neq g$，因此连接边可以将任何孤立顶点重新连接回旧图。如果删除一个旧顶点和一个新顶点，则旧图删除该旧顶点后是双连通的，因而是无桥的。因此，删除被移除新顶点所细分的边后，剩余旧顶点仍然连通；另一个新顶点至少有一个仍存的旧邻点。如果删除两个新顶点，则旧图仅失去 f, g，并因三边连通性而保持连通。删除少于两个顶点也保持连通。因此，所有滑动都满足 (3.1)。

通往 g 的最短边链可以在其第一条与 g相邻的边处停止，因此沿链进行的每次连接操作都使用不同的边。在最后那条边处， J 是旧核的三角形扩张。因此，怀特海德等价将性质 P 从该三角形扩张沿链传递回 J（f, g）。以引理3.1、引理 3.5为起点，并对上述连接操作序列进行归纳，可证明每个核都满足 P。

定理 *1.1* 的证明。 命题 2.1确定了前两个条件。必要性。 两个循环块已经足以构成反例：在共同的单位树规范中，各选取一个弦，并分别赋值为（i, i）和（i, j），其余所有传输均取单位元。简单圈始终位于某一个块内，因此给出相同的迹；然而，共轭无法将两个相同的元素区分开。

对于顶点集 S，令 $\delta(S)$ 表示一端点位于 S、另一端点位于 S之外的边集。剩余的障碍是这样一个割 $\delta(S)$：它至少包含四条边，其两侧均连通，并且每个简单圈至多穿过该割两次。将该割向外定向，并在四条割边上分别放置（1, i, j, k）和（1, i, j, $-k$），其余所有传输均取单位元。每个圈至多涉及其中两个变量，因此它们共同的实格拉姆矩阵给出相同的迹。事实上，穿过该割两次的圈，其半迹是两条向外割传输的实内积；两侧的所有边都具有单位传输。在两侧各选取一棵生成树，并通过一条在两种连接中都赋值为单位元的割边将它们连接起来。这是一棵共同的单位生成树。因此，两个连接之间的任何规范变换都必然在整个图上为常值，从而给出共同共轭。固定 i, j 的共轭也会固定 $k = ij$，因此不可能将 k 发送到 $-k$。

在循环块 B 中，若某个顶点的度至少为四，则可取该顶点为割点、 S 为单点顶点，因为 $B - v$ 是连通的。因此，所有顶点的度都为二或三。若所有顶点的度均为二，则该图是一个圈。否则，收缩二度链，得到一个无环双连通三次多重图 K。若存在环（loop），它就表示一个圈通过唯一的三次端点与其余部分相连，这会使该端点在收缩前成为割点。在每条收缩后的路径上，通过内部顶点规范变换，可将除最后一个以外的所有传输都设为单位元，只留下该路径的总路径传输。因此，收缩保留规范类；简单圈在收缩前后相对应，包括 K 中的双边环。同样的观察也表明，在 K 上构造的镜像障碍可以提升到 B 上。

若 K有一个二边割 ac, bd，将其两侧记为 A, B，其中 a, $b \in A$且 c, $d \in B$。两侧都不是单顶点：在无环的三次图中，单个顶点的边界有三条，而此割的大小为二。每一侧的端点各不相同：若 $a = b$，删除 a 会使非空的$A - a$与 B分离，这与双连通性矛盾；另一侧同理。 $A - a$的每个连通分支都必须包含 b，否则删除 a会使其与 B 分离。因此 $A - a$ 是连通的，类似地 $B - c$也是连通的。集合 $S = \{a, c\}$由 ac连通，且有四条边界边；其补集通过 bd连通。使用 ac的简单圈还必须

使用 bd，因为它们是原割中仅有的边。随后，该圈在 a，c各使用一条额外的关联边，并恰好两次穿过 $\delta(S)$。既不使用割边的圈位于其中一侧，且至多经过 a，c中的一个，因此至多两次穿过 $\delta(S)$。前述镜像障碍仍然适用，并且在细分回到 B之后依然成立。

如果 K 有两个顶点，它就是一条三重边，而 B 是一个 θ图。顶点更多时，平行边会在其端点处形成一个二边割，因此 K 是简单图。在一个双连通三次图中，二顶点割 $\{u, v\}$ 也会产生二边割。事实上，每个剩余连通分支都与这两个顶点相接。如果存在 uv，则四个外部端口分布在至少两个连通分支中。每个连通分支在 u和 v处都至少使用一个端口，因此恰有两个连通分支，且二者的边界均为二。否则，六个端口会形成两个或三个连通分支。若有三个连通分支，每个都在每个割点处使用一个端口，边界为二。若有两个连通分支，记其中一个连通分支 C到 u、v的边数为 (r, s)。这两个数都属于 $\{1, 2\}$，另一个连通分支的对应计数为 $(3-r, 3-s)$。若 $(r, s) = (1, 1)$，取 C；若 $(r, s) = (2, 2)$，取另一个连通分支。若 $(r, s) = (2, 1)$，取 $C \cup \{u\}$：它的两条出边分别是从 C 到 v 的一条边，以及从 u 到另一个连通分支的一条边。对于 $(r, s) = (1, 2)$，则改取 $C \cup \{v\}$。每种情况都会产生一个已被排除的二边割。因此，剩余的核是三顶点连通的。

充分性。 树只有一个规范类，因为经过树规范后没有弦。在圈上，唯一剩下的四元数在共轭意义下由其标量部分决定，因此由其环迹决定。对于 θ 图，将一条端点路径归一化为 1，并将另外两条传输记为 $A = (a,\ u)$ 和 $B = (b,\ v)$。三个圈迹为 a，b和 $ab + u \cdot v$；单位范数给出 $|u|^2 = 1 - a^2$ 和 $|v|^2 = 1 - b^2$。因此，虚部格拉姆矩阵已知。由于其张成空间的维数至多为二，任意格拉姆等距变换都可以在正交补上调整为保向变换，从而即使在退化数据下，也得到一个共同的 $SO(3)$轨道。上述三次核论证处理了其余所有列出的核心。细分和附着树只会引入可消去的规范变换。这就证明了两个方向。□

推论 3.6。 对于定理 *1.1* 中的每个图，W_G 都是到其像上的同胚。因此，每条连续可实现数据路径都有唯一的连续规范等价类提升，包括在退化联络处。

证明。 定义域是紧致的，目标空间是豪斯多夫的，并且 W_G 连续且单射。因此，它在其像上的逆映射是连续的。□

4. Every fiber and its degenerations

4.1. 局部选择与相对块旋转。 对于任意图，这些数据可能会留下有限个局部选择以及连续的相对块旋转。我们先构造局部选择，再说明它们如何组合并在特殊数据处相遇。一个耳会增加一个满足线性观测值约束的四元数；块内唯一的连续自由度是一个稳定子轨道。最终纤维中的连续歧义来自将不同的块相对放置。

对于算法方面的陈述，实代数数指有理数域 $\mathbb{Q}$上的非零多项式的一个实根，并通过该多项式及一个隔离该根的有理数区间精确给出。实代数输入具有这类坐标。若一个 $\mathbb{R}^d$ 的子集是多项式等式和不等式的有限布尔组合，则称其为半代数集。有效半代数描述会明确给出这些多项式及其系数（系数为实代数数）。

在 $(S^2)^a$ 上，群 $SO(3)$ 以对角方式作用，使所有 a 向量都绕同一轴旋转。下面的商空间采用这一作用。

定理 4.1. 对于圈秩为 γ 的双连通块 B，每个可实现的简单圈数据至多对应 $2^{\max(\gamma-2,0)}$ 个规范等价类。所有等价类均可通过耳递归构造。固定

连通图上的可实现数据。设 d_B 为这些局部纤维的大小， a 表示可交换非中心块的数量， b 表示不可交换块的数量。完整纤维有 $\prod_B d_B$ 个连通分支，每个都同胚于

$$\begin{cases} (S^2)^a \times SO(3)^{b-1}, & b \geq 1, \\ (S^2)^a / SO(3), & b = 0. \end{cases}$$

在固定纤维中， a、 b 这些类型在所有局部选择中均保持不变。对于实代数输入，该构造是一种有限精确算法。

证明。 如果 B 是无环的，则树规范给出其唯一等价类，其中 $\gamma = 0$。否则，从 B 的一个开耳分解开始，该分解以半迹为 c的一个圈起始，其唯一等价类的代表为$c + \sqrt{1 - c^2}\, i$。对于每个旧候选，将一条简单端点路径传输归一化为 1。一个新耳只有一个总变量 $q \in S^3$；所有新圈都是该耳与一条旧简单端点路径连接而成。对于每条旧简单端点路径 P，使其与该耳沿同一方向定向。以 P 为索引的实矩阵 M 的行，是其归一化传输的四个坐标； y_P 则是沿 P返回所得到的新圈的指定半迹。向量y 汇集这些观测到的半迹。完整的扩张方程为

$$Mq = y, \qquad |q| = 1, \tag{4.1}$$

检查每一行的一致性，取最小范数解 q_*，并将 $q_* + \ker M$ 与 S^3 相交。由于 $q_* \perp \ker M$，一个解 $q = q_* + u$ 满足 $u \in \ker M$ 和 $|u|^2 = 1 - |q_*|^2$。因此，解集是一个位于（$4 - $秩 M）维核中的球面，也可能为空集或单点。当 M 的实秩为一或二时，适用引理 3.4：单位解至多构成实际旧稳定子的一个轨道。当 M 的实秩为三或四时，旧联络是不可交换的，且有效稳定子是平凡的。秩三时至多有两个解，秩四时至多有一个解。平方半径为负时无解；秩四时，唯一解必须具有单位范数。

每个实际扩张限制到一个已列出的旧等价类，可以与其代表对齐，并且随后恰好满足这些方程。反过来，将每个保留的 q 放在新耳的最后一条边上，并在其余边上各放一个。这就在原图上实现了每个保留的解。不同旧等价类的扩张经限制后仍彼此不等价。初始圈的圈秩为一，每增加一条耳，圈秩就增加一。第一条耳接在可交换的圈之后，不会使数量翻倍；其余 $\max(\gamma - 2, 0)$ 条耳中的每一条都会使等价类数量至多增加一倍。这就证明了该界。若最终等价类是可交换的，则其在每个阶段的限制也都是可交换的。从唯一的初始圈等价类出发，归纳法可得每个阶段都只有一个等价类：旧代表是可交换的，因此引理 3.4 表明至多有一个扩张等价类；而给定的最终等价类保证其存在。因此，整个局部纤维是单点集。因此，局部纤维要么是一个中心等价类，要么是一个可交换的非中心等价类，要么是由有限个不可交换等价类组成的集合。

将块树与桥的并集视为一棵全局树。对于每种局部代表元组合 q_B，每个全局类都可以通过独立旋转块元组得到，且以公共旋转为模。所得连通分支为

$$SO(3) \backslash \prod_B SO(3)/H_B, \tag{4.2}$$

这里的乘积遍历各个循环块，而 $H_B = \{R \in SO(3) : R \cdot q_B = q_B\}$ 是所选块元组的有效稳定子。在三种相应类型中，它分别是 $SO(3)$、 $SO(2)$ 或 $\{1\}$。左商消去了所有块的公共旋转。若存在非交换块，其标架会消去公共旋转；否则只剩下轴商。每个商都是连通的。不同的局部选择在限制下位于互不相交的紧子集中，因此这些

恰好就是连通分支。所有有限步骤、相等性检验和平方根的选取都是实代数运算。□

4.2. **分支合并与稳定子。** 前面的构造描述了每个固定纤维。要比较邻近纤维，我们需要在标架消失后仍然适用的坐标。对于树规范元组 $q = (q_j)_{j=1}^{\beta}$，写作 $q_j = a_j + v_j$，其中 $a_j \in \mathbb{R}$ 且 $v_j \in \mathbb{R}^3$，并使用完备不变量

$$I(q) = \big((a_j), (v_i \cdot v_j), (\det(v_i, v_j, v_k))\big). \tag{4.3}$$

这些坐标包含每个标量部分、每一对两两内积以及每个三重行列式。根据格拉姆矩阵和定向论证，它们能够区分所有规范等价类。当全局虚部张成空间的维数为零、一或至少二时，$SU(2)$ 中的稳定子分别为 $SU(2)$、$U(1)$ 或 $\{\pm 1\}$；这里 $U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 表示圆群。当且仅当两个极限分支的完备全局不变量一致时，它们才会合并。此判据涵盖跨块内积和有向体积；仅仅局部等价类分别相等还不够。

