arXiv:2611.29672v1 [cs.DS] 22 Nov 2026

# 一个 $n^{1/O(\log^* n)}$ 在线着色 $k$-可着色图的下界

Sajad Faghfoor
Maghrebi多伦多大学
smaghrebi@cs.toronto.edu

**摘要**

在线着色中，图的顶点逐个到达，同时给出它们与较早顶点之间的边，并且每个顶点都必须在到达时立即确定颜色，不得更改。对于承诺为 $k$可着色的图，在 $k \geq 3$ 固定时，最佳确定性算法使用 $n^{1-\Theta(1/k^2)}$ 种颜色；而此前最好的下界是 Vishwanathan 于 1990 年给出的 $\Omega(\log^{k-1} n)$，直到最近 Li 证明了 $2^{\Omega((\log n)^{1/3}(\log\log n)^{2/3})}$。对于每个固定的 $k \geq 3$ 以及所有充分大的 $n$，我们证明确定性在线算法在 $n$顶点的 $k$可着色图上需要至少 $n^{1/(\log^* n+3)}$ 种颜色；随机在线算法的期望颜色数也有相同的下界。这两个下界都适用于同一个无三角形三着色图：即使算法事先获知该图，但不知道每个到达顶点对应图中的哪个顶点，只要选择恰当的到达顺序，就能迫使算法使用这么多种颜色。困难实例是团的迭代膨胀，其中每个顶点都变成一个独立顶点块，每条边都变成较早块中的一台私有服务器；每次膨胀都会保留被迫使用的颜色数，并将色数 $\chi$ 降至约 $\log\chi$，因此经过约 $\log^* n$次膨胀后，色数会降至 $k$。我们还证明，不同 $k \geq 3$ 值对应的确定性下界在多项式意义下等价，并且任何通过呈现此类迭代膨胀来构造的对手都无法迫使算法使用超过 $n^{1/(\log^* n - O(1))}$ 种颜色。所有编号结果都已在 Lean 4 中形式化。[1]

[1]形式化内容可在 https://github.com/sfmqrb/lean-verifications-k-colorable找到。

# 1 引言

在线图着色中，未知图的顶点逐个到达，每个顶点同时给出与此前到达顶点之间的边。在线算法必须在每个顶点到达时立即为其着色，且不得更改，并且颜色必须与其较早邻居的颜色不同；算法的代价是它使用的颜色数。即使是二分图，在这种模型中也很难处理：对于 $n$ 个顶点， $\Theta(\log n)$ 种颜色既是必要的，也是足够的 [14, 32]；参见 [4]。我们研究承诺为 $k$-可着色的图，其中 $k \geq 3$固定，而此时上下界之间的差距要大得多。

对于 $k \geq 3$ 最优算法使用多项式数量的颜色。Kierstead 的确定性算法在一般情况下使用 $O(n^{2/3}\log^{1/3} n)$ 种颜色，其中 $k = 3$ 和 $O(n^{1-1/k})$ [22, 定理 1.6 和 1.5]，；Kawarabayashi、Yoneda 和 Yoneda 最近将一般界改进为 $\widetilde{O}(n^{1-2/(k(k-1))})$，并将 $\widetilde{O}(n^{1-6/(3k(k-1)-2)})$ 用于 $k \geq 4$ [21, 定理 3.17 和推论 4.15]。Vishwanathan 和 Halldórsson 的随机化算法的期望颜色数为 $O(n^{1-1/(k-1)}(\log n)^{1/(k-1)})$ [41, 定理 2.2][15, 定理 4.1]，；Li 将其降至 $O(\sqrt{n})$，适用于 $k = 3$ [28, 定理 1.2]。

相比之下，下界在三十年间一直停留在多对数级。Vishwanathan 于 1990 年证明，即使对于随机化算法，也至少需要 $\Omega(\log^{k-1} n)$ 种颜色 [41, 定理 3.1]，；这一结果一直保持到 Li 最近证明了一个界： $2^{\Omega((\log n)^{1/3}(\log\log n)^{2/3})}$，该界适用于 $k = 3$，无论是确定性算法还是随机化算法 [28, 定理 1.1 和 A.1]。Kierstead 曾询问 $O(\sqrt{n})$ 种颜色是否足以用于 $k = 3$ [23, 问题 12]，，并提出挑战，要求证明所需颜色数介于 $\Omega(n^{\varepsilon})$ 和 $O(n^{1/2})$ 之间 [22, 问题 5.1]。因此，在本研究之前，对于 3-可着色图，已知所需颜色数仅介于 $2^{(\log n)^{1/3+o(1)}}$ 和 $O(\sqrt{n})$ 之间（针对随机化算法）；对于确定性算法，则至多为 $O(n^{2/3}\log^{1/3} n)$。

**为什么下界很难。** 下界是一个必须同时完成两件事的对手：迫使使用许多颜色，并保持其图 $k$-可着色。一个含有 $K$ 个顶点的团会迫使使用 $K$ 种颜色，但一旦 $K > k$，它就不再是 $k$-可着色的。三个已知事实说明了对手的操作空间有多么有限。首先，一个强大的对手必须让自己的着色保持未决，正如 Kawarabayashi、Yoneda 和 Yoneda 在 [20, §4] 中也指出的那样。原因在于 Halldórsson 和 Szegedy 的透明模型 [17]，：在该模型中，对手会在算法为每个顶点完成着色后，立即公开该顶点的自身 $k$-着色。在该模型中， $2^k - 1$ 种颜色总是足够的 [17, §4.5]。其次，对手必须控制到达顺序，因为在均匀随机顺序下，一个知道 $n$ 和 $k$ 的随机化算法只需要多对数数量级的颜色 [46, 定理 1]。第三，多项式下界必须使用短奇环，因为对于任意固定的 $\varepsilon > 0$ [45, ，奇围长足够大的图都可以在线使用 $O(n^{\varepsilon})$种颜色进行着色 $\varepsilon > 0$ [45, 定理 1]。

## 1.1 我们的结果

令 $\chi_k^{\mathrm{det}}(n)$ 表示对于有序的、含有 $k$-可着色的图，确定性在线算法在最坏情况下所需的最少颜色数，其中图有 $n$ 个顶点；令 $\chi_k^{\mathrm{rand}}(n)$ 表示随机化算法对应的量，以针对非自适应对手的期望来衡量（定义 4.1）；因此 $\chi_k^{\mathrm{rand}}(n) \leq \chi_k^{\mathrm{det}}(n)$。$\log^* n$ 表示对 $n$ 反复取对数，直至结果不大于 1 所需的次数。我们的主要结果是，对于任意固定的 $k \geq 3$， $\chi_k^{\mathrm{det}}(n)$ 和 $\chi_k^{\mathrm{rand}}(n)$ 均至少为 $n^{1/(\log^* n + O(1))}$；对于固定的 $\varepsilon > 0$，二者是否至少为 $n^{\varepsilon}$ 仍是一个开放问题。

**定理 1.1** (主定理)。 对于每个 $n \geq 3$ 和 $L = \log^* n$,

$$\chi_3^{\mathrm{rand}}(n) \geq \frac{n^{1/(L+2)}}{8(1+\ln 4n)} \quad \textit{and} \quad \chi_k^{\mathrm{rand}}(n) \geq \frac{n^{1/L}}{8(1+\ln 4n)} \quad \textit{for every } k \geq 4.$$

此外 $\chi_3^{\mathrm{det}}(n) \geq \chi_3^{\mathrm{rand}}(n) \geq n^{1/(\log^* n+3)}$ 对所有 $n \geq 2^{406}$，且 $\chi_k^{\mathrm{det}}(n) \geq \chi_k^{\mathrm{rand}}(n) \geq n^{1/(\log^* n+1)}$ 对每个 $k \geq 4$ 及所有 $n \geq 2^{201}$。

粗略地说，定理 1.1 指出，对3-可着色图进行在线着色，至少需要 $n^{1/(\log^* n+O(1))}$ 种颜色，无论面对确定性算法还是随机化算法都是如此。这个界仍然 $n^{o(1)}$，远高于 $n^{1-\Theta(1/k^2)}$ 种颜色这一最佳确定性算法的结果（表 1），但我们所使用的这类对手无法做得更好，除去指数分母中的加法常数（定理 1.5）。阈值 $2^{406}$ 和 $2^{201}$ 分别表示这样一种规模：从该规模起，我们的证明便可将因子 $8(1+\ln 4n)$ 吸收到指数分母中，使其再增加 1。低于这些阈值时，第一个界仍然成立；而在较小规模下（例如，对于规模不超过约 3-可着色图的情形，参见 $n = 2^{50}$，见第 8.4 节），一种更简单的确定性构造（它也是定理 1.1的基础）能给出更优且完全显式的界。

**定理 1.2**（显式确定性下界）。对于 $n \geq 3$ 和 $L = \log^* n$,

$$\chi_3^{\mathrm{det}}(n) \geq \lfloor n^{2/((L+2)(L+3))} \rfloor \qquad \textit{and} \qquad \chi_k^{\mathrm{det}}(n) \geq \lfloor n^{2/(L(L+1))} \rfloor \quad \textit{for every } k \geq 4.$$

特别地，对于任意固定的 $k \geq 3$，$\chi_k^{\mathrm{det}}(n) \geq n^{(2-o(1))/(\log^* n)^2}$。对于所有 $3 \leq n \leq 2^{65536}$，$\chi_3^{\mathrm{det}}(n) \geq \lfloor n^{1/28} \rfloor$ 以及 $\chi_k^{\mathrm{det}}(n) \geq \lfloor n^{1/15} \rfloor$，对于任意 $k \geq 4$。

仅定理 1.2 就将确定性下界从 $2^{(\log n)^{1/3+o(1)}}$ 提高到 $2^{\log n/O((\log^* n)^2)}$，而且其构造规模很小：一层迫使 7 种颜色用于 3-可着色图，其中包含 187 个顶点；两层则迫使使用 18 种颜色，顶点数约为 $2.1 \cdot 10^7$ 个（表 2）。针对随机化算法、以 $1-\varepsilon$ 的概率成立但需付出 $O(\log n)$ 因子代价的版本见 附录 C。

**构造的高层思路**。定理 1.1和 1.2 的下界来自同一个构造。由于含有 $K$ 个顶点的团会迫使使用 $K$ 种颜色，但当 $k$ 时，它并非 $K > k$-可着色，因此，对手会将一个团留作背景，始终不将其呈现出来。它们呈现的则是由该团经过一次或多次预留膨胀操作后得到的图。

设 $H$ 是一个有序图，也就是说，它是一个附带顶点到达顺序的图。对 $H$ 进行预留膨胀时，会将每个顶点 $v$ 替换为一个由新顶点组成的非空块 $\sigma(v)$，块内没有边；这些块按照 $H$ 中顶点的顺序依次到达。对于 $H$ 中的每条弧 $w \to v$，也就是从较早到达的顶点 $w$ 指向较晚到达的顶点 $v$ 的边，选取 $\sigma(w)$ 中的一个顶点作为该弧的服务器，并将它与 $\sigma(v)$ 中的所有顶点相连。不同的弧对应不同的服务器，膨胀后的图不含其他边。

膨胀有两种作用，分别对应对手的两项任务。首先，膨胀不一定会减少对手所能迫使使用的颜色数。每个 $\sigma(v)$ 顶点都与其每个前驱邻居 $v$所在块中的一个服务器相连，因此它不能使用这些服务器的颜色。如果块足够大，就可以在得知服务器的颜色后选择服务器，使得能够迫使使用 $K$ 种颜色的对手，在用图的膨胀版本进行呈现时，仍能迫使使用 $K$ 种颜色。其次，膨胀会将高色数降低到其对数左右。这是弧图算子某一步的在线版本；该算子对色数的影响是经典结果 [18, 37]。

**塔与服务器的选择**。一个完整塔具有 $j$ 层级，是通过对有序团进行 $j$ 次连续膨胀得到的，其中一条弧可以有多个服务器：每条弧至少有一个服务器，并且没有顶点为两条弧提供服务。一个塔是完整塔的一个初始段，后面可以接上孤立顶点（定义 4.7）。以一个含有 $K$ 个顶点的团为基础的完整塔，在 $k$约为 $j \log\log^* K$ 时是可着色的（推论5.4和5.7）。剩下的问题是选择服务器，使得仍然能迫使出现许多颜色；我们通过两种方式做到这一点。定理 1.2在块被着色后，为其选择服务器，所选颜色

| | 确定性的 | 随机化（非自适应对手） |
|---|---|---|
| 上界，$k=3$ | $O(n^{2/3}\log^{1/3} n)$ [22] | $O(n^{1/2})$ [28] |
| 上界，$k\geq 4$ | $\widetilde{O}(n^{1-6/(3k(k-1)-2)})$ [21] | $O(n^{1-1/(k-1)}(\log n)^{1/(k-1)})$ [15, 41] |
| 下界、先前的 | $\Omega(\log^{k-1} n)$ [41]; $2^{\Omega((\log n)^{1/3}(\log\log n)^{2/3})}$ [28] | $\Omega(\log^{k-1} n)$ [41]; $2^{\Omega((\log n)^{1/3}(\text{对数 对数 } n)^{2/3})}$ [28, 附录 A] |
| 下界，本文 | $n^{1/(\log^* n+O(1))}$ (定理 1.1); $n^{1/O((\log^* n)^2)}$，显式 (定理 1.2) | $n^{1/(\log^* n+O(1))}$ (定理 1.1) |

表 1：对 $k$-可着色图进行在线着色，顶点数为 $n$，其中 $k\geq 3$固定。对 $k=3$ 的任何下界，也是对更大的 $k$的下界。定理 1.1的下界对所有 $n$ 均成立，形式为 $n^{1/(\log^* n+2)}/O(\log n)$。对于 $k=4$，确定性上界为 $\widetilde{O}(n^{14/17})$ [21, 定理 414]。

在该块中频繁出现。这会迫使使用全部 $K$ 种颜色，但这样一来，每个块都必须包含许多同色顶点；对于被该块替代的顶点的每个后续邻居，都需要一个这样的顶点，因此每次膨胀都会使块大小增长约 $K$ 倍。定理 1.1让所有块大小相同，并随机选择服务器。无论层数是多少，这种方法在颜色数量上只需付出一个对数因子的代价。第 2 节通过小例子说明这两种选择，其中包括定理 1.2所采用的选择。

已知图。定理 1.1 和 1.2 的界对于单个图也成立。图 $G$ 的在线色数 $\chi_{\text{ol}}(G)$ 是指这样一个最小的 $c$：存在某个确定性在线算法，对于 $G$ [7, 的每种呈现顺序，该算法至多使用 $c$ 种颜色 1]；参见 [14]。例如，具有 $N$ 个顶点的树的在线色数为 $\chi_{\text{ol}}\leq \log_2 N+1$。原因在于 First-Fit（即为每个顶点分配一个其较早邻居尚未使用的最小颜色的算法）在这些树上至多使用这么多种颜色 [23, 例 1 和 5]。具有 $N$ 个顶点的二分图的在线色数为 $\chi_{\text{ol}}=O(\log N)$ [32, 第 320] 页。某一类图的下界并不能直接推出单个图的下界，因为对手可能针对不同算法构造不同的图。然而，我们的对手可以调整为针对每种算法都生成同一个图（至多相差一个同构）。因此，这些界即使在 Halldórsson 的已知图博弈中也成立 [16, §1]。在这个博弈中，算法会预先看到一个包含呈现图的图，但不会获知每个到达的顶点对应其中的哪个顶点。在我们的情形中，展示给算法的图就是最终图本身。

**定理 1.3** (已知图)。对于每个 $N\geq 3$ 和 $L=$ 对数$^* N$，都存在无三角形的 3-可着色图 $G$和 $G'$，其顶点数为 $N$，且

$$\chi_{\text{ol}}(G)\ \geq\ \lfloor N^{2/((L+2)(L+3))}\rfloor \qquad \textit{and} \qquad \chi_{\text{ol}}(G')\ \geq\ \frac{N^{1/(L+2)}}{8(1+\ln 4N)}.$$

每个预先知道 $G'$ 的随机在线算法，都存在一个呈现顺序 $G'$，使其期望使用至少 $N^{1/(L+2)}/(8(1+$自然对数 $4N))$ 种颜色。对于 $N\geq 2^{406}$，关于 $G'$的两个界都成立，只需将 $N^{1/(L+2)}$替换为 $N^{1/(L+3)}/(8(1+$自然对数 $4N))$。对于每个 $k\geq 4$，同样的结论也适用于 $k$-可着色图，其指数分别为 $2/(L(L+1))$ 和 $1/L$，且 $N\geq 2^{201}$对应 $N^{1/(L+1)}$。

**这种方法能做什么、不能做什么**。另外两个定理说明了这些下界的形式。第一个是定理 1.4，它指出，不同 $k\geq 3$

的确定性下界在顶点数量上仅相差一个多项式变化。这是不同 $k$ 取值之间困难性转移 [43,引理 33]。

定理 *1.4*（ $k$不同取值之间的迁移）。设 $k, k' \geq 3$。存在 $j \leq \log^* k' + 1$，使得对所有$N$以及所有 $K \geq 2$，若 $\chi_{k'}^{\det}(N) \geq K$，则 $\chi_k^{\det}(N^{(j+1)(j+2)/2}) \geq K$。特别地，若对于固定的 $k' \geq 3$，$\chi_{k'}^{\det}(n) = \Omega(n^{\varepsilon})$，则 $\chi_3^{\det}(n) = \Omega(n^{\varepsilon'})$，其中 $\varepsilon' = 2\varepsilon/((\log^* k' + 2)(\log^* k' + 3))$。

等价地，$N_k(K) \leq N_{k'}(K)^{(j+1)(j+2)/2}$ 对每个 $K \geq 2$，其中 $N_k(K)$ 是对手能够迫使每个确定性算法在 $K$ 个颜色$k$可着色图上使用的最少顶点数（观察 4.3）。

定理 1.1 至 1.3 中的每个困难实例都是一座塔。根据第二个定理——定理 1.5，对于所有充分大的 $n$，First-Fit 在任意顶点数至多为 $n$ 的 $k$-可着色塔上使用的颜色数至多为 $n^{1/(\log^* n - \log^* k - 3)}$。因此，塔无法改进定理 1.1 中指数分母的加法常数。定理 1.5 使用下文定义的标记偏序集 $P_j(k)$ 来表述；这些偏序集决定完整塔何时为 $k$-可着色。偏序集的下集是这样一个子集：对于其中每个元素，它也包含所有更小的元素。对于有限偏序集 $P$，令 $J^*(P)$ 表示其非空下集构成的偏序集，并按包含关系排序。令 $P_0(k)$ 表示定义在 $[k] = \{1, \ldots, k\}$ 上的反链，其中任意两个不同元素都不可比较，并令 $P_{j+1}(k) := J^*(P_j(k))$；因此，$P_1(k)$ 由 $[k]$ 的非空子集构成。其大小 $|P_j(3)| = 3$、7、18、81、8 569、……按指数塔的速度增长。以含有 $K$ 个顶点的团为底、具有 $j$ 层的完整塔，当且仅当 $K \leq |P_j(k)|$ 时是 $k$-可着色的（推论 5.4）。

**定理 1.5**（塔的上界）。设 $k \geq 3$。若 *First-Fit* 在一个 $k$-可着色的 $j$ 层塔 $G$ 上使用了 $c \geq 2$ 种颜色，则 $c \leq |P_j(k)|$，且对每个 $0 \leq i \leq j$ 都有 $|V(G)| \geq \binom{c-1}{i+1}$。因此，存在 $n_k$，使得对每个 $n \geq n_k$，*First-Fit* 在任意至多含有 $n$ 个顶点的 $k$-可着色塔上至多使用 $n^{1/(\log^* n - \log^* k - 3)}$ 种颜色。

另外两个结果补全了整体图景（第9节）。首先，透明模型中的 $2^k - 1$ 界从颜色推广到了标签。用偏序集 $P$ 标记时，每个顶点 $u$ 都对应一个元素 $f(u)$，该元素属于 $P$，并且对 $u$ 的每个后续邻点 $v$，都有 $f(u) \not\leq f(v)$；对于 $[k]$ 上的反链，这就是一个合法的 $k$-着色。若对手逐一揭示图的这种标记，并在算法给顶点着色后立即揭示其标签，则最多迫使算法使用 $|J^*(P)|$ 种颜色（命题 9.4）。因此，强对手必须延迟作出承诺，或在具有许多下集的偏序集中作出承诺：若对手以这种方式揭示来自 $P_j(k)$ 的标签，则最多迫使算法使用 $|P_{j+1}(k)|$ 种颜色。其次，可用 Kawarabayashi、Yoneda 和 Yoneda [20,引理 4。3] 中的对手替代塔起始处的团。由此可在色数缓慢增长时得到多项式下界：对每个 $n \geq 16$，存在 $m \leq \log_2 \log_2 n + \log_2 \log_2 \log_2 n + 3$，使得 $\chi_m^{\det}(n) \geq \lfloor (n/16)^{1/3} \rfloor$（定理 9.3）。

**形式化验证**。本文所有编号结果，包括 定理 1.1 至 1.5，均按原文准确表述在 Lean 4 和 Mathlib 中形式化；证明完整，且仅使用 Lean 的标准公理。计算机搜索得到的值均由已证明其可靠性的检查器验证。[2]

**组织结构**。第 2 节 非正式地介绍构造与证明，第 3 节 将其与先前工作联系起来。第 4 节 明确模型，而第 5 节则发展标签演算。第 6 节 证明 定理 1.2，第 7 节 证明 定理 1.3 中涉及 $G$的部分；第 8 节 证明定理 1.1 以及 定理 1.3 的其余部分，并且第 9 节 给出关于迁移和界限的结果；第 10 节 列出未解决问题。附录验证了定理 1.1（附录 A）的阈值，并给出更小的

[2]这不包括那些没有被任何编号陈述所依赖的计算值，例如 附录 D.5 中的最佳逃逸概率；我们没有为其编写经验证的检查器。

显式实例和精确的小规模情形（附录B），以及预留构造的一个无视版本（附录 C），并汇集更多结果（附录 D）。

## 2 技术概述

我们的对手通过在幕后保留一个团、始终不将其展示给算法，化解了强制颜色与保持3-可着色之间的矛盾。它们展示的是该团的迭代膨胀，其中每个顶点都被替换为一个独立顶点块。我们先解释定理 1.2给出的显式界；这个界较弱，但更简单。接着在第 2.3 节中，我们介绍如何修改以得到定理 1.1。定理 1.2 的证明基于四个事实。

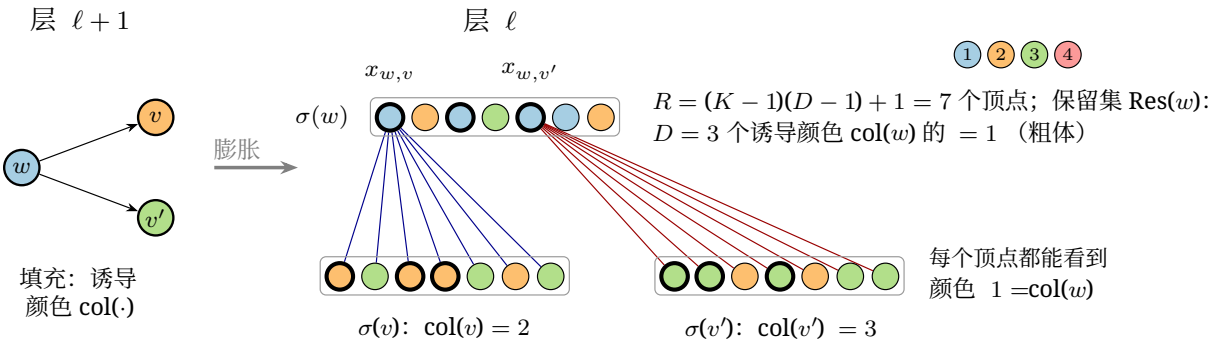
1. 膨胀保留强制能力：如果对手能够强制得到 $K$ 种颜色，那么在已知颜色后再选择服务器时，经过一次膨胀后，它仍能强制得到 $K$ 种颜色（引理 6.2）。2. 膨胀会使标记偏序集降低一层：如果图的顶点可以用偏序集的非空下集标记 $P$，且没有任何标记包含于后续邻点的标记中，那么膨胀后的图也可以用 $P$ 中的元素以同样方式标记（引理 5.2）。3. 标记偏序集按塔函数增长，因此一个含有 $K$个顶点的团，经过 3-可着色，所需的膨胀次数为 $\log^* K+1$（引理 5.6）。4. 每次膨胀都会使块大小扩大约 $K$倍，因此总共有 $K^{O((\log^* K \text{ 个2}) \text{ 个顶点}}$（定理 6.4）。

事实 2 和 3 是关于弧图和移位图的经典结果，而事实 1 背后的预留可追溯至 Li（第 3 节）。据我们所知，有三点是新的：预留单个顶点，使每次膨胀恰好对应弧图演算的一步；在团下迭代此类膨胀；以及由此得到的界。我们通过最小的有趣示例来解释这四个事实：在一个 3-可着色图上强制使用四种颜色。

