arXiv:2611.29671v1 [physics.ins-det] 22 Nov 2026

使用迈克耳孙干涉仪测量抗磁性液体磁化率的理论研究

David Shulman[a)]1)化学工程系，阿里埃勒大学，阿里埃勒，以色列 2)物理系，阿里埃勒大学，阿里埃勒，以色列

（日期：2026年11月22日）

我们研究了使用迈克耳孙干涉仪，通过磁场诱导的表面变形推断抗磁性液体磁化率的理论方法。环形磁铁改变样品光束路径上液体的厚度，从而相对于固定的光学参考产生带符号的相移。对于样品光束的双程传播，条纹位移为 $m = 2(n_\ell - n_a)\Delta z/\lambda$。我们分别在局部重力近似下，以及通过线性化杨-拉普拉斯方程纳入表面张力的情况下，推导了磁化率反演关系。本文处理区分了有限参考磁场与零场参考，明确了位移符号和磁化率对比度，并确定了校准与不确定度要求。可复现的示例计算采用均匀磁化环形体。结果确立了理论测量关系及其假设；但不构成实验验证，也不构成经验证的精度声明。

I. 引言

磁化率描述弱磁性材料的线性响应$\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$。这里，$\chi$ 表示无量纲的国际单位制体积磁化率，而非质量磁化率。使用法拉第天平进行力测量，可探测材料对磁场梯度[1]的响应；这种方法须与磁光法拉第旋转区分开来。测量磁场诱导的液体表面变形，也可用于测定磁化率。摩西效应法已用于在考虑表面张力[2]的情况下，根据表面斜率推断磁化率。

我们研究了将迈克耳孙干涉仪用作相位敏感读出装置，以测量同一磁场驱动的表面变形。光学观测量是光程的变化，可通过力学与磁学模型据此推断磁化率。这是一项理论可行性研究：下文的数值示例是模型预测，而非测量结果。本文不声称其具有任何实验精度或优于现有技术。

II. 光学几何结构与相位测量

样品臂穿过环形磁体的内孔——光束穿过液体表面，在液体下方的固定反射镜上反射，然后沿原路返回。固定反射镜终止参考臂。光束在同一个分束器处重新汇合（图 1）。样品反射镜不会随液体表面移动：测得的相移源于光束往返经过时，气体光程被液体光程取代。反射镜的移动则会产生额外的位移信号。

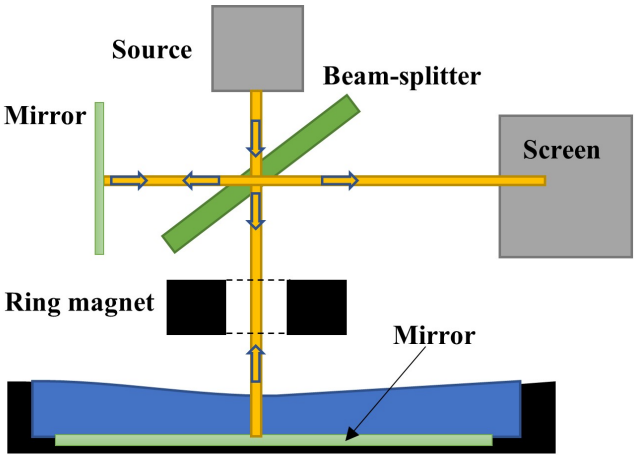

图 1. 固定的浸没式样品反射镜与液体双程传播的 Michelson 几何结构。图示为示意图，非按比例绘制；测量之间只有磁体移动。

令 $z(r,\ h)$ 表示相对于未受扰动液面的向上表面位移，其中 r 为半径，h 为磁体下表面与未受扰动液面之间的间隙。凹陷时 $z < 0$。令 $\Delta z = z(r,\ h_1) - z(r,\ h_0)$ 和 $\Delta n = n_\ell - n_a$，其中 n_ℓ 和 n_a 分别为液体和环境气体在真空波长 λ处的折射率。光学端点固定，意味着液体光程的增加会等量取代气体光程。对于运动界面的 q 次穿越，

$$\Delta L = q\Delta n\,\Delta z, \tag{1}$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi q\Delta n}{\lambda}\Delta z, \tag{2}$$

$$m \equiv \frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{q\Delta n}{\lambda}\Delta z. \tag{3}$$