命题 4.2. *对于每个固定的图，都存在一种有限半代数构造，可以得到整个可实现数据像、所有纤维、它们的分支关联及其稳定子分层。对于有效的半代数数据路径，其限制总空间和端点可达性也都可以有限构造。*

证明。 保留 (4.1) 中的单位四元数变量，并投影到完备不变量 (4.3)。耳递归给出所有有限的块纤维。有效的半代数分解 [3, 第 2 节和第 3 节。5] 将数据像划分为若干部分，使这些有限纤维成为彼此不相交的连续半代数图。细化该划分，以固定虚秩和非零标架主元。令 $G_{ij} = v_i \cdot v_j$ 和 $T_{ijk} = \det(v_i, v_j, v_k)$。对于一对主元指标 p, q，若对应向量线性无关，则在秩至少为二时，一个代表元可表示为

$$v_l = \left(\frac{G_{pl}}{\sqrt{G_{pp}}}, \frac{G_{pp}G_{ql} - G_{pq}G_{pl}}{\sqrt{G_{pp}D_{pq}}}, \frac{T_{pql}}{\sqrt{D_{pq}}} \right), \qquad D_{pq} = G_{pp}G_{qq} - G_{pq}^2 > 0.$$

秩为一时，选取 p，使得 $G_{pp} > 0$，并使用 $v_l = G_{pl} e_1 / \sqrt{G_{pp}}$，其中 $e_1 = (1, 0, 0)$；秩为零时取零。这些公式保留了所有 Gram 条目和定向。

对于每一种块图组合，在一个共同的数据单元上构造联合代表图 $\Gamma = \{(z,\ q(z))\}$：z 是威尔逊数据向量，$q(z)$ 是在这些数据处选定的块代表元组。取其在数据像与 $(S^3)^\beta$ 的紧乘积中的闭包，再乘以独立的块旋转群，并映射到 $(z,\ I(q))$。这样的紧致源只有有限多个。它们的并映射到 W_G 的整个图上，因为每个点都由其自身所在的数据单元表示；根据连续性，所有闭包点仍然有效。将且仅将具有相同 z 和相同完备全局不变量的源点辨识为一类。从紧空间到豪斯多夫空间的商恰好就是完整的纤维族。闭包归属、识别关系和稳定子秩都是半代数条件，因此其边界与交集均可有限计算。联合闭包使所有块中的数据以相同方式趋近，从而避免将彼此不相容的边缘极限组合起来。

对于指定的有效半代数路径，应在限制到该路径后进行此构造。其时间轴可有限细分为若干开区间，区间内的局部分支彼此不相交，并包含端点时刻。所示代表元在每个区间上都是有界半代数函数，因此存在端点极限。每种分支组合都对应一个闭区间与内部商空间 (4.2) 的乘积。在端点处，其稳定子可能增大；将端点商空间映射到实际的极限元组。此映射覆盖该局部端点组合的整个连通分支。纳入每个顶点时刻纤维，并依据其完备全局不变量识别端点像。同样的紧商空间论证给出限制总

空间。端点可达性是指在这些局部分支之间、满足指定端点类的有限图可达性。在同一个区间内，任何两个允许的端点配置都可以通过在连通群 $SO(3)$中为块旋转选取路径而彼此连接。□

路径限制至关重要：完整数据胞腔的闭包包含一些趋近方式，而指定路径可能永远不会沿这些方式前进。下文将单独讨论任意连续路径。

5. Continuous data and prescribed endpoints

对于刚性图，推论 3.6 给出每条可实现数据路径的唯一连续提升。对于其他图，局部分支可能被迫在尚未相交时发生切换。下一个例子表明，仅有逐点可实现性并不能消除此障碍。

例 5.1（可实现数据不存在连续提升）。 记 $K_{p,\,q}$ 为部集大小分别为 p，q的完全二分图。取 $K_{2,\,4}$，其终端为 s，t，内部顶点为 x_1，$\ldots, x_4$，并添加 x_1x_2。在右序传输坐标中，将 sx_j 设为 $\mathbf{1}$，并将 $\mathbf{1}$，i，j，σk 设在 x_jt 上，其中$\sigma \in \{1, -1\}$。将 $a + gj$ 设在 x_1x_2 上，其中 $a = \sqrt{1 - g^2}$ 和 $0 \le g < 1$。原有的六个简单环半迹均为零。六个新增的环半迹通过沿 x_1x_2 前进，再沿原有的简单 x_1–x_2 路径返回而得到。按以下顺序

$$x_1sx_2,\quad x_1tx_2,\quad x_1sx_3tx_2,\quad x_1sx_4tx_2,\quad x_1tx_3sx_2,\quad x_1tx_4sx_2,$$

路径传输为 $\mathbf{1}$，$-i$，k，$-\sigma j$，$-j$，$-\sigma k$。因此，新的环半迹为

$$(a, 0, 0, -\sigma g, -g, 0).$$

旧的虚部三重体积（在有序哈密顿基 $(i,\ j,\ k)$ 下测得）为 σ；旧的两个等价类从未合并。对于 $0 < t \le 1/2$，令 $f(t) = t\sin(1/t)$，$g(t) = |f(t)|$，并在所示数据中设 $\sigma g = f(t)$，再通过 $a(0) = 1$，$g(0) = 0$ 延拓。这定义了连续可实现数据。凡是 $f \neq 0$，它都强制 $\sigma =$符号为 f。连续提升将具有连续的旧三重体积，并在 $\{1, -1\}$ 中取这些交替值，这是不可能的。改为取 $f(t) = t$，则只有正体积端点可达，尽管两个等价类都属于端点纤维。

对于一般的连续路径，退化次数可能是无限的，因此前一节中的有限半代数细分未必适用。我们转而在越来越精细的时间网格上选取等价类。判据是最大的必要跳跃是否趋于零。为每个块商空间赋予其不变像 (4.3) 上的欧几里得度量。

对于图应用，K 是根据 (4.3) 由块商空间得到的紧致不变像，而 Y 是其可实现的威尔逊像，即有限维欧几里得空间的一个子空间。诱导的观测映射为 $f\colon\ I(q) \mapsto W_B(q)$，其中 B 是块。

引理 5.2。 设 $K \subset \mathbb{R}^N$ 为紧致空间，Y 为豪斯多夫空间，且 $f\colon\ K \to Y$ 为具有有限纤维的连续映射；再设 $z\colon\ [0,1] \to f(K)$ 为连续映射。固定 $x_0 \in f^{-1}(z(0))$。在网格 $j2^{-n}$ 上，从 x_0开始，在每个纤维中选取一个点，并令 b_n 为连续选择之间最大距离可能达到的最小值。以 x_0 为起点的连续提升存在，当且仅当 下极限 $b_n = 0$，等价地，当且仅当 $b_n \to 0$。

证明。 连续提升是一致连续的，这就证明了必要性以及完整的极限结论。为证明充分性，选取网格尺度趋于零且最大跳跃为 $e_l \to 0$ 的网格，并在环境空间中对所选点作线性插值。固定 $\eta > 0$ 和一个时刻 t_*。用半径小于 $\eta/4$ 的互不相交开球围住 t_* 处的有限纤维，并使这些开球的闭包之间留有正间隔。由 K 的紧致性和连续性可知，邻近时刻的所有纤维都落在这些开球的并集中：否则，紧致性可保证存在一列位于其外部的点收敛子列，而连续性和 Y 的豪斯多夫性质会使其极限落在该纤维中，矛盾。选取一个更小的时间邻域，使其闭包包含于这个邻域中。有限个更小的邻域覆盖

$[0,1]$。对于足够细的网格，相关的相邻节点都落在相应的较大邻域内，并且 e_l 小于所有开球间的间隔。因此，相邻节点不可能换到不同的开球中。凸性保证每条插值线段都留在同一个开球内。有限个较小邻域覆盖的勒贝格数由此给出等度连续性：在足够短的时间区间上，振幅小于 η 。插值函数一致有界，因此由阿尔泽拉–阿斯科利定理可得一个一致收敛子列。记其一致极限为 h 。对于每个固定的 t，选取包含 t 的网格区间的一个端点 s_l ，并令 x_l 为该处所选的纤维点。此时 $s_l \to t$ ，且 x_l 到 t 处插值函数的距离至多为 e_l，因此 $x_l \to h(t)$。由 K 的闭性可得 $h(t) \in K$。此外， $f(x_l) = z(s_l)$ 既收敛于 $f(h(t))$，也收敛于 $z(t)$；豪斯多夫空间 Y 中极限的唯一性给出 $f(h(t)) = z(t)$。所有插值函数都从 x_0 出发，因此 $h(0) = x_0$。 □

对于预先指定的终点 $x_1 \in f^{-1}(z(1))$，同一判据仍然成立：定义 b_n 时，固定每条网格链中的首个和最后一个选择。于是，上述必要性与紧致性证明会同时保留这两个端点。

命题 5.3。 连通图上的连续可实现数据路径具有从预先指定的全局类出发的提升，当且仅当其在每个循环块上的限制都具有从相应局部类出发的提升。因此，引理 *5.2* 的块网格判据给出了一个必要且充分的可数极限判据。有效半代数路径满足命题 *4.2* 的有限判据。

证明。限制给出必要性。对于充分性，将每条局部类路径提升为连续的树规范元组。我们对紧李群作正交作用时使用连续曲线提升定理 [14, 第 11.1 节。1], 该定理应用于 $SO(3)$ 对虚向量的作用，同时固定标量坐标。由于单位范数是不变量，该提升保持单位范数不变。通过固定的块旋转，使其初始元组与预先指定的元组对齐。将所有块元组在一个全局树规范中分别赋予其对应的弦。这就得到一个连续的全局联络，具有所要求的初始类以及每个所要求的环迹。块的数量有限，且每个局部纤维都是有限的，因此对每个块应用引理 5.2，即可证明该判据。若两个全局端点均已预先指定，且每个局部提升都具有相应的局部端点，则首先如上所述对齐初始块元组。对每个块选择一个旋转，将其终止元组变为预先指定的终止块元组。由于 $SO(3)$ 是路径连通的，可以选择一条从恒等变换到该旋转的连续旋转路径，并沿该路径将其作用于整个块元组。这会保持其初始元组不变，同时保留每个块威尔逊数据，并使终止元组对齐。随后采用相同的全局树规范组装，即可实现预先指定的两个全局端点。 □

6. Generic rigidity and generic fibers

现在，我们要探究一般位置联络的唯一性，同时仍将其与所有可能的竞争联络进行比较。在这种情形下，刚性子式已足够，因为扩展其重构所需的路径标架仅在一个真解析集上失效。全连接定理之所以要求更强的三次结构，正是因为它还必须处理这些失效情形。

一般全局唯一性要求，这种一般位置集合中的每个真实联络都具有单一的整体纤维，其中也包括与一般位置集合之外的联络进行比较。令 D 为双重三角形，即三个顶点的每一对之间都有两条平行边。它的圈秩为四。若 H 由 G 通过删除顶点或边并收缩边得到，我们记作 $H \preccurlyeq G$ 。这些普通子式保留平行边；简单图中的 D minor不一定是拓扑副本。记作 $c(G) = |\mathcal{C}(G)|$。

定理 6.1。 对于双连通图，一般全局唯一性成立当且仅当

$$\beta \le 2 \quad or \quad K_4 \preccurlyeq G \quad or \quad D \preccurlyeq G, \tag{6.1}$$

否则，整个一般纤维恰有两点。此外， $c(G) \geq \beta(\beta+1)/2$，且对于$\beta \geq 3$，唯一性等价于严格不等式。

我们用 $\coprod$ 表示不交并；下一个公式中的球面商空间仍是对所有球面因子施加公共旋转所得。

定理 6.2. 对于一个连通图，设 a 为秩为一的循环块数， b 为秩至少为二的循环块数， r 为秩至少为三且不含 K_4 或 D 作为子式的块数。整个一般纤维同胚于

$$\begin{cases} \coprod_{\nu=1}^{2^r} (S^2)^a \times SO(3)^{b-1}, & b \geq 1, \\ (S^2)^a / SO(3), & b = 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