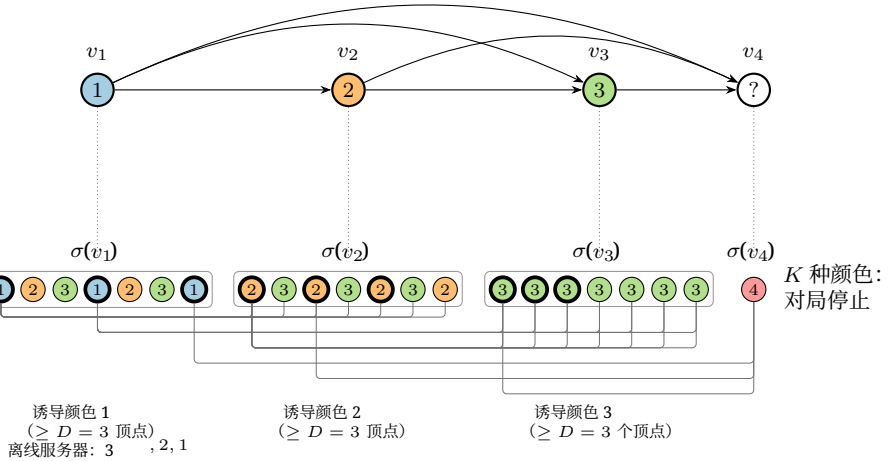
### 2.1 一次膨胀：在一个 3-可着色图上使用四种颜色

按此顺序取团 $K_4$ on $v_1, \ldots, v_4$。它会强制使用 4 种颜色，但并非 3-可着色，因此算法不会看到它。相反，每个 $v_t$ 都以一个块 $\sigma(v_t)$ 的形式呈现，其中含有 7 个独立顶点。只要算法至多使用 3 种颜色， $\sigma($ $v_1)$中就至少有 3 个顶点颜色相同，因为 $7 > 2+2+2$。对手将这种颜色称为诱导颜色 col($v_1$)，并保留三个该颜色的顶点，分别对应 $v_1$的每个后续邻点；我们称它们为服务器 $x_1$,2, $x_1$,3 和 $x_1$,4。 $\sigma(v_2)$中的每个顶点都与 $x_1$,2 相连，因此它们的颜色都不是 col($v_1$)，且诱导颜色 col($v_2$) 与 col($v_1$) 不同。同理， $\sigma(v_3)$ 与 $x_1$,3 和 $x_2$,3 相连，因此 col($v_3$) 是第三种颜色。 $\sigma(v_4)$的第一个顶点与 $x_1$,4、 $x_2$,4 和 $x_3$,4 相连，而这三个顶点的颜色各不相同，因此它需要第四种颜色；完整对局中的 22 个顶点如图 1(b) 所示。

服务器的两个特性使这一方法奏效。首先，只有在已知它们的颜色之后才会选取服务器，因此对手可以从每个块的流行颜色中选取它们。因此，诱导颜色就是确定性在线算法赋予团的颜色，并且每一种诱导颜色都是实际算法使用的颜色；所以，任何能迫使算法使用 $K$ 种颜色的对手，在膨胀后仍能迫使算法使用 $K$ 种颜色。其次，每个服务器只与一个后续块相连。如果对手将 $\sigma(v_t)$ 连接到每个较早块中颜色为$\mathrm{col}(v_s)$ 的所有顶点，那么从每个块中各取一个具有诱导颜色的顶点，就会构成一个 $K_4$。正如我们接下来将要说明的，私有服务器能降低色数。代价则是块大小：一个块中的顶点若有 $D$ 个后续邻居，就需要 $D$ 个同色顶点；而当可用颜色至多为 $K-1$ 种时，( $K-1)(D-1)$ $+1$ 个顶点便足以保证这一点。为每个后续邻居预留一个副本，是 Li [28, 引理 25], 中的模拟步骤，只不过他用的是单个顶点，而非二分图构件。




(a) 两条弧 $w \to v$ 以及上一级图的膨胀； $K=4$、 $D=3$，由 $R=7$ 个顶点组成的块 .




（b）一次精确对局：团膨胀一次，每个块包含 7 个顶点。

图 1：一次预留膨胀。（a）某种颜色在 $\sigma(w)$ 中至少出现 $D$ 次；它成为诱导颜色 col($w$)，该颜色的 $D$ 个顶点构成保留集（粗边框）。 $w$的三个后续邻居中，图中画出了第一个和第三个。服务器$x_{w,\ v}$ 与 $\sigma$($v$) 中的所有顶点相连，因此 $\sigma(v)$ 中没有顶点的颜色是 col($w$)，且 col($v$) $\neq$col($w$)。（b）针对总是选取 1、 . . . 、 $K-1$中允许且使用次数最少的颜色的算法的对手。 $v_1$、 $v_2$、 $v_3$ 这些块的诱导颜色分别为 1、2、3； $\sigma(v_4)$ 中的第一个顶点能看到这三种颜色，因此获得颜色 4，此时已有 $3\cdot 7+1=22$个顶点。

为什么膨胀后的图是 3-可着色的。为团中的每个顶点赋予一个非空颜色集合：将 {1, 2, 3} 赋给 $v_1$，将 {1, 2}、{1, 3}、{2, 3} 分别赋给 $v_2$、 $v_3$、 $v_4$。没有一个集合包含于后续顶点的集合中。服务器$x_s$、$_t$ 选取一个属于 $v_s$ 的集合、但不属于 $v_t$的集合的颜色，而 $\sigma(v_s)$中的其他每个顶点都从 $v_s$的集合中任取一种颜色。每条边都连接服务器 $x_s$、$_t$ 与 $\sigma(v_t)$中的一个顶点；后者的颜色属于 $v_t$ 的集合，而$x_s$、$_t$ 的颜色不属于该集合，因此这种着色是合法的。在图 1(b)中，服务器 $x_1$、2、 $x_1$、3 和 $x_1$、4 的在线颜色均为 1；而离线时，它们分别获得颜色 3、2 和 1，这些颜色各自不属于其所服务块的集合 {1, 2}、{1, 3} 和 {2, 3}。同样的论证适用于任意图 $H$ 的膨胀，只要其顶点带有 {1, 2, 3} 的非空子集，且没有一个集合包含于后续邻居的集合中。对于团 $K_m$ ，这要求有 $m$ 个不同的集合，按从大到小排列，因此一次膨胀至多支持一个含 $2^3-1=7$ 个顶点的团；事实上， $K_8$ 的膨胀不是 3-可着色的（推论 5.4）。图 2 展示了这一规则。

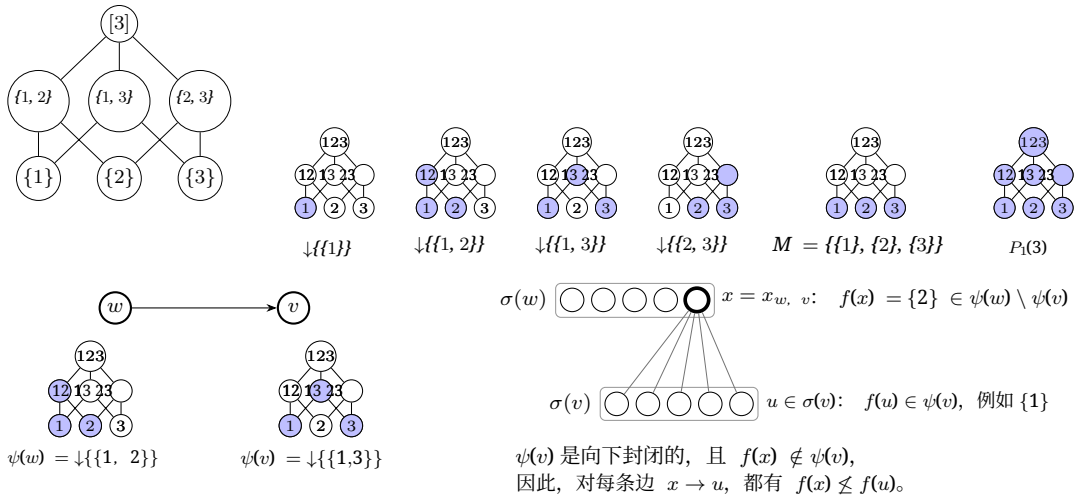



图 2：再上一层的标签是非空下集。上： $P_1(3)$，即 $[3]$,的非空子集，以及 $P_2(3)$的 18 个元素中的 6 个，它们被画成 $P_1(3)$的下集。这四个中间项两两不可比，因此两层就能将宽度从 3 提升到 4，之后宽度便按指数塔的速度增长。下：引理 5.2 的规则：从上一层的标记 $\psi$ 得到膨胀图的标记 $f$。弧 $w \to v$ 的服务器 $x$ 在 $\psi(w) \setminus \psi(v)$中获得一个标签， $\sigma(v)$的每个顶点 $u$ 在 $\psi(v)$中获得一个标签，并且由于 $\psi(v)$是向下封闭的， $f(x) \not\leq f(u)$。

## 2.2 迭代：标签的标签与指数塔

为了迫使算法使用超过七种颜色，对手进行了两次膨胀。团中的每个顶点都变成一个由 层级为 1 的节点组成的块，算法同样看不到这个块；而层级为 1 的每个节点又变成一个由呈现的顶点组成的块。层级为 1 的节点，其颜色由它自身所在块的诱导颜色决定。这样的节点代表整个一块层级为 1 的节点，因此，它自身所在块中的呈现顶点必须为该块中的每个节点各包含一个服务器。若 $K = 8$ 团顶点的块各有 $7 \cdot 6 + 1 = 43$ 个节点，层级为 1 的节点块各有 $7 \cdot 42 + 1 = 295$ 个顶点，那么对手就能用至多 8 种颜色迫使算法使用 88796 个顶点。 图 3 展示了 $K = 3$ 的一个完整两层对局。

可着色性论证也可以迭代。与之前一样，层级为1 的节点由一个颜色集合标记，而团中的顶点则由一个非空集合族标记，该集合族对取非空子集封闭。一个集合族不包含于后一个集合族，当且仅当它含有一个后者所缺少的集合；弧的服务器就以该集合为标记。这就是偏序集 $P_1(3)$(引理 5.2) 的事实 2。从由三种颜色构成的反链 $P_0(3)$ 出发，标签偏序集 $P_{j+1}(3) = J^*(P_j(3))$分别有 3、7、18、81 和 8569 个元素，而团 $K_m$ 恰好能在进行 $j$ 次完全膨胀后存活，当且仅当$m \leq |P_j(3)|$ (推论 5.4)。

这些偏序集以指数塔的速度增长。如果 $P$ 有 $w$ 个两两不可比的元素，那么由它们的子集生成的下集共有 $2^w - 1$ 个不同元素，属于 $J^*(P)$，其中$\binom{w}{\lfloor w/2 \rfloor} \geq 2^w/(w+1)$ 个两两不可比。偏序集 $P_2(3)$ 已经有四个两两不可比的元素，此后每一层都会使宽度呈指数增长。因此，$\log^* K + 1$ 次膨胀足以满足 $K_K$，而至少需要 $\log^* K - 2$ 次（推论 5.7）。

这一静态部分是经典内容。有序图的预留膨胀 $H$ 是 $H$的弧图，并为每个顶点连接一个私有汇点，不同之处在于，每条汇弧可以出现任意数量的

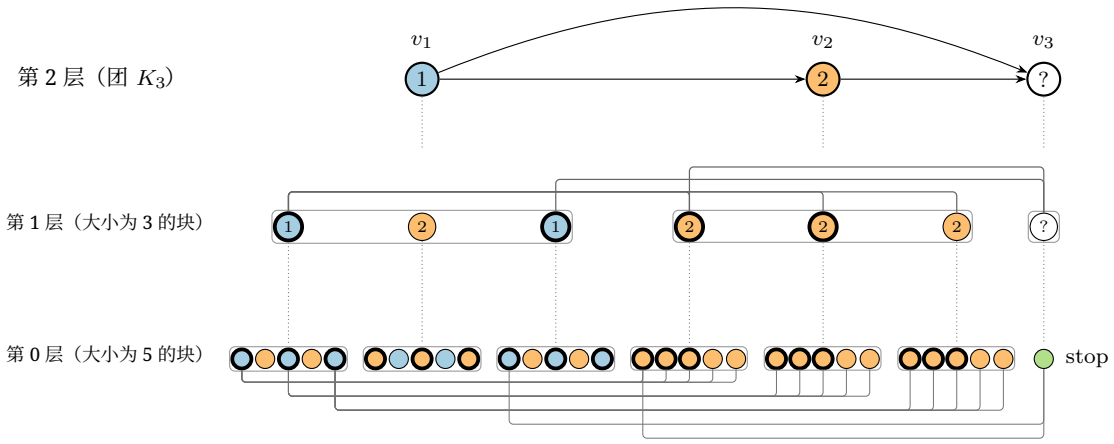



图 3：与最少使用颜色算法进行的完整对局，包含两次膨胀，$K = 3$。中间一行展示了第 1 层节点的诱导颜色；每行下方的每个通道都是一个服务器，它与某个块中的所有顶点相连。每个服务器的颜色继承自其所属的保留集，因此，$v_3$ 下方的第一个顶点会看到 $v_1$ 和 $v_2$ 的诱导颜色，需要第三种颜色。

个副本，也可以没有：

$$\begin{aligned} \text{the server } x_{w,v} &\leftrightarrow \text{ the arc } (w,v), \\ \text{a vertex of } \sigma(v) \text{ that serves no arc} &\leftrightarrow \text{ a copy of the sink arc } (v, s_v), \\ x_{w,v} \text{ joined to all of } \sigma(v) &\leftrightarrow \text{ the arcs } (w,v) \to (v,z) \text{ of } \delta(H^+), \end{aligned}$$

其中 $H^+$ 是 $H$ 添加了汇点的 $s_v$，而 $\delta$ 是弧图算子：有向图的弧图以其弧为顶点，并且对每一对连续的弧都有一条弧 $(a,b) \to (b,c)$。从这个意义上说，团上的完整塔就是 Erdős 和 Hajnal 的移位图 [10, 定理的证明 2]，，其可着色性阈值和塔增长可追溯至 Harner 和 Entringer [18]，Poljak 和 Rödl [37]，Poljak [36] 以及 Duffus、Lefmann 和 Rödl [9]，，近期的研究则见 Rorabaugh、Tardif、Wehlau 和 Zaguia [39] 以及 Bai 等人 [1]。非空块正是我们的标签为非空下集的原因。

**计数。** 一个有 $D$ 个后续邻居（后度为 $D$）的节点需要一个包含 $(K-1)(D-1)+1$个节点的块，而该块中的每个节点又可以为一个同样大小的块提供服务。因此，后度以及块大小会在每次膨胀后增长约 $K$ 倍：顶层顶点（团中的顶点）的块约有 $K^2$ 个节点，下一层的块约有 $K^3$个节点，而经过 $i$ 次膨胀后约有 $K^{i+1}$个节点。经过 $j$ 次膨胀后，图至多有

$$K \cdot K^2 \cdot K^3 \cdots K^{j+1} \;=\; K^{(j+1)(j+2)/2}$$

个顶点。令 $j = \log^* K + 1$ 这是 $K^{O((\log^* K)^2)}$，并求解 $K$ 可得 定理 1.2。

### 2.3 去掉一个$\log^*$：随机服务器与未使用质量

二次指数源于计数：块大小每次 $K$ 膨胀都会扩大一个因子，因为服务器必须将单一颜色分配给整个块。定理 1.1 放弃了预留许多同一颜色的顶点。在一个均匀塔 中，每条弧仍有自己的服务器，但所有块的大小都相同 $A = 2m$，其中 $m$ 是顶层顶点的数量，服务器则随机选取。

塔被分为 $m$ 个阶段，每个阶段对应一个顶层顶点的一棵子树；某个阶段的服务器及其连线按如下方式选取：每个更早的顶层顶点提供一个尚未提供服务的均匀随机子节点，而在顶层以下，某个节点的子节点通过相互独立的均匀随机双射，与其服务器的子节点进行匹配。

分析针对每种颜色，追踪其未使用质量：即仍可能成为服务器的该颜色的已呈现顶点，并为其赋予权重，使每个顶层顶点的子树质量为 1。一旦某种颜色（例如红色）有足够多的未使用顶点，新顶点就很可能获得一个红色服务器，因此算法几乎没有机会让红色变得更重。然而，结束时总质量中仍有约四分之三未被使用，因此许多颜色共同分担这部分质量。证明分为四个步骤。

1. 未使用质量为 $u$ 的颜色被漏掉的概率至多为 $e^{-u}$。在随机连线下，一个已呈现顶点在每个更早的顶层顶点下方都有一个更早的邻点；该邻点在那些尚未服务的子节点下方的已呈现顶点中均匀选取（引理 8.4）。2. 重颜色增长缓慢。将未使用质量至少为 $\ln 4m$的颜色称为重颜色。重颜色少于$m$ 种，因此期望而言，每个阶段至多有四分之一的情况会漏掉某种重颜色，而只有这部分情况能为重颜色增加质量。3. 最终质量已知。顶层顶点贡献质量 $m$，服务器移除 $\binom{m}{2}/A$，因此结束时的未使用质量恰为 $(3m+1)/4$（引理 8.3）。一个阶段最多给任何一种颜色增加 1，因此某种颜色成为重颜色时，其质量低于 $\ln 4m+1$；此后它只能通过步骤 2 中的顶点增加质量。4. 计数。将最终质量与浅色和重颜色所能容纳的质量进行比较，可知在期望意义下，颜色至少有 $(2m+1)/(4(1+\ln 4m))$ 种，且这一结论对任意层数都成立（定理 8.5）。

据我们所知，步骤 1 至 3 是新的；塔计算给出了可着色性。定量分析的核心在于每一层都毫无损失：均匀塔有 $n=m(2m)^j$ 个顶点，并且一旦 $m \le |P_j(k)|$，它就是 $k$-可着色的，因此只需 $j=\log^* n+O(1)$ 层，而界为 $n^{1/(j+1)}/O(\log n) = n^{1/(\log^* n+O_{(1)})}$。代价是因子 $1+\ln 4m$；我们证明，对于 $n \ge 2^{406}$，有 $n^{1/(\log^* n+3)}$。

## 2.4 变体：确定性对手、随机化算法与已知图

随机连线从不查看颜色，因此根据姚氏原理，定理 1.1对随机化算法也成立。同一分析还给出了一个确定性对手：它根据已使用的颜色来选择每个阶段的连线，并在每一场对局中迫使界成立（定理 8.5（ii））。

连线只改变一个块中顶点到达的顺序，不改变图：所有连线在同构意义下都得到相同的完整塔（引理 7.1和8.2）。因此，可以将最终图告知算法，而定理 1.1和1.2 的界适用于单个图（定理 1.3）。对于定理 1.2，对手获胜后还必须完成每个块（引理 7.2）。

## 2.5 界限

First-Fit 会为完整塔中的每个块赋予与其上一层对应节点相同的颜色（引理 9.5），因此在完整塔的一个初始段中，它使用的颜色数恰好等于具有呈现后代的顶层顶点数。如果它使用 $c$ 种颜色，那么前 $c-1$ 个顶层顶点的子树就会被完整呈现。沿服务器向下一层追踪，可将由 $i+1$ 个顶层顶点构成的游走单射地映射为由 $i$ 个第 $j-1$层节点构成的游走；经过 $i$ 步后，每个由 $\binom{c-1}{i+1}$ 个顶层顶点组成的递增序列都有一个独属于它的第 $j-i$层节点。因此，对每个 $\binom{c-1}{i+1}$，该塔至少有 $i \le j$个顶点。至少需要 $\log^* c - O(1)$ 层，因此我们可以取 $i=\log^* c - O(1)$，

而且每个塔式对手最多只能使用 $n^{1/(\log^* n - O(1))}$ 种颜色（定理 1.5），与 定理 1.1相比，其指数分母只相差一个加法常数。

第二个限制涉及所有预先确定标签的对手，而不仅是塔。假设每个顶点着色后，对手立即揭示该顶点在图的一个偏序集标记$P$中的标签。了解对手的算法可以将每个顶点 $v$ 着成 $v$ 它仍有可能获得的标签集合，也就是 $P$的一个非空下集，并且相邻顶点总是获得不同的集合（命题 9.4）。对于由 $k$ 种颜色组成的反链，这相当于透明模型的经典 $2^k - 1$ 算法的一种变体 [17, §4。5]。一般而言，从 $P_j(k)$ 中预先确定标签的对手，至多能迫使算法使用 $|P_{j+1}(k)|$ 种颜色。

私有服务器也很重要。在 Vishwanathan 的层中，一个选定的顶点集会同时服务所有后续邻居，并且每个构件都包含一条边；这样的层每次都会使团数增加一，因此最多只能堆叠 $k-1$ 层（命题 D.1），这就是$\Omega(\log^{k-1} n)$ 指数的来源。Li 的层为每个未来邻居保留一个构件的私有副本 [28,引理 2。5], 而我们的膨胀则为每个未来邻居保留一个私有顶点。

最后，顶端的团可以替换为任意对手。若顶端使用针对 $k'$-可着色图的对手，那么 $j$ 膨胀就会产生针对 $k$-可着色图的对手（定理 1.4）。使用 Kawarabayashi、Yoneda 和 Yoneda 的配对对手 [20, 引理 4。3]„ 对手中每种颜色在 $2^\ell$ 个色数至多为 $2\ell$的顶点上最多使用两次；一次膨胀便能强制使用$\lfloor (n/16)^{1/3} \rfloor$ 种颜色，而图的色数约为$\log\log n$ (定理 9.3）。

## 3 与先前工作的关系

在线着色的下界。针对固定 $k$ 且随 $n$ 增长的先前下界，会先在一个独立集上强制使用许多颜色，再将其放大。Vishwanathan 的对手会把一个色数比已有独立集低一的构件，与该独立集完全相连；该独立集上已经有许多颜色，因此构件必须使用新颜色 [41, §§3.1–3.2]。Kierstead 的手册章节给出了确定性版本 [24, 定理 4.4], ，Kierstead 和 Kolossa 则使该构造达到完美 [25,定理 0.2]。Li [28] 研究 $t$-重着色，并使用模拟引理，为模拟顶点的每个未来邻点预留一个单独的构件副本 [28, 引理 2.5]；其构造的每一层都保持色数为 3，而大约 $\log K/\log\log K$ 层，每层都将后度相乘，从而得到他的下界 [28, §2.3]。没有预留时，这类层级每层都会使团数增加一，因此最多只能叠加 $k-1$ 层（命题 D.1）。我们的构造保留了 Li 的预留，舍弃了其余部分：没有构件，也没有折叠约化；所有强制着色都由顶端的团完成，而膨胀只会降低色数。由于预留的副本都是单个顶点，每次膨胀恰好是弧图演算的一步，它会使色数呈指数级下降 [18, 定理 8–9], ，因此 $\log^* K + O(1)$ 次膨胀就足够了。Li 的随机下界将预留副本隐藏在一个随机索引中 [28, 引理 A.4], ；我们在附录 C 中也采用了这一做法。另一方面，Halldórsson 和 Szegedy 会在色数至多为 $\log n$ [17] 的图上强制使用约 $n/\log n$ 种颜色；Kawarabayashi、Yoneda 和 Yoneda 则会在色数至多为 $2\lceil \log_2 n \rceil$ [20, 的 $n$顶点图上强制使用至少 $n/2$ 种颜色1]引理 4.3 及定理 1.1]的证明；定理 9.3 将后一构造用作顶端。Li、Narayan 和 Pankratov 定义了“饱和箱” [30, 定义 2.1], ，这是早期一些对手中隐含的一种概念；附录 D.2 中单层对手的饱和颜色则是另一种概念，由流来定义。

**移位图和弧图**。对 $H$ 进行预留膨胀，得到弧图 $\delta(H^+)$，其中 $H$ 的每个顶点都有一个私有汇点，副本数等于每条汇弧的副本数（第 2.2 节）。在传递竞赛图上迭代 $\delta$，可得到 Erdős 和 Hajnal 的移位图 [10, 证明 定理 2], 一个经典的

高色数且不含短奇圈的图族 [39, 页 277]。关于 $\chi(\delta(H))$ 与 $\chi(H)$ 之间关系的单层界由 Harner 和 Entringer 给出 [18, 定理 8–9], 较低的界则早已由 Erdős 和 Hajnal 给出 [10, 定理 5], ，而对称有向图的精确公式由 Poljak 和 Rödl 给出 [37, 定理 1.1]。第 5 节给出了标记演算的确切出处：Poljak 伴随 [36,引理 1] 的内容即为引理 5.2 和引理 5.3；移位图的可着色性阈值统计所有迭代下集，Moshkovitz 和 Shapira 关于单调路径的等价表述见 [33, 定理 5 和式（10）], 而我们的推论 5.4 统计的是非空下集；塔增长则基于 Poljak 和 Rödl 的递归 [37, 注 3.2] 以及 Duffus、Lefmann 和 Rödl 的递归 [9,式（1）]；另见 [27, 第 4 节5]。在离线情形下，弧图可在不同的 $k$ [43, 取值之间迁移近似着色问题的 NP 困难性（引理 3.3 和命题 2）1]；定理 1.4 是其在线对应形式，其中归约映射的是对手而非实例，代价为顶点数的多项式。