本文中 $q = 2$。相移和条纹位移 m 均带符号；若计数条纹时不考虑其方向，只能得到其大小。改变相位原点

a)电子邮箱：davidshu@ariel.ac.il

或探测器端口会改变测得的符号约定，因此必须进行校准。可通过相位步进或正交检测与相位展开恢复分数条纹。

对于强度分别为 I_s 和 I_r的相干光束，探测器信号可写为

$$I = I_s + I_r + 2V\sqrt{I_s I_r}\cos\phi, \tag{4}$$

其中， $0 \le V \le 1$ 描述相干性和模式重叠。单次强度读数无法确定唯一的带符号相位。只有当两束光强度相等且可见度为 1 时，相消干涉才会使强度为零。分析假设光束近乎垂直入射、光束偏转可以忽略、折射率稳定，且光束足够窄，能够采样近似均匀的表面高度。对于宽光束，则必须对横向相位分布上的复场进行积分，才能得到探测到的信号。

III. 表面变形与磁化率

A. 假设与符号约定

定义磁化率对比度 $\chi_c = \chi_\ell - \chi_a$ 和密度差 $\Delta\rho = \rho_\ell - \rho_a$。在弱磁化率近似的一阶主导项中，使用外加场 B，忽略液体对其造成的小扰动。模型假设液体处于静态、不可压缩，表面张力 γ恒定，液池较大、表面坡度较小，且变形相对于场变化长度较小。磁场在未变形界面处计算。对于有限液池，必须纳入壁面条件和体积守恒；此时，下文的无限液池解仅为近似解。

一个能量泛函（忽略常数项）为

$$\mathcal{E} = \int \left[\frac{\Delta\rho g}{2} z^2 + \frac{\gamma}{2}|\nabla z|^2 - \frac{\chi_c B^2}{2\mu_0} z \right] dA. \tag{5}$$

其驻点给出线性化的轴对称杨–拉普拉斯平衡

$$\Delta\rho g z - \gamma\left(z'' + \frac{z'}{r}\right) = \frac{\chi_c B^2(r,h)}{2\mu_0}. \tag{6}$$

条件为 $z'(0) = 0$ 和 $z(r) \to 0$，当 $r \to \infty$时。方程（6）是小斜率方程，而非完整的非线性曲率方程。按照向上为正的约定， $\chi_c < 0$ 会产生凹陷。毛细长度为 $\ell_c = \sqrt{\gamma/(\Delta\rho g)}$。

如果磁场在横向上的变化尺度远大于ℓ_c，则局部可忽略表面张力：

$$z(r,h) \simeq \frac{\chi_c B^2(r,h)}{2\mu_0 \Delta\rho g}. \tag{7}$$

这种近似有助于进行尺度换算，但在环形磁铁的内孔或边缘附近并非自动成立。

只有当空气的密度和磁化率所产生的影响低于所要求的不确定度时，才可以忽略它们。尤其是，必须使用 $\chi_\ell = \chi_c + \chi_a$ 将测得的对比度换算回来。

B. 局部反演与毛细修正反演

Let $D = B^2(r,h_1) - B^2(r,h_0)$. Combining Eqs. (3) and (7) gives

$$\boxed{\chi_c = \frac{2\mu_0 \Delta\rho g \lambda m}{q \Delta n D}.} \tag{8}$$

对于当前的迈克耳孙装置，这可写为

$$\chi_c = \frac{\mu_0 \Delta\rho g \lambda m}{\Delta n D}. \tag{9}$$

对于朝磁场较强处运动的情况， $D > 0$ 而抗磁性凹陷在所述约定下给出 $m < 0$。除以较小的 D 会导致病态问题。

对于毛细管修正计算，将 $K(r,\ h)$ 定义为以下方程的解：

$$\Delta\rho g K - \gamma\left(K'' + \frac{K'}{r}\right) = \frac{B^2(r,h)}{2\mu_0} \tag{10}$$