空积是一个点。因此，当且仅当图是树，或图只有一个满足 (6.1) 的循环块时，一般唯一性成立。对于非连通图，纤维是各连通分支上纤维的乘积。

例外纤维在第4节中构造。式 (6.2) 中的完整一般纤维已包含奇异相对轴构型，尽管真实联络是一般的。

6.1. **路径张成与刚性子式。**

引理 6.3。 在秩为 γ 的双连通图 H 中，对于任意两个不同的顶点 s、t，都可以选取仅使用该图的 $\min(\gamma+1,4)$ 条简单路径，使得它们的传输在 $\mathbb{R}$上泛型线性无关。

证明。 采用引理 3.4 证明中构造的双极序，其中 s 最小、 t 最大，并将每条边都定向为向上。每条边都属于一条有向 s–t 路径，且所有这些路径都是简单路径。

对于每条有向路径 P，令 $\chi_P \in \mathbb{R}^{E(H)}$ 在其边上的坐标为一，在所有其他边上的坐标为零。如果边泛函 ω 在所有路径上取相同值 c，则在每个顶点处选取一条有向前缀和一条有向后缀，使其和分别为 A_v， B_v。对于每条向上边 $u \to v$，

$$A_v + B_v = c = A_u + \omega_{uv} + B_v, \quad \text{so} \quad \omega_{uv} = A_v - A_u.$$

反过来，势差具有恒定的路径和。其维数为 $|V(H)| - 1$，因此路径差张成一个维数为 γ 的空间。固定一条参考路径 P_0。向量$\chi_P - \chi_{P_0}$ 张成这个 γ 维空间。对于 $\gamma \geq 3$，选取路径 P_1，P_2， P_3，使其差线性无关，并选取实数边系数 $\xi_e^{(j)}$，使得

$$\sum_e (\chi_{P_i} - \chi_{P_0})_e \xi_e^{(j)} = \delta_{ij} \qquad (1 \leq i, j \leq 3).$$

设 $\xi_e = \xi_e^{(1)} i + \xi_e^{(2)} j + \xi_e^{(3)} k$。 $U_e(\epsilon) = \exp(\epsilon \xi_e)$ 的传输展开为 $1 + \epsilon \sum_{e \in P} \xi_e + O(\epsilon^2)$。从其余三行中减去参考行，得到行列式 $\pm \epsilon^3 + O(\epsilon^4)$。对于秩为一和二的情形，使用相应的较小 minor。连通边流形上的非零解析函数，其零点集内部为空且 Haar测度为零。端点规范变换在所有路径传输上正交作用，因此保持其独立性。□

引理 6.4. 秩至少为三的双连通子图的一般的整纤维刚性在加入耳后仍然成立。每个耳只需四个图选定的环迹。

证明。 使用引理 6.3 中的四条旧端点路径；每条路径都与耳构成一个简单圈。对任意竞争者施加规范变换，使其在旧图上保持一致。耳内部的规范变换只留下其总单位传输 Q 未知，而四个新增迹给出了它与旧路径

传输的内积。独立性可在所有竞争者中确定 Q 。使总传输对齐后，便可通过耳内部的规范变换使耳对齐。有限个非零解析条件有一个共同的一般交集。 □

在 D 上，将三条边定向为 $0\to1$、 $1\to2$、 $2\to0$。在树规范下，参考传输分别为I、 I、 D_0，替代传输分别为 A、 B、 D_0C。四个单位四元数D_0、 A、 B、 C任意选取。十个实际回路给出

$$\begin{aligned}\tau(A),\tau(B),\tau(C),\tau(D_0),\tau(D_0A),\tau(D_0B),\tau(D_0C),\\ \tau(D_0BA),\tau(D_0CA),\tau(D_0CB).\end{aligned}\tag{6.3}$$

三个环使用一个局部平行对；其余环都沿指定的非参考边选择遍历三条边。细分会将边传输替换为路径传输，但不改变论证。

引理 6.5. 观测值(6.3)的一般纤维整体上是单点集。

证明。 记作 $D_0=(d,w)$、 $A=(a,u)$、 $B=(b,v)$、 $C=(c,z)$，并令

$$\begin{aligned}F_1&=w\cdot(u\times v),\qquad F_2=w\cdot(v\times z),\\ F_3&=(d^2-|w|^2)w\cdot(u\times z)-2d\big(|w|^2u\cdot z-(w\cdot u)(w\cdot z)\big).\end{aligned}$$

假设 $F_1F_2F_3\neq0$。令 w 位于正第三坐标轴上， $d=\cos\phi$、 $|w|=\sin\phi>0$ ，其中 $0<\phi<\pi$，并令 u 的横向部分位于正第一坐标轴上。前七个观测值确定标量部分、第三分量和正横向长度。令 B、 C剩余的横向角为 θ_B、 θ_C。对于列表 A、 B、 C中排在 Y之前的 X，令 x_0、 y_0表示它们的标量部分， r_X、 r_Y表示它们的横向长度， z_X、 z_Y表示它们的第三虚部坐标。令θ_X、 θ_Y为它们的横向角，其中 $\theta_A=0$。相乘可得

$$\begin{aligned}\tau(D_0YX)=d(x_0y_0-z_Xz_Y)-|w|(y_0z_X+x_0z_Y)\\ -r_Xr_Y\{d\cos(\theta_Y-\theta_X)+|w|\sin(\theta_Y-\theta_X)\}.\end{aligned}$$

因此，最后的观测值确定了 $\cos(\theta_B-\phi)$、$\cos(\theta_C-\phi)$ 和 $\cos(\theta_C-\theta_B-\phi)$。每个竞争者都进入相同的规范变换，并且必须独立地选择 θ_B 或 $2\phi-\theta_B$，以及 θ_C 或$2\phi-\theta_C$。仅反射第一个角度，要求该角度保持不变或 $\sin(\theta_C-2\phi)=0$；仅反射第二个角度，要求该角度保持不变或 $\sin\theta_B=0$；同时反射两者，则要求 $\sin(\theta_C-\theta_B)\sin\phi=0$。在此规范变换下，三个因子为

$$F_1=|w|r_Ar_B\sin\theta_B,\qquad F_2=|w|r_Br_C\sin(\theta_C-\theta_B),\qquad F_3=|w|r_Ar_C\sin(\theta_C-2\phi).$$

它们均不为零，因此排除了上述三种真正不同的可能性。如果反射使某个角度模 2π 保持不变，就会得到相同的四元数，因此不会产生额外的等价类。

非空性由 $D_0=(3/5,\ 0,\ 0,\ 4/5)$、 $A=(0,\ 1,\ 0,\ 0)$、 $B=(0,\ 0,\ 1,\ 0)$ 和 $C=(0,\ 5/13,\ 12/13,\ 0)$ 推出：三个因子为 $4/5$、 $-4/13$、 $-816/1625$。它们构成的非零解析乘积定义了所需的一般位置集合。□

引理 6.6. 设 H 是一个秩至少为三、具有一般的整纤维刚性的无环双连通多重图。每个包含 H 作为普通 *minor* 的双连通简单图都具有一般的整纤维刚性。

证明。 为 H 的每条边各选一条交叉边。在每个分支集中，取一棵连接其交叉边端点的极小树，并令 F 为这些树与交叉边的并。收缩保持秩不变。图 F 是双连通的。为此，删除分支树中代表$v\in V$（H）的顶点 x 。其余分支树及其间的交叉边构成一个连通图，因为 $H-v$ 是连通的。受影响的树删去 x 后所得的每个非空连通分支都包含一个交叉边端点；否则就可以修剪该连通分支，这与

连接所有此类端点的树的极小性矛盾。因此，每个连通分支都与该树之外的连通图相连。若受影响的树是单顶点树，则没有剩余连通分支，而同一个外部图即可证明其连通性。

将分支森林规范变换为恒等联络。剩余的联络和规范变换恰好就是 H 的那些。 H 的每个简单圈都能提升为 F 的一个简单圈：在所经过的每棵树中，使用唯一的路径即可。双边环也能提升；在原简单图中，其长度至少为三。因此，所需的观测值可以恢复 F 上的联络。在给定森林传输的条件下，交叉边仍是相互独立的 Haar 变量；规范坐标也保持开性和稠密性。因此，良好 minor 集合的原像是一个一般位置集合。从 F 开始向整个图添加耳，并应用引理 6.4。□

6.2. **Gram歧义与分类**。 双端网络是指带有两个指定且互不相同顶点的图。并联组合是将原本互不相交的网络中对应的终端合并。串联组合是将一个网络的第二个终端与另一个网络的第一个终端合并，同时保留另外两个终端。普通前缀或后缀是连接在某个终端上的一条路径，且与网络不共享其他顶点。

我们使用 Zaslavsky 冻结串并联构造的以下推论 [20, 例 6.1]。一个不含 K_4 和 D 作为普通 minor 的双连通图，可以由路径通过并联组合以及添加普通前缀或后缀构造为一个双端网络。在冻结构造中，只有未冻结的边才能细分或加倍；一条边加倍后，其根到根路径上的所有其他边都会被冻结。要从冻结构造得到这种表示，考虑根路径上第一条被加倍的边。该路径上的所有其他边随即被冻结，因此这些边仍是并联边对的普通前缀和后缀。之后的所有细分和加倍都发生在它的分支内部，同样的论证可以递归应用。因此，每个串联组合至多包含一个含环部分。此论证使用的是原图的构造；它不会对联络或其观测值进行 Whitney 翻转。

引理6.7。 这样的网络秩为 γ，有 $N = \gamma+1$ 条端点路径。无序对与其简单圈一一对应，其半迹是路径传输Q_1、.. . 、 $Q_N \in S^3$的内积。若 *Gram* 秩至多为三，则每个观测纤维只有一个规范类；若 *Gram* 秩为四，则有两个规范类。

证明。 在并联组合下，终端路径计数相加，秩则相加后再加上连通分支数减一。普通前缀和后缀都不会改变计数，因此通过归纳法可证 $N = \gamma+1$。两条路径有共同的前缀和后缀，并且只在一对分支之间不同；必要时，这种差异递归地出现在某个连通分支内部。它们不同的部分构成唯一的圈。反过来，每个圈都位于一个并联分量内，或穿过两个并联分量，因而得到双射。共同的传输在 $\mathrm{Re}(Q_i Q_j^{-1})$ 中相互抵消。

固定端点规范变换后，对内部规范变换取商，终端传输是任意且完备的坐标。对于路径，这一点显而易见，并且在平行乘积下保持不变。对于前缀或后缀，其原有终端会成为扩展网络的内部顶点。该顶点以及其他新增内部顶点处的规范变换可使附加路径成为恒等传输，同时固定两个新端点处的规范变换。于是，中间网络满足归纳假设，其终端传输恰为指定值。因此，这组坐标任意且在对内部规范变换取商后完备。剩下的两个端点规范变换通过 $Q_i \mapsto aQ_ib^{-1}$ 作用，对每个 i 都有相同的$a,\ b \in SU(2)$；这些变换给出所有的 $SO(4)$。Gram数据确定一个 $O(4)$ 轨道。在秩四时，它分裂为两个 $SO(4)$ 轨道；秩低于四时，正交补反射可在固定这组坐标的同时修正定向。任意终端坐标都能实现所有这些可能性。□

定理 *6.1* 的证明。 若图是无环的，其规范商是一个点，且 $c = \beta = 0$，因此所有断言均成立。以下假设图包含一个圈。 K_4 和 D minor 根据引理 3.1、6.5 和 6.6 保证唯一性。否则，所引用的图构造和引理6.7适用。对于 $\beta \le 2$，秩至多为三，因此每个纤维都是单点。对于 $\beta \ge 3$，任意终端坐标组一般张成四维空间，并恰好给出两个等价类。具有相同 Gram 数据的竞争者自动具有相同的秩，因此也包括例外情形下的竞争者。

引理 6.3 的仿射路径证明给出了秩为 γ 的双连通图上至少 $\gamma + 1$ 条端点路径。端点不同的耳，其内部与旧图不相交，因此它与每条旧简单端点路径的并都是一条不同的新简单圈。添加一条耳会使圈秩从 γ 增至 $\gamma+1$，并至少增加 $\gamma+1$ 个环，这恰好是

$$\frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{2} - \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} = \gamma + 1$$

所提出下界中的增量。因此，记 c 为环数、 β 为当前秩，则差值 $c-\beta(\beta+1)/2$ 在开放耳分解过程中单调不减。起始圈的秩为一，且只有一个简单圈，故差值为零。在被排除的等价类中，路径配对给出等式。锚为 $(\beta,\ c) = (3,\ 7)$ 和 $(4,\ 11)$；它们的极小子式模型保持秩并将环单射映射，因此其严格超额会在添加耳的过程中持续存在。最后应用命题 2.1。□