**移位图上的在线博弈**。 移位图此前已出现在在线着色中，但据我们所知，从未被用于在色数为常数的图上强制使用许多颜色。Diwan、Kenkre 和 Vishwanathan 的无三角形呈现者 [8, 定理 16] 在算法为 First-Fit 时构造移位图，正如 Gutowski、Kozik、Micek 和 Zhu 所观察到的 [13, 第 6], ；他们还保留“扇”的某种流行颜色的顶点以供后续使用 [13, 定理 2]的证明；但这两种构造都没有将呈现图的色数界定为常数。在 Pérez-Giménez、Prałat 和 West 的 Builder–Painter博弈中 [35], 对于含两条边的路径，Painter 在线为移位图的一个诱导子图着色，而分析过程维护迭代的下集标签 [35, §3], 但 Painter 会被告知移位图中呈现的是哪个顶点，而 Builder 只强制达到大约静态色数的程度。在我们的设定中，顶点的身份是在其被着色后才确定的，这正是能够实现强制的原因；Gyárfás 和 Lehel 的树构造中也采用了同样的机制 [14,定理 2。5]。

**迭代对数**。 迭代弧图的对数$^*$ 行为在分布式计算中广为人知。Linial 关于对环进行 3-着色的 $\Omega(\log^* n)$ 下界 [31, 定理 2.1] 依赖于同一个算子：他的邻域图包含移位图，而该算子每应用一次，色数至多呈指数级下降 [31, 命题 2.1–2.2]。同一事实也限制了我们构造中的层数。

**模型**。 透明模型 [17], 随机顺序模型（参见 [46] 及其中的参考文献）和已知图模型 [16] 已在 第 1 节中讨论；在随机顺序下，某些二分图上的 First-Fit 仍需要多项式数量的颜色 [29]。在 Bartal、Fiat 和 Leonardi 的模型中 [3]„ 算法已知宿主图，并会获知每次到达对应的宿主顶点；他们的多项式下界针对色数为多项式级别的大图。Böhm 和 Veselý 证明，判定给定图的在线色数是 PSPACE 完全问题 [7, 定理 1。1]。Li、Narayan 和 Pankratov 将对手限制为在任何时刻都只能呈现连通分量较少的图 [30]。我们的对手一开始会呈现许多孤立顶点，即第一个顶点以下的那些顶点；不过，先呈现一个额外顶点，并将它与之后所有顶点相连，可以在只多用一种颜色的代价下保持图连通。因此，定理 1.2 对 $k = 3$的界，在多一个顶点的情况下，也适用于呈现过程每一步都保持连通的 4-可着色图。

**离线着色**。 在多项式时间内，3-可着色图可以用 $O(n^{0.19539})$ 种颜色进行着色， [2],这延续了一系列以 Wigderson 的工作为起点的研究 $O(\sqrt{n})$ [5, 6, 19, 42], ， 以及 Fei、Minzer 和 Wang 最近的结果：用任意固定数量的颜色为这些图着色是 NP 困难的 [11]。这些结论讨论的是多项式时间；像我们这样的在线下界则适用于计算能力不受限的算法。

## 4 预备知识

**在线着色。** 有序图 是指顶点带有线性序的有限简单图，该线性序称为到达顺序。对于顶点 $v$ ，我们记 $N^-(v)$ 表示它较早邻居的集合，并将其后续邻居的数量称为它的后度，沿用 Li [28]的术语。确定性在线着色算法逐个接收顶点；当 $v$ 到达时，算法会获知 $N^-(v)$ ，除此之外一无所知，并且必须为 $v$ 指定一种颜色（一个自然数），使其不同于 $N^-(v)$的颜色。颜色不会改变，而算法在某个输入上的代价是它使用的不同颜色数。输入是 $k$-可着色的，其中 $k \geq 1$固定不变且为算法所知；即使算法也知道顶点 $n$数量，我们的下界仍然成立。

**定义 4.1** （在线色数）。 数值$\chi_k^{\mathrm{det}}(n)$是指在所有确定性在线算法中，对所有具有 $k$可着色性且含有 $n$ 个顶点的有序图，最大代价的最小值。同理， $\chi_k^{\mathrm{rand}}(n)$是指在所有随机在线算法（即确定性算法上的概率分布）中，对所有具有 $k$可着色性且含有 $n$个顶点的有序图，最大期望代价的最小值。

这两个量关于 $n$均为非递减的，因为一个含有 $n$ 个顶点的糟糕输入，在添加一个孤立顶点后仍然糟糕。对于固定的 $n$，确定性算法在含有 $n$ 个顶点的有序图上，其代价向量只有有限种，因此只需考虑有限支撑的分布。确定性算法的最坏输入可以通过观察已分配的颜色来自适应地构造；而随机化算法的输入则预先固定（由不知情的对手给出）。我们将自适应构造形式化如下。

**定义 4.2** （对手）。 对手 是一个确定性规则：给定一场对局的历史（迄今呈现的有序图及为其分配的颜色），要么停止，要么呈现一个新顶点及其较早邻居集合。若面对每个确定性在线算法的每场对局都有限，并且最终至少有 $K$ 种颜色已使用，则称该对手迫使使用 $K$ 种颜色。若每场对局中呈现的顶点至多有 $N$ 个，且每个顶点至多有 $D$ 个后续邻居，则称其规模至多为$N$ ，且后度至多为 $D$ 。若每场对局的最终图都属于某个有序图类，则称该对手落在该类中。

令 $N_k(K)$ 表示能迫使算法使用 $K$ 种颜色并生成 $k$-可着色图的最小对手规模。如果存在规模至多为 $n$ 的此类对手，那么 $\chi_k^{\mathrm{det}}(n) \geq K$：运行该对手，并不断添加孤立顶点，直到共有 $n$个顶点。反过来亦成立。考虑这样一种对局：对手最多呈现 $n$ 个顶点，并可自行决定何时停止；若对局结束时已使用至少$K$ 种颜色，且得到一个 $k$-可着色图，则对手获胜。按照颜色首次使用的顺序重新命名颜色后，这是一个有限的完全信息对局，因此根据策梅洛定理，两名玩家中必有一方拥有获胜策略：要么是规模至多为 $n$ 、能迫使算法使用 $K$ 种颜色并生成 $k$-可着色图的对手，要么是一个算法，它在每个顶点数至多为 $K$ 的有序 $k$-可着色图上使用少于 $n$ 种颜色。只有定理 1.4的证明用到了反向结论。

观察 4.3（确定性）。 $\chi_k^{\mathrm{det}}(n) \geq K$ 当且仅当 $N_k(K) \leq n$。特别地，只需证明：对于每个确定性算法，都存在一个顶点数至多为 $n$的有序 $k$-可着色图，使得该算法使用 $K$ 种颜色。

对于随机化算法，我们使用姚氏原理的简单方向 [44]。

**引理 4.4** (姚氏原理)。 设 $D$ 是定义在恰好含有$N$ 个顶点的有序 $k$-可着色图上的一个分布，使得每个确定性在线算法在$G \sim D$上的期望颜色数至少为 $x$ 。则对每个 $n \geq N$， $\chi_k^{\mathrm{rand}}(n) \geq x$ 。特别地，如果每个确定性在线算法以至少 $1-\varepsilon$的概率使用至少 $K$ 种颜色，那么 $\chi_k^{\mathrm{rand}}(n) \geq (1-\varepsilon)K$。

证明。 随机化算法是一个与 $G$独立的确定性算法分布。根据 Fubini 定理，它在 $G \sim \mathcal{D}$ 上的期望代价至少为 $x$，因此其支撑集中存在某个 $G$，使该期望代价得以实现。附加的孤立顶点不会改变前 $N$ 个顶点所使用的颜色。 □

如果 $\mathcal{D}$ 的支撑集中的所有图都是同一个图 $G$的呈现，那么同样的论证表明，每个预先知道 $G$ 的随机化算法，都存在 $G$ 的一种呈现顺序，使其期望使用至少 $x$ 种颜色。

$First\text{-}Fit$ 为每个顶点分配一个未用于其较早邻居的最小颜色。它使用的颜色数至多比某个顶点的较早邻居数的最大值多一种。

**偏序集与标签**。 设 $P$ 是一个有限偏序集。若 $x \le y \in U$ 蕴含$x \in U$，则集合 $U \subseteq P$ 是一个下集，而 $\downarrow U$表示由 $U$生成的下集。我们用 $J^*(P)$表示 $P$的非空下集按包含关系排序所构成的偏序集，并用 width($P$)表示 $P$ 的反链的最大大小。标签偏序集 为 $P_0(k)$、 $[k]$上的反链，以及 $P_{j+1}(k) := J^*(P_j(k))$（其中 $j \ge 0$）。

**定义 4.5**（模板与标记）。 模板 Tmpl($P$) 是以 $P$ 为顶点集的有向图；当且仅当 $a \not\le b$时，其中有一条弧 $a \to b$。有序图 $G$ 的 $P$-标记 是一个映射 $f\colon V(G) \to P$，满足$f(u) \not\le f(v)$，对每条边 $uv$，只要 $u$早于 $v$；此时我们称 $G$ 映射到 Tmpl($P$)。

$P$-标记在每个诱导有序子图上的限制仍是标记。在反链 $P_0(k)$ 中，当且仅当 $a \ne b$时， $a \not\le b$ 成立，因此 $P_0(k)$-标记就是一个正常的 $k$-着色。偏序集 $P_j(k)$ 为我们的构造标记层级：层 $j$ 上的节点由层 $j-1$标签的一个下集标记，依此向下直至第 0 层的颜色。

**迭代对数**。除非写作 ln，对数均以 2 为底。令 tow(0) $=1$，且 tow($i+1$) $=2^{\mathrm{tow}(i)}$，并令 $\log^* x = \min\{ i \ge 0 : \mathrm{tow}(i) \ge x\}$。例如，对于每个 $n \le 2^{65536}$，$\log^* 2 = 1$、$\log^* 16 = 3$、$\log^* 65536 = 4$ 和 $\log^* n \le 5$。

**膨胀**。 我们的所有困难实例都是迭代膨胀。以下静态定义涵盖了这些实例；后续章节将加入在线选择。

**定义 4.6**（膨胀）。 设 $H$ 为一个有序图。 $H$ 的膨胀 是一个有序图 $G$，并附带对 $V$（$G$）的一个划分，该划分由非空独立块 $\sigma$（$v$）、 $v \in V$（$H$）组成，以及一个部分映射 serve： $V$（$G$） $\to V$（$H$），满足

（i）各块按 $H$的顺序依次到达；（ii）若 $x \in \sigma$（$w$）且 serve($x$) $= v$，则 $v$ 是 $H$中 $w$ 的后续邻点，并称 $x$ 服务弧 $w \to v$；（iii） $G$ 的边恰好是满足 serve($x$) $= v$ 且 $u \in \sigma$（$v$）的有序对 $xu$。

若 $H$ 的每条弧都至少由一个顶点服务，则称该膨胀为完全；若每条弧都恰好由一个顶点服务，则称其为预留膨胀，该顶点称为服务器。

换句话说，膨胀中的每个顶点至多与一个后续块完全相连，且没有其他后续邻居。

**定义 4.7**（塔）。 在按到达顺序排列的团 $K_m =$（$v_1$，……， $v_m$）上，一个完整的 $j$层塔 通过进行 $j$ 次连续的完全膨胀得到： $H^{(j)} = K_m$，且 $H^{(i)}$ 是 $H^{(i+1)}$ 对于 $i = j-1$，……， 0 的完全膨胀。 $H^{(\ell)}$ 的顶点是第 $\ell$ 层的节点；第 $j$ 层的节点是顶层顶点，第 0 层的节点是呈现图 $H^{(0)}$ 的顶点。这些块定义了一个森林，其根为顶层顶点；一个节点的子树 由它的所有后代组成。一个 $j$层塔 是一个完整 $j$层塔 的初始段，后面可能跟有孤立顶点。

完整塔按 子树逐个呈现：根据 定义 4.6（i），在每一层应用该定义时，每个节点的呈现后代在到达顺序中构成一个连续区间，并且这些区间按照节点的顺序排列。第 $\ell \geq 1$ 层节点的块由第 $\ell - 1$层的节点组成。如果 $x$ 在第 $w \to v$ 层节点之间提供一条弧 $\ell$，那么 $x$ 就是第 $\ell - 1$ 层的一个节点，与 $\sigma(v)$ 中的所有节点 $H^{(\ell-1)}$相连。

## 5 标签演算

本节为静态内容：它确定团上的哪些完整塔是 $k$-可着色的，以及标签偏序集增长得有多快。后续的对手只需构造膨胀；无论在线阶段作出了什么选择，可着色性都由引理 5.2保证。相关结果以弧图和移位图的语言为人所知，我们在每条陈述中注明出处。我们给出简短证明，因为膨胀中的块非空，这使得经典陈述中的下集被非空下集所取代。

**引理 5.1**（团与反链；参见 [1, 引理 2。4]）。 设 $P$ 为有限偏序集。*(i)* 按到达顺序排列的团 $K_m$ 映射到 $\mathrm{Tmpl}(P)$ 当且仅当 $m \leq |P|$。*(ii)* 若 $P$ 含有大小为 $k'$ 的反链，则每个 $k'$- 可着色有序图都映射到 $\mathrm{Tmpl}(P)$。

证明。 (i) 团中的任意两个顶点都相邻，而 $f(a) \not\leq f(a)$ 不成立，因此团的标记是单射。反过来，列出 $P$ 中的 $p_1$、……、$p_m$ 个互不相同的元素，并按较大的元素在前的顺序排列。若 $s < t$ 且 $p_s \leq p_t$，则 $p_s < p_t$，所以 $p_t$ 会排在 $p_s$ 之前。因此，对所有 $s < t$，都有 $p_s \not\leq p_t$ 。(ii) 反链中的不同元素彼此不可比较，因此将一个适当的 $k'$-着色与一个从颜色到反链的单射复合，即可得到一个标记。 □

接下来的两个引理是这套演算的核心：标签可以沿着膨胀向下传递，从 $J^*(P)$ 到 $P$；也可以沿着完全膨胀向上传递，从 $P$ 到 $J^*(P)$。用弧图的术语来说，这就是 Poljak 伴随 [36, 引理 1]，的 Rorabaugh、Tardif、Wehlau 和 Zaguia 的表述 [39, （他们将引理 4 和 7]，归功于 Foniok 和 Tardif [12], ），以及 Bai 等人的 [1, 引理 2。3]。他们的模板使用 $\not\geq$，而我们的模板使用 $\not\leq$。

**引理 5.2**（标签经膨胀向下传递）。 如果 $H$ 映射到 $\mathrm{Tmpl}(J^*(P))$，那么 $H$ 的每个膨胀都映射到 $\mathrm{Tmpl}(P)$。

证明。设 $H$的一个 $J^*(P)$-标记为 $\psi$，且 $H$的一个膨胀为 $G$。我们为 $x \in \sigma(w)$选择 $f(x)$。如果 $x$ 服务于弧 $w \to v$，那么 $\psi(w) \not\subseteq \psi(v)$，并且我们选择 $f(x) \in \psi(w) \setminus \psi(v)$。否则，我们任意选择一个 $f(x) \in \psi(w)$；这是可行的，因为 $\psi(w)$非空。 $G$ 的每条边都连接一个服务于某条弧 $w \to v$ 的顶点 $x$ 与一个较后的顶点 $u \in \sigma(v)$。现在 $f(u) \in \psi(v)$，而 $\psi(v)$是一个不包含 $f(x)$的下集，因此 $f(x) \not\leq f(u)$。 □

证明只用到了块彼此独立这一点，以及块 $\sigma(w)$中的每个顶点至多与一个后续块完全相连，即 $v$ 的后续邻点 $w$所对应的块 $\sigma(v)$。证明不依赖块大小、为一条弧服务的顶点数量，也不依赖服务器的选择方式；在我们所有的构造中，这使强制与可着色性彼此分离。

**引理 5.3** (标签沿完全膨胀递增)。 如果完全膨胀 $G$ 映射到 $\mathrm{Tmpl}(P)$，经由$f$，那么 $H$映射到 $\mathrm{Tmpl}(J^*(P))$，经由 $\psi(v) := \downarrow f(\sigma(v))$。

证明。 每个 $\psi(v)$ 都是非空下集。设 $w \to v$ 是 $H$ 的一条弧，并令 $x \in \sigma(w)$为其服务。于是对每个 $u \in \sigma(v)$，都有 $f(x) \not\leq f(u)$，因此 $f(x) \notin \psi(v)$，而 $f(x) \in \psi(w)$。故 $\psi(w) \not\subseteq \psi(v)$。 □

逐层应用 引理 5.2 和 5.3 ，并在顶层应用引理 5.1(i)，即可得到完整塔的可着色性阈值。对于移位图，该阈值统计所有迭代下集 [39, §3], [1,定理 2。2], [33,定理 5 和公式 (10)]；我们的阈值只统计非空下集。

**推论 5.4** （迭代膨胀的可着色性）。 设 $k \geq 2$, $j \geq 0$ 和 $m \geq 1$。如果 $m \leq |P_j(k)|$，那么 $K_m$ 的每个 $j$ 重膨胀及其任意诱导有序子图都是 $k$ 可着色的。反之，如果 $K_m$ 的某个 $j$ 重膨胀（其中所有 $j$ 膨胀都是满的）是 $k$ 可着色的，那么 $m \leq |P_j(k)|$。

证明。若 $m \leq |P_j(k)|$，则由引理 5.1(i)， $K_m$ 映射到 Tmpl($P_j(k)$)；应用引理 5.2 共 $j$ 次，可得到该 $j$ 重膨胀的 $P_0(k)$ 标记，也就是一个适当的 $k$ 着色；它限制到每个诱导子图上。反之，一个适当的 $k$ 着色对于任意到达顺序都是一个 $P_0(k)$ 标记。若所有 $j$ 膨胀都是满的，那么应用引理 5.3 共 $j$ 次可得 $K_m$ 映射到 Tmpl($P_j(k)$)，再由引理 5.1(i) 得到 $m \leq |P_j(k)|$。 □

还需要理解 $|P_j(k)|$。每一层至多使规模呈指数级增长，而一旦宽度达到 4，宽度至少呈指数级增长。对于 $k = 3$ ，一层之后宽度为 3，两层之后为 4。

**引理 5.5** （增长；参见 [1, 观察 2.5–2。6]）。 设 $P$ 是一个有限偏序集。

*(i)* 若 $A \subseteq P$ 是一个大小为 $w \geq 1$ 的反链，则 $U \mapsto {\downarrow}U$ 将 $A$ 的非空子集按包含关系构成的偏序集嵌入 $J^*(P)$ 中。因此， $|J^*(P)| \geq 2^w - 1$，且 $\mathit{width}(J^*(P)) \geq \binom{w}{\lfloor w/2 \rfloor}$。*(ii)* 偏序集 $J^*(P)$ 至多有 $2^{|P|} - 1$ 个元素，并且 $p \mapsto {\downarrow}\{p\}$ 嵌入 $P$ 到 $J^*(P)$ 中。*(iii)* $P_1(3)$ 的四个非空下集 ${\downarrow}\{\{1, 2\}\}$、 ${\downarrow}\{\{1, 3\}\}$、 ${\downarrow}\{\{2, 3\}\}$ 和 $M = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ 两两不可比，因此 $\mathit{width}(P_2(3)) \geq 4$。

证明。 (i) 如果 ${\downarrow}U \subseteq {\downarrow}U\prime$，那么每个 $a \in U$都位于某个 $a' \in U'$之下，而 $a = a'$，因为 $A$是一个反链；因此 $U \subseteq U'$。反向结论成立，因为 $\downarrow$ 是单调的。 $A$ 中大小为 $\lceil w/2 \rceil$的子集非空，并构成一个大小为 $\binom{w}{\lceil w/2 \rceil} = \binom{w}{\lfloor w/2 \rfloor}$ [40]的反链。(ii) 下集是 $P$的子集。(iii) 三个生成的下集中，没有任何一个包含另一个或 $\mathcal{M}$，因为每个下集都缺少另外两对有序对和一个单元素集；而$\mathcal{M}$ 不包含其中任何一个，因为它不含有序对。 □

（iii）部分归功于 Poljak [36, 引理 3]。反复应用（i）部分，可通过 Poljak 和 Rödl [37, 注 3.2] 以及 Duffus、Lefmann 和 Rödl [9, 式 (1)], 所用的递归$T_0 = 4$, $T_{i+1} = \binom{T_i}{\lfloor T_i/2 \rfloor}$ 构造出一个塔（即 4, 6, 20, 184 756, ...），他们用它为塔函数规模的移位图着色 [9, 引理 2 和定理 4–5]；另见 [38, 引理 2.1]。

**引理 5.6** (塔增长)。 对于每个 $j \geq 0$ 和 $k \geq 4$，宽度($P_j(k)$) $\geq$ 塔函数($j + 1$)。对于每个$j \geq 2$, 宽度($P_j(3)$) $\geq$ 塔函数($j - 1$)。对于所有 $k \geq 2$ 和 $j \geq 0$， $|P_j(k)| \leq$ 塔函数($j +$ 对数$^* k$)。
证明。由于 $\binom{w}{\lfloor w/2 \rfloor}$ 关于 $w$ 单调不减，引理 5.5(i) 给出：对于 $k \geq 4$，从宽度($P_0(k)$) $= k \geq 4$ 出发，宽度($P_i(k)$) $\geq T_i$ ；以及从引理5.5(iii) 出发，宽度($P_{i+2}(3)$) $\geq T_i$。剩下只需证明 $T_i \geq$ 塔函数($i + 1$)。对于 $i \leq 2$ ，这显然成立；而 $T_3 = 184\,756 \geq 2 \cdot 2^{16} =$ 2塔函数(4)。对于 $i \geq 3$ ，我们用归纳法证明 $T_i \geq$ 2塔函数($i + 1$)。函数 $g(w) = 2^w/(w + 1)$ 满足$\binom{w}{\lfloor w/2 \rfloor} \geq g(w)$，并且对于 $w \geq 1$ 单调不减。由于 $x =$ 塔函数($i + 1$) $\geq 2^{16}$,

$$T_{i+1} \;\geq\; g(T_i) \;\geq\; g(2x) \;=\; \frac{\mathrm{tow}(i+2)^2}{2x+1} \;\geq\; 2\,\mathrm{tow}(i+2),$$

其中最后一个不等式为 $2^x \geq 4x + 2$。上界由 引理 5.5(ii) 通过归纳法得到，初始情况为 $|P_0(k)| = k \leq$ 塔函数($\log^* k$)。 □

**推论 5.7** (层数)。 设 $K \geq 2$。则 $|P_j(k)| \geq K$ 当 $j = \max(1, \log^* K - 1)$ 时，如果$k \geq 4$；当 $j = \log^* K + 1$ 时，如果 $k = 3$。反之， $|P_j(k)| \geq K$ 蕴含 $j \geq \log^* K - \log^* k$。

证明。对于 $k \geq 4$ 和 $K \geq 3$，我们有 $j = \log^* K - 1 \geq 1$，且 $|P_j(k)| \geq$ 是 tow$(\log^* K) \geq K$；对于 $K = 2$, $|P_1(k)| = 2^k - 1 \geq 2$。对于 $k = 3$，我们有 $j \geq 2$，且 $|P_j(3)| \geq$ 是 tow$(\log^* K) \geq K$。反之则由引理 5.6 的上界得出。 □

前几个值为 $|P_j(2)| = j + 2$、 $|P_j(3)| = 3$、7、18、81、8 569，以及 $|P_j(4)| = 4$、15、166，适用于 $j = 0$、1、2、.....。对于 $k = 2$，宽度始终为 2，这与二分图的对数行为相符。Kriegel [27, 表 4.1] 和 Bai 等人 [1, 第 4] 页中所有下集的数量恰好比这些值大 $j$，而 $|P_2(k)|$ 是 $k$ 减去 2 [34]后的 Dedekind 数。

# 6 保留扩张：定理1.2的证明

定理 1.2 的对手先给出一个团，随后 $j$ 进行预留膨胀。第 6.1 节将一次膨胀描述为运行一个内部对手的过程，并且引理 6.2 证明该过程保留了强制性。第 6.2 节则将 $j$ 膨胀置于一个团之下，并统计顶点数。

## 6.1 一次膨胀

**构造 6.1** （预留膨胀 $B(\mathcal{A})$）。固定 $K \geq 2$ 以及一个后度至多为 $D \geq 1$ 的内部对手$\mathcal{A}$，并令

$$R := (K-1)(D-1) + 1.$$

对手 $B(\mathcal{A})$ 与确定性算法 Alg 对局，并在内部运行$\mathcal{A}$。$\mathcal{A}$ 呈现的顶点称为内部顶点；它们绝不会展示给 Alg。对于迄今呈现的每个内部顶点 $w$， $B(\mathcal{A})$ 都会维护一个已呈现顶点的块 $\sigma(w)$、一个诱导颜色col$(w)$，以及一个保留集Res$(w) \subseteq \sigma(w)$。当$\mathcal{A}$ 呈现一个内部顶点 $v$，且该顶点有较早呈现的内部邻居 $W$ 时，对手$B(\mathcal{A})$执行以下操作。