采用相同的边界条件。由线性关系可得 $z = \chi_c K$ 以及

$$\boxed{\chi_c = \frac{\lambda m}{q \Delta n \left[K(r,h_1) - K(r,h_0)\right]}.} \tag{11}$$

两个响应之差至关重要。除非参考磁场和形变可以忽略，否则不能将绝对高度的公式直接用于测得的高度变化。K 的格林函数形式见附录 A。

对于在多个半径或磁体位置处进行的测量 m_i，定义 $A_i = q\Delta n \Delta K_i/\lambda$。在相位方差 σ_i^2相互独立的情况下，加权估计为

$$\widehat{\chi}_c = \frac{\sum_i A_i m_i/\sigma_i^2}{\sum_i A_i^2/\sigma_i^2}. \tag{12}$$

此表达式将模型系数视为已知。磁场标定的不确定性、相关性、背景偏移和漂移需要通过联合拟合或协方差传播来处理；增加相位采样点并不能消除共同的系统误差。

IV. 示例计算

A. 光学尺度

作为一个给定位移的示例，取 $|\Delta z|$ =70 μm、 $\lambda = 633$nm、$n_\ell = 1.333$ 和 $n_a = 1.0003$。对于 $q = 2$，方程（3）给出 $|m| = 73.58$。该示例并不

预言某个特定磁体在指定间隙下会产生 $70\,\mu$m 的位移。液体和气体光程的变化均已计入。对于相同的位移，Michelson 双程产生的相移是单程 Mach–Zehnder 装置的两倍；这一比较假定折射率和波长相同，而不是实际实现的测量噪声相同。

B. 环形磁铁模型

为使数值示例可复现，我们将一个沿轴向均匀磁化的环形体建模，其长度为$L = 30\,\mathrm{mm}$、内半径为 $a_i = 2.5\mathrm{mm}$、外半径为$a_o = 11.5\mathrm{mm}$。其磁化强度为示例性输入值$M = 8.0 \times 10^{5}\,\mathrm{A\,m^{-1}}$，并非对原装置特性进行拟合或测量所得。磁场由外侧圆柱面电流与方向相反的内侧圆柱面电流叠加而成，如附录 B 所述。单一实心螺线管的磁场无法代表内孔。

示例液体参数为$\Delta\rho$ $=998\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$、 $\gamma = 0.072\ \mathrm{N\,m^{-1}}$、 $\chi_c = -9.05 \times 10^{-6}$和$g = 9.81\mathrm{m\,s^{-2}}$，由此得到 $\ell_c \simeq 2.71\,\mathrm{mm}$。这些是类似水的模型输入；本示例中，环境气体的密度和磁化率设为零。进行测量时，必须将其替换为随温度变化的样品和环境参数。此处我们采用精度足够的 $\mu_0 \simeq 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H\,m^{-1}}$。

采用高斯–勒让德求积计算场，并通过径向有限差分求解方程（6），在轴线上满足正则性条件，并在 $z(R) = 0$ 处为 $R = 120\mathrm{mm}$。径向间距为 0.2 mm。在间隙为 3 mm 时，预测的轴线上高度约为 $-28.81\,\mu$m，最大径向斜率为 0.0035。这些斜率支持本例采用小斜率近似，但并不能证明不存在其他模型误差。

数值检验将轴线上的场与其解析表达式进行比较；在间隙为 1 mm 时，将场求积阶数从 64 提高到 128；在间隙为 3 mm 时，将径向间距减半；并将径向区域扩展至 180 mm。对于 3 mm 的情况，网格细化使轴线上高度的变化小于 0.02%。通过人为构造的高斯解，进一步独立检验径向算子及其符号。这些是针对指定条件的离散化检验，并非对物理模型不确定度的界定，也不代表对实验精度的声明。相关脚本和数值汇总随手稿一并提供。

V. 拟议测量与不确定度

A. 测量方案

将探头对准磁铁轴线附近，并使其垂直于液体表面，同时保持所有光学端点的机械位置固定。在相关间隙处绘制磁场矢量图，或使用经过校准的磁场探头验证磁铁模型。记录液体温度、密度、表面张力、折射率和环境条件。将磁铁移动至已知位置，等待流体动力学松弛，并按照记录的符号约定采集时间分辨的相位序列。重复进行正向和反向扫描，并设置磁铁静止的对照，以识别机械系统中的漂移、振动、蒸发或磁滞。记录光束位置和束腰，因为平均处理和未对准可能改变推断出的响应。