定理 *6.2* 的证明。 将块树与桥的并集取作生成树。弦变量分成若干循环块组，每组还保留一个共同共轭。由于每个简单圈都位于某个块中，任意一组相容的局部规范类都有全局实现

$$SO(3)\backslash\prod_{B} SO(3)/Z_B,$$

其中 $Z_B \le SO(3)$ 是块弦边组的有效稳定子，如 (4.2) 所示。一般的秩一块是非中心的，其轨道为 S^2。一般的高秩块是非交换的，其轨道为 $SO(3)$。具有两个点的一般纤维的块，其两种相容等价类都是非交换的，因为可交换的组终端Gram秩至多为二。共有 2^r 个独立的局部选择。

若 $b \ge 1$，固定第一个标架以消去共同作用，从而得到 $(S^2)^a \times SO(3)^{b-1}$。否则，轴商仍然存在。由紧致性和豪斯多夫性质可知，这些都是同胚。不同的局部选择构成互不相交的紧集，因此得到所述的不交并，其中也包括奇异轴构型。对于两个循环块，从每个块中各选取一个非中心的基于基点的整体，并沿生成树将二者传输到同一个基点。将它们写作 $(a,\ u)$ 和 $(b,\ v)$，其中 $u,\ v \neq 0$。将第二个块独立旋转$R \in SO(3)$，所有观测到的简单圈迹都保持不变，而基于基点的乘积的半迹为 $ab - u \cdot Rv$。该值在非退化区间 $[ab - |u||v|, ab + |u||v|]$ 上变化，且在全局规范变换下保持不变。因此，它可以区分全局规范类。单个循环块贡献其局部纤维；树不贡献任何纤维。独立的分量规范变换产生不连通的乘积。□

例 6.8. 图 K_4 和 $K_{2,\ 4}$ 的秩均为三，且一般纤维分别包含一点和两点。对于一般数据，共享一个顶点的两个圈的纤维为 $(S^2)^2/SO(3)$，即一个闭区间；而两个不相交的圈则对每个相容的一般数据各有一个等价类。添加树不会改变纤维。

7. Finite measurements and stable recovery

前述结果使用了整个权重族，或所有简单圈迹。接下来我们缩减测量集。这里有两个不同的任务：用有限个完整谱保留每个纤维，以及根据选定的标量迹稳定地重构一般纤维。以下测量数量对应的是这两种不同的观测值。

单个固定谱通常不足以实现唯一性：五个顶点的完全图 K_5的规范商维数为 15，而其十个特征值的和已给定，因此至多提供九个实参数。对光滑的特征系数映射应用常秩定理；该映射的迹系数是固定的。这排除了这种观测具有一般唯一性的可能。

对于 $M \geq 1$ 个设置 $w^{(s)} \in (0,\infty)^E$, $1 \leq s \leq M$，令 $\boldsymbol{w} = (w^{(1)}, \dots, w^{(M)})$，并通过拼接定义其有限谱观测：

$$S_{\boldsymbol{w}} : X_G \longrightarrow \mathbb{R}^{2nM}, \qquad S_{\boldsymbol{w}}(U) = \big(\lambda_j(w^{(s)}, U)\big)_{1 \leq s \leq M,\, 1 \leq j \leq 2n}.$$

$2n$ 个条目组成的每个块均按递增顺序排列。设置列表是已知的，并按此顺序保留。

定理 7.1。设 G 连通且具有 $\beta \geq 2$，固定 $0 < a_0 < b_0 < \infty$，并令 $P = (a_0, b_0)^m$, $M = 6\beta - 5$。存在一个开稠密全测度集的列表 $\boldsymbol{w} \in P^M$，可同时对所有联络保持 W_G 的所有纤维。将有序谱拼接成 $S_{\boldsymbol{w}}$，则存在一个常数使得

$$\|W_G(U) - W_G(V)\|_\infty \leq C_{G,\boldsymbol{w}} \|S_{\boldsymbol{w}}(U) - S_{\boldsymbol{w}}(V)\|_\infty \tag{7.1}$$

对所有 U、V均成立。对于 $\beta = 1$，可取 $M = 3$；树无需任何数据。

证明。树规范给出 $X_G = (S^3)^\beta / SO(3)$。标量部分、虚部内积和三重积能够区分所有轨道；对于秩亏的情形，也可通过在正交补上进行定向校正来区分。它们将商空间实现为维数为 $d = 3\beta - 3$的紧半代数集：非交换元组的稳定子平凡；可交换的非中心元组只有β 个角度参数；中心元组则是有限个。对于秩一的情形，维数为一。

将 Tr $L_w(U)^\ell$, $1 \leq \ell \leq n$ 的系数收集起来，视为关于 w 的多项式，并组成向量 $p(U) \in \mathbb{R}^N$，其中 N 为收集到的系数总数。其紧半代数像 Y 的维数至多为 d。公式 (2.1) 给出固定的仿射关系 $W_G = Ap + c$，其中 A 是固定的线性映射，c 是固定向量。反过来，W_G 相等意味着全权重谱相等，因而系数也相等。因此，p 和 W_G 恰有相同的纤维。此外，在任意固定的取值下，1、.....、n 阶矩由牛顿恒等式确定约化的 n 度特征多项式：在 Tr 中，每个约化特征值都计数两次。因此，在这些取值下，系数向量取值相等等价于完整谱相等。

如果 Y 不是一个点，则取紧半代数集

$$K = \overline{\{(p - p')/|p - p'| : p, p' \in Y,\ p \neq p'\}}, \qquad \dim K \leq 2d.$$

每个 $q \in K$ 都是一个非零系数向量，对应一个 n 元多项式组。它在 P中的公共零点集维数至多为 $m - 1$。令 $E_{\boldsymbol{w}}$ 表示在 M 个设置下对该多项式组求值。关联集 $E_{\boldsymbol{w}} q = 0$ 的维数至多为 $2d + M(m - 1) < Mm$，当 $M = 2d + 1$时成立。由于 K紧致，其在 P^M 中的投影相对闭且维数较低。其补集即为所需的开稠密全测度集。这就是 [17], 的维数机制，其中也包括奇异半代数分层。

对于一个良好的列表，$\sigma = \min_{q \in K} |E_{\boldsymbol{w}} q| > 0$，以及

$$|p(U) - p(V)| \leq \sigma^{-1} |E_{\boldsymbol{w}}(p(U) - p(V))|.$$

右侧包含固定设置下的谱矩。如果所有谱都位于 $[0,R]$ 中，那么有序特征值误差 ϵ 给出的矩误差至多为 $2n\ell\max(1,R)^{\ell-1}\epsilon$。与 A 复合即可证明 (7.1)。要得到这个一致界，需要割线闭包；仅要求不同点对彼此分离，只能保证单射性。对于 $\beta=1$，同样的论证使用 $d=1$ 和 $M=2d+1=3$；对于树，X_G 是一个点。□

定理 7.2。 存在一个仅由图决定的简单圈集合 $\mathcal{S}_G$；当 $\beta=0$时其大小为零，当 $\beta=1$时至多为一个，而当 $\beta\geq 2$时至多为 $4\beta-5$，使得对于一般的 U 和任意的 V，

$$\tau_C(U)=\tau_C(V)\ (C\in\mathcal{S}_G)\quad\Longleftrightarrow\quad W_G(U)=W_G(V).$$

证明。 在秩为 $\gamma\geq 3$、既不含 K_4 minor 也不含 D minor 的块上，固定前四条端点路径。对于 $4\gamma-6$ 个圈，记录它们六个两两内积，以及其余每条路径的四个参考内积。参考格拉姆矩阵 A 一般为正定；给定路径 i的内积列 v_i，所有缺失的项为

$$\langle Q_i,Q_j\rangle=v_i^{T}A^{-1}v_j. \tag{7.2}$$

每个竞争者都有相同的正定 A。因此，其四个参考传输构成 $\mathbb{R}^4$的一组基，且其在此基下的坐标也为 $A^{-1}v_i$。所以，式 (7.2) 对每个竞争者都成立，无须对该竞争者作一般性假设，并且可以恢复完整的端点格拉姆矩阵。秩为一和二时，分别使用全部一个和三个圈。对于含有K_4 minor 的块，提升七个锚定回路，并为每只耳增加四个，从而得到 $7+4(\gamma-3)=4\gamma-5$。双三角形锚使用十个，得到 $10+4(\gamma-4)=4\gamma-6$。在每只耳处，先前的锚定回路和耳数据会使任意竞争者在旧图上对齐；随后四个新迹通过引理 6.4 确定整条耳传输。路径无关条件仅施加于真实联络。引理 6.3 在任何传输尚未知晓之前，就根据图选出这些路径。结合 a，b 定理 6.2 中的块计数，所有块的并集大小至多为$4\beta-3a-5b\leq 4\beta-5$，当 $\beta\geq 2$时成立。它保留局部纤维以及所有相对块旋转。□

对于选定的长度为 ℓ 的圈，令 $F(t)=F_U(t)$ 为该圈的命题 2.1 证明中得到的谱矩多项式。设 $N=\ell+1$，并选择

$$\theta_j=\frac{(2j+1)\pi}{2N},\quad t_j=\frac{1+\cos\theta_j}{2},\quad a_j=\frac{(-1)^{N+1+j}}{N}\tan\frac{\theta_j}{2},\quad 0\leq j<N. \tag{7.3}$$

令 T_N 为度为 N 的切比雪夫多项式，其特征为 $T_N(\cos\theta)=\cos(N\theta)$。对 $T_N(2t-1)$ 的平移后的根 t_j 进行拉格朗日插值，得到 $F(0)=\sum_j a_jF(t_j)$。交换求和次序并利用 $\cot x\leq 1/x$，可得

$$\Lambda_N:=\sum_{j}|a_j|\leq\frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{2j+1}\leq\frac{4}{\pi}\bigl(1+\tfrac{1}{2}\log(2N-1)\bigr).$$

对于 $\beta\geq 2$，至多需要 $(n+1)(4\beta-5)$ 个明确指定的正完整谱，才能恢复选定的环数据。对于 $\beta=1$，至多需要 $n+1$ 个；树则不需要。这里统计的是谱的数量，而 $4\beta-5$ 统计的是标量半迹的数量。如果测得的特征值误差至多为 $\epsilon\leq 1$，则由此产生的迹误差至多为 $D_{\mathcal{S}}\epsilon$。令 Δ 为 G 的最大度，定义

$$D_{\mathcal{S}}=\frac{n}{2}\max_{C\in\mathcal{S}_G}\Lambda_{|C|+1}(2\Delta+1)^{|C|-1}. \tag{7.4}$$

对于空选择集 $D_{\mathcal{S}}=0$。在这些设置下，真实谱位于 $[0,2\Delta]$ 中。该估计保留了高阶矩带来的放大效应。

注 7.3。 在一个秩至少为二的双连通块上，根据常秩定理，任何具有有限泛型纤维的 C^1 实值观测映射都至少需要 $3\beta - 3$ 个坐标。该界限 $4\beta - 5$ 并未声称是最优的。对于此选择，其泛型限定是必要的：$K_{2,\,6}$ 上的终端元组 $(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ i,\ i)$ 和 $(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ i,\ j)$ 在十四个参考对上取值一致，而在被省略的那一对上取值不同，其值分别为一和零。

7.1. 完整纤维的稳定恢复。我们度量第 2 节中定义的完整纤维 $\mathcal{F}_U \subset X_G$之间的误差。固定一棵生成树 T 和弦代表元 $q,\ p \in (S^3)^\beta$。使用最大弦商距离

$$d_{T,\infty}([q],[p]) = \min_{R\in SO(3)} \max_j |q_j - R\cdot p_j|,$$

这里，$[q],\ [p]$ 是相应的规范类，R 旋转其虚部。对于非空紧致子集 $A,\ B \subset X_G$，由 $d_{T,\,\infty}$ 诱导的豪斯多夫距离为

$$d_H(A,B) = \max\left\{ \sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d_{T,\infty}(a,b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d_{T,\infty}(a,b) \right\}.$$

对于树，商空间是一个点，距离定义为零。欧几里得乘积商度量与之至多相差一个因子 $\sqrt{\beta}$。

对于下一命题中的任一种有限谱设置列表，记 $S = S_{\boldsymbol{w}}$ 为固定的观测映射。最小残差估计通过在 $x \in X_G$上取最小值，来最小化 $S(x)$ 与测得的谱向量之间的最大坐标差异。