(1) 对于每个 $w \in W$，它都会从 Res($w$) 中移除一个顶点 $x_{w,\,v}$；该顶点是弧$w \to v$的服务器。
(2) 它每次呈现一个，共呈现 $R$ 个新顶点，每个顶点的前驱邻居恰好是 $\{x_{w,\,v} : w \in W\}$。这些顶点构成块 $\sigma(v)$。(3) 令 col($v$) 表示 Alg 在 $\sigma(v)$ 的至少 $D$ 个顶点上使用过的某种颜色，令 Res($v$) 由 $D$这样的顶点组成，并将 col($v$) 报告给 $\mathcal{A}$，作为 $v$ 的颜色。

对手 $B(\mathcal{A})$ 会在 $\mathcal{A}$ 停止时停止；如果 Alg 已使用 $K$ 种颜色，也会立即停止。平局按以下方式打破：col($v$) 是 Alg 在 $\sigma(v)$ 的至少 $D$ 个顶点上使用过的颜色中，在 $\sigma(v)$ 中最先出现的颜色；保留集 Res($v$) 由 $\sigma(v)$ 中最先出现的、具有该颜色的 $D$ 个顶点组成；每个保留集都按到达顺序交出其中的顶点。

需要检查三个性质：步骤 1 和 3 始终可行；报告给$\mathcal{A}$的颜色构成合法的在线着色；并且报告的每种颜色都是 Alg 的一种颜色。最后一个性质使强制得以延续，因为$\mathcal{A}$会在展示给它的着色中强制出 $K$ 种颜色。

**引理 6.2** （膨胀后强制性仍然成立）。 假设 $A$ 强制使用 $K$ 种颜色，大小至多为 $N$，且后度至多为 $D$。那么 $B(A)$ 强制使用 $K$ 种颜色，大小至多为 $RN$，且后度至多为 $R$。此外，对于内部博弈，存在一个确定性在线算法 Alg′，使得只要 Alg 使用的颜色不超过 $K-1$ 种，每个诱导颜色 $\mathrm{col}(v)$ 都是 Alg′ 针对 $A$ 为 $v$给出的颜色，并且是 Alg使用的颜色。

证明。步骤 *3* 是可行的。 如果 $D = 1$，那么 $R = 1$，且 $\sigma(v)$的单个顶点即可满足要求。如果 $D \geq 2$，并且每种颜色在 $\sigma(v)$的顶点中出现次数至多为 $D - 1$，那么 $\sigma(v)$的 $R > (K - 1)(D - 1)$个顶点至少会使用 $K$ 种颜色，而 $B(\mathcal{A})$早已停止。

步骤 *1* 是可行的。 保留集 Res($w$) 初始有 $D$ 个顶点，并且每出现一个 $w$ 的后续内部邻居，就会减少一个；这样的邻居至多有 $D$ 个，因为内部对局是 $\mathcal{A}$ 的一场对局（见下文）。

诱导着色是正规的。 颜色 col($v$) 是某个 $u \in \sigma(v)$ 的颜色，并且对于 $v$ 的每个较早内部邻居 $w$， $u$ 都与 $x_{w,\,v}$ 相邻。服务器 $x_{w,\,v}$ 取自 Res($w$)，因此其颜色为 col($w$)，所以 col($v$) $\neq$col($w$)。

诱导算法。 我们在每个有序图上定义 Alg′，使得 $\mathcal{A}$ 上的强迫假设适用于它。当一个内部顶点 $v$ 到达时，Alg′ 会针对截至 $v$ 的内部顶点，按其顺序执行步骤 1 到 3，与 Alg 进行对局，且不应用停止规则。如果这一过程可行，并且得到的颜色 col($v$) 与 Alg′ 赋予 $v$ 的较早邻居的颜色不同，那么 Alg′ 就赋予 $v$ 颜色 col($v$)。否则，它会按照固定规则选取一种未用于 $v$ 的较早邻居的颜色，并赋予 $v$。算法 Alg′ 是一个正规的确定性在线算法，其给出的结果仅取决于截至 $v$ 的内部图，因为 Alg 以及步骤 1 到 3 中的所有选择都是确定性的。

内部对局。 只要 Alg 使用的颜色不超过 $K - 1$ 种，$\mathcal{A}$ 在 $B(\mathcal{A})$ 中进行的对局就与$\mathcal{A}$ 对阵 Alg′ 时的对局一致。事实上，根据内部顶点进行归纳可知，截至 $\sigma(v)$结束时已呈现的顶点及其颜色，恰好就是 Alg′ 根据内部图截至 $v$ 计算出的结果；步骤 1 和 3 均可执行，并且 col($v$) 不同于 $v$ 的较早邻居的诱导颜色，因此 Alg′ 会向$\mathcal{A}$报告颜色 $v$ col($v$)。每个这样的 col($v$) 都是 $\sigma(v)$ 中某个顶点的颜色，因此也是 Alg 使用的颜色。

强制。 $B(\mathcal{A})$ 的每场对局都是有限的，因为$\mathcal{A}$ 的每场对局都是有限的，而且每个内部顶点至多产生 $R$ 个顶点。如果 $B(\mathcal{A})$ 因为 Alg 已使用 $K$ 种颜色而停止，我们就完成了。否则$\mathcal{A}$ 已经停止，而其对阵 Alg′ 的对局是一场完整对局，因此至少出现 $K$ 种不同的诱导颜色，其中每一种都是 Alg 使用的颜色。

规模与后度。 每个内部顶点至多生成 $R$ 个顶点。一个顶点至多服务一条弧，因为它一经使用便会离开保留集，而它的后续邻居此时就是一个块中的 $R$ 个顶点。从未服务过的顶点没有后续邻居。

□

由 $B(\mathcal{A})$ 生成的图是内部图的一个预留膨胀，仅限于已开始的块，因此引理 5.2 保证了无论在线选择如何，都具有可着色性。

我们称 Alg′ 为诱导算法。当膨胀进行堆叠时，每一层面对的都是其下方一层的诱导算法。

**引理 6.3** (堆叠)。 设 $A_j$ 是一个规模和后度有界、能迫使使用 $K \geq 2$种颜色的对手，并且对 $i = j - 1$、.....、$0$，令 $A_i := B(A_{i+1})$，其中 $D$ 等于 $A_{i+1}$的后度数上界。那么，每个 $A_i$ 都能迫使使用 $K$ 种颜色。此外，在 $A_0$ 与确定性算法Alg进行的每一场对局中，只要Alg 使用的颜色不超过 $K - 1$ 种，以下结论在每一层都成立：$A_i$ 在内部进行的对局，是 $A_{i+1}$ 与第 $i$层的诱导算法之间的对局；步骤 *3* 可以进行；且所见的每种颜色都是Alg的一种颜色。特别地，任意一层中，从节点 $w$ 出发的每条弧的服务器都具有诱导颜色$\mathrm{col}(w)$。

证明。由引理 6.2 和归纳法可知，每个 $A_i$ 都迫使使用 $K$ 种颜色，且满足所述后度数上界。对于第二个结论，将引理 6.2 的最后一句应用于 $A_0 = B(A_1)$ 和 Alg：$A_1$ 的对局就是针对诱导算法 Alg′的对局，而其中 Alg′ 使用的每种颜色都是 Alg 使用的颜色。因此，Alg′ 使用的颜色也至多为 $K - 1$ 种。同样的论证也适用于 $A_1 = B(A_2)$ 和 Alg′，并依此类推，逐层向上。在某一层，只要其算法使用的颜色不超过 $K - 1$种，步骤 3 就可以执行（引理 6.2 的证明）；从 $w$ 发出的弧所对应的服务器来自 Res($w$)，其中的顶点颜色均为 col($w$)。 □

### 6.2 叠加膨胀

现在我们在一个团下方层叠 $j$ 膨胀。根据 引理 6.2 ，一次膨胀的后度数上界等于前一次膨胀的块大小，因此块大小在每一层大约增长 $K$ 倍，这使得大小的指数与层数的平方成正比。层 $\ell$的节点的每个块大小均为 $b_\ell$，除非对局在该块内结束；顶层顶点的块大小为 $b_j$。

**定理 6.4 (**迭代保留对手**)。** 设 $k \geq 2$、 $K \geq 2$ 和 $j \geq 1$ 满足 $|P_j(k)| \geq K$，并令 $b_\ell := (K-1)^{j-\ell+1}(K-2)+1$，其中 $1 \leq \ell \leq j$。存在一个对手，迫使每个确定性在线算法使用 $K$ 种颜色；该对手产生的所有最终图均为 $k$-可着色，且每次对局的后度数至多为

$$(K-1)\prod_{\ell=1}^{j} b_\ell + 1 \;\leq\; K^{(j+1)(j+2)/2} \quad \textit{vertices.}$$

证明。令 $A_j$ 呈现按到达顺序排列的团 $K_K = (v_1, \ldots, v_K)$。它迫使算法使用 $K$ 种颜色，后度数为 $K-1$，并且根据引理 5.1(i)，其最终图可映射到 $\mathrm{Tmpl}(P_j(k))$。对于 $i = j-1, \ldots, 0$，令 $A_i := B(A_{i+1})$，其中 $D$ 等于 $A_{i+1}$ 的后度数上界。根据引理 6.3，每个 $A_i$ 都迫使算法使用 $K$ 种颜色。每一层呈现的图都是将内部图限制在已开始的块上所得到的预留膨胀（见引理 6.2 后的说明）。因此，$A_0$ 呈现的每个图都是初始段 $K_m$ 的 $j$ 重膨胀，其中 $K_m$ 是 $K_K$ 的初始段，且 $m \leq K \leq |P_j(k)|$；根据推论 5.4，该图是 $k$-可着色的。

计数。第一个膨胀的大小为 $D = K-1$，因此顶层顶点的块大小为 $b_j = (K-1)(K-2)+1$ 个节点。此后每次膨胀的块大小都等于前一块的块大小，因此 $b_{\ell-1} = (K-1)(b_\ell - 1)+1$，解得 $b_\ell - 1 = (K-1)^{j-\ell+1}(K-2)$。特别地，$b_\ell \leq K^{j-\ell+2}$。

对局最迟在第一个位于 $v_K$ 以下的顶点出现时结束。令 $y$ 为第一个位于$v_K$以下的呈现顶点，即每一层中第一个块的第一个顶点，且该块位于 $v_K$ 以下。它的前驱邻居是 $K-1$ 个服务器，每个 $v_s$ 下方各有一个，且满足 $s < K$；根据引理 6.3，只要使用的颜色少于 $K$ 种，每一层中 $v_s$ 下方的服务器都有诱导颜色 $\mathrm{col}(v_s)$。颜色 $\mathrm{col}(v_1) \ldots, \mathrm{col}(v_{K-1})$ 互不相同，因为团的诱导着色是正规的。因此，如果$y$ 到达时使用的颜色少于 $K$ 种，那么这些恰好就是 $y$看到的 $K-1$ 种颜色，而 $y$ 会获得第 $K$ 种颜色。在 $y$之前呈现的顶点位于 $v_1$、……、$v_{K-1}$ 以下，因此每场对局至多

$$(K-1)\prod_{\ell=1}^{j} b_\ell + 1 \;\leq\; K\prod_{\ell=1}^{j} K^{j-\ell+2} \;=\; K^{(j+1)(j+2)/2} \quad \text{vertices.} \qquad \square$$

定理 *1.2* （重述）。对于每个 $n \geq 3$ 和 $L =$ 对数$^* n$,

$$\chi_3^{\det}(n) \;\geq\; \lfloor n^{2/((L+2)(L+3))} \rfloor \qquad \text{and} \qquad \chi_k^{\det}(n) \;\geq\; \lfloor n^{2/(L(L+1))} \rfloor \quad \text{for every } k \geq 4.$$

特别地，对于每个固定的 $k \geq 3$，$\chi_k^{\det}(n) \geq n^{(2-o(1))/(\log^* n)^2}$。对于所有 $3 \leq n \leq 2^{65536}$, $\chi_3^{\det}(n) \geq \lfloor n^{1/28} \rfloor$ 以及对于每个 $k \geq 4$，$\chi_k^{\det}(n) \geq \lfloor n^{1/15} \rfloor$。

证明。令 $n \geq 3$，从而 $L \geq 2$。对于 $k = 3$，令 $e = (L+2)(L+3)/2$，并令 $K = \lfloor n^{1/e} \rfloor$；不妨设 $K \geq 2$。由于 $K \leq n$，我们有 $\log^* K \leq L$，因此推论 5.7 给出 $|P_j(3)| \geq K$，其中 $j = \log^* K + 1 \leq L+1$。于是 $(j+1)(j+2)/2 \leq e$，所以定理 6.4 的对手至多使用 $K^e \leq n$ 个顶点，而观察 4.3 给出 $\chi_3^{\det}(n) \geq K$。对于 $k \geq 4$，令 $e = L(L+1)/2$，并使用 $j = \max(1, \log^* K - 1) \leq L-1$。对于 $n \leq 2^{65536}$，我们有 $L \leq 5$，因此对于 $k = 3$ 有 $e \leq 28$，而对于 $k \geq 4$有 $e \leq 15$。最后，$\chi_k^{\det}(n) \geq \chi_3^{\det}(n)$，且 $2/((L+2)(L+3)) = (2-o(1))/(\log^* n)^2$。

$\square$

| $k$ | $K$ | $j$ | 块大小 $b_j, \ldots\ldots, b_1$ | 大小上界 $(K-1)\prod b_\ell + 1$ | log(界)/log $K$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 7 | 1 | 31 | 187 | 2.7 |
| 3 | 8 | 2 | 43, 295 | 88 796 | 5.5 |
| 3 | 18 | 2 | 273, 4 625 | 21 464 626 | 5.8 |
| 3 | 81 | 3 | 6 321 , 505 601 , 40 448 001 | $1。03 \cdot 10^{19}$ | 10.0 |
| 4 | 15 | 1 | 183 | 2 563 | 2.9 |
| 4 | 166 | 2 | 27 061 , 4 464 901 | $1.99 \cdot 10^{13}$ | 6.0 |

表 2：定理 6.4 的对手在最小 $j$ 使得 $|P_j(k)| \geq K$时的规模上界。指数 $\log(界)/\log K$ 趋近于 $(j+1)(j+2)/2$，当 $K$ 增长时。

表 2 列出了规模较小时该构造的规模上界 $K$。一次膨胀迫使7 种颜色出现在3-可着色图上，其中包含187个顶点；而团上的单层塔无法迫使使用更多颜色，因为 First-Fit 在单层塔上至多使用 $|P_1(3)| = 7$ 种颜色，该单层塔是3-可着色的（定理 1.5）。两次膨胀在包含8 种颜色的情况下需要88 796 个顶点，而在包含18 种颜色的情况下需要21 464626 个顶点。这两个颜色数量都超过 $2^3 - 1 = 7$，这是对手在透明模型 [17, §45]中能够迫使使用的最大颜色数。我们的对手不会逐个揭示其3-着色的顶点：顶点的最终颜色取决于它将服务于哪个后续块。附录 B 将这些实例缩小了一个常数因子。

备注 6.5（困难实例）。 膨胀中的每个顶点至多连接到一个较后的块，而该块是独立的，因此这些图无三角形。更强地说， $j$ 重膨胀的$K_K$ 要么是二分图，要么奇围长至少为 $2j+3$。事实上，设 $C$ 是膨胀$G$ 中的一条奇闭游走，其中 $H$，并将每个顶点映射到包含它的块所对应的节点。这会将 $C$ 映射为 $H$中的一条等长闭游走。 $C$ 中最早的顶点 $x$ 在游走上的两个邻点都较晚，因此二者都位于它所 $x$ 服务的块中，游走在该块内来回经过。删去这段回溯后， $H$中会剩下一条长度为 $|C|-2$ 的奇闭游走。在预留膨胀中，每条弧都有一个服务器，因此我们的实例中每个顶点至多有 $K-1$ 个较早邻居；所以 First-Fit 至多给它们使用 $K$种颜色，而面对我们的对手时恰好使用 $K$ 种颜色。这些图之所以困难，只是因为算法不知道哪些顶点会成为服务器。

## 7 已知图：定理1.3 的证明

定理 6.4 中的对手按颜色选择服务器，因此不同的算法会看到不同的图。我们将证明，只要对手始终完成其块，最终图的同构类型就不依赖于算法；这样一来，算法便可以预先获知最终图。我们使用 Halldórsson 的已知图博弈 [16, §1，第 2] 页。Alice 首先向 Bob 展示一个图 $G$，该图有 $N$ 个顶点。随后，她依次呈现顶点 $v_1$、$v_2$.....及其与较早顶点之间的边，使得由 $v_1$、.....、$v_i$ 诱导的图对每个 $G$ 都同构于 $i$ 的一个子图，而 Bob 则在线着色。Alice 从不说明 $G$ 某个已呈现顶点对应于哪个顶点。

补全每个块。令 $\mathsf{A}^{\mathrm{str}}$ 为定理 6.4 中经过两处修改的对手。它绝不会提前停止，因此层级为 $\ell$ 的节点的每个块都恰好有 $b_\ell$ 个节点。在步骤 3 中，如果 $\sigma(v)$中没有任何颜色出现 $D$次，便将 $\sigma(v)$中出现频率最高的颜色选作 $\mathsf{col}(v)$，并按照固定规则从$\sigma(v)$中选取 $D$ 个顶点填入 $\mathsf{Res}(v)$；这是可行的，因为 $b_\ell \geq D$。在算法使用第 $K$种颜色之前，$\mathsf{A}^{\mathrm{str}}$ 的操作与定理 6.4 中的对手完全相同，因此它也能迫使算法使用 $K$ 种颜色。使用第 $K$种颜色之后，报告给内部对手的着色可能并不合法。这并无妨碍：所有这些对手的规则都定义在每一种历史上，从那时起，我们只使用它们构造的图（块大小、 $D$ 顶点的预留集，以及每条弧对应的一台服务器）。

为了比较不同对局的最终图，我们用静态方式描述预留膨胀，即通过一个映射说明哪个顶点为哪条弧提供服务。对于 $R \geq 1$ 和一个出度至多为 $R$ 的有向图 $H$，为每个顶点 $v$ 指定一个含有 $R$ 个新顶点的集合 $S(v)$。服务器分配 $\rho$ 为每个 $w$选择一个单射 $v \mapsto \rho(w, v)$，将 $w$ 的出邻点集合 $N^+(w)$ 映射到 $S(w)$ 中。令 $\mathrm{Bl}\rho(H)$ 表示顶点集为 $\bigsqcup_v S(v)$ 的有向图；对 $H$ 中的每条弧 $w \to v$ 和每个 $u \in S(v)$，它都包含一条弧 $\rho(w, v) \to u$。当 $H$ 是按到达顺序定向的有序图时，集合 $S(v)$ 按照 $H$ 中的顺序排列。于是，它是 $H$ 的预留膨胀，块大小为 $R$。

**引理 7.1**（服务器分配无关紧要）。若 $H \cong H'$ 是出度至多为 $R$的有向图，则对于任意服务器分配 $\rho$ 和 $\rho'$，都有 $\mathrm{Bl}\rho(H) \cong \mathrm{Bl}\rho'(H')$，且存在一个将块映射到块的同构。

证明。设 $\varphi\colon H \to H'$ 是一个同构。对于每个 $w$，集合 $\rho(w, N^+(w)) \subseteq S(w)$ 和$\rho'(\varphi w, N^+(\varphi w)) \subseteq S'(\varphi w)$ 的大小相同，因此存在某个双射 $\pi_w\colon S(w) \to S'(\varphi w)$，使得对于 $w$ 的每个出邻点 $v$，都有$\pi_w(\rho(w, v)) = \rho'(\varphi w, \varphi v)$。这些双射的并 $\pi$ 将弧 $\rho(w, v) \to u$, $u \in S(v)$ 映射为弧 $\rho'(\varphi w, \varphi v) \to \pi_v(u)$。因此，$\pi$ 将弧单射地映射到弧，且两个有向图的弧数相同，即为 $H$的弧数的 $R$ 倍。□

令 $H^{(j)} := K_K$，将其视为传递竞赛图，令 $H^{(\ell-1)} := \mathrm{Bl}(H^{(\ell)})$，其中各块的大小为 $b_\ell$，对应于 $\ell = j, \ldots\ldots, 1$；再令 $H_j(K) := H^{(0)}$。由 引理 7.1，$H_j(K)$ 在同构意义下定义良好。

**引理 7.2 (**一个最终图**)。** 对于任意确定性算法，$A^{\mathrm{str}}$ 的最终图按到达顺序定向后，同构于 $H_j(K)$。

证明。我们沿层级向下归纳。令 $G^{(\ell)}$ 为对手在第 $\ell$ 层生成的图，并按到达顺序定向；在每一场对局中均有 $G^{(j)} = K_K$。若 $G^{(\ell)} \cong H^{(\ell)}$，则下一层为 $G^{(\ell)}$ 中的每个节点呈现一个恰有 $b_\ell$ 个节点的块，其弧恰为 $x_w$, $_v \to u$，对应于 $G^{(\ell)}$的弧 $w \to v$ 以及 $u \in \sigma(v)$。设 $\rho(w, v) := x_{w,v}$，即可得到一个服务器分配，因为每个顶点至多离开保留集一次，且保留集永不耗尽。因此，根据引理 7.1，$G^{(\ell-1)} = \mathrm{Bl}\rho(G^{(\ell)}) \cong H^{(\ell-1)}$。□

定理 *1.3*（重述）。对于 $N \geq 3$ 和 $L = \log^* N$ 存在无三角形的 3-可着色图$G$ 和 $G'$ 在 $N$ 个顶点上，满足

$$\chi_{\mathrm{ol}}(G) \geq \left\lfloor N^{2/((L+2)(L+3))} \right\rfloor \qquad \text{and} \qquad \chi_{\mathrm{ol}}(G') \geq \frac{N^{1/(L+2)}}{8(1 + \ln 4N)}.$$

任何预先知道 $G'$ 的随机在线算法，都存在一个包含 $G'$ 的呈现顺序，使其期望使用至少 $N^{1/(L+2)}/(8(1 + \ln 4N))$ 种颜色。对于 $N \geq 2^{406}$，关于 $G'$的两个界都成立，只需将 $N^{1/(L+2)}/(8(1 + \ln 4N))$ 替换为 $N^{1/(L+3)}$。对于每个 $k \geq 4$，对于$k$-可着色图同样成立，其指数为 $2/(L(L+1))$ 和 $1/L$，且对于 $N \geq 2^{201}$，相应的界为 $N^{1/(L+1)}$。

We 在此证明关于 $G$的陈述，并在 $G'$ 的末尾证明关于第 8 节。

关于 $G$ 的证明。选取 $K$ 和 $j$，如定理 1.2 的证明中所述，但以 $N$ 替代 $n$。若 $K = 1$，则取具有 $N$ 个顶点的无边图即可。否则，令 $G$ 由 $H_j(K)$ 和 $N - |V(H_j(K))|$ 个孤立顶点组成；这是可行的，因为 $|V(H_j(K))| = K \prod_\ell b_\ell \leq K^{(j+1)(j+2)/2} \leq N$。根据推论 5.4，图 $G$ 是 $k$-可着色的；根据注 6.5，它是无三角形的。

在已知图博弈中，Alice 展示 $G$，进行$\mathcal{A}^{\mathrm{str}}$，随后呈现这些孤立顶点。根据引理 7.2 呈现过程中的每个前缀都是与 $G$同构的图的一个初始段，因此她的操作都是合法的。Bob 预先知道 $G$，但 $G$ 在每场对局中都相同，因此 Bob 是一个内置了 $G$的确定性在线算法，而$\mathcal{A}^{\mathrm{str}}$ 迫使他使用 $K$ 种颜色。

对于在线色数，固定一个确定性算法Alg，让$\mathcal{A}^{\mathrm{str}}$ 与其对局，并追加这些孤立顶点。根据引理 7.2 所得结果是 $G$ ，并带有某种呈现顺序。在这个顺序下，Alg 看到的恰好是这场对局，因此它至少使用 $K$ 种颜色。由于Alg 是任意选取的， $\chi_{\mathrm{ol}}(G) \geq K$。 □

Halldórsson 还考虑了一种更严格的博弈：每个呈现的顶点着色后，立即被对应到 $G$ 中的一个顶点 [16, （第 2 页和 4]）。对于固定的 $k$，在该博弈中，没有对手能迫使算法使用很多颜色。Bob 预先固定 $G$ 的一个适当的 $k$-着色 $c$；当 $v$ 到达时，它的较早邻居已经被对应好了，而 Bob 用集合 $[k] \setminus c(N^{-}(v))$ 给 $v$ 着色。两个相邻顶点 $u$ 和 $v$（其中 $u$ 较早出现）会得到不同的集合，因为 $c(u)$属于 $u$ 的集合，却不属于 $v$的集合，因此 $2^k - 1$种颜色就足够了。这是命题 9.4 的 $P = P_0(k)$ 情形，也是 Halldórsson 将这种更严格的博弈与透明模型联系起来的方式。