已知磁化率的液体可用于校准检查。若已知的场形状写作$B = s\widetilde{B}$，则信号与 $\chi_c s^2$成正比。仅凭相位，无法通过一种未知液体同时确定 χ_c 和 s。因此，必须进行独立的场校准，或使用参比液体。参比液体和样品液体通常具有不同的 $\Delta\rho$、 γ和 Δn，因此必须重新计算它们的响应核；仅凭条纹比是不够的。校准并不能证明所有系统误差都已消除。

B. 不确定度传播

用 σ_x 表示标准不确定度，并用 Δ 表示测量状态之间的差异。对于已知的 Δn和 λ，由相位噪声引起的高度不确定度为

$$\sigma_z = \frac{\lambda}{q|\Delta n|}\sigma_m = \frac{\lambda}{2\pi q|\Delta n|}\sigma_\phi . \tag{13}$$

对于局部反演，忽略 μ_0的不确定度，采用独立输入的一阶估计可得

$$\left(\frac{\sigma_{\chi_c}}{|\chi_c|}\right)^2 \simeq \left(\frac{\sigma_m}{|m|}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta n}}{|\Delta n|}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\lambda}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta\rho}}{\Delta\rho}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_D}{|D|}\right)^2 . \tag{14}$$

对于 $F_j = B^2(r,\ h_j)$， $D = F_1 - F_0$。间隙不确定度会产生

$$\sigma_{D,h}^2 = (\partial_h F_1)^2\sigma_{h_1}^2 + (\partial_h F_0)^2\sigma_{h_0}^2 - 2(\partial_h F_1)(\partial_h F_0)\,\mathrm{Cov}(h_1, h_0). \tag{15}$$

两个间隙可能存在共同的零点误差，因此将它们视为相互独立并不总是合理的。共同的场尺度 s 会产生相对磁化率尺度不确定度 $2\sigma_s/|s|$ （一阶近似）。

对于毛细管反演，应使用式 (11) 的雅可比矩阵，其中包括 ΔK 对 γ、 $\Delta\rho$、几何结构、位置和磁场参数的依赖关系。一般而言$\sigma_{\chi_c}^2 = J\Sigma J^{\mathsf{T}}$，协方差矩阵为 Σ；当响应差较小或存在非线性参数不确定度时，宜采用蒙特卡罗传播。若密度和重力已通过 K传播，则不应再将它们作为独立的前置因子加入。模型差异，例如有限浴效应、非均匀磁化、在位移界面处评估磁场，以及光学