命题 7.4。若 G 是泛型刚性的，则固定取自定理 7.1 或显式选定的圈设置的观测设置。存在一个泛型正则轨迹 $\Omega_{\mathrm{reg}} \subset X_G$，使得对于每个紧致的 $K \subset \Omega^{\mathrm{reg}}$，

$$d_{T,\infty}(x,y) \le C_K \|S(x) - S(y)\|_\infty, \qquad x \in K,\quad y \in X_G.$$

因此，在存在谱噪声 ϵ 的情况下，最小残差估计的误差至多为 $2C_K\epsilon$。

证明。 令 H 为在固定设定s下 $\det(zI - L_{w^{(s)}}(U))$ 的非首项系数拼接而成的向量。以这个解析的特征系数映射代替有序特征值。主商分层具有解析局部截面：将两个不平行虚向量分别旋转至正的第一坐标轴，以及具有正第二坐标的第一—第二坐标平面内。秩为一时，使用非中心角。其补集的 Haar测度为零。在每个坐标球上，最大微分秩必定等于商空间维数。否则，常秩定理会在一个开集上产生正维的局部纤维，这与一般情形下的全纤维唯一性相矛盾。因此，秩下降点属于真解析零集。去掉这些点，再与一般情形下全纤维唯一性的轨迹取交，便得到 Ω^{reg}；提升至规范坐标后，该集合仍具有满测度。在此轨迹上，H 和 S的整个纤维均为单点：定理 7.1，或定理 7.2 及上述插值公式，将这些纤维识别为威尔逊纤维。

局部逆映射和 K 的有限覆盖为距离较近的点对提供了统一估计。满足 $x \in K$ 且 $d_{T、\,\infty}(x、y) \ge \delta$ 的点对构成一个紧致集，在该集合上，$|H(x) - H(y)|$ 有正的下界，因为 x 处的整个纤维是单点集。商空间直径处理这些较远的点对，包括退化竞争者。在固定的谱盒上，特征系数关于特征值满足 Lipschitz 连续性。残差最小化会引入两项测量误差。特征值交叉不会造成困难。□

下文的有效实代数过程对于有理数或实代数输入是有限的。其输出是等价类的参数化集合，其中包含每个离散分支以及所有相对块旋转。

定理 7.5。 对于每个连通图以及定理 *7.2* 中的环选择，都存在一个具有以下性质的有限算法。给定实代数估计 y_C 和非负实代数误差界 η，满足 $|y_C - \tau_C(U)| \le \eta$，该算法要么报告未认证结果，要么生成一个紧致参数化集合 $\mathcal{F} \subset X_G$ 和一个计算所得的界 E_G，满足

$$d_H(\widehat{\mathcal{F}}, \mathcal{F}_U) \le E_G. \tag{7.5}$$

对于固定一般位置集合中的每个真值 U，所有足够小的可容许噪声都会带来成功，并且 $E_G = O_{U,\,G}(\eta)$。结合(7.4)，这给出了具有 $O_{U,\,G}(\epsilon)$纤维误差的有限谱重构。

该构造首先在每个刚性锚点上认证一个逆界，然后沿耳传播误差。在 Gram 情形中，它保留两个定向分支，并对它们的位移进行界定。最后，独立的块旋转生成整个近似纤维。附录 A 给出了认证测试及相应的误差递推。

有限代数程序可能耗费大量资源，而且误差界可能沿着较长的耳链不断增大。若数值实现声称具有严格认证，就需要对解和归一化误差进行认证。对于非连通图，则按连通分支处理，并采用最大乘积度量。这些估计均未声称在每个退化联络处都存在统一的逆常数。

8. 受限边控制

固定一个受控边集 $F \subset E$，并在其他边上赋予权重 $a = (a_e)_{e \in E\setminus F} \in (0,\infty)^{E\setminus F}$。控制向量为 $x = (x_e)_{e\in F} \in (0,\infty)^F$； $L_{(x,a)}$ 在 $e \in F$ 上赋予权重 x_e，在其他边上赋予权重 a_e。对于这些固定数据，我们要问：对于每个正控制向量，若谱相等，是否意味着所有原始简单圈的威尔逊迹都相等？这涉及威尔逊可观测性；威尔逊纤维内部的任何规范变换歧义仍由定理 4.1 描述。

定理 8.1。 对于每个有限标记简单图、控制集 F 和固定的正实代数权重 a，威尔逊可观测性都有一个有限的精确判定程序。若不成立，该程序会返回两个实际联络，它们具有相同的受控谱，却有不同的威尔逊数据。将 a 保持为符号量，可得到针对指定权重以及所有正权重的精确半代数条件。

证明。 使用一个生成森林，并令 q, p 为两组弦四元数。对每组四元数施加一个单位范数方程。对于整个图，构造

$$\chi_q(\lambda, x; a) = \det_{\mathbb{C}}(\lambda I - L_{(x,a)}(q)).$$

令 $c_\nu(q,p;\,a)$ 表示 $\chi_q - \chi_p$ 中关于 (λ, x) 的每个系数，其中 ν 对这些变量中的单项式进行索引，并令

$$\Delta_W(q,p) = \sum_{C \in \mathcal{C}(G)} (\tau_C(q) - \tau_C(p))^2.$$

所有这些都是实四元数坐标中的实多项式。可观测性恰好在以下有限系统存在实解且带有辅助标量 $r \in \mathbb{R}$ 时失效：

$$|q_j|^2 = |p_j|^2 = 1, \qquad c_\nu(q,p;a) = 0, \qquad r\Delta_W(q,p) - 1 = 0. \tag{8.1}$$

事实上，实际发生的碰撞可以置于森林规范下，并且对每个控制量都固定为同一个联络。在正控制正交象限上的相等关系是一个多项式恒等式，因此所有系数都为零。威尔逊数据不相等会给出 $r = 1/\Delta_W$。反过来，任意实数解都会在实际弦上给出单位四元数传输，使所有控制量对应的特征多项式相等，并且原始简单圈迹不同。

有效实量词消去与采样 [3, Section 2]可以判定该系统，并在输入为代数数时返回代数见证。对于所有正固定权重，还要将每个 a_e 设为未知量，并用辅助实变量 s_e施加 $a_e s_e^2 - 1 = 0$ 。一个解恰好对应于在某个正权重下发生的失效。若改为消去四元数变量和辅助变量，则会返回各个实数 a的参数条件。森林具有 $\Delta_W = 0$ ，因此最后一个方程组不相容；空控制集、孤立顶点和非连通图也都包含在内。□

对于非连通图，在此检验中必须保留完整的特征多项式。两个互不相交的单位权三角形，其半迹分别为 $(1,-1)$ 和 $(-1,1)$，它们的完整谱相同，但带标记的威尔逊数据不同。半迹为 c 的三角形具有约化多项式 $\lambda^3-6\lambda^2+9\lambda-2+2c$；这两个乘积相同。因此，各连通分支分别可观测，并不意味着从其无标记特征值并集中也可观测。森林规范构造直接利用了这一并集。

8.1. 有根响应。 对于在一个根处与受控核心相连的附件，舒尔消元明确揭示了信息损失。我们固定连接权重，并改变指定的核心权重。只有一对标量响应多项式传递到核心，而不同的附件威尔逊数据可能具有相同的响应。我们计算这对多项式，确定三角形花束的核，然后给出一组核心权重，使受控谱能够恢复这对多项式。

8.1.1. 根消元与粘合。 对于一个有 m 个非根顶点的有根图 J，记 $P_J(z)$ 为其首一的度为 $m+1$ 的约化特征多项式，定义为 $\det_{\mathbb{C}}(zI-L_J) = P_J(z)^2$。令 $D_J(z)$ 为相应的删根主矩阵的首一度为 m 的多项式，并设

$$C_J(z) = P_J(z) - zD_J(z).$$

所有主删去都保留原有的拉普拉斯度。因此，被删去的根边权重 a仍会对其另一个端点的对角线贡献 a 。在 D_J 的零点之外，根舒尔补是一个标量四元数

$$z + \frac{C_J(z)}{D_J(z)}, \qquad \frac{C_J(z)}{D_J(z)} = -\delta + O(z^{-1}), \tag{8.2}$$

其中 $\delta = \sum_{e\ni\text{根}} w_e$ 是 J 中加权的根度。舒尔补是标量，因为它是一个一乘一的自对偶四元数矩阵。对于删根谱之外的实数 z ，分块消元给出 $\det_{\mathbb{C}}(zI-L_J) = D_J(z)^2$ 乘以该标量舒尔补的平方。首一归一化（等价地，其在无穷远处的渐近行为）确定恒等式 $P_J/D_J = z + C_J/D_J$，不存在符号歧义。

假设核 K和 J仅在根处相交。令 P_K， R_K分别表示核的约化特征多项式和删根多项式，其中度仍取原核的度。消去 J的非根变量后，会在 $zI - L_K$的根对应的对角元上加上 C_J/D_J。约化行列式关于该实对角元是线性的，因此有

$$P_{K\cup J} = D_J P_K + C_J R_K. \tag{8.3}$$

这些公式首先只在有限个极点之外成立；乘以分母后，它们就成为多项式恒等式。因此，等同的对（D_J， C_J）在与任意相同的核粘合后，对于其允许权重的每一种选择，都给出相同的谱。这一蕴含不需要对该核作任何重构假设。

8.1.2. 三角形花束与极点图。令 J 由 r 个仅在根处相交的三角形组成。在花瓣 j上，两条根边的权重为$\alpha_j,\ \beta_j>0$，剩余边的权重为 $\gamma_j>0$。将根边作规范变换使其成为恒等式，并将 Q_j 记作内部传输，将$\tau_j=\operatorname{Re}Q_j$。每个向量 $\tau\in[-1,1]^r$ 都可以实现：可以独立地选择

$$Q_j=\operatorname{diag}\big(\tau_j+i\sqrt{1-\tau_j^2},\tau_j-i\sqrt{1-\tau_j^2}\big). \tag{8.4}$$

定义

$$H_j(z)=(z-\alpha_j-\gamma_j)(z-\beta_j-\gamma_j)-\gamma_j^2,\qquad c_j=\alpha_j\beta_j\gamma_j,$$
$$M_j(z)=\alpha_j^2(z-\beta_j-\gamma_j)+\beta_j^2(z-\alpha_j-\gamma_j).$$

删去的块及其逆为

$$K_j=\begin{pmatrix}z-\alpha_j-\gamma_j & \gamma_jQ_j\\ \gamma_jQ_j^* & z-\beta_j-\gamma_j\end{pmatrix},\qquad K_j^{-1}=\frac{1}{H_j}\begin{pmatrix}z-\beta_j-\gamma_j & -\gamma_jQ_j\\ -\gamma_jQ_j^* & z-\alpha_j-\gamma_j\end{pmatrix}.$$

因此，根修正项为 $(\alpha_j,\beta_j)K_j^{-1}(\alpha_j,\beta_j)^T=(M_j-2c_j\tau_j)/H_j$，是一个标量。因此

$$D_J=\prod_j H_j,\qquad \frac{C_J}{D_J}=-\delta-\sum_j\frac{M_j}{H_j}+2R_\tau,\qquad R_\tau=\sum_j\frac{c_j\tau_j}{H_j}, \tag{8.5}$$

其中 $\delta=\sum_j(\alpha_j+\beta_j)$。对联络的依赖恰好是有理函数 R_τ.