# 8 均匀塔：定理1.1的证明

定理 6.4的对手每层付出的因子约为 $K$ 。损失源于构造 6.1 的步骤 3：服务器会为其负责的块中的每个顶点指定同一种颜色，因此一个块需要$D$ 个同色顶点，而鸽巢原理又使其规模约为后度的 $K$ 倍。本节取消单色规则。所有块的大小都相同，为 $A = 2m$，其中 $m$是团的大小，并且所有服务器都随机选取。我们不再预留一种流行颜色，而是追踪每种颜色的未使用质量：该颜色下仍可能成为服务器的较早呈现顶点的权重。未使用质量较大的颜色几乎会被每个新顶点看到，因此算法很少能再向其中增加质量；与此同时，总未使用质量是固定的，必须由许多颜色共同分担。通过简短的期望计算，这一论证同时涵盖随机化算法、已知图和确定性对手。第 8.1 节定义均匀塔和随机连线，第 8.2 节证明关于未使用质量的两个引理，第 8.3 节将它们整合为定理 8.5，而第 8.4 节则选取参数。

## 8.1 带随机服务器的均匀塔

固定 $j \geq 1$ 和 $m \geq 2$，并令 $A := 2m$。均匀塔 是一个位于 $K_m$ =$(v_1, \ldots, v_m)$之上的完整 $j$层塔，其中每个正层节点都有一个恰好包含 $A$ 个子节点的块。它有 $mA^j$个呈现顶点。在阶段 $t$，对手按深度优先顺序呈现 $v_t$的子树。

**服务器**。 该塔是 $K_m$的 $j$重预留膨胀。对于低于 $v_t$的层数为 $\ell \geq 1$ 的节点 $u$ （包括 $u = v_t$），以及 $s < t$，令 $x_s(u)$ 为低于 $v_s$ 的层数为 $\ell - 1$ 、负责连接到$u$的弧的节点；它与 $\sigma(u)$中的所有节点相连。如果 $\ell \geq 2$，那么 $x_s(u)$恰有 $A$ 个子节点，且映射 $u' \mapsto x_s(u')$是从 $\sigma(u)$到 $\sigma(x_s(u))$的双射。位于层数为 1 的节点 $y$ 的块中的呈现顶点，其较早邻居恰为服务器 $x_s(y)$、 $s < t$：每个较早的顶点下方各有一个呈现顶点。第 $t$ 阶段的连线 由顶层服务器 $x_s(v_t) \in \sigma(v_s)$及其下方的双射构成；这些服务器必须是$v_s$ 中此前尚未提供服务的子节点。每个顶点 $v_s$ 都有 $m - s < A$个后续邻居，因此总有可用的未提供服务的子节点。

**构造 8.1** （随机连线 $\mathcal{R}j(m)$）。 在阶段 $t$，对于每个 $s < t$ ，对手独立地从尚未服务的子节点中均匀随机地选择顶层服务器 $x_s(v_t)$，并将每个双射 $\sigma(u) \to \sigma(x_s(u))$ 均匀随机地选取，且与其他所有选择相互独立。然后，它呈现阶段 $t$。它始终呈现整座塔。

阶段 $t$ 的随机选择在阶段 $t$ 开始时进行，因此给定阶段 $t$之前的历史（呈现图和所赋予的颜色），这些选择仍按照 构造 8.1中的方式抽取。

**引理 8.2** （一个图）。 对于每种连线，呈现图都是一个 $j$ 重预留膨胀图，其中$K_m$ 所有块的大小均为 $A$。它是无三角形的；当 $m \le |P_j(k)|$ 时，它是 $k$-可着色的；此外，将其按到达定向为有向图后，它与一个固定的有向图 $G_j(m)$ 同构，该有向图不依赖于连线。

证明。 每条弧恰由一个节点服务，顶点下方的每个节点至多服务一条弧，而每个块包含 $A$ 个节点。可着色性由推论 5.4 保证，无三角形性由注 6.5保证。对于同构，按层应用引理 7.1 一次，正如引理 7.2的证明中那样：顶点的出度至多为 $m-1<A$，其下方的出度至多为 $A$，因为顶点下方的节点至多与一个包含 $A$ 个节点的块相连。 □

这些连线仅在块内的到达顺序上有所不同，因此随机连线就是单个图 $G_j(m)$的随机呈现顺序。

## 8.2 未使用质量

给顶点下方呈现的每个顶点赋予权重 $A^{-j}$，使得每个顶点的子树总权重为 1。在阶段 $t$之前，若呈现顶点位于 $v_s$, $s<t$下方，且其上方的 $v_s$ 子节点尚未服务，则该顶点符合条件。对于颜色 $c$，令 $u_c(t)$ 表示颜色为 $c$的符合条件顶点的总权重，即 $c$的未使用质量。令 $q_t(c)$ 表示阶段 $t$ 中没有颜色为 $c$的前驱邻居的顶点所占比例，并令 $a_t(c)$ 表示阶段 $t$ 中获得颜色 $c$的顶点所占比例。这些量仅在分析中定义；算法并不知道它们，只有定理 8.5(ii) 中的对手会计算它们。 $u_c(t)$ 和 $q_t(c)$ 均由阶段 $t$之前的历史以及阶段 $t$的连线所确定，此时算法尚未在阶段 $t$中为任何顶点着色。

**引理 8.3** (记账)。 在每场对局中，对每种颜色 $c$ 和每个阶段 $t$ ，

$$u_c(t+1) \;\le\; u_c(t) + a_t(c), \qquad a_t(c) \le \min\bigl(1, q_t(c)\bigr), \qquad \text{and} \qquad \sum_c u_c(m+1) \;=\; \frac{3m+1}{4}.$$

证明。 在阶段 $t$， $v_t$ 下方的顶点变为符合条件的顶点，其总权重为 1，颜色为$c$的顶点权重为 $a_t(c)$；而阶段 $t$ 的顶层服务器下方的顶点则不再符合条件。若一个顶点有一个颜色为 $c$ 的前驱邻居，它就不能获得颜色 $c$，因此 $a_t(c) \le q_t(c)$。最后，所有 $m$ 子树都已呈现，总权重为 $m$。每个 $\binom{m}{2}$ 有序对 $s<t$ 都使用了 $v_s$的一个子节点，其子树的权重为 $1/A$，且不同的有序对使用不同的子节点。每个已呈现的顶点都有某种颜色，因此$\sum_c u_c(m+1) = m - \binom{m}{2}/A = m - (m-1)/4 = (3m+1)/4$。 □

**引理 8.4** (大权重颜色会被看到)。 固定一个确定性算法，并让它与 $R_j(m)$进行对局。给定阶段 $t$之前的历史。则对于阶段 $t$ 中每个已呈现的顶点 $x$ 以及每种颜色 $c$,

$$\Pr\bigl[\, x \text{ has no earlier neighbor of color } c \,\bigr] \;\le\; e^{-u_c(t)}.$$

证明。在阶段 $t$ 之前的历史决定了对手的状态，即每个 $v_s$ 的哪些子节点已服务（当且仅当其呈现后代有后续邻居时，该子节点才算已服务），以及符合条件的顶点和 $u_c(t)$。给定历史，阶段 $t$ 的布线按照构造 8.1 生成，且与之前的布线相互独立。令 $v_t = z_j, z_{j-1}, \dots, z_1$ 为$x$ 的层级分别为 $j, \dots, 1$ 的祖先。 $x$ 在 $v_s$ 下方的前驱邻居是 $x_s(z_1)$。顶层服务器 $x_s(z_j)$在 $v_s$ 中尚未服务的子节点里均匀选取。给定它之后，$x_s(z_{j-1})$是固定节点$z_{j-1}$ 经由到 $\sigma(x_s(z_j))$的均匀双射映射得到的，因此在该块上均匀分布，依此向下直到$x_s(z_1)$，它是一个呈现顶点。每个节点的所有子节点的子树都包含数量相同的呈现顶点

因此， $x_s(z_1)$在 $v_s$下方的符合条件的顶点中均匀分布，并且不同 $s$的这些选择相互独立。令 $p_s$ 为 $v_s$ 下方符合条件的顶点中颜色为 $c$的比例。它们的总权重至多为 1，因此 $p_s$ 至少等于颜色为 $c$的顶点所占的权重，并且 $\sum_{s<t} p_s \geq u_c(t)$。于是概率为$\prod_{s<t}(1-p_s) \leq \exp(-\sum_s p_s) \leq e^{-u_c(t)}$。 □

同一阶段中不同顶点的邻点可能相互依赖；下面的证明只通过引理 8.4 的期望线性性使用这一点。

## 8.3 颜色计数

我们现在把两个引理结合起来。未使用质量达到 $\ln 4m$ 的颜色是一个 重的 颜色，此时它所占的质量小于 $1+\ln 4m$；根据 引理 8.4，它此后增加的质量很少，因此 引理 8.3 的最终质量必然分散在许多颜色上。

**定理 8.5**（均匀塔迫使使用许多颜色）。设 $j \geq 1$ 和 $m \geq 2$，并令 $X_m := 2m+1\ln(1+\ln 4m)$。*(i)* 面对随机连线 $R^j(m)$，任何确定性在线算法的期望用色数至少为 $X_m$。*(ii)* 存在一个确定性自适应对手，其每次对局都是一个以 $K_m$为底、具有 $j$ 层的均匀塔，并且迫使每个确定性在线算法至少使用 $\lceil X_m \rceil$ 种颜色。

证明。令 $b := \ln 4m$。若颜色 $c$ 重的 于阶段 $t$，则称其为重色，当 $u_c(t) \geq b$时，并设

$$H_t := \sum_{c \text{ heavy in phase } t} q_t(c).$$

阶段 $t$ 开始前的未使用质量至多为 $t-1<m$，且 $b>1$，因此阶段 $t$中重色少于 $m$ 种。

一个确定性不等式。固定一场对局，并令 $C$ 为已使用的颜色数。从未使用的颜色没有质量。对于已使用的颜色 $c$，令 $t_c \leq m$ 为在其开始时 $c$ 不是重色的最后一个阶段；它存在，因为 $u_c(1)=0$，并且 $c$ 在阶段 $m+1$开始时是否为重色与对局结束时的情况都无关。根据引理 8.3，$u_c(t_c+1) \leq u_c(t_c)+1 < b+1$，而在之后每个 $c$ 为重色的阶段中，$c$ 的质量增长至多为 $q_t(c)$。对已使用的颜色求和，并再次应用引理 8.3，

$$\frac{3m+1}{4} = \sum_c u_c(m+1) \leq C(1+b) + \sum_{t=1}^{m} H_t. \tag{8.1}$$

*(i)* 阶段 $t$ 的重颜色由阶段 $t$之前的历史决定。根据 引理 8.4和期望的线性性，每个重颜色 $c$ 都有 $\mathbb{E}[q_t(c) \mid \text{历史}] \leq e^{-b} = 1/(4m)$，因此$\mathbb{E}[H_t \mid \text{历史}] \leq m \cdot \frac{1}{4m} = \frac{1}{4}$。对（8.1）取期望，$\frac{3m+1}{4} \leq \mathbb{E}[C](1+b) + \frac{m}{4}$，即$\mathbb{E}[C] \geq X_m$。

*(ii)* 在阶段 $t$ 开始时，对手知道历史，并且可以对阶段 $H_t$ 的每一种合法布线计算 $t$，因为 $H_t$ 只取决于布线以及更早阶段的颜色。给定更早的阶段后，阶段 $t$ 的随机布线在阶段 $t$的合法布线中均匀分布，而$\mathbb{E}[H_t \mid \text{历史}] \leq \frac{1}{4}$根据 (i) 的证明，因此某个合法布线满足 $H_t \leq \frac{1}{4}$。对手按照固定顺序选择第一个满足条件的布线。于是（8.1）给出 $\frac{3m+1}{4} \leq C(1+b) + \frac{m}{4}$ 在每一场对局中都成立，因此 $C \geq X_m$，并且 $C$ 是一个整数。 □

证明没有使用算法的任何结构，并且从一层到下一层没有损失；深度 $j$ 只通过可着色性发挥作用，而可着色性需要 $m \le |P_j(k)|$。相比之下，定理 6.4 中的预留对手只能保证约有 $\sqrt{m}$ 种颜色，并且块的大小为 $O(m)$；而定理 D.2 中的单层对手迫使使用 $\lfloor m/2 \rfloor + 1$ 种颜色，块更小，但只在一层上实现。(ii) 中的对手是显式的，但它会遍历一个阶段的所有布线。

## 8.4 将各部分组合起来

定理 *1.1* *(重述)*。对于 $n \ge 3$ 和 $L = \log^* n$,

$$\chi_3^{\mathrm{rand}}(n) \;\ge\; \frac{n^{1/(L+2)}}{8(1+\ln 4n)} \qquad \text{and} \qquad \chi_k^{\mathrm{rand}}(n) \;\ge\; \frac{n^{1/L}}{8(1+\ln 4n)} \quad \text{for every } k \ge 4.$$

此外，对所有 $n \ge 2^{406}$，$\chi_3^{\mathrm{det}}(n) \ge \chi_3^{\mathrm{rand}}(n) \ge n^{1/(\log^* n+3)}$；并且对每个 $k \ge 4$ 和所有 $n \ge 2^{201}$，$\chi_k^{\mathrm{det}}(n) \ge \chi_k^{\mathrm{rand}}(n) \ge n^{1/(\log^* n+1)}$。

证明。每个确定性算法都是随机化算法，因此 $\chi_k^{\mathrm{det}}(n) \ge \chi_k^{\mathrm{rand}}(n)$。令 $j \ge 1$ 为满足 $|P_j(k)| \ge n$ 的最小 $j$。由推论 5.7，若 $k = 3$，则 $K = n$, $j \le L+1$；若 $k \ge 4$，则 $j \le L-1$。令 $M := (n/2^j)^{1/(j+1)}$，且 $m := \lfloor M \rfloor$。若 $m \le 1$，则 $n < 2^{2j+1}$，所以 $n^{1/(j+1)} < 4$；由于当 $k = 3$ 时 $j+1 \le L+2$，当 $k \ge 4$ 时 $j+1 \le L$，第一句中的界小于 $4/8$，因此无需证明；对于第二句，这种情况不会发生，因为引理 A.1 给出$M \ge 2$。否则，$mA^j = 2^j m^{j+1} \le n$ 且 $m \le n \le |P_j(k)|$。由引理 8.2，随机连线 R$j(m)$ 再加上 $n - mA^j$ 个孤立顶点，构成一个分布，其取值为具有 $k$ 种颜色的可着色有序图，且每个图有$n$ 个顶点；由定理 8.5(i)，任意确定性算法在该分布上的期望用色数至少为 $X_m$。由姚氏原理（引理 4.4），$\chi_k^{\mathrm{rand}}(n) \ge X_m$。由于 $M-1 < m \le M$ 且 $M \ge 2$,

$$X_m \;\ge\; \frac{2M-1}{4(1+\ln 4M)} \;\ge\; \frac{M}{4(1+\ln 4n)} \;\ge\; \frac{n^{1/(j+1)}}{8(1+\ln 4n)}, \tag{8.2}$$

使用 $2^{j/(j+1)} \le 2$，并且 $j+1$ 分别至多为 $L+2$ $L$。对于第二句话，引理 A.1在 附录 A 表明，(8.2) 中的第二个表达式至少为 $n^{1/(j+2)}$ 当 $n \ge 2^{406}$ 时；当 $k = 3$时，以及 $n \ge 2^{201}$ 当 $k \ge 4$时，$j+2$ 分别至多为 $L+3$ 和 $L+1$。 □

这些阈值来自 (8.2) 中的常数因子，而非方法本身：定理的第一个界对每个 $n$ 都成立。在较小规模下，定理 6.4 中的显式对抗者更优；对于3-可着色图，定理 8.5 的界在 $j = 4$ 处超过前者，此时 $m$ 约为 600，也就是说，当$n$ 约为 $2^{50}$ （约为 $2^{54}$，而附录 B 中处理的是较小规模的实例）附录 B）。

定理 定理 8.5(i) 的界并非由罕见事件造成：采用相同的计数方法，并根据失败概率设定重颜色阈值，该结论以高概率成立。

**推论 8.6**（以高概率强制）。令 $j \ge 1$、$m \ge 2$ 和 $0 < \varepsilon < 1$。面对随机连线 R$j(m)$，每个确定性在线算法以至少 $1-\varepsilon$ 的概率使用至少 $(2m+1)/(4(1+\ln(4m/\varepsilon)))$ 种颜色。因此，对于每个 $n \ge 3$、每个 $0 < \varepsilon < 1$ 和 $L = \log^* n$，都存在一个定义在 $n$ 个顶点的 3-可着色有序图上的分布，使得每个确定性在线算法以至少 $1-\varepsilon$ 的概率使用至少 $n^{1/(L+2)}/(8(1+\ln(4n/\varepsilon)))$ 种颜色；对于每个 $k \ge 4$，同样的结论也适用于 $k$-可着色图，只需用 $n^{1/L}$ 替换 $n^{1/(L+2)}$。

证明。我们将定理 8.5(i) 的证明中 $b := \ln(4m/\varepsilon)$ 替换为 $\ln 4m$。推导式 (8.1对每个 $b > 0$ 都成立；重的颜色少于 $m$，因为 $b > 1$；而 引理 8.4 现在给出$\mathbb{E}[H_t \mid \text{历史}] \le m\,e^{-b} = \varepsilon/4$。令 $H := \sum_{t=1}^{m} H_t$。每个 $H_t$ 都是非负的，且 $\mathbb{E}[H] \le \varepsilon m/4$，因此

根据马尔可夫不等式 $\Pr[H \geq m/4] \leq \varepsilon$。若 $H < m/4$，则 (8.1) 给出 $\frac{3m+1}{4} < C(1+b) + \frac{m}{4}$，也就是说，$C > (2m+1)/(4(1+\ln(4m/\varepsilon)))$。对于第二个结论，按照定理 1.1 的证明选取 $j$、$M$ 和 $m$，并添加孤立顶点。若 $m \leq 1$，则界小于 1，而每个算法至少使用一种颜色。否则，将 $\ln(4m/\varepsilon) \leq \ln(4n/\varepsilon)$ 替换 $\ln 4m \leq \ln 4n$ 后，链 (8.2) 给出 $(2m+1)/(4(1+\ln(4m/\varepsilon))) \geq n^{1/(j+1)}/(8(1+\ln(4n/\varepsilon)))$。

□

置信度 $1-\varepsilon$ 只会使分母中的加法项增加 $\ln(1/\varepsilon)$。例如，对于 $\varepsilon = 1/n$，界 $n^{1/(L+2)}/(8(1+\ln 4n^2))$ 以至少 $1-1/n$ 的概率成立。

定理 1.3 的证明（针对 $G'$）。按照定理 1.1 的证明选择 $j$、$M$ 和 $m$，但用 $N$ 替代 $n$。如果 $m \leq 1$，则该界小于 1，此时无边图即可。否则，令 $G'$ 由 $G_j(m)$ 和 $N - m(2m)^j$ 个孤立顶点组成。根据引理 8.2，它是无三角形且 $k$-可着色的。对手在定理 8.5(ii) 中的每一局对局，接上这些孤立顶点后，都是 $G'$ 的一种呈现；根据引理 8.2，$\mathrm{R}i(m)$ 的每一种结果也都是如此。即使知道 $G'$，确定性算法仍是确定性在线算法，因此由定理 8.5(ii) 可得 $\chi_{\mathrm{ol}}(G') \geq \lceil X_m \rceil$；而由定理 8.5(i) 以及引理 4.4 后的注释，可得随机化算法的相应结论。最后，由 (8.2) 得 $X_m \geq N^{1/(j+1)}/(8(1+\ln 4N))$；对于 $N \geq 2^{406}$（对于 $k \geq 4$、$N \geq 2^{201}$），引理 A.1 给出 $X_m \geq N^{1/(j+2)}$，与定理 1.1 的证明完全相同。

□

# 9 迁移、缓慢增长的色数与界限

本节证明定理 1.4，色数为$\log\log n$ (定理 9.3)，为承诺使用标签的对手设置上限（命题 9.4），以及定理 1.5。前两个结果用另一种对手取代塔顶的团；后两个结果则界定了承诺使用标签的对手以及塔所能迫使得到的结果。

## 9.1 顶层的其他对手

第 6 节的膨胀工具从未用到塔顶是团这一条件，也不要求 $k$ 固定。它只需要一种能够迫使产生 $K$ 种颜色，且其图可映射到$\mathrm{Tmpl}(P_j(k))$的对手。

定理 1.4（重述）。设 $k, k' \geq 3$。存在 $j \leq \log^* k' + 1$，使得对于所有 $N$ 和所有 $K \geq 2$，若 $\chi^{\det}_{k'}(N) \geq K$，则 $\chi^{\det}_{k}(N^{(j+1)(j+2)/2}) \geq K$。特别地，若对于固定的 $k' \geq 3$，$\chi^{\det}_{k'}(n) = \Omega(n^{\varepsilon})$，则 $\chi^{\det}_{3}(n) = \Omega(n^{\varepsilon'})$，其中 $\varepsilon' = 2\varepsilon/((\log^* k' + 2)(\log^* k' + 3))$。

证明。令 $j$ 为使 $\mathrm{width}(P_j(k)) \geq k'$ 的最小 $j$。由引理 5.6，$\mathrm{width}(P_j(k)) \geq \mathrm{tower}(j+1)$，适用于 $k \geq 4$；且 $\mathrm{width}(P_j(3)) \geq \mathrm{tower}(j-1)$，适用于 $j \geq 2$，因此 $j \leq \log^* k' + 1$。令 $K \geq 2$ 和 $N$ 满足 $\chi^{\det}_{k'}(N) \geq K$。由观察 4.3，存在一个规模至多为 $N$ 的对手 A，它能迫使在 $k'$-可着色图上使用 $K$ 种颜色。它的后度至多为 $N-1$，且根据引理 5.1(ii)，它给出的每个图都映射到 $\mathrm{Tmpl}(P_j(k))$。应用 $j$ 次预留膨胀（引理 6.3）；根据引理 5.2，最终图映射到 $\mathrm{Tmpl}(P_0(k))$，因此它们是 $k$-可着色的。第一个块的大小为 $(K-1)(N-2)+1 \leq KN$，而之后每个块的大小至多为前一个块的 $K$ 倍，因此大小至多为 $N\prod_{i=1}^{j} K^i N = N^{j+1}K^{j(j+1)/2} \leq N^{(j+1)(j+2)/2}$，这里用了 $K \leq N$；由观察 4.3 可得 $\chi^{\det}_{k}(N^{(j+1)(j+2)/2}) \geq K$。对于第二个结论，假设给出 $N_{k'}(K) = O(K^{1/\varepsilon})$，所以由第一个结论和观察 4.3，$N_3(K) = O(K^{(j+1)(j+2)/(2\varepsilon)})$，其中 $j \leq \log^* k' + 1$；再由观察 4.3，可将其转化为 $\chi^{\det}_{3}(n) = \Omega(n^{\varepsilon'})$。

□

例如，根据引理5.5(iii)，$j = 2$ 足以满足 $k = 3$ 和 $k' = 4$，因此 $N_3(K) \leq N_4(K)^6$，和$j = 1$ 足以满足 $k = 4$ 和 $k' \leq 6$，因为 $\mathrm{width}(P_1(4)) = \binom{4}{2} = 6$。$k = 2$ 的情况有所不同：对于所有 $j$，$\mathrm{width}(P_j(2)) = 2$，而二分图只需要 $O(\log n)$种颜色 [32, p。 320]。

第二种替换使用了 Kawarabayashi、Yoneda 和 Yoneda 的对手 [20, 引理 4。3]该对手具有较少的顶点和对数级色数。它会延迟为某个顶点选择自身着色的时机，直到同一算法颜色的第二个顶点出现。

构造 9.1（配对顶）。固定 $\ell \geq 1$ 和 $2\ell$ 个基础颜色，并将其分成 $\ell$ 组有序对 $\{2s-1,\ 2s\}$、$1 \leq s \leq \ell$。对手呈现 $2^\ell$ 个顶点，第 $i$个顶点 $v$ 获得第 $i$个向量 $X_v \in \{0,1\}^\ell$，该向量从每组有序对中选择基础颜色 $2s-1+X_v(s)$。呈现顶点可以是已配对顶点或未配对顶点，已配对顶点带有一个基础颜色 $\varphi$。新顶点 $v$ 与所有更早呈现的、其基础颜色未被 $X_v$选中的已配对顶点相连，而不与任何未配对顶点相连。如果算法为 $v$ 赋予某个更早的未配对顶点的颜色 $u$，那么 $u$ 和 $v$ 就成为已配对顶点：对手选择最小的 $s$，使得$X_u(s) \neq X_v(s)$，并令 $\varphi(u) = 2s-1+X_u(s)$，以及 $\varphi(v) = 2s-1+X_v(s)$。