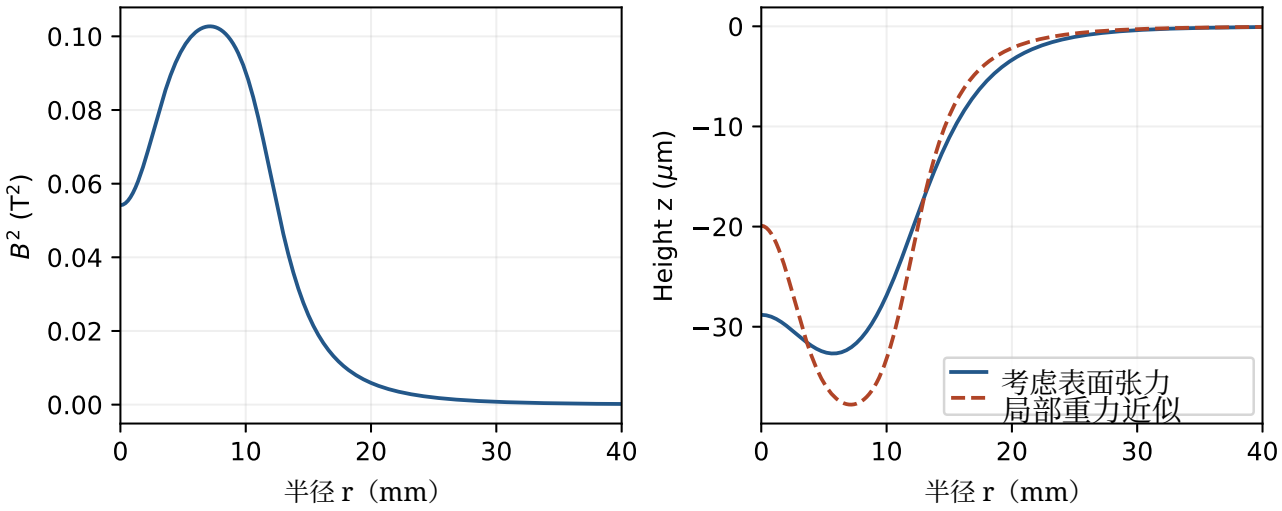

图 2。在 $h = 3\,\mathrm{mm}$ 处、使用所述参数进行的示例性环形磁体计算。左：未变形界面上的磁场强度平方。右：线性毛细模型和局部重力近似得出的向上为正的表面高度。这些是合成预测，并非实验数据。

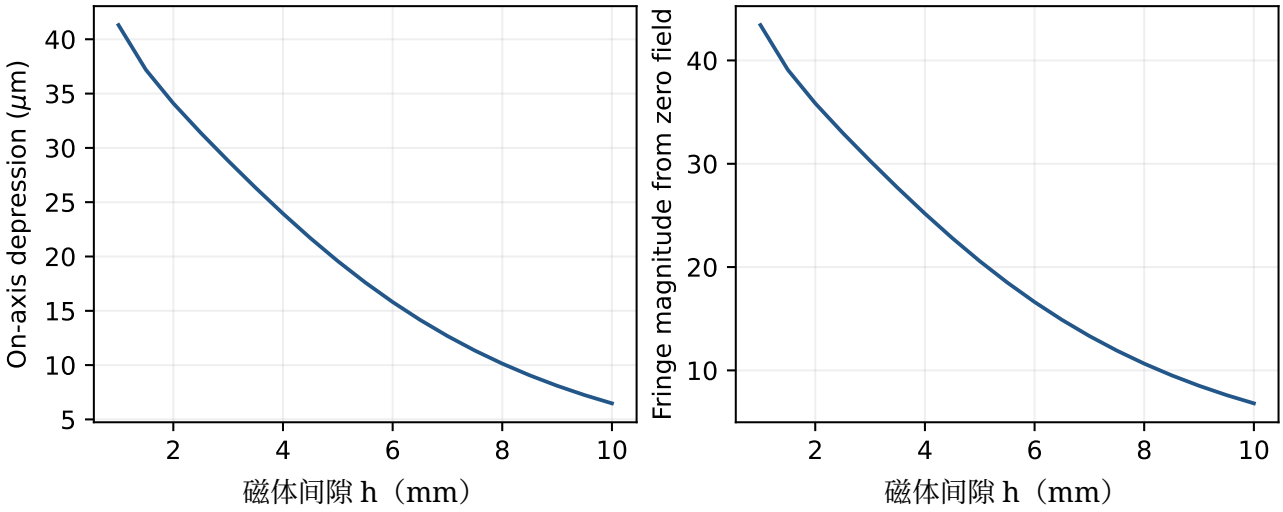

图 3。相对于零场参考，在示例性参数下预测的轴向凹陷和条纹幅度。光程采样 $r = 0$，其位置不一定与环形受迫表面的最深点重合。有限的参考间隙需要扣除其响应。

光束平均，需要单独评估。因此，仅凭间隙容差无法确定整体百分比精度。

VI. 讨论与结论

与单程马赫–曾德尔装置相比，Michelson 双程使给定高度变化对应的相位灵敏度提高一倍。在相同相位噪声下，这会使由相位导出的高度不确定度减半。但它不会以相同比例降低场校准、表面张力、密度或磁体位置的不确定度。浸没式反射镜需要具备化学相容性和机械稳定性，而返回光束必须保持足够的空间重叠。两种干涉仪方案都能探测 Moses效应表面响应。相位读出测量的是光程变化，而非局部表面斜率，但仍会受到表面折射、对准、环境漂移和磁场标定的影响。更大的磁体直径或更多的条纹都不能保证更小的总不确定度。几何形状、毛细平滑和光学通路必须综合考虑。