每个 H_j 都有两个不同的正根 $l_j<u_j$：其判别式为 $(\alpha_j-\beta_j)^2+4\gamma_j^2>0$，且根和与根积均为正。构造一个多重图 $\mathcal{P}$，其顶点为不同的极点值，第 j 条边连接 l_j 与 u_j。相等的分母会产生平行边，必须予以保留。将每条边从 l_j 定向到 u_j。令 B 为带符号关联矩阵：列 j 在 l_j 处为 -1，在 u_j处为 $+1$，其余位置为零。设

$$s_j=\frac{c_j}{u_j-l_j}>0,\qquad \mathcal{L}=B\operatorname{diag}(s_1,\dots,s_r).$$

这里的森林不包含由平行边构成的长度为二的环。

命题 8.2 (极点图判据)。 对于根三角形花束上的固定正权重，当且仅当 $\mathcal{P}$是森林时，响应对 (D_J,C_J) 能够区分所有可实现的简单环威尔逊数据。对于每个 $\tau\in[-1,1]^r$，其完整的威尔逊坐标响应纤维为

$$(\tau+\ker\mathcal{L})\cap[-1,1]^r. \tag{8.6}$$

若 τ位于立方体内部，则该纤维的维数为 $r-|V(\mathcal{P})|+\kappa(\mathcal{P})$，其中 κ 表示连通分支的数量。此断言针对的是威尔逊坐标，而非规范等价类。

证明。部分分式给出

$$\frac{c_j}{H_j(z)}=s_j\left(\frac{1}{z-u_j}-\frac{1}{z-l_j}\right).$$

R_τ 的留数向量因此为 $\mathcal{L}\tau$。具有不同 v 的有理函数 $1/(z-v)$ 线性无关，这一点可通过乘以 $z-v$ 并在 v 处求值看出。因此，响应相等恰好等价于在 $\mathcal{L}$ 下相等，从而证明了 (8.6)。B 的左核由在每个连通分量上取常值的向量构成，因此秩 $\mathcal{L}=$秩 $B=|V(\mathcal{P})|-\kappa(\mathcal{P})$。其核为零当且仅当该图是森林。若核非零，则一个足够小的非零核向量和零向量都位于立方体内；(8.4) 实现了一次实际碰撞。在内部点处，仿射核内的一个邻域仍包含在立方体中，因此得到维数公式。在边界点处，立方体可能会使维数降低，精确表述为交集 (8.6)。□

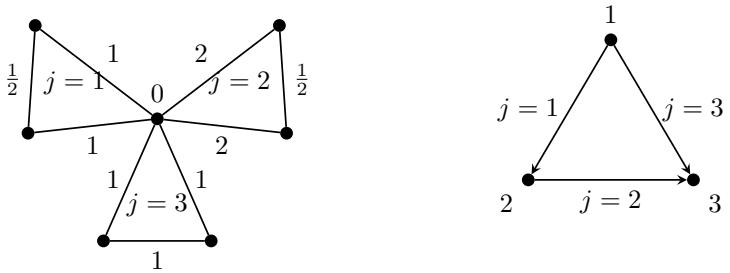
在森林中，叶剩余决定其唯一关联的 τ_j；减去其贡献并删除该边，即可递归恢复。反过来，将环流除以正因子 s_j，便得到一个核向量。每个没有孤立顶点、顶点带有互不相同正标签的无自环极点多重图，都可以实现：对于端点值为 $l < u$ 的一条边，取 $\alpha = \beta = l$ 和 $\gamma = (u-l)/2$。即使恢复了所有 τ_j，不同花瓣 holonomy 的相对轴仍可能不可见。这种连续规范歧义已在定理 6.2 的循环块中有所展示。

例 8.3（三个不同分母发生实际碰撞）。取以下三个权重三元组

$$(\alpha,\beta,\gamma) = (1,1,\tfrac{1}{2}), \quad (2,2,\tfrac{1}{2}), \quad (1,1,1).$$

Then

$$H_1 = (z-1)(z-2), \quad H_2 = (z-2)(z-3), \quad H_3 = (z-1)(z-3), \qquad (c_1,c_2,c_3) = (\tfrac{1}{2},2,1).$$



(a) J (b) $\mathcal{P}$

FIGURE 4. 例 8.3 中的三瓣连接及其极点图。(a) 以 0 为根的连接 J；边标签为固定权重，且 j 为花瓣编索引。(b) $\mathcal{P}$ 的顶点是分母 H_j 的数值极点值；边 j 连接 H_j 的两个根，方向从较低极点指向较高极点。J 中的三个简单圈对应于 $\mathcal{P}$的三条边；沿 $\mathcal{P}$ 的底层无向圈进行有符号流动，会产生响应的一个核方向。

图 4 将该连接与分母极点对应起来。极点图是一个三角形，并且

$$\frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2} - \frac{2}{H_3} = \frac{(z-3)+(z-1)-2(z-2)}{(z-1)(z-2)(z-3)} = 0.$$

因此，$\tau = (0,\ 0,\ 0)$ 与 $\tau' = (1/2,\ 1/8,\ -1/2)$ 具有相同的响应；(8.4) 给出了具有这些数据的实际联络。它们不同的简单圈迹排除了规范等价。对于这两个联络 $R_\tau = 0$, $\delta = 8$，以及 $(M_1,\ M_2,\ M_3) = (2z-3,\ 8z-20,\ 2z-4)$。(8.5) 中代入后得到相同的约化多项式

$$P_J = (z-1)(z-2)(z-3)(z^4 - 14z^3 + 47z^2 - 49z + 11). \tag{8.7}$$

这个 14 维复算子的完整特征多项式为 P_J^2。根据 (8.3)，对于所有允许的核心控制参数，将这两个附着部分与任意相同的核进行粘合后，它们仍然等谱。因此，成对不同的分母并不足以实现分离。该例固定了连接权重，并不与全边权等价相矛盾。

8.1.3. 双控制核心分离。 从受控谱反向推导附着响应时，需要使用两个控制变量中的最高阶谱系数。这些系数首先确定四个核心迹，随后其余的比较将附着响应区分开来。

设核为 K_4，顶点为 0、1、2、3，以 0 为根，控制为 $x = w_{01}$、 $u = w_{02}$，固定正权为 $(w_{03}$、 w_{12}、 w_{23}、 $w_{31}) = (v$、 p、 q、 $h)$。将根边规范变换为恒等元，并令 $a = U_{12}$,$b = U_{23}$, $d = U_{31}$；按照第 2 节的输运约定， a 表示从 2 到 1 的传输。七个简单环半迹为

$$\operatorname{Re} a,\ \operatorname{Re} b,\ \operatorname{Re} d,\ \operatorname{Re}(ab),\ \operatorname{Re}(bd),\ \operatorname{Re}(da),\ \operatorname{Re}(abd).$$

一个固定的有根附着 J 仅在 0 处与核相接，具有 m 个非根顶点，根度为 $\delta > 0$。竞争者使用相同的图和正权重。用 P_i、 R_i 表示裸核多项式，用 D_i、 C_i 表示附着对，其中 $i = U$、 V。对于每个这样的量 Z，记作 $\Delta Z = Z_U - Z_V$。

引理 8.4 (谱提取)。 对于每个 x、 $u > 0$ 都具有相同谱的一对，以下四个量

$$\operatorname{Re} a, \quad \operatorname{Re} b, \quad \operatorname{Re} d, \quad \operatorname{Re}(bd)$$

是这对中的公共量。令

$d_3 = v + h + q, \quad t = z - d_3, \quad k = d_3 + 2p(1 - \operatorname{Re} a), \quad N = |v + hd^* + qb|^2, \quad Q = (3z - k)t - N,$

the common k, N *satisfy*

$$t\Delta C = -Q\Delta D, \qquad \deg \Delta D \le m - 3. \tag{8.8}$$

次数上界包含零多项式。

证明见附录 B。

命题 8.5 (响应分离)。 对于上述等谱对，若

$$h \neq q \qquad or \qquad h = q \quad and \quad v \ge h + 2p, \tag{8.9}$$

则 $(D_U, C_U) = (D_V, C_V)$ 且全部七个核心简单环半迹均相同。不满足 (8.9) 时，只有在以下情况下才可能出现响应不同：

$$h = q, \qquad \delta = h + p(1 + \operatorname{Re} a) - v. \tag{8.10}$$

这一必要条件并不意味着不等的响应可实现。

证明见附录 B。

对于这一核心族，(8.9) 将所有简单圈威尔逊数据的恢复归结为由附着映射 $U_J \mapsto (D_J,\ C_J)$ 进行分离。每个简单圈都位于两个部分之一；根据 (8.3)，核心迹和附着响应决定了受控多项式。反过来，将一次实际的响应碰撞与一个固定核心粘合起来，就会得到一次实际的威尔逊碰撞。因此，对于三角形附着，命题 8.2 给出了这一受控实验的森林判据。例 8.3 给出了一个涉及实际联络的失败案例。在 (8.9) 之外，可以通过第 8 节的一般判定程序检验必要的补偿条件 (8.10)。

9. Scalar on-site terms and higher-rank limitations

设 $v^0 \in \mathbb{R}^n$ 和 $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 已知，并令 $A_w(U)$ 为块邻接矩阵：在边上，(x, y) 对应的块为 $w_{xy}U_{xy}$，其他位置为零。考虑

$$H_w(U) = \operatorname{diag}(v^0 + Bw) \otimes I_2 - A_w(U). \tag{9.1}$$

这里 $\otimes$ 是克罗内克积，因此每个顶点处的标量势在其二维纤维上作用为 I_2 的倍数。所有联络使用相同的对角数据。 $B=0$ 的情形允许固定的标量位点势，包括当 $v^0=0$ 时的负邻接算子。

独立的标量对角变量通过特征行列式编码主子式。复厄米矩阵的主子式映射之像将在 [1]中研究。在 (9.1) 中，每个顶点上的两个坐标共享同一个标量势。

命题 9.1. (9.1) 的全权重谱纤维恰好与 W_G的相同。上述结构性、完整纤维、有限测量和稀疏环结论仍然成立。稳定性满足相应的谱范数界。当 v^0、 B 为实代数时，适用有效的有限比特代数重构。

证明。 孤立环矩 $\operatorname{Tr} H_{w_C(t)}(U)^\ell$ 关于 t的次数仍至多为 ℓ。在零点处，只有该圈保留在对角线之外。在 ℓ 步中绕行一周的游走不可能包含对角步，所有非绕行项都与联络无关。因此，它与恒等联络的差恰好是 (2.1)。反向蕴含由任意标量对角下的自对偶行列式展开得出。

矩次数和商空间维数均保持不变，因此系数与割线证明仍然适用。对于 $(0,1]$，中的权重，所有特征值的绝对值均不超过

$$R_* = \max_x \left(|v_x^0| + \sum_e |B_{xe}| \right) + \Delta.$$

在 (7.4) 中将 $2\Delta+1$ 替换为 R_*+1；重构的其余部分使用相同的环数据。精确的代数判定需要有效的代数系数，如前所述。□

对于 $SU(r) = \{Q \in \mathbb{C}^{r\times r} : \ Q^*Q = I_r, \ \det Q = 1\}$，使用相应的厄米算子，其对角项为实标量，边权为实标量，并令 U 为传输的逐项复共轭。

命题 9.2。 对于 $r \geq 3$，每个含有圈的图都一般至少存在两个不等价的联络，其全权重谱相同。在此模型中，森林恰好是具有一般唯一性的图。对于单个圈，一般情况下整个纤维恰有两个等价类。

证明。 由于 $H_w(\overline{U}) = \overline{H_w(U)}$，且矩阵是厄米的，其实谱保持不变。在选定的圈上，条件 $\operatorname{Im}\operatorname{tr}\operatorname{Hol}_U(C) \neq 0$ 是一般成立的：这是一个非零的实解析条件，例如，在一条边上放置 $\operatorname{diag}(e^{ia}, e^{ib}, e^{-i(a+b)}, 1, \ldots, 1)$，其中选取合适的 a，b，即可验证这一点。此时迹与其复共轭不同，因而排除了规范等价。森林没有自由弦，且始终只有一个等价类。

对于长度为 ℓ 的圈，经过树规范变换并对全纯进行对角化，可得到相位为 θ_1、……、θ_r 的标量磁环，这些相位之和模 2π 为零。对于任意固定正权重，每个标量特征多项式为

$$P_w(\lambda) + c_w \cos\theta_j, \qquad c_w = 2(-1)^{\ell-1} \prod_{e\in C} w_e \neq 0,$$

其中 P_w 已知、首一且与相位无关。事实上，在 $\det(\lambda I - H)$ 中，两个有向置换循环的符号为 $(-1)^{\ell-1}$，并乘以正的标量权重因子和相位因子。完整多项式为 $\prod_j (P_w(\lambda) + c_w\cos\theta_j)$，它确定了余弦多重集，因为非恒定多项式的代入是单射的。

一般而言，这些余弦彼此不同，并且 holonomy 特征值的任何非空真子集的乘积都不等于 1 或 -1。一个精确的例外集由以下判别式的消失给出

$(Q+Q^{*})/2$ 或当 $1\le k<r$ 时 $\det(\bigwedge^{k}Q-I)\det(\bigwedge^{k}Q+I)$ 的消失，其中 Q 是全纯，$\bigwedge^{k}Q$ 是其在 $\mathbb{C}^{r}$ 的第 k 个外幂上的诱导作用。这些实解析条件是严格的：在行列式为一的环面上，它们排除了有限多个真相位关系。它们的补集是开稠密集，且具有满 Haar测度。