**引理 9.2 (**配对顶； [20, 引理4。3])。 配对顶呈现 $2^\ell$ 个顶点，迫使使用 $2^{\ell-1}$ 种颜色，并且它呈现的每个图都是 $2\ell$-可着色的。

证明。 每种颜色至多对应一个未配对顶点，因为若有第二个这样的顶点，它就会与第一个配对。若 $u$ 和 $v$ 配对，则 $\varphi$（$u$）和 $\varphi$（$v$）是这一对的两种基础颜色，而每个后续顶点 $w$ 都会从中选择一种，因此 $w$ 会与该配对中基础颜色未被它选中的那个顶点相邻。该顶点的颜色与 $u$ 和 $v$ 相同，因此不会有第三个顶点获得这种颜色。于是每种颜色至多使用两次， $2^\ell$ 个顶点至少需要 $2^{\ell-1}$ 种颜色。要进行着色，为每个未配对顶点指定其自身向量所选的任意一种基础颜色。这样，每个顶点 $w$ 都有一种被 $X_w$ 选中的基础颜色，而 $w$ 的每个前驱邻居都有一种 $X_w$ 未选中的基础颜色。一个顶点只有在配对后才会有后续邻居；从那时起，它的基础颜色便固定下来，因此这些基础颜色构成一个适当的 $2\ell$-着色。 □

**定理 9.3 (**色数为 $\log\log n$ 时的**多项式界**。 设 $K \geq 2$, $\ell = \lceil \log K \rceil + 1$ 且$c \geq 1$。若 $\mathrm{width}(P_{c-1}(m)) \geq 2\ell$, 则对手可迫使 $K$ 颜色用于至多含有 $4^c K^{c(c+1)/2}$ 个顶点的 $m$-可着色图。特别地，若 $n \geq 16$ 且 $\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor} \geq \log n$，则 $\chi_m^{\det}(n) \geq \lfloor (n/16)^{1/3} \rfloor$；对某个 $m \leq \log\log n + \log\log\log n + 3$，此结论成立。

证明。配对顶有 $N_0 = 2^\ell \leq 4K$ 个顶点，可迫使使用 $2^{\ell-1} \geq K$ 种颜色，且是 $2\ell$-可着色的，因此根据引理 5.1(ii)，其图可映射到 Tmpl($P_{c-1}$(m))。按照定理 1.4 的证明，进行 $c-1$ 次预留膨胀。它们的块大小满足 $b_{c-1} \leq KN_0$ 和 $b_{\ell'-1} \leq Kb_{\ell'}$，因此每场对局至多有 $N_0^c K^{c(c-1)/2} \leq 4^c K^{c(c+1)/2}$ 个顶点，而最终图根据引理 5.2 是 $m$-可着色的。对于第二个结论，取 $c=2$ 和 $K = \lfloor (n/16)^{1/3} \rfloor$，使得 $16K^3 \leq n$。若 $K=1$，则无需证明，因为任何算法至少使用一种颜色，所以设 $K \geq 2$。此时 $2\ell \leq 2\log K + 4 \leq \log n$，因为 $\log K \leq (\log n - 4)/3$ 且 $\log n \geq 4$，并且 $\log n \leq \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor} = \mathrm{width}(P_1(m))$。由于 $\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor} \geq 2^m/(m+1)$，只需 $2^m \geq (m+1)\log n$。令 $x = \log\log n \geq 2$ 且 $m = \lceil x + \log x \rceil + 2$。于是 $2^m \geq 4x\log n$ 且 $m+1 \leq x + \log x + 4 \leq 4x$，因此 $m \leq \log\log n + \log\log\log n + 3$ 即足够。 □

对于固定的色数，我们的下界为 $n^{1/(\log^* n + O(1))}$；而当色数为$(1+o(1))\log\log n$时，其量级已达到 $n^{1/3}$。据我们所知，先前的多项式下界针对的是色数量级至少为 $\log n$ [3, 16, 17, 20] 的图，或色数无界的无三角形图 [8, 13]。

## 9.2 承诺标签的帽子对手

我们的对手会在算法为某个顶点着色很久之后，才决定该顶点的最终颜色。下一个命题给出了一个承诺标签的对手所能迫使算法达到的上界：如果它逐个顶点揭示其图在偏序集 $P$ 上的标记，也就是说，给出一个到 Tmpl($P$) 的在线同态，那么它

最多能迫使算法使用 $|J^*(P)|$ 种颜色。对于非空偏序集 $P$，如果某个对手承诺使用来自 $P$ 的标签，那么在算法为顶点 $v$ 着色后，它会立即赋予该顶点一个标签 $\psi(v) \in P$；该标签是迄今为止的历史（已呈现的图和分配的颜色）的函数，并且对于每条边 $uv$，都有 $\psi(u) \not\leq \psi(v)$，其中 $u$ 更早出现。对于反链 $P_0(k)$，这正是透明模型。

**命题 9.4**（对承诺使用标签的对手的上界）。如果某个对手能迫使算法使用 $K$ 种颜色，并承诺从偏序集 $P$ 中选取标签，那么 $K \leq |J^*(P)|$。特别地，能迫使算法使用 $K$种颜色的对手，只有在 $j \geq \log^* K - \log^* k - 1$ 时，才能承诺从 $P_j(k)$ 中选取标签。

证明。我们描述一个确定性算法，它对抗该对手时至多使用 $|J^*(P)|$种颜色；该算法了解对手及其标记规则。当 $v$ 到达时，算法会针对每个$u \in N^-(v)$计算 $\psi(u)$；这是可行的，因为每个这样的标签都是历史的函数，且历史截至为 $u$着色为止。随后，它将

$$U(v) := \{p \in P : \psi(u) \not\leq p \text{ for all } u \in N^-(v)\},$$

一个 $P$的下集，并用 $U(v)$给 $v$着色，按照各非空下集首次出现的顺序编号。集合 $U(v)$非空：无论 $v$ 收到什么颜色，对手随后都会给它一个标签 $\psi(v)$，使得对于所有 $u \in N^-(v)$，都有 $\psi(u) \not\leq \psi(v)$，也就是说，$\psi(v) \in U(v)$。该着色是合法的：对于 $u \in N^-(v)$，同样的论证可得 $\psi(u) \in U(u)$；而 $\psi(u) \notin U(v)$，因此 $U(u) \neq U(v)$。所以该算法至多使用 $|J^*(P)|$种颜色；由于该对手能迫使它使用 $K$种颜色，$K \leq |J^*(P)|$。第二个结论由 $|P_{j+1}(k)| \leq$塔函数$(j + 1 + \log^* k)$（引理 5.6）推出。 □

对于 $P = P_0(k)$ 证明中的算法为每个顶点分配其先前邻域中缺失的基础颜色所组成的集合，这是透明模型下经典算法的一种变体 [17,§4。5], [20, 定理 4。2]。该命题针对的是确定性对手，而其证明中的算法知道对手；第 8 节的随机连线之所以能避开该算法，是因为连线的选择是隐藏的。

## 9.3 塔函数能延伸多远

有两个事实限制了塔所能迫使的结果。一个完整的 $j$ 层塔在 $K_m$ 上只有在 $k$可着色时才是 $m \leq |P_j(k)|$ (推论 5.4)，因此至少需要 $\log^* m - \log^* k$ 层级。第二个事实是算法方面的。

**引理 9.5** (First-Fit 与膨胀可交换)。设 $G$ 是 $H$的完全膨胀，或其一个初始段。那么 *First-Fit* 为 $\sigma(v)$ 中的每个顶点赋予与其在 $v$ 上由 *First-Fit* 赋予的相同颜色。因此，在 $K_m = (v_1、 ...、 v_m)$ 上的完整塔的一个初始段中，*First-Fit* 使用的颜色数恰好等于拥有呈现的后代的顶层顶点数，并且它为 $v_t$ 的后代赋予第 $t$小的颜色。

证明。 $\sigma(v)$ 中的所有顶点都具有相同的较早邻居，即指向 $v$的弧的服务器。根据到达顺序进行归纳， $\sigma(w)$ 中的服务器所具有的颜色，正是 First-Fit 为 $w$ 在 $H$上分配的颜色，因此 $\sigma(v)$ 的较早邻居恰好承载着 $v$的较早邻居所对应的 First-Fit 颜色；这里使用了完整性。 $\sigma(v)$ 中的顶点两两不相邻，因此每个顶点都会获得该集合之外的最小颜色，而这正是 $v$的 First-Fit 颜色。每层应用一次这一过程，便可将第二个陈述归约为在 $K_m$上的 First-Fit。 □

定理 *1.5* （重述）。设 $k \geq 3$。如果 First-Fit 在一个 $k$-可着色的 $j$-层塔 $G$ 上使用 $c \geq 2$ 种颜色，那么对于每个 $0 \leq i \leq j$，都有 $c \leq |P_j(k)|$ 和 $|V(G)| \geq \binom{c-1}{i+1}$。因此，存在 $n_k$，使得对于每个 $n \geq n_k$，First-Fit 在所有顶点数至多为 $n$ 的 $k$- 可着色塔上至多使用 $n^{1/(\log^* n - \log^* k - 3)}$ 种颜色。

证明。 图 $G$ 是 $S$ 完整塔的一个初始段，后面接有孤立顶点。这些顶点获得最小的颜色，而 $S$ 的第一个顶点已经具有该颜色，因为 $c \geq 2$ 迫使 $S \neq \emptyset$。因此，First-Fit 在 $c$ 上使用了 $S$种颜色；根据引理 9.5， $v_c$ 具有一个呈现的后代，因此$v_1$、……、 $v_{c-1}$ 的子树均已完全呈现。

偏序集界。若一个节点有呈现的后代，则称其为存活节点。若 $w \to v$ 是同一层节点之间的一条弧，且 $v$ 是存活节点，那么 $w$ 的子树已被完整呈现，因为 $w$先于 $v$ 到达，且子树是连续的；因此 $w \to v$ 的服务器也是存活的。由此，每一层的存活节点构成上一层存活节点的完全膨胀，而存活的顶层顶点为$v_1$、……、 $v_c$。由于 $G$ 是 $k$-可着色的，应用 $j$ 次引理 5.3可得 $K_c$ 映射到 Tmpl($P_j$($k$))，再由引理 5.1(i)得到 $c \leq |P_j(k)|$。

规模界。对每条弧，选取一个服务器 $\rho(w, v)$。同一层中完全呈现的节点游走 $u_0 \to u_1 \to \cdots \to u_i$ 映射为($\rho(u_0, u_1) \ldots, \rho(u_{i-1}, u_i)$)，这是下一层中完全呈现节点构成的、少一条弧的游走： $\rho(u_a, u_{a+1})$与所有 $\sigma(u_{a+1})$相连，而后者包含 $\rho(u_{a+1}, u_{a+2})$。该映射是单射，因为 $\rho(u_a, u_{a+1})$唯一确定其父节点 $u_a$，而$\rho(u_{i-1}, u_i)$确定 $u_i$，因为一个顶点至多为一条弧提供服务。顶点 $v_1$、……、 $v_{c-1}$ 张成一个传递竞赛图，其中有 $\binom{c-1}{i+1}$ 条长度为 $i$的游走。将该映射应用 $i \leq j$ 次，会把它们变成第 $j - i$层中互不相同的节点，这些节点拥有两两不相交的非空呈现后代集合。

渐近界。我们证明， $n_k :=$ 塔函数(max(7, $\log^* k + 3$)) $+ 1$ 就足够了。令 $n \geq n_k$，使得 $\Lambda := \log^* n \geq$ max(8, $\log^* k + 4$)，并设 $d := \Lambda - \log^* k - 3 \geq 1$；待证结论为 $c \leq n^{1/d}$。由于 $\log\ n >$ 塔函数($\Lambda - 2$)，我们有 $d \leq \Lambda \leq \log\log\ n$，因此 $d\log\log\ n \leq (\log\log\ n)^2 \leq \log\ n$，也就是说，$\log n \leq n^{1/d}$。设 $G$ 有 $n' \leq n$ 个顶点，并令 $L = \log^* n'$。若 $L \leq \Lambda - 2$，则 $c \leq n' \leq$塔函数($\Lambda - 2$) $< \log\ n \leq n^{1/d}$。否则 $L \geq \Lambda - 1 \geq 7$，因此 $L \leq \log\log\ n'$。令 $\lambda \leq j$为满足 $|P_\lambda(k)| \geq c$ 的最小 $\lambda$。若 $\log^* c \leq L - 3$，则 $c \leq$ 塔函数($L - 3$) $< \log\log\ n' \leq n^{1/d}$。否则，由推论 5.7 得 $\lambda \geq \log^* c - \log^* k \geq L - 2 - \log^* k$，且 $\lambda \leq \log^* c + 1 \leq L + 1$。当 $c > \lambda + 1$ 时，结合 $i = \lambda$ 的规模界可得 $n' \geq ((c-1)/(\lambda+1))^{\lambda+1}$；在所有情况下，均有 $c \leq 1 + (\lambda+1) n'^{1/(\lambda+1)}$。函数$y \mapsto y\, n'^{1/y}$在 $y \leq \ln\ n'$ 时递减，而 $y_0 := L - 1 - \log^* k$ 满足 $2 \leq y_0 \leq \lambda + 1 \leq L + 2 \leq \ln n'$，因此

$$c \;\leq\; 1 + y_0\, n'^{1/y_0} \;\leq\; 2L\, n'^{1/y_0} \;\leq\; n'^{1/(y_0-1)} \;=\; n'^{1/(L-\log^* k-2)} \;\leq\; n^{1/d}.$$

第三个不等式是 $2L \leq n'^{1/(y_0(y_0-1))}$，这成立是因为 $y_0(y_0 - 1) \log\ 2L \leq L^3 \leq (\log\log\ n')^3 \leq \log n'$；最后一个则用到了 $n' \leq n$ 和 $L - \log^* k - 2 \geq d$。 □

对手在 定理 6.4 和8.5 中的每一场对局都是一个塔，因此，对于这些对手，First-Fit 在指数分母上相差一个加法常数的范围内是最优的。结合定理 1.1 ，这就确定了该方法的值。

**推论 9.6** (塔的值)。 固定 $k \geq 3$，令 $V_k(n)$ 为最大的 $K$ ，使得某个大小至多为 $n$ 的对手能够迫使使用 $K$ 种颜色，并落在 $k$-可着色的塔中。存在 $n_k$ ，使得对每个 $n \geq n_k$，

$$n^{1/(\log^* n+3)} \;\leq\; V_k(n) \;\leq\; n^{1/(\log^* n - \log^* k - 3)}.$$

等价地， $V_k(n) = n^{1/(\log^* n + c)}$ 对于某个实数 $c = c(k, n)$ 满足 $-\log^* k - 3 \leq c \leq 3$，该值可以为负。

证明。 令 $n_k$ 如定理 1.5中所述；它超过 $2^{406}$。对于下界，采用定理 1.1证明中的参数，定理 8.5(ii)的对手规模至多为 $n$ ，并迫使使用$\lceil X_m \rceil \geq n^{1/(\log^* n+3)}$ 种颜色；根据引理 8.2 ，其每一场对局都是一个 $k$-可着色的塔。对于上界，针对任何规模至多为 $n$ 且落在 $k$-可着色塔中的对手进行 First-Fit 对局：根据定理 1.5 ，对局结束时至多使用 $n^{1/(\log^* n - \log^* k - 3)}$ 种颜色。 □

因此，形如 $n^{\Omega(1)}$，甚至 $n^{1/o(\log^* n)}$的下界不可能来自团上的塔。它需要一个色数有界且规模为多项式的顶层；根据定理 1.4，这正是问题本身，或是另一种层。

# 10 讨论与未解决问题

对于固定的 $k \geq 3$， $k$-可着色图的在线色数如今介于 $n^{1/(\log^* n + O_{(1)})}$和 $n^{1-\Theta(1/k^2)}$之间；对于 $k = 3$，确定性算法的在线色数介于 $n^{1/(\log^* n+3)}$ 和 $\tilde{O}(n^{2/3})$ 之间，随机化算法则介于 $n^{1/(\log^* n+3)}$ 和 $O(\sqrt{n})$ 之间。下界仍为 $n^{o(1)}$，并且根据推论 9.6，任何采用塔作为输入的对手都无法超过 $n^{1/(\log^* n - O_{(1)})}$。下面列出三个研究方向。

**问题 10.1** （多项式下界）。是否存在 $\chi_3^{\det}(n) \geq n^{\varepsilon}$ 使得某个 $\varepsilon > 0$？是否存在 $\chi_3^{\mathrm{rand}}(n) \geq n^{\varepsilon}$？

肯定的答案，也就是 Kierstead 的挑战 [22, 问题 5。1], 中下界部分，必须舍弃塔。对于确定性算法，根据 定理 1.4，只需针对任意一个固定的 $k \geq 3$ 找到这样的对手。已知有两个约束。图必须具有有界的奇围长，因为奇围长足够大的图可以在线着色，所用颜色数为 $O(n^{\varepsilon})$ [45, 定理 1]; 我们的 $j$层塔的奇围长至少为 $2j + 3$ (注 6.5)，且会随 $n$ 增大。根据命题 9.4，若对手每次行动后都承诺从 $P_j(k)$ 个标签中选取标签，则最多只能迫使算法使用$|P_{j+1}(k)|$ 种颜色。相反的猜想也有人提出：Yoneda 和 Yoneda 猜想，对于每个固定的 $k$，某个随机在线算法只需使用 $n^{o(1)}$ 种颜色 [46, 猜想 27]。根据 定理 1.1，这样的算法仍需使用 $n^{1/(\log^* n + O_{(1)})}$ 种颜色。

**问题 10.2** （该常数）。使得 $c$ 满足 $\chi_k^{\det}(n) \geq_n 1/(\log^* n + c)$ 对所有足够大的 $n$ 的下确界是多少？定理 *1.1* 中的因子 $\log n$ 能否去掉？

对于呈现塔的对手，定理 1.1 和 1.5将相应的 $k = 3$ 下确界限定在 $-5$ 和 3 之间。定理 8.5 中的对数因子 源自重颜色的阈值 $\ln 4m$。即使在某一层有 $m$ 的常数比例（如 定理 D.2 所示），按照我们的记账方式，这一结果也无法在多个层级上保持：子树中不同节点的饱和颜色（附录 D.2）未必一致。

问题 *10.3*（恰好一层）。在块大小为 $\max(1, m - t)$ 个顶点的 $K_m = (v_1, \ldots, v_m)$ 预留膨胀上，对手最多能迫使使用多少种颜色？定理 *D.2* 给出的下界为 $\lfloor m/2 \rfloor + 1$，*First-Fit* 给出的上界为 $m$；对于 $m = 4, \ldots, 11$，穷举搜索得到的结果分别为 *3*、*4*、*4*、*5*、*6*、*6*、*7*、*7*（附录 *D.3*）。

该答案衡量单个层级必须损失多少；如果一个线性的下界能够在多个层级中保持，那么将消除定理 1.1 中的对数因子。

最后，Kierstead 和 Kolossa 在线为每个 $k$-可着色完美图使用 $n^{10k/\log\log n}$种颜色 [25, 定理 0。1]。根据定理 1.1，对于任意固定的 $k$-可着色图，一般的图因此在渐近意义上都比完美图更难，尽管这种差异只有在天文数字般大的 $k \geq 3$时才会显现出来$n$。完美图是否允许使用多项式对数级数量的颜色 [23,问题 13]并未受到我们的构造影响：其中的图都是无三角形图，而无三角形图只有在为二分图时才是完美图。

# 致谢

作者由衷感谢 Allan Borodin 的慷慨建议与鼓励，以及他对本项工作方向所给予的宝贵指导。

**人工智能工具的使用。** 作者使用了 GPT（OpenAI）和 Claude（Anthropic）等人工智能工具来制定和检查证明、起草和编辑文本、编写模拟程序并进行计算机检查，以及生成 Lean 形式化证明。作者对本文的全部内容负责。

## 参考文献


[1] Hanzhi Bai、Longma Du、Xinyu Hu、Ruilong Liu 和 Guanghui Wang。超图 Ramsey 数的新塔型下界。arXiv:2606.24198v1，2026。[2] Nikhil Bansal、Neng Huang 和 Euiwoong Lee。用于3-可着色图的改进基于半定规划的算法。arXiv:2602.05904v2，2026。即将发表于 SODA 2027 会议论文集。[3] Yair Bartal、Amos Fiat 和 Stefano Leonardi。在线图问题的下界及其在在线电路与光路由中的应用。*SIAM*计算杂志，36(2)：354–393，2006。doi: 10.1137/S009753979833965X。会议版本发表于 STOC 1996，第531–540页。[4] Dwight R. Bean。有效着色。《符号逻辑杂志》，41(2)：469–480，1976。doi: 10.2307/2272247。[5] Avrim Blum。图着色的新近似算法。*ACM*学报，41(3)：470–516，1994。doi: 10.1145/176584.176586。[6] Avrim Blum 和 David Karger。用于3-可着色图的 $\widetilde{O}(n^{3/14})$-着色算法。*Infor-mation Processing Letters*，61(1)：49–53，1997。doi: 10.1016/S0020-0190(96)00190-1。[7] Martin Böhm 和 Pavel Veselý。在线色数是 PSPACE 完全的。《计算系统理论》，62(6)：1366–1391，2018。doi: 10.1007/s00224-017-9797-2。会议版本发表于 IWOCA 2016，LNCS 9843，第16–28页；arXiv:1604.05940。论文中引用的定义和定理编号遵循 arXiv v2。[8] Ajit A. Diwan、Sreyash Kenkre 和 Sundar Vishwanathan。周长、色数与在线着色。*Combinatorica*，33(3)：319–334，2013。doi: 10.1007/s00493-013-2542-9。arXiv:0809.1710；论文中引用的定理编号遵循 arXiv 版本。[9] Dwight Duffus、Hanno Lefmann 和 Vojtěch Rödl。移位图与 Ramsey 数的下界 $r_k(l;r)$。《离散数学》，137(1–3)：177–187，1995。doi: 10.1016/0012-365X(93) E0139-U。[10] Paul Erdős 和 András Hajnal。无限图的色数。载于 P. Erdős 和 G. Katona（编），《图论》（*1966*年蒂豪尼会议论文集），第83–98页。学术出版社，纽约，1968。[11] Yumou Fei、Dor Minzer 和 Shuo Wang。具有完美完备性的4 对 1 游戏的困难性。arXiv:2610.12378v2，2026。[12] Jan Foniok 和 Claude Tardif。既有左伴随又有右伴随的有向图函子。《离散数学》，338(4)：527–535，2015。doi: 10.1016/j.disc.2014.10.018。[13] Grzegorz Gutowski、Jakub Kozik、Piotr Micek 和 Xuding Zhu。在线图着色的下界。载于《算法与计算》（*ISAAC 2014*），《计算机科学讲义》第8889卷，第507–515页。施普林格，2014。doi: 10.1007/978-3-319-13075-$0\_40$。arXiv:1404.7259v2；论文中引用的页码和定理编号遵循 arXiv 版本。

[14] András Gyárfás 和 Jenő Lehel。图的在线着色与首次适配着色。图论杂志，12(2)：217–227，1988。doi: 10.1002/jgt.3190120212。[15] Magnús M. Halldórsson。并行图着色与在线图着色。算法杂志，23(2)：265–280，1997。doi: 10.1006/jagm.1996.0836。[16] Magnús M. Halldórsson。已知图的在线着色。*The Electronic Journal of Combina-torics*，7(1)：R7，2000。doi: 10.37236/1485。[17] Magnús M. Halldórsson 和 Mario Szegedy。在线图着色的下界。理论计算机科学，130(1)：163–174，1994。doi: 10.1016/0304-3975(94)90157-0。[18] C. C. Harner 和 R. C. Entringer。有向图的弧着色。组合理论杂志*B*辑，13(3)：219–225，1972。doi: 10.1016/0095-8956(72)90057-3。[19] Ken-ichi Kawarabayashi、Mikkel Thorup 和 Hirotaka Yoneda。三可着色图的改进着色。载于第*56*届*ACM*计算理论研讨会年会论文集（*STOC 2024*），第331–339页，2024。doi: 10.1145/3618260.3649768。[20] Ken-ichi Kawarabayashi、Hirotaka Yoneda 和 Masataka Yoneda。在线图着色：区分随机化算法与确定性算法的竞争比。arXiv:2611.14513v1，2026。[21] Ken-ichi Kawarabayashi、Hirotaka Yoneda 和 Masataka Yoneda。用于$k$-可着色图的在线图着色。载于第*2027*届*ACM-SIAM*离散算法研讨会年会论文集（*SODA*）。SIAM，2027。即将出版。arXiv:2511.16100v2（2026年4月）。[22] Hal A. Kierstead。 $k$-可着色图的在线着色。以色列数学杂志，105(1)：93–104，1998。doi: 10.1007/BF02780324。[23] Hal A. Kierstead。图的在线着色。载于 Amos Fiat 和 Gerhard J. Woeginger（编），在线算法：最新进展，《计算机科学讲义》第1442卷，第281–305页。施普林格，1998。doi: 10.1007/BFb0029574。[24] Hal A. Kierstead。递归图着色与在线图着色。载于 Yu. L. Ershov、S. S. Goncharov、A. Nerode 和 J. B. Remmel（编），《递归数学手册》第*2*卷：递归代数、分析与组合学，逻辑与数学基础研究第139卷，第1233–1269页。爱思唯尔，阿姆斯特丹，1998。doi: 10.1016/S0049-237X(98) 80051-7。[25] Hal A. Kierstead 和 K. Kolossa。完美图的在线着色。*Combinatorica*，16(4)：479–491，1996。doi: 10.1007/BF01271267。[26] Dénes Kőnig。关于图及其在行列式理论与集合论中的应用。《数学年刊》，77(4)：453–465，1916。doi: 10.1007/BF01456961。[27] Francesco Kriegel。$\mathcal{EL}$ 概念描述的分配分次格及其邻域关系（扩展版）。LTCS-Report 18-10，德累斯顿工业大学，2018。[28] Yaqiao Li。三可着色图在线着色的新界。arXiv:2610.41516v1，2026。[29] Yaqiao Li 和 Xin Li。随机二部图的 FirstFit着色过程及随机顺序模型下的在线着色下界。arXiv:2610.15468v1，2026。