所提出的 Michelson 装置在带符号条纹位移与磁化率对比度之间建立了一致的关系，并在线性理论中纳入了有限参考场校正和表面张力。

示例计算展示了如何以可重复的方式评估这一关系。在能够提出精度声明之前，仍需要实验验证、实测场图以及完整的不确定度预算。密切相关的 Michelson 和 Mach–Zehnder 研究具有相同的机械响应；二者的主要区别在于光学几何和通过次数，而不是两种各自经过验证的磁化率方法。

附录 A：线性表面模型的格林函数

令 $f(r,\ h) = B^2(r,\ h)/(2\mu_0\gamma)$。对于无限轴对称液池，式（10）中的核函数为

$$K(r,h) = K_0(r/\ell_c)\int_0^r f(s,h) I_0(s/\ell_c) s\,ds + I_0(r/\ell_c)\int_r^\infty f(s,h) K_0(s/\ell_c) s\,ds. \tag{A1}$$

这里的 I_0 和 K_0 是修正贝塞尔函数。在 $r = 0$处，取有限极限值：第一项消失，第二个积分保留。正核函数在对比度为负时给出$z = \chi_c K < 0$。当毛细效应可以忽略时，它趋近于式（7）。该解对于所述线性方程和边界条件是精确的，但不适用于任意斜率或容器几何形状。在封闭的有限液池中，需要用施加压力偏移以保持体积守恒以及实际的接触线条件，来替代无限液池边界条件。

附录 B：均匀磁化环形体的磁场

均匀磁化圆柱的表面电流表示等效于理想螺线管[3,4]。对于环形体，外侧圆柱面电流层承载方位角电流密度 $+M$，内侧电流层承载 $-M$。将观测平面置于垂直坐标为零的位置，并令磁体占据高度范围 $u \in [h, h+L]$。对于半径为 a 且电流密度为正的电流层，定义

$$Q = r^2 + a^2 - 2ar\cos\varphi + u^2. \tag{B1}$$

直接进行毕奥-萨伐尔积分可得

$$\mathcal{B}_r(a) = -\frac{\mu_0 M a}{4\pi}\int_h^{h+L} du \int_0^{2\pi} \frac{u\cos\varphi}{Q^{3/2}}\,d\varphi, \tag{B2}$$

$$\mathcal{B}_z(a) = \frac{\mu_0 M a}{4\pi}\int_h^{h+L} du \int_0^{2\pi} \frac{a - r\cos\varphi}{Q^{3/2}}\,d\varphi. \tag{B3}$$

圆环磁场为 $B_j = \mathcal{B}_j(a_o) - \mathcal{B}_j(a_i)$，其中 $j = r,\ z$，且 $B^2 = B_r^2 + B_z^2$。反转磁化强度会使两个分量均反向，但不会改变 B^2。在轴线上，$\mathcal{B}_r = 0$ 以及

$$\mathcal{B}_z(a) = \frac{\mu_0 M}{2}\left[\frac{h+L}{\sqrt{(h+L)^2 + a^2}} - \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}}\right]. \tag{B4}$$

Thi .....在正交分量上提供了十个独立检查。h实际的永磁体可能需要测量得到的场图，或采用包含磁化不均匀性的模型；仅凭标称尺寸无法确定场强。

源文件可用性

两项干涉仪研究的手稿源文件、图表和Python代码可在 `https://github.com/shulm/Interferometry`获取。数值图表根据明确给出的示例参数生成；未报告实验数据集。

利益冲突

作者声明不存在需要披露的利益冲突。

[1]B. L. Morris 和 A. Wold，《科学仪器评论》**39**，1937 1968( )。[2] D. Shulman、M. Lewkowicz 和 E. Bormashenko，Journal of Magnetism and Magnetic Materials，170553 (2023)。[3]N. Derby 和 S. Olbert，《美国物理学杂志》**78**，229 (2010)。[4]D. Shulman，《磁学杂志》**28**，64 (2023)。