任意竞争者经过置换后，其特征相位为 $\varepsilon_j\theta_j$，其中 $\varepsilon_j\in\{1,-1\}$。其行列式为 1 的条件给出 $1=\prod_j e^{i\varepsilon_j\theta_j}=(\prod_{\varepsilon_j=-1}e^{i\theta_j})^{-2}$，因为 $\prod_j e^{i\theta_j}=1$。因此，符号被翻转的特征值之积属于 $\{1,-1\}$。所以，被排除的真子集相位关系迫使翻转的要么一个也没有，要么全部翻转。在额外的通用非实迹集合上，这两种情况对应两个不同的共轭类，且都能实现，并且对所有权重都等谱。□

这种障碍源于厄米谱问题的基本反幺正对称性。对于 $SU(2)$，复共轭是内共轭，不会产生新的规范类。在特殊点，高秩纤维可能更大：对于 $SU(4)$，相位 $(\pi/6,\ 5\pi/6,\ \pi/4,\ 3\pi/4)$ 中，每个标出的相位对的乘积均为 -1。分别反转任一相位对，会得到四个不同的等价类，其所有权重下的圈谱都相同。

10. Further questions

上述构造给出了所有例外纤维，以及适用于任意受限控制的算法判据。关于高效实现和所得半代数条件的图描述，仍有定量问题有待研究。在更高秩的情形下，首先应当考虑模复共轭的刚性；可能还存在其他歧义，并且四元数单圈行列式约化不再以相同形式适用。

对于受限标量控制，非零矩多项式可能在可达权重的低维集合上恒等为零。此时，有限测量论证需要额外的分离假设。若能为该假设建立直接的图判据，将有助于处理只有少数可调耦合的实验。定量问题包括必要标量观测值与 $4\beta-5$ 个选定圈之间的差距，以及其重构的条件数。

Acknowledgments

作者感谢 Bobo Hua 教授的支持。

Use of AI tools

作者使用了 OpenAI 的 Codex 来研究候选构造、检查计算，并邀请不同的 AI 对证明草稿进行独立审阅。作者确定了工作的方向，核实了所有数学论断和论证，完成了最终稿件，并对其内容承担全部责任。

References

1. Abeer Al Ahmadieh 和 Cynthia Vinzant, *Determinantal representations and the image of the principal minor map* **2024** 2024 10, 8930 8958 , 《国际数学研究通知》 ( ), 第 – 期。 2. Afonso S. Bandeira、Amit Singer 和 Daniel A. Spielman, *A Cheeger inequality for the graph connection Laplacian* **34** 2013 4, 1611 1630 , 《SIAM矩阵分析与应用杂志》 ( ), 第 – 期。 3. Saugata Basu, *Algorithms in real algebraic geometry: A survey*, arXiv:1409.1534, 2014 年。 4. Francesco Belardo、Maurizio Brunetti、Nolan J. Coble、Nathan Reff 和 Howard Skogman, *Spectra of quaternion unit gain graphs* **632** 2022 15 49 , 《线性代数及其应用》 ( ), –。

5. Matteo Cavaleri 和 Alfredo Donno, *On cospectrality of gain graphs*, 《特殊矩阵》 **10** (2022 年), 343–365。 6. Matteo Cavaleri、Alfredo Donno 和 Stefano Spessato, *Godsil–McKay switchings for gain graphs*, 《电子线性代数杂志》**41** (2025年), 21–48。

7. William M. Goldman, *Trace coordinates on Fricke spaces of some simple hyperbolic surfaces*, 《Teichmüller理论手册》第二卷，IRMA数学讲义与理论物理讲义，第13卷，欧洲数学学会，苏黎世，2009年，第611–684页。 8. Richard Kenyon, *Spanning forests and the vector bundle Laplacian*, 《概率年刊》**39** (2011年)，第5期，1983–2017。 9. Ivan I. Kyrchei、Eran Treister 和 Volodymyr O. Pelykh, *The determinant of the Laplacian matrix of a quaternion unit gain graph* **347** 2024 6, 113955 , 《离散数学》( )，第 期。 10. Thierry Lévy, *Wilson loops in the light of spin networks*, 《几何与物理杂志》**52** (2004年)，382–397。 11. Boris S. Mityagin, *The zero set of a real analytic function*, 《数学札记》**107** (2020年)，第3–4期，529–530。 12. Seongmin Ok 和 Carsten Thomassen, *On the minimum number of spanning trees in k-edge-connected graphs*, 《图论杂志》**84** (2017年)，第3期，286–296。 13. Claudio Procesi, *The invariant theory of $n \times n$ matrices*, 《数学进展》**19** (1976年)，第3期，306–381。 14. Armin Rainer, *Perturbation of hyperbolic polynomials and related lifting problems*, 预印本。 15. T. R. Ramadas, *Symplectic geometry of character varieties and SU(2) lattice gauge theory I*, 《数学物理通讯》**405** (2024年)，99。 16. Amit Singer 和 Hau tieng Wu, *Vector diffusion maps and the connection Laplacian*, 《纯粹与应用数学通讯》**65** (2012年)，第8期，1067–1144。 17. Eduardo D. Sontag, *For differential equations with r parameters $2r+1$ experiments are enough for identifi-* , , 《非线性科学杂志》( )，–。 *cation* **12** 2002 553 583 18. Jay Watson, *Solution of the SU(2) Mandelstam constraints*, 《物理快报B辑》**323** (1994年)，385–392。 19. Kenneth G. Wilson, *Confinement of quarks*, 《物理评论D辑》**10** (1974年)，第8期，2445–2459。 20. Thomas Zaslavsky, *Biased graphs. VII. contrabalance and antivoltages*, 《组合理论杂志B辑》**97** (2007年)，第6期，1019–1040。

Appendix A. Certified reconstruction estimates

定理 *7.5* 的证明。对于树，输出其唯一的规范类，满足 $E_G = 0$。否则，我们在相容的树规范变换下构造局部代表元，然后组合各块。

K_4 和双三角形锚点。对于 K_4，要求 $p = \det(\mathrm{Im}\ A,\ \mathrm{Im}\, B,\ \mathrm{Im}\ C) \neq 0$，并使用其前两个虚向量构成的正定标架。对于 D，要求 $p = F_1F_2F_3 \neq 0$，并使用引理 6.5 中的标架。这两个规范代表元在这些定义域上都是唯一、解析且半代数的。其七维或十维坐标的观测映射 h是单射且为浸入映射。对于 K_4，正定 Gram 重构给出了微分秩。对于 D，非角度坐标可由前七个数据平滑地确定。将最后三个观测值替换为相应的余弦值（减去已知的非角度项，并除以非零的横向长度因子），角度雅可比矩阵的各行为 $(-s_1,\ 0)$，$(0,\ -s_2)$，$(s_3,\ -s_3)$，其中

$$s_1 = \sin(\theta_B - \phi), \quad s_2 = \sin(\theta_C - \phi), \quad s_3 = \sin(\theta_C - \theta_B - \phi).$$

秩亏会迫使这三个量中有两个为零。这三种情况分别意味着 $\sin(\theta_C - \theta_B) = 0$、$\sin(\theta_C - 2\phi) = 0$ 或 $\sin\theta_B = 0$，而根据 $p \neq 0$，这些情况都不可能发生。

令 y 为与观测映射 h采用相同坐标顺序的测量锚点迹向量。考虑满足 $\|h(x) - y\|_\infty \le \eta$ 的单位锚点组所构成的紧可行集。该集合包含真实的锚点组。通过有效实量词消去和采样 [3, 第 2] 节中的方法，可以判定该集合是否避开 $p = 0$。若未避开，则报告为未经认证。否则，搜索 $\delta = 1,\ 1/2,\ 1/4,$ ……，找出首个使 $|p| \ge \delta$ 在整个可行集上成立的阈值，并对一个可行锚点组进行采样。规范化中的正平方根是半代数约束。令 A_δ 为满足 $|p(x)| \ge \delta$的规范化单位锚点组集合 x。该集合是紧致的，因为 p 将其标架分母限制在远离零的范围内。单射浸入 h 的局部逆映射以及对远距离点对的紧分离给出一个有限的 C_δ，使得

$$\max_j |x_j - x'_j| \le C_\delta \|h(x) - h(x')\|_\infty, \qquad x, x' \in A_\delta. \tag{A.1}$$

搜索 $C = 1$、2、4、……，并检验这个普适的半代数不等式。其存在性保证有限终止。因此，在规范规范下，某个采样锚的变量误差至多为 。对于 ，这些变量是树规范弦。对于 ，实际弦为 、 A、 B、 D_0C，

因此，最后一条弦的误差至多为 D_0 和 C 中误差之和。所以，耳递归的初始弦界为

$$E_0 = \begin{cases} 2C_\delta\eta, & K_4 \text{ anchor}, \\ 4C_\delta\eta, & D \text{ anchor}. \end{cases}$$

具有不确定旧路径的耳。 将分支森林纳入锚树，并将每个新耳除最后一条边外的所有边纳入不断扩展的树中。只有其总传输 q_i 是新的。在本证明$\|\cdot\|_2$ 表示由欧几里得向量范数诱导的矩阵算子范数。令 R_i 由四个真实旧路径行组成，令 R_i 表示根据恢复的单位边计算出的各行。若旧弦误差至多为 E_{i-1}，且 L_i 是所选路径上旧非树边数量的最大值，则望远镜乘积给出

$$\|R_i - \widehat{R}_i\|_2 \le 2L_iE_{i-1}.$$

首先检验 R_i 是否可逆；否则报告未认证。对于其最小奇异值σ_i，选择一个经认证的界 $\sigma_i/2 \le s_i \le \sigma_i$。令 y_i 为该耳的四个测量圈迹向量，其行顺序与 $\widehat{R}_i$一致。求解 $z_i = \widehat{R}_i^{-1}y_i$ 并令 $h_i = (2\eta + 2L_iE_{i-1})/s_i$。若$h_i \ge 1$，则报告未认证。否则，记 $c_i = R_iq_i$ 为真实的四个圈迹，我们有

$$\widehat{R}_i(z_i - q_i) = (y_i - c_i) + (R_i - \widehat{R}_i)q_i, \qquad |y_i - c_i| \le 2\eta,$$

因此 $|z_i - q_i| \le h_i < 1$。特别是 $z_i \ne 0$，并且

$$\left|\frac{z_i}{|z_i|} - q_i\right| \le |1 - |z_i|| + |z_i - q_i| \le 2h_i.$$

使用递推关系

$$E_i = \max\left\{E_{i-1}, \frac{4(\eta + L_iE_{i-1})}{s_i}\right\}. \tag{A.2}$$

这也计入了旧路径中的误差，而不仅仅是新测量值中的误差。此外，成功意味着$2L_iE_{i-1} < s_i$，因此真实标架也是可逆的。因此，证书成功本身就证明了构造中所用的局部单点纤维是合理的。

格拉姆块与定向对。 对于一个块 B，它既不包含 K_4 也不包含 D 作为 minor，记作 $\beta_B = |E(B)| - |V(B)| + 1$，并令 $N = \beta_B + 1$, $k = \min(4, N)$。将前 k 条路径用作参考。构造它们的测量格拉姆矩阵 A_y，其对角线元素为 1。记最小特征值为 $\lambda_{\min}$，检验 $\rho = \lambda_{\min}(A_y) - 3\eta > 0$。为选定观测值任取一个可行单位元组；真实元组保证其非空。其参考矩阵和真实矩阵的最小特征值都至少为 ρ，因为它们与 A_y 的差矩阵中每一行至多有三个误差，且每个误差的大小为 η。将这些矩阵记为 A，A'，将交叉参考列记为 v_i，v_i'。它们的元素差异至多为 $\delta_g = 2\eta$。对于 $S = A^{1/2}$ 和 $S' = (A')^{1/2}$，由西尔维斯特恒等式和积分解可得

$$\|S - S'\|_2 \le \frac{3\delta_g}{2\sqrt{\rho}}, \qquad \|S^{-1} - (S')^{-1}\|_2 \le \frac{3\delta_g}{2\rho^{3/2}}.$$