[30]Yaqiao Li、Vishnu V. Narayan 和 Denis Pankratov。在线着色与在线图问题的一种新型对手。Algorithmica，84(5):1232–1251，2022。doi: 10. 1007/s00453-021-00920-w。会议版本发表于 WAOA 2020，LNCS 12806，第47–62页；arXiv:2005.10852。论文中引用的定义编号遵循 arXiv 版本。[31] Nathan Linial。分布式图算法中的局部性。SIAM计算杂志，21(1): 193–201，1992。doi: 10.1137/0221015。[32] László Lovász、Michael Saks 和 William T. Trotter。具有次线性性能比的在线图着色算法。《离散数学》，75(1–3):319–325，1989。doi: 10.1016/0012-365X(89)90096-4。[33] Guy Moshkovitz 和 Asaf Shapira。拉姆齐理论、整数分拆与Erdős–Szekeres定理的新证明。数学进展，262:1107–1129，2014。doi: 10.1016/j.aim.2014.06.008。arXiv:1206.4001；论文中引用的定理和公式编号遵循 arXiv 版本。[34] OEIS基金会。序列A000372（Dedekind 数）。在线整数数列百科全书，2026。URL https://oeis.org/A000372。[35] Xavier Pérez-Giménez、Paweł Prałat 和 Douglas B. West。关于具有均匀松弛度的单调 $k$-均匀有序路径的在线大小拉姆齐数。欧洲组合学杂志，92:103242，2021。doi: 10.1016/j.ejc.2020.103242。arXiv:1807.05038；论文中引用的章节编号遵循 arXiv 版本。[36] Svatopluk Poljak。通过迭代反链为有向图着色。布拉格查理大学数学评论，32(2):209–212，1991。[37] Svatopluk Poljak 和 Vojtěch Rödl。关于有向图的弧色数。组合理论杂志B辑，31(2):190–198，1981。doi: 10.1016/S0095-8956(81)80024-X。[38] Pavel Pudlák 和 Vojtěch Rödl。在小集合上具有低差异度的 $k$-集合着色。组合理论杂志B辑，178:79–103，2026。doi: 10.1016/j.jctb.2025.12.001。arXiv:2402.05286v3；论文中引用的引理编号遵循 arXiv 版本。[39] Danny Rorabaugh、Claude Tardif、David Wehlau 和 Imed Zaguia。迭代弧图。布拉格查理大学数学评论，59(3):277–283，2018。doi: 10.14712/1213-7243.2015.260。[40] Emanuel Sperner。关于有限集合的子集的一个定理。数学杂志，27(1):544–548，1928。doi: 10.1007/BF01171114。[41] Sundar Vishwanathan。随机化在线图着色。载于第31届年度计算机科学基础研讨会论文集（FOCS），第464–469页，1990。doi: 10.1109/ FSCS.1990.89567。期刊版本：算法杂志 13(4):657–669，1992。[42] Avi Wigderson。改进近似图着色的性能保证。ACM学报，30(4):729–735，1983。doi: 10.1145/2157.2158。[43] Marcin Wrochna 和 Stanislav Živný。关于 $H$-着色图的 $G$-可着色图的改进困难性。载于2020年ACM-SIAM离散算法研讨会论文集（SODA），第1426–1435页。SIAM，2020。doi: 10.1137/1.9781611975994.86。arXiv:1907.00872。

[44] Andrew Chi-Chih Yao。概率计算：迈向复杂性的统一度量。载于第*18*届年度计算机科学基础研讨会（*FOCS 1977*），第222–227页，1977。doi: 10.1109/SFCS.1977.24。

[45] Hirotaka Yoneda 和 Masataka Yoneda。《大奇围长图的在线着色》。载于第*34*届欧洲算法年度研讨会（*ESA 2026*），LIPIcs 第 388 卷，第 127:1–127:15 页。施洛斯·达格施图尔—莱布尼茨信息学中心，2026。doi: 10.4230/LIPIcs. ESA.2026.127。arXiv:2604.27690。

[46]Hirotaka Yoneda 和 Masataka Yoneda。随机到达下的在线图着色。arXiv:2610.23824v1, 2026。

## 定理的阈值1.1

本附录证明了定理 1.1第二句背后的不等式：采用第 8.4 节的参数时，定理 8.5 的界 $n^{1/(j+2)}$ 会超过明确阈值。

**引理 A.1**（阈值）。令 $L = 对数^{*}\, n$，令 $1 \le j \le j_0(n)$，其中 $j_0(n)$：$= L + 1$ 若 $k = 3$ 且$j_0(n)$：$=$ 最大值(1，$L - 1$) 若 $k \ge 4$，并令 $M$：$= (n/2^j)^{1/(j+1)}$。则 $M \ge 2$ 且

$$\frac{2M-1}{4(1+\ln 4M)} \;\ge\; n^{1/(j+2)} \tag{A.1}$$

对于所有 $n \ge 2^{406}$（如果 $k = 3$），以及对于所有 $n \ge 2^{201}$（如果 $k \ge 4$）。

证明。令 $X := \log n$，并令 $f_j(X)$ 为式（A.1）左侧减去 $X/(j+2)$ 后所得值的以2为底的对数。由于 log $M = (X-j)/(j+1)$，我们有 $\frac{d}{dX}\log(2M-1) \ge \frac{1}{j+1}$，且 $\frac{d}{dX}\log(1+\ln 4M) = {}^{1}/_{(j+1)(1+\ln 4M)}$，因此

$$f_j'(X) \;\ge\; \frac{1}{j+1}\Big(\frac{1}{j+2} - \frac{1}{1+\ln 4M}\Big),$$

当 $1+\ln 4M \ge j+2$ 时，该值非负。在下文的范围内，log $M \ge 39$（尤其是 $M \ge 2$）和 $j \le 7$，因此这一点成立，并且 $f_j$ 关于 $X$ 单调不减。因此，只需在每个 $j_0(n)$ 为常数的 $n$ 范围的左端，检查每个符合条件的 $j$ 是否满足 $f_j \ge 0$（这些值均向下取整）：

| $k$ | $n$的范围 | $j_0$ | 左端的最小值$_{1\le j\le j_0} f_j$ |
|---|---|---|---|
| 3 | $2^{406} \le n \le 2^{65536}$ | 6 | 0.0007（位于 $j = 6$） |
| 3 | $2^{65536} < n \le$塔函数(6) | 7 | 895.8（位于 $j = 7$） |
| $\ge 4$ | $2^{201} \le n \le 2^{65536}$ | 4 | 0.0077（位于 $j = 4$） |
| $\ge 4$ | $2^{65536} < n \le$塔函数(6) | 5 | 1545.6（在 $j = 5$处） |

对于 $L \ge 7$，我们有 $X >$塔函数$(L-2) \ge 2^{65536}$以及 $L+3 \le \log X$，因此 log $M = (X-j)/(j+1) \ge 1$。如（A.1）所示，（8.2）左侧至少为 $M/(4(1+\ln 4n))$，因此 $f_j(X) \ge \frac{X-j}{j+1} - \log(4(1+\ln 4n)) - \frac{X}{j+2} \ge X\,(\log X)_2 - 1 - 2\log X$，其为正数。 □

阈值不能减半：不等式 (A.1) 在 $n = 2^{405}$ for $j = 6$ 时不成立，在 $n = 2^{200}$for $j = 4$ 时也不成立。然而，定理 1.1 的证明使用满足 $|P_j(k)| \ge n$ 的最小 $j$；对于 $k = 3$，只要 $8\,569 < n < 2^{235}$，这就是 $j = 5$，因为 $P_4(3)$ 有一个包含 235 个元素的反链；而对于 $j = 5$，一旦 $\log n \ge 146$，(A.1) 的左侧至少为 $n^{1/8}$。我们通过程序计算了表格和这些事实，涵盖 $\log n$ 不超过 65536 的每个整数。

## B 更小的显式实例与精确小规模情形

步骤 3 中的鸽巢原理 构造 6.1 假设一个块可以使用任意 $K-1$ 种颜色。在顶点 $v_t$ 以下可用的颜色更少，因为每个其下方的呈现顶点 $v_t$ 都会看到$t-1$种不同的诱导颜色： $v_1$、……、 $v_{t-1}$，因此块可以相应缩小。这会使 表 2 中的规模上界改变一个常数因子，约为 $(j+1)(j+2)/2$，但不会改变指数（表 3）。

对于 $1 \le t \le K$，令 $D_j(t)$ 为 $= K-t$： $v_t$ 的后度；对于 $\ell = j, \dots, 1$

$$b_\ell(t) := (K-t)\big(D_\ell(t)-1\big)+1, \qquad D_{\ell-1}(t) := \max_{t<t'\le K} b_\ell(t'),$$

其中空集的最大值为 0。由于 $b_\ell(t)$ 关于 $t$ 单调不增，因此对于 $t < K$，有 $D_{\ell-1}(t) = b_\ell(t+1)$，且 $D_{\ell-1}(K) = 0$。令 A′ 为定理 6.4 中的对手，其中低于 $v_t$ 的 $\ell$ 层节点的每个块都有 $b_\ell(t)$ 个节点，且每个此类节点的保留集大小为 $D_\ell(t)$。在 $v_K$ 以下，后度为 0，每个块都是单个节点，其保留集为空，而 col 是该节点的颜色。

**命题 B.1** (更小的块)**.** 若 $|P_j(k)| \ge K$，则 $A'$ 可迫使 $k$-可着色图使用 $K$ 种颜色，且每场对局至多有 $\sum_{t=1}^{K} \prod_{\ell=1}^{j} b_\ell(t)$ 个顶点。

证明。可着色性保持不变，因为引理 5.2 不依赖块大小。对于强制，只要构造 6.1 的步骤 1 和步骤 3 在新的块大小下可行，引理 6.2 和 6.3 的证明便适用。我们按完成顺序逐块检查步骤 3，并假设此前所有块均满足条件；此时使用的颜色少于 $K$ 种，因此迄今选取的每个服务器都有其节点的诱导颜色。沿层级向下归纳可知，每个低于 $v_t$ 的节点，在每个以 $s < t$ 为较早邻居的 $v_s$ 下方，恰有一个服务器，且该服务器的诱导颜色为 col($v_s$)。这些 $t-1$ 种颜色互不相同且都在使用中，因此低于 $v_t$ 的某个块的诱导颜色至多属于一个含 $K-t$ 种颜色的集合；于是 $(K-t)(D-1)$ 个节点中，有 $D$ 个节点具有相同颜色。对于步骤 1，低于 $v_t$ 的层 $\ell-1$ 上的一个节点至多服务一个块，该块位于某个满足 $t' > t$ 的 $v_{t'}$ 下方，且有 $b_\ell(t') \le D_{\ell-1}(t)$ 个节点，因此大小为 $D_{\ell-1}(t)$ 个节点的保留集就足够；保留集 $v_t$ 本身需要 $D_j(t)$ 个 $= K-t$ 元素。顶点数界将每个块都完整计入。 □

| $k$ | $K$ | $j$ | 定理 6.4 | 命题 B.1 |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 1 | 22 | 12 |
| 3 | 7 | 1 | 187 | 77 |
| 3 | 8 | 2 | 88 796 | 14 484 |
| 3 | 10 | 2 | 426 394 | 70 558 |
| 3 | 18 | 2 | 21 464 626 | 3 591 642 |

表 3：根据公式精确计算出的两个对手的规模上界。

**更廉价的顶层。** 定理 D.2 的流对手 强制使用 $K$ 种颜色作用于 $K_{2K-2}$ 仅膨胀一次的结构，其中每个后度为 $d$max$(1,d)$ 的顶点对应一个块。将其用作顶层而非团，可以将第一次预留膨胀需要处理的后度从约 $K^2$ 降至$2K$。

**推论 B.2** （更廉价的顶层）。 设 $K \ge 3$ 和 $j \ge 1$，其中 $2K-2 \le |P_j(k)|$。对 $K_{2K-2}$ 运行定理 *D.2* 的流对手，然后在其下方进行 $j-1$ 次预留膨胀，即可得到一个对手，使 $k$-可着色图在至多有 $2^j K^{(j^2+j+2)/2}$ 个顶点时被迫使用 $K$ 种颜色。

证明。对于 $m = 2K-2$ 以及块大小为 $\max(1, m-t)$ 的块，流对手迫使使用 $\lfloor m/2 \rfloor + 1 = K$ 种颜色，并使用 $\binom{m}{2} + 1 \le 2K^2$ 个顶点。$\sigma(v_s)$ 中的一个顶点至多服务一条弧 $v_s \to v_t$，随后它与 $\sigma(v_t)$ 中的 $\max(1, m-t)$ 个 $\le 2K-4$ 顶点相连，因为 $t \ge 2$；因此后度至多为 $D = 2K-4$。其最终图是 $K_m$ 的预留膨胀，根据引理 5.1(i) 和引理 5.2，它映射到 $\mathrm{Tmpl}(P_{j-1}(k))$，因为 $m \le |P_j(k)|$。应用 $j-1$ 次预留膨胀（引理 6.3）；根据引理 5.2，最终图是 $k$-可着色的。块大小为 $b'_1 = (K-1)(D-1)+1 \le 2K^2$，随后至多是前一个块大小的 $K$ 倍，因此大小至多为 $2K^2 \prod_{i=1}^{j-1} 2K^{i+1} = 2^j K^{(j^2+j+2)/2}$。 □

在相同的 $j$ 下，指数比定理 6.4 的 $(j+1)(j+2)/2$ 小 $j$：例如，在顶点数至多为 $92 \cdot 78 = 7\,176$ 的 3-可着色图上使用 8 种颜色，而不是 88 796；使用 10 种颜色时，顶点数为 20 944，而不是 426 394。不过，该推论需要 $2K-2 \le |P_j(k)|$，而非 $K \le |P_j(k)|$；但如果这需要额外一层，所需规模就会更大：使用 7 种颜色需要 $j=2$ 和 3 685 个顶点，而单层时只需 187 个顶点；使用 18 种颜色需要 $j=3$ 和约 $2.7 \cdot 10^9$ 个顶点，而单层时为 21 464 626 个顶点。渐近地，切换至多增加一层，且项 $(\log^* n)^2$ 保持不变。

**精确小情形。** 为了了解这些实例距离最优情况有多远，请回顾：$N_k(c)$ 是对手迫使 $k$-可着色图使用 $c$ 种颜色所需的最少顶点数。

**引理 B.3**（每种颜色两个顶点）。对于 $c \ge k$，$N_k(c) \ge 2c-k$。

证明。令算法进行 First-Fit 对局。如果 $\{y_a\}$ 和 $\{y_b\}$、$a < b$ 是只包含一个顶点的颜色类，那么在 $y_b$ 被着色时，邻点 $y_b$ 上已经有颜色 $a$，而该邻点只能是 $y_a$。因此，单点颜色类构成一个团，其数量至多为 $k$。其他每个颜色类至少包含两个顶点，所以 $c$ 种颜色至少需要 $s + 2(c-s) \ge 2c-k$ 个顶点，其中 $s \le k$ 是单点集的数量。 □

**命题 B.4**（精确值）。对于 $3 \le c \le 9$，我们有 $N_3(c) = 2c-3$，且 $N_3(10) \ge 17$。对于 $k \le c \le c_k$，其中 $(k, c_k) = (4,10), (5,12), (6,13)$，$N_k(c) = 2c-k$。

下界见引理 B.3。上界由计算机辅助得出：通过穷举博弈搜索找到对手策略（针对 $N_3(9) \le 15$ 个局面的有向无环图），并由独立检查器从头重放；该检查器会验证每一步之后的 $k$-可着色性，并确认每个答案列表恰好包含所有合法答案。采用不同表示方式进行的第二次搜索重现了 $N_3(c) = 2c-3$（针对 $c \le 8$），全部三十种策略也都在 Lean 中由检查器验证；该检查器已证明可靠，并在内核中求值。

对于 $k=3$ 和 $c \le 9$，因此最强的对手都能以 First-Fit 每种颜色对应两个顶点的速率迫使算法使用颜色；而定理 6.4 中的对手需要 187 个顶点才能迫使使用7 种颜色，命题 B.1 中经过改进的对手则需要 77，而最优值为 11。由于 Kierstead 算法给出 $N_3(c) = 2c-3$，因此这种情形 $N_3(c) \ge c^{3/2-o(1)}$ [22, 定理 1。6]必须终止。

# C 无感知膨胀

本附录展示了如何将第 6 节中的预留变为无感知构造。其结果是定理 1.2 的一个版本，该版本以概率 $1-\varepsilon$ 对随机化算法成立，但代价是增加一个因子 $O(\log n)$；推论 8.6 在相同保证下给出了更强的界，而这种无感知构造也给出了附录 D.5中的小型显式实例。对于随机化算法，输入预先固定，因此对手无法预留块中流行颜色的顶点。它用一个隐藏的随机索引类取代预留顶点：块中的每个顶点都获得一个均匀随机索引，而索引为 $a$ 的顶点 $a$第个后续邻点。如果

该块的流行颜色出现在每个索引类中，那么每个后续邻点所在的块都会看到该颜色，就好像它已被预留一样。这就是 Li 的随机索引装置 [28, 引理 A。4], ，只是应用于单个顶点而非二分图构件。可着色性无需改变，因为引理 5.2 允许每条弧上有任意数量的服务器。新的要求是流行颜色必须与每个索引类相交，而这会使块大小增加一个因子 $O(\log n)$ 。

## C.1 无知扩张

**构造 C.1** （无知膨胀 $\mathrm{OB}_R(\mathcal{H})$）。设 $\mathcal{H}$ 是一个分布，其支撑集为恰好包含 $N$ 个顶点 $v_1, \ldots, v_N$ 的有序图；设 $\delta\colon [N] \to \mathbb{N}$ 仅取决于位置，并且对支撑集中的每个 $H$，都有 $d_H^+(v_m) \le \delta(m)$，其中 $d_H^+$ 表示后度。采样 $H \sim \mathcal{H}$。对于 $m = 1, \ldots, N$，给出一个包含 $R \ge 1$ 个新顶点的块 $\sigma(v_m)$。每个 $x \in \sigma(v_m)$ 都会获得一个隐藏索引 $\mathrm{idx}(x)$，该索引在 $[\delta(m)]$ 上均匀分布，且独立于其他所有内容（若 $\delta(m) = 0$，则不设索引）。 $\sigma(v_m)$ 的每个顶点都与整个索引类相连

$$I(w, a) := \{x \in \sigma(w) : \mathrm{idx}(x) = a\}$$

对于 $H$ 中每个前驱邻居 $w$ （属于 $v_m$ ），其中 $v_m$ 是 $w$ 的第 $a$ 个后续邻居。

每个结果都是 $H$ 的膨胀，符合 定义 4.6：顶点 $x$ 负责连接到其所在块对应顶点的第$\mathrm{idx}(x)$个后续邻居（若该邻居存在）。输入从不依赖于颜色，因此 $\mathrm{OB}_R(\mathcal{H})$ 是一个分布，其支撑集为恰好包含 $NR$ 个顶点的有序图。顶点$\sigma(v_m)$ 的后度至多为 $R$，当且仅当 $\delta(m) \ge 1$；否则为 0，同样仅取决于位置。

引理 *C.2*（强制在非自适应膨胀下仍然成立）。设 $K \ge 2$ 和 $\varepsilon \ge 0$，并假设：*(a) H* 的支撑集中的每个 $H$都映射到 *Tmpl(J*(P))*；*(b)* 每个确定性在线算法在 $H \sim$*H* 上以至少$\rho$的概率使用至少 $K$ 种颜色；*(c)* $\sum_{m=1}^{N} \delta(m)\,(1 - 1/\delta(m))^{\lceil R/(K-1) \rceil} \le \varepsilon$，其中含有 $\delta(m) = 0$ 的项均为 *0*。则 $OB_R$ *(H)* 支撑集中的每个图都映射到 *Tmpl(P)*，且每个确定性在线算法在 $OB_R$*(H)* 上以至少 $\rho - \varepsilon$的概率使用至少 $K$ 种颜色。

如果每个 $\delta(m)$ 都为 0，则条件 (c) 显然成立；否则，特别是当 $ND\exp(-R/((K-1)D)) \le \varepsilon$，且 $D = \max_m \delta(m)$ 时，条件 (c) 也成立，因为 $(1 - 1/x)^c \le e^{-c/x}$，并且 $x\,e^{-c/x}$ 随 $x$ 递增。

证明。标签。每个结果都是一个.....的膨胀 $H$，因此引理 5.2 适用。

强制。证明将 Alg 与一个使用流行颜色的内部图算法进行比较，并表明只有当某个索引类缺少其流行颜色时，比较才会失败。固定一个用于呈现图的确定性算法 Alg，并令 $\iota$ 为所有索引的族；$H$ 和 $\iota$是独立的。对于 $m \le N$，令 $\pi(v_m)$ 为 Alg 在 $\sigma(v_m)$ 上最常使用的颜色（若并列则取最小颜色），并考虑以下事件

$$C_m := \{\text{每个类 } I(v_m, a) \;\; a \in [\delta(m)], \text{都包含一个颜色为 } \pi(v_m) \text{ 的顶点}\},\; T_m := \{\text{到 } \sigma(v_m) \text{ 结束时，Alg 至少使用了 } K \text{ 种颜色}\} \qquad E_m := \neg T_m \wedge \neg C_m.$$

步骤 *1*：$\Pr(E_m) \le \delta(m)(1 - 1/\delta(m))^{\lceil R/(K-1) \rceil}$。对 $H$ 以及$\sigma(v_1)$的索引进行条件化.....，$\sigma(v_{m-1})$。截至 $\sigma(v_m)$ 结束时所呈现的边只取决于这些，因为与 $\sigma(v_m)$ 相连的类位于更早的块中。因此， $\sigma(v_m)$的着色，以及随之确定的 $\pi(v_m)$ 和$T_m$，都是固定的。如果 $T_m$ 成立，则不可能有 $E_m$。否则， $\sigma(v_m)$至多携带 $K - 1$ 种颜色，因此其至少有 $c := \lceil R/(K-1) \rceil$ 的顶点具有颜色 $\pi(v_m)$，而它们的索引仍然相互独立且

在 $[\delta(m)]$上均匀分布。它们全部缺少某个固定索引 $a$ 的概率至多为 $(1-1/\delta(m))^c$；现在对 $a$求和。

步骤 *2*：模拟的内部算法。对于每个固定的 $\iota$，我们为内部图定义一个确定性在线算法 $\mathsf{Alg}'_\iota$。它必须在每个有序图上都有定义，而不只是定义在$\mathcal{H}$的支撑集上；对于顶点数多于 $N$ 的输入，它会为每个 $m > N$ 给出下文定义的 $v_m$ 颜色 $(1,\ m)$。当 $v_m$ 到达时，$\mathsf{Alg}'_\iota$ 已知前缀 $H[v_1,\dots,v_m]$，并根据该前缀和 $\iota$ 重建截至 $\sigma(v_m)$ 结束时的呈现图；即使 $a > \delta(l)$ 对于 $w = v_l$ 成立（此时该类为空），它也会将 $\sigma(v_m)$ 加入类 $I(w,\ a)$。它在重建的图上运行 $\mathsf{Alg}$，并从两个不相交的调色板中为 $v_m$ 指定一个颜色，这两个调色板通过单射编码到自然数中（例如 $(0,\ q) \mapsto 2q$ 和 $(1,\ m) \mapsto 2m+1$）：

$$\mathrm{col}(v_m) := (0, \pi(v_m)) \text{ if } m \text{ is not switched}, \qquad \mathrm{col}(v_m) := (1, m) \text{ if } m \text{ is switched}.$$