事实上，$S(S - S') + (S - S')S' = A - A'$，且该积分解包含因子 e^{-tS} 和 $e^{-tS'}$，二者均以 $e^{-t\sqrt{\rho}}$ 为界。将这两个逆元相乘即可得到逆界；此处不要求满足交换律。

对于 $k = 4$，使用 S 的行作为参考传输，并将 $v_i^TS^{-1}$ 用于所有其他路径。对于 $k < 4$，只有 k 条路径；通过添加零坐标，将平方根嵌入 $\mathbb{R}^4$ 中。两者之差

个非参考行满足

$$\begin{aligned}|v_i^T S^{-1} - (v_i')^T (S')^{-1}| &\le |v_i - v_i'|\,\|S^{-1}\|_2 + |v_i'|\,\|S^{-1} - (S')^{-1}\|_2 \\ &\le \frac{2\delta_g}{\sqrt{\rho}} + \frac{3\delta_g}{\rho^{3/2}},\end{aligned}$$

因为 $|v_i'| \le 2$ 和 $|v_i - v_i'| \le 2\delta_g$。因此，相应的行之间的差异至多为

$$E_Q = \left(\frac{2}{\sqrt{\rho}} + \frac{3}{\rho^{3/2}}\right) 2\eta. \tag{A.3}$$

这也涵盖了参考行，因为 $\rho \le 1$。对于 $k = 4$，将对每一行应用相同固定的反定向正交映射所得的元组也纳入其中。它使真实与拟合的两个 $SO(4)$ 等价类以此误差配对。对于 $k < 4$，只有一个等价类。

在网络上递归实现这些元组：将普通前缀和后缀设为恒等式，独立实现各个并行部分，并将每条叶路径的传输放在其最后一条边上。非恒等边有一些 Q_i。经过固定的树规范变换后，每条弦都是这些变量及其逆元构成的已知字。若 J_B 是字的最大长度，则通过望远镜求和可得块误差 $E_B = J_B E_Q$。

全局纤维与小噪声成功。对于每种局部候选组合，允许独立的块旋转，并除去公共旋转。这是一个紧致的 $\mathcal{F}$ 有效规范类集合。对于由刚性锚点重建的块，将 E_B 定义为其最终耳界（若没有添加耳，则为 E_0）。报告的全局界为 $E_G = \max_B E_B$。将局部真实代表与拟合代表配对，并在两侧使用相同的旋转。两侧的每个点都与另一侧的某个点相距不超过 $\max_B E_B$，从而证明两个豪斯多夫不等式。输出不必是某个共同噪声观测向量的精确纤维；归一化的耳拟合不一定能在每个坐标上都保持残差至多 η。

对于一个固定的泛型真实联络，整个纤维上的锚唯一性与紧致性迫使所有小噪声下的可行锚满足一个共同的 $|p| \ge \delta_0 > 0$。首次成功的二进制选择因此只取有限多个值，其逆常数也就保持有界。所有真实耳标架均可逆；由归纳法可知，恢复出的标架收敛到它们，且其 s_i 有正的下界，递推过程为 $O(\eta)$。参考格拉姆特征值也保持为正。步骤有限，因此对于所有足够小的噪声，算法都会成功。由路径与锚点引理以及任意的格拉姆坐标可知，非退化条件是泛型的。□

Appendix B. Coefficients for the two-control core

引理 8.4 的证明。这里 P，R 表示同一个联络的裸核多项式；比较两者时，下标为 U，V。对于多项式 f，记号 $[x^a u^b] f$ 表示 $x^a u^b$ 的系数，并保留其他所有变量；$[xu] f$ 是 $[x^1 u^1] f$ 的简写。令 $A = \mathrm{Re}\ a, B = \mathrm{Re}\, b$, $D_0 = \mathrm{Re}\ d$, $T = \mathrm{Re}(abd)$, $E = \mathrm{Re}(ab)$, $F = \mathrm{Re}(bd)$ 和 $G = \mathrm{Re}(da)$。记

$$d_0 = z - x - u - v, \quad d_1 = z - x - p - h, \quad d_2 = z - u - p - q, \quad t = z - v - h - q.$$

约化的置换展开给出

$$\begin{aligned}P = {} & d_0 d_1 d_2 t - x^2 d_2 t - u^2 d_1 t - v^2 d_1 d_2 - p^2 d_0 t - h^2 d_0 d_2 - q^2 d_0 d_1 \\ & + x^2 q^2 + u^2 h^2 + v^2 p^2 + 2(xupAt + uvqBd_1 + xvhD_0 d_2 + pqhTd_0) \\ & - 2(xpqvE + xuqhF + uphvG), \\ R = {} & d_1 d_2 t - p^2 t - h^2 d_2 - q^2 d_1 + 2pqhT.\end{aligned}$$

特别是，$[xu]P = (3z - k)t - N$ 和 $[xu]R = t$，其中

$$N = v^2 + h^2 + q^2 + 2vhD_0 + 2vqB + 2hqF.$$

例如，合并各项之前的混合系数为

$$[xu]P = (3z - v - 2p - h - q + 2pA)t - v^2 - h^2 - q^2 - 2vhD_0 - 2vqB - 2hqF,$$

即 $Q = (3z - k)t - N$。每个单独控制变量的二次项都会抵消，因此两个约化多项式对每个控制变量都是仿射的。

D_i 的前三个首项系数与联络无关：主矩阵的前两个约化谱矩仅取决于其对角度和边范数平方。因此 $\deg \Delta D \le m - 3$。根舒尔补给出

$$C_i/D_i = -\delta - s_i(z), \qquad s_i(z) = z^{-1} \sum_{0j \in E(J)} w_{0j}^2 + O(z^{-2}).$$

由于 D_i 是首一的，且其前三个系数相同，

$$C_i = -\delta D_i - \left(\sum_{0j \in E(J)} w_{0j}^2 \right) z^{m-1} + O(z^{m-2}).$$

因此 $\deg \Delta C \le m - 2$。此处及下文中，负的次数上界表示该多项式为零，因此也包括满足 $m < 3$ 的附接情形。这些是在无穷远处得到的多项式次数上界，不对有限极点施加任何条件。

复特征多项式相等意味着它们的首一约化平方根相等。因此，粘合恒等式中的 xu 系数为

$$0 = \Delta D\, Q_U + D_V(2p\Delta A\, t - \Delta N) + t\Delta C.$$

其 z^{m+1} 和 t hen z^m 系数给出 $\Delta A = 0$ 和 $\Delta N = 0$，从而证明了 (8.8)。在完整恒等式中 y

$$0 = \Delta D\, P_U + \Delta C\, R_U + D_V \Delta P + C_V \Delta R,$$

前两项的 x 和 u 系数的次数至多为 m。此外，$\Delta R = 2pqh\Delta T$ 没有控制项。因此，xz^{m+1} 和 uz^{m+1} 系数分别为 $2vh\Delta D_0$ 和 $2vq\Delta B$。事实上，在 $\Delta A = \Delta N = 0$之后，核心展开给出

$$[x^1u^0]\Delta P = 2vh\Delta D_0\, z + O(1), \qquad [x^0u^1]\Delta P = 2vq\Delta B\, z + O(1).$$

由于 D_V 是次数为 m的首一式，这些是次数为 $m + 1$时仅有的贡献；因此它们都为零。 N的显示公式以及 $hq > 0$随后给出 $\Delta F = 0$。四个迹都是公共迹，包括当 $N = 0$时也是如此。□

命题 *8.5* 的证明。令 $T = \Delta \mathrm{Re}(abd)$、 $E = \Delta\, \mathrm{Re}(ab)$ 和 $G = \Delta\, \mathrm{Re}(da)$。利用四个公共迹对核作简单圈展开，得到

$$\Delta P = 2pqh(z - v)T - 2xpq(hT + vE) - 2uph(qT + vG),$$
$$\Delta R = 2pqhT.$$

事实上，剩下的三角形 123 对 ΔP 的贡献为 $2pqh(z - x - u - v)T$；剩下的两个四环贡献为 $-2xpqvE$ 和 $-2uphvG$。删除根后，只剩下三角形项$2pqhT$。定义 $H = tP_U - QR_U$。将两个粘合公式相减，乘以 t，并利用 (8.8)，得到

$$0 = \Delta DH + 2pqh\, t[D_V(z - v) + C_V]T$$
$$- 2xpq\, tD_V(hT + vE) - 2uph\, tD_V(qT + vG). \tag{B.1}$$

对于 $H_x = [x^1u^0]H$、 $H_u = [x^0u^1]H$和 $H_0 = [x^0u^0]H$，两个单控制系数给出

$$\Delta DH_x = 2pq(hT + vE)tD_V, \qquad \Delta DH_u = 2ph(qT + vG)tD_V. \tag{B.2}$$

我们只需要这些多项式的前两个系数。利用 $s = v + p + q + h$ 和$r_0 = 2p + h + q + d_3$，它们可由下式得到

$$\begin{aligned}
P_U|_{x=u=0} &= z^4 - 2sz^3 + O(z^2),\\
R_U|_{x=u=0} &= z^3 - r_0 z^2 + O(z),\\
[x^1u^0]P_U &= -2z^3 + (4s - v - p - h)z^2 + O(z),\\
[x^0u^1]P_U &= -2z^3 + (4s - v - p - q)z^2 + O(z),\\
[x^1u^0]R_U &= -z^2 + (p + q + d_3)z + O(1),\\
[x^0u^1]R_U &= -z^2 + (p + h + d_3)z + O(1).
\end{aligned}$$

这里的归一化迹是指复矩阵迹的一半。例如，在 $x = u = 0$ 处裸核的归一化迹为 $2s$，其平方的归一化迹关于 x 的导数为 $2(v+p+h)$。因此，第二个初等系数的 x 系数为 $4s-v-p-h$。在删根矩阵中，选取 $-x$ 对角元素后剩下 $-[(z-p-q)t-q^2]$，从而证明了关于 R_U 的相应公式。交换 1 和 2 即得 u 公式。代入可得

$$\begin{aligned}
H_x &= z^4 - (v + h + 3q + k)z^3 + O(z^2),\\
H_u &= z^4 - (v + 3h + q + k)z^3 + O(z^2),\\
H_0 &= -2z^5 + B_0 z^4 + O(z^3), \qquad B_0 = 4p + 3h + 3q + 3d_3 + k.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

设 ΔD 非零，其度为 ℓ，首项系数为 c。由于 H_x 是首一的，(B.2) 右侧的第一个常数因子非零。与首一的 D_V 比较度数可得 $\ell = m - 3$，而两个方程中的首项系数给出 $2pq(hT + vE) = 2ph(qT + vG) = c$。因此 $H_x = H_u$，且它们的三次项系数迫使 $h = q$ 成立。(B.1) 的常数控制部分在度 $m+2$ 中的首项系数为 $-2c+2pqhT$，因此 $T = c/(pqh)$。将 $T = c/(pqh)$ 和 $\Delta D H_x = ctD_V$ 代入常数控制方程，在有理函数域中得到

$$0 = \frac{ctD_V H_0}{H_x} + 2ct[D_V(z - v) + C_V].$$

这里 $c \neq 0$ 和 t、D_V、H_x 都是非零多项式，因此可以进行约分，从而得到

$$\frac{C_V}{D_V} = -\frac{H_0}{2H_x} - (z - v). \tag{B.4}$$

对于 $h = q$，令 $\alpha = -(v + 4h + k)$。由方程 (B.3) 得 $H_0/H_x = -2z + (B_0 + 2\alpha) + O(z^{-1})$。因此，(B.4) 右侧的常数项为

$$v - B_0/2 - \alpha = v - h - p(1 + \operatorname{Re} a).$$

与 (8.2) 比较即得 (8.10)。由于 $\delta > 0$ 和 $\operatorname{Re} a \leq 1$，条件 (8.9) 排除了这种可能性，包括其等号情形。整个过程中没有除以 N。

于是 $\Delta D = 0$，而 (8.8) 随即给出 $\Delta C = 0$。未乘任何因子的粘合恒等式具有常数控制系数 $2pqh[D_V(z - v) + C_V]T = 0$。方括号内的多项式是次数为 $m + 1$ 的首一多项式，因此 $T = 0$；其 x 和 u 系数随即给出 $E = G = 0$。结合四个公共迹，即可证明该断言。□

School of Mathematical Sciences、 Fudan University、 Shanghai 200433、 China
Email address: hxcheng25@m.fudan.edu.cn