这里，“$m$ 被切换”是指 $T_m$ 成立，或对某个 $l \le m$ 而言 $C_l$ 不成立，或某个满足 $l < m$ 的 $v_l$ 在 $H[v_1,\dots,v_m]$ 中有多于 $\delta(l)$ 个后续邻居。算法可以根据前缀判定这一点，因为 $\iota$ 是一个固定参数，而且切换在 $m$ 中是单调的。该着色在每个输入上都是合法的。设 $w = v_l \to v_m$ 是一条弧，其中 $v_m$ 是 $w$ 的第 $a$ 个后续邻居。如果 $m$ 被切换，那么 $\mathsf{col}(v_m) = (1, m)$，且没有其他顶点会获得这个颜色。否则，$l$ 也不会被切换，因此 $\mathsf{col}(w) = (0, \pi(w))$，事件 $C_l$ 成立，并且 $a \le \delta(l)$。此时，类 $I(w,a)$ 中包含一个颜色为 $\pi(w)$ 的顶点，$\sigma(v_m)$ 中的每个顶点都与它相邻，而 $\pi(v_m)$ 作为 $\sigma(v_m)$ 中某个顶点的颜色，与 $\pi(w)$ 不同。这些标记使被切换顶点的颜色成为新颜色，无需知道 $\mathsf{Alg}$ 之后会使用哪些颜色。

步骤 *3*：比较。令 $H$ 属于 $\mathcal{H}$ 的支撑集，因此其后度至多为 $\delta$。如果 $\mathsf{Alg}$ 总共使用至多 $K-1$ 种颜色，且没有发生 $E_m$，那么 $T_m$ 不成立，每个 $C_m$ 都成立，不会发生切换，并且 $\mathsf{Alg}'_\iota$ 的每种颜色都具有形式 $(0, q)$，其中 $q$ 是 $\mathsf{Alg}$ 的一种颜色，因此 $\mathsf{Alg}'_\iota$ 使用的颜色数至多与 $\mathsf{Alg}$ 一样多。因此

$$\{\mathsf{Alg}'_\iota \text{ uses at least } K \text{ colors}\} \subseteq \{\mathsf{Alg} \text{ uses at least } K \text{ colors}\} \cup \textstyle\bigcup_m E_m.$$

由 (b) 应用于每个 $\mathsf{Alg}'_\iota$，再结合 $H$ 与 $\iota$ 的独立性，左侧事件发生的概率至少为 $\rho$。由步骤 1 和 (c)，$\Pr(\bigcup_m E_m) \le \varepsilon$。 □

模拟算法只在切换时将 $\sigma(v_m)$ 的索引用作固定参数；它重建的图仅取决于先前的索引。实际算法确实会在使用较早的块后获知它们所属的类，但这无关紧要，因为 $C_m$ 由 $\sigma(v_m)$ 的索引决定，而这些索引与算法在为 $\sigma(v_m)$ 着色时所见的一切相互独立。

## C.2 将各部分组合起来

**定理 C.3** (迭代盲目膨胀)。设 $k \ge 2$、$K \ge 2$、$j \ge 1$ 满足 $|P_j(k)| \ge K$，且$\varepsilon \in (0,\ 1)$。令 $N_j = K$ 和 $D_j = K-1$，并对 $\ell = j$、.....、1 选取正整数 $b_\ell$，并令$N_{\ell-1} = N_\ell b_\ell$ 和 $D_{\ell-1} = b_\ell$。若

$$\sum_{\ell=1}^{j} N_\ell D_\ell \exp\Big(-\frac{b_\ell}{(K-1)D_\ell}\Big) \le \varepsilon, \tag{C.1}$$

则存在一个定义在恰有 $N_0$ 个顶点的有序 $k$-可着色图上的分布，使得每个确定性在线算法以至少 $1-\varepsilon$ 的概率使用至少 $K$ 种颜色。

证明。令$\mathcal{H}_j$ 为按到达顺序排列的团 $K_K$上的点质量，并令$\mathcal{H}_{\ell-1} := \mathrm{OB}^{b_\ell}(\mathcal{H}_\ell)$，其中$\delta \equiv D_\ell$。这是一个有效的界，因为H $K-1$ 中的后度至多为 $K_K$，并且在 $b_\ell$ 之后至多为

块大小为 $b_\ell$的膨胀。该团映射到 $\mathrm{Tmpl}(P_j(k))$ 根据 引理 5.1(i)，并以概率 $K$ 迫使使用 1种颜色。对每一层应用一次 引理 C.2 ，其中 (c) 的充分条件在其后给出。由 (C.1) 可知，损失总计至多为 $\varepsilon$，且$\mathcal{H}_0$ 是 $k$-可着色的图。 □

**推论 C.4** (高概率)。 设 $n \geq 3$, $\varepsilon \in (0,1)$，$L = \log^* n$, 以及 $\Lambda_n = \lceil \ln((L+1)n^2/\varepsilon) \rceil$. 对于 $k = 3$，令 $K := \lfloor n^{2/((L+2)(L+3))}/\Lambda_n \rfloor$；对于 $k \geq 4$，令 $K := \lfloor n^{2/(L(L+1))}/\Lambda_n \rfloor$。存在一个定义在 $n$ 个顶点的 $k$-可着色有序图上的分布，使得任意确定性在线算法以至少 $1-\varepsilon$ 的概率使用至少 $K$ 种颜色。特别地，$\chi_k^{\mathrm{rand}}(n) \geq (1-\varepsilon)K$。

证明。若 $k = 3$，取 $j = L+1$ 和 $e = (L+2)(L+3)/2$；若 $k \geq 4$，则取 $j = L-1$ 和 $e = L(L+1)/2$；两种情况下都有 $e = (j+1)(j+2)/2$ 且 $j \leq L+1$。令 $\Lambda = \Lambda_n$ 和 $K = \lfloor n^{1/e}/\Lambda \rfloor$；不妨设 $K \geq 2$，因为每个算法至少使用一种颜色。将推论 5.7 应用于 $n$，可得$|P_j(k)| \geq n \geq K$。取 $b_\ell := (K-1)D_\ell\Lambda$。于是 $b_\ell \leq MD_\ell$，其中 $M := K\Lambda$，因此 $D_\ell \leq M^{j-\ell+1}$并

$$N_0 = K\prod_{\ell=1}^{j} b_\ell \;\leq\; K \cdot M^{\sum_{\ell=1}^{j}(j-\ell+2)} \;\leq\; M^{(j+1)(j+2)/2} \;=\; (K\Lambda)^e \;\leq\; n.$$

每个 $N_\ell D_\ell$ 至多为 $N_0^2 \leq n^2$，因此（C.1）的每一项至多为 $n^2 e^{-\Lambda} \leq \varepsilon/(L+1) \leq \varepsilon/j$，于是（C.1）成立。 定理 C.3 以及通过添加孤立顶点进行填充，给出了该分布；姚氏原理（引理 4.4）则给出了最后一个结论。 □

相较于 定理 1.2 的损失只有一个因子 $\Lambda_n = O(\log(n/\varepsilon))$，而非每层一个，这是因为指数 $1/e$ 同时作用于 $K$ 和 $\Lambda$。对于这一构造，有些损失不可避免。考虑对 $K_4$ 进行一次非自适应膨胀，每个块的大小为 7，与 定理 6.4中采用的大小相同；并且每个块的索引均匀分布于其顶点的实际后续邻居中（$\delta = 3$、2、1、0）。自适应对手必然迫使算法使用4 种颜色，但面对隐藏索引时，最优确定性算法仅以恰好 3 种颜色的概率使用 $7343/23328 \approx 0.31$ （穷举动态规划）。

# D 关于该方法的更多结果

本附录汇集了一些补充主线论述的结果：为什么预留是必要的、关于最佳单层对手目前有哪些已知结果、另外两种层级的界限、关于无感知构造的更多内容，以及与 Li 的构造的比较。其中一些结果借助计算机辅助得出，我们会在陈述这些结果时注明。

## D.1 预留是必要的

Vishwanathan 的下界由若干层构成：在每一层中，模拟图 $H$ 的每个顶点 $v$ 都被替换为一个构件 $\Gamma(v)$，也就是一个含有边的图；并且，对于每个前驱邻居 $w$，$\Gamma(v)$ 的每个顶点都与一个固定选定集 $X(w) \subseteq V(\Gamma(w))$ 相连。只要 $w$ 有后继邻居，集合 $X(w)$ 就非空，并且对于 $w$的所有后继邻居，该集合都相同。我们称这样的层为无预留层。Li 的模拟引理则有所不同：它为模拟顶点的每个未来邻居预留一个构件的私有副本 [28, 引理 2.5], ，因此下面的命题不适用于他的层。我们的膨胀保留了 Li 的预留，并采用独立块。

**命题 D.1** （无预留层）。 如果上面一层的图包含一个由 $s+1$ 个顶点组成的团，那么经过无预留层生成的图包含一个由 $s+2$ 个顶点组成的团。因此，在任意非空图之上设置 $d$ 个无预留层会生成一个由 $d+1$ 个顶点组成的团，所以由 $k$ 个这样的层组成的链不可能是 $k$-可着色的，而由 $k-1$ 个层组成的链只有在顶部图没有边时才是 $k$-可着色的。

证明。设 $q_1 < \cdots < q_{s+1}$ 是上面一层中的一个团。对于 $r \le s$，顶点 $q_r$ 有后续邻点 $q_{s+1}$，因此 $X(q_r)$ 非空；选取 $y_r \in X(q_r)$，并在 $\Gamma(q_{s+1})$ 中选取一条边 $uu'$。对于 $r < r' \le s$，顶点 $y_{r'}$ 属于 $\Gamma(q_{r'})$，且 $q_r$ 是 $q_{r'}$ 的前驱邻居，因此 $y_{r'}$ 与 $X(q_r) \ni y_r$ 相连。同理，$u$ 和 $u'$ 与每个 $y_r$ 都相连。因此，$\{y_1, \ldots, y_s, u, u'\}$ 是一个由 $s+2$ 个顶点组成的团。从单个顶点（$s=0$）开始并重复应用此操作 $d$ 次，可得到一个由 $d+1$ 个顶点组成的团；从一条边开始则可得到一个由 $d+2$ 个顶点组成的团。

□

因此，无保留放大最多只能叠加 $k-1$ 层，这正是 Vishwanathan 界 $\Omega(\log^{k-1} n)$ 中指数 $k-1$ 的来源：当 $k-1$ 层的放大因子相乘后为 $K$ 时，规模按 $\exp(O((k-1)K^{1/(k-1)}))$ 增长，由此得到 $K \approx (\log n / O(k))^{k-1}$。构件包含一条边这一假设是必要的，因为在这些构造中，构件必须能自行强制使用颜色；而对于独立块，如我们的膨胀中那样，层可以无限叠加，私有服务器则能控制色数。

## D.2 具有最小块的单层

定理 8.5 每增加一层，就会损失一个对数因子。在单层且块更小时，确定性对手只损失 2 倍。

考虑 $m \ge 1$ 的预留膨胀 $K_m = (v_1, \ldots, v_m)$，其中 块 $v_t$ 有$b_t \ge \max(1, m-t)$ 个顶点，这是 $v_t$ 的后度所允许的最小规模。当 块 $v_t$ 开始时，对手从每个尚未服务过的较早块中选取一个顶点，让其服务 $v_t$；令 $\mathrm{Forb}_t$ 表示这些顶点所用颜色的集合。算法必须为 $\sigma(v_t)$ 中不属于 $\mathrm{Forb}_t$的所有顶点着色。块如此之小时，构造 6.1 的预留规则只能保证大约 $\sqrt{m}$ 种颜色，因为一个块无法为每个后续邻点各预留一种颜色。下面的对手能迫使使用一半的颜色。

**定理 D.2** (一层，最小块)。 存在这种形式的对手，能够迫使出现 $\lfloor m/2 \rfloor + 1$种颜色。

对手。 对于每个先前的块，对手都记录其打算在剩余阶段中分配出去的、每种颜色对应的未使用顶点数量，并将其表示为从块到颜色的整数流。令 $W_t := m - t + 1$ 表示这样一些阶段的数量：在这些阶段 $t, \ldots, m$ 中，每个先前的块仍须提供一台服务器；令 $a_s(c)$表示颜色 $c$ 在 $\sigma(v_s)$中的未使用顶点数量。对手维护一个整数矩阵 $Y_t$，其每一行对应一个 $s < t$，每一列对应一种颜色，并满足 $0 \le Y_t(s,c) \le \min(a_s(c)\ W_t)$，且所有行和列的和都至多为 $W_t$。如果某一行或列的和恰好等于 $W_t$，则称其为紧 行或列；$\mathrm{Sat}(Y_t)$是紧列的集合，即饱和 颜色。在阶段 $t$，对手执行以下操作。

(a) 它将 $Y_t$ 视为一个二分多重图，其中有 $|Y_t|$ 条边（即其元素之和），且最大度不超过 $W_t$。根据科尼希边着色定理，该图 [26] 可分解为 $W_t$ 个匹配，每个匹配都覆盖每个紧行和紧列。它进行一个大小至多为平均值的匹配 $M_t$，$|M_t| \le |Y_t|/W_t$。一个 $s$ 与颜色 $c$ 匹配的块会提供一个未使用的、颜色为 $c$ 的顶点；其他每个块都会提供一个未使用的、颜色为某个 $c$ 且满足 $a_s(c) > Y_t(s,\ c)$的颜色的顶点。

(b) 算法为 $\sigma(v_t)$ 着色后，会保留 $Y_t - M_t$ 的各行，并为 $t$ 添加一行，使其在满足 $Y_{t+1}(t,\ c) \le a_t(c)$ 的条件下尽可能大，同时所有行和列的和均不超过 $W := W_{t+1}$。

势函数 $\Phi_t := |Y_t|/W_t + |\mathrm{Sat}(Y_t)|$ 统计已记录的供给和饱和颜色；每个阶段都会使其增加一。

**Lemma D.3** （某一层的势函数增益）。 对于 $1 \le t \le m-1$，我们有 $\Phi_{t+1} \ge \Phi_t + \quad 1.$

证明。步骤 *(a)* 是可行的。 在阶段 $t$ 之前，块 $\sigma(v_s)$ 有 $b_s-(t-1-s)$ 个 $\geq W_t$ 未使用的顶点。未匹配行不是紧的，因此其总和小于 $W_t$，并且某种颜色具有 $a_s(c)$ 个 $> Y_t(s,\ c)$。

矩阵 $Y' := Y_t - M_t$ 满足这些约束，其中以 $W_t-1$ 代替 $W_t$。匹配选择会同时降低 $Y(s,\ c)$ 和 $a_s(c)$，而任何其他选择只会降低计数 $a_s(c)$，该计数超过了$Y(s,\ c)$。紧行和紧列恰好减少一个，其他所有和原本都不超过 $W_t-1$；等于 $W_t$ 的项是紧行中唯一的非零项，因此会被覆盖。此外 $|Y'| \geq |Y_t|(1-1/W_t)$，因此 $|Y'|/(W_t-1) \geq |Y_t|/W_t$。 $Y_t$ 的紧列仍然保持紧，所有和为 $W_t-1$ 且未被 $M_t$ 覆盖的列都会变紧；将后者的集合记为 $N_t$。

步骤 *(b)* 增加一个。旧行不变，因此紧列仍保持紧。若新行$t$ 的和为 $W=W_{t+1}$，则 $|Y|$ 增加 $W$，而 $|Y|/W$ 增加一个。否则，由于 $b_t \geq W$，某个颜色 $c$ 满足 $Y_{t+1}(t,\ c) < a_t(c)$，且根据极大性， $c$ 所在的列是紧列。颜色 $c$ 出现在 $\sigma(v_t)$ 中，因此 $c \notin \mathrm{Forb}_t$，而 $\mathrm{Forb}_t$ 包含 $Y_t$ 的每个紧列，因为 $M_t$ 覆盖了它们。或者$c \notin N_t$，紧列的数量增加 $|N_t|+1$；或者 $c \in N_t$，其数量增加 $|N_t| \geq 1$。 □

定理 D.2 的证明。对于 $m=1$，无须证明。令 $m \geq 2, C=\lfloor m/2 \rfloor$，并假设算法至多使用 $C$ 种颜色。列和至多为 $W_t$，因此 $|Y_t|/W_t \leq C$；若某种颜色不紧，则 $|Y_t| < CW_t$；于是 $\Phi_t < 2C-1$，除非所有 $C$ 种颜色都紧。由于 $\Phi_1=0$，引理 D.3 给出 $\Phi_{2C} \geq 2C-1$，因此在阶段 $2C \leq m$，所有 $C$ 种颜色都紧。匹配 $M_{2C}$ 覆盖了它们，$\mathrm{Forb}_{2C}$ 包含所有 $C$ 种颜色，而 $\sigma$（$v_{2C}$）的第一个顶点需要一种新的颜色。 □

## D.3 单层，恰好

对于附录 D.2 中最小的单层博弈（块的大小为$\max(1, m-t)$，在 $K_m$上每条弧对应一个服务器），令 $V(m)$ 为对手能够迫使使用的最大颜色数。定理 D.2 给出$V(m) \geq \lfloor m/2 \rfloor + 1$，First-Fit 给出 $V(m) \leq m$，而使用命题 B.1 中的块的预留对手，只有在 $\lfloor (1+\sqrt{4m-7})/2 \rfloor + 1$种颜色（对于 $m \geq 2$）时才能适配这些块，因此才能保证奏效。穷举博弈搜索得出以下数值。

| $m$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V(m)$ | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 |
| $\lfloor m/2 \rfloor + 1$ (定理 D.2) | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 |
| First-Fit | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |

对于每个 $m$，上界都有证书：若某个算法策略能够以 $V(m)$ 种颜色存活，则可由无限制游戏的独立检查器重放。下界也以同样方式为 $m \leq 9$ 提供证书；对于 $m=10$，下界是通过两次独立的穷举搜索得到的，而 $m=11$ 则由单调性推出；整张表也经过 Lean 验证。这些数值排除了在 $m=11$ 时自然的猜测 $V(m) = \lfloor (2m+2)/3 \rfloor$。

比值 $V(m)/m$ 在此范围内保持接近 $2/3$，高于定理 D.2 的因子 1 2 。- 定理 D.2。是否存在某个对手，能在每一层都用小块迫使使用 $cm$ 种颜色，仍是一个开放问题（第 10 节）。

## D.4 两种其他层级的限制

**单层构造的顶层块。** 考虑呈现团 $K_K$的一次膨胀的对手，其中对手可以为每条弧使用任意数量的服务器，并在线选择块大小。令 预算 $b_s$ 为 $\sigma(v_s)$ 在所有对局中大小的上确界，该上确界可能为无穷大。 $v_1$ 在定理 6.4 中的块有$(K-1)(K-2)+1$ 个顶点，并且除以2的因子外这是最优的。

**定理 D.4** (顶层块)。 每个迫使 $K$ 种颜色的此类对手都有 $b_1 \geq \binom{K-1}{2} + 1$，更一般地，对于 $1 \leq s \leq K$，都有 $b_s \geq \binom{K-s}{2} + 1$ 。

对所有此类对手进行穷举搜索，可确认对于 $s = 1$ 和 $K \leq 7$，以及对于所有 $s$ 和 $K \leq 6$，该界成立。

证明。 我们证明 $b_1 \geq \binom{K-1}{2} + 1$。对于 $2 \leq s \leq K-2$，算法为前 $s-1$ 个块分别赋予不同的颜色；这是一个合法染色，因为每条边都连接两个不同的块。从块 $s$ 开始，算法则使用与这些颜色不同的颜色运行下述算法；同样的论证也适用于用$K - s + 1$ 替代 $K$的情形。对于 $s \geq K-1$ ，断言为 $b_s \geq 1$: First-Fit 会为每个块都赋予单一颜色，因为一个块中的顶点具有相同的较早邻居，所以若对手要迫使算法使用 $K$ 种颜色，就必须使所有 $K$ 个块都非空。算法知道对手的策略，而该策略是确定性的，因此可以模拟对手，并知道每个顶点属于哪个块，以及 $\sigma(v_1)$ 中的哪些顶点已发挥作用。它按阶梯方式为 $\sigma(v_1)$ 着色：每个新顶点都获得一个最小颜色$i \in \{1, \ldots, K-2\}$ ，且该颜色目前对应的顶点数少于 $K-1-i$。这对 $\binom{K-1}{2}$ 个顶点成立；假设 $b_1 \leq \binom{K-1}{2}$，因此它为 $\sigma(v_1)$ 中的所有顶点着色。那么对于每个 $r \geq 1$ ，对应顶点数至少为 $r$ 的颜色至多有 $\max(0, K-1-r)$ 种。令 $Q$ 为用于 $\sigma(v_1)$ 的颜色集合。每个后续块 $\sigma(v_t)$ 都有相同的禁用颜色集合 $F_t$ ，即其前驱邻居所用的颜色；算法为整个块赋予一种颜色：若存在尚未被任何后续块使用且允许使用的颜色，则选择其中在 $\sigma(v_1)$ 中尚未发挥作用的顶点数最多的颜色；否则，若存在已使用的允许颜色，则选择其中最小的颜色；否则就使用一种新颜色。

如果没有后续块使用某种颜色，就称 $Q$ 它是新颜色。新颜色只会出现在 $\sigma(v_1)$中。令 $g$ 表示到目前为止已使用的颜色数减去$K$ ， $\rho$ 表示新颜色的数量， $m_q$ 表示在 $\sigma(v_1)$ 中颜色为 $q$ 且尚未服务的顶点数，并令 $h(r)$ 表示满足 $m_q \geq r$ 的 $q$ 中新颜色的数量。我们证明不变量

$$h(r) \;\leq\; \max(0,\, g + \rho - 1 - r) \qquad \text{for all } r \geq 1$$

始终成立。初始时 $g + \rho = K$，且该不变量就是阶梯性质。一轮 $t \geq 2$只会降低颜色 $m_q$ 对应的数值，这些颜色会显示在 $\sigma(v_t)$中，而 $F_t$ 中每种新颜色都会由 $\sigma(v_1)$ 中的一个顶点显示，因此其 $m_q$ 至少会减少一。由于 $h(r) \geq 1$ 蕴含 $g + \rho - 1 - r \geq 1$，我们可以忽略最大值。空块对应的一轮不会给任何顶点着色，只会降低某些$m_q$。对于非空块，令 $U_t$ 为已在使用且不属于 $F_t$ 的颜色集合。

(a) 集合 $U_t$ 为空。所有新颜色都被禁止，因此每个 $m_q$ 都会减少，而块会采用一种新颜色，所以 $g$ 减少 1。因此 $h'(r) \leq h(r+1) \leq g + \rho - 2 - r = g' + \rho - 1 - r$。(b) 块会采用一种新颜色 $x \in U_t$，所以 $\rho$ 减少 1； $U_t$ 的颜色保持 $m_q$ ，其他颜色则减少。如果 $m_x \geq r$，那么 $x$ 使 $h(r)$ 的计数减少，且没有任何项进入其中，因此 $h'(r) \leq h(r) - 1 \leq g + \rho' - 1 - r$。如果 $m_x < r$，那么根据 $x$ 的选择，$U_t$ 的每种新颜色都具有 $m_q < r$ ，所以 $h'(r) \leq h(r+1) \leq g + \rho' - 1 - r$。(c) 集合 $U_t$ 非空，但不包含新颜色。所有新颜色都被禁止，因此 $h'(r) \leq h(r+1)$，而 $g$ 和 $\rho$ 不变。

假设对手迫使使用 $K$ 种颜色。第 $K$种颜色出现在类型 (a) 的某一轮 $t^*$ ，且$g = 1$。在不超过 $K-1$ 轮（截至并包括$t^*$）中，有 $K - |Q|$ 轮属于类型 (a)，因此在 $t^*$之前，类型 (b) 的轮次少于 $|Q|$ 轮，且 $\rho \geq 1$。结合 $g = 1$ 和 $r = 1$的不变量可得 $h(1) \leq \rho - 1$，因此某个新颜色 $q$ 满足 $m_q = 0$。然而，必须由一个尚未发挥作用的$\sigma(v_1)$ 中的顶点来证明 $q \in F_{t^*}$ ，这就产生了矛盾。□

**一个部分连接层**。在一个部分连接层中， $v_t$ 块中的顶点可能具有不同的先前邻域，而这些邻域都包含在较早块的预留集（单色子集）中，并且每个预留集中至少有一个邻点；

一旦每一局都到达最后一个块，强制就会自动发生，而问题在于，这样的 3-可着色层能够小到什么程度。人们可能希望，单个部分连接层能给出一个指数很大的多项式界。但它不可能给出高于 $1/3$ 的指数。

**定理 D.5** (部分连接)。 如果一个部分连接层上的对局会迫使 3 种颜色，那么在与任意算法进行的每场对局中，该层都是可 *3* 着色的，且最多有 $N$ 个顶点；则 $N \geq m^3/(3(2\log_2 N+1)) - m^2$，因此 $N \geq m^{3-o(1)}$。特别地，由一个含有任意大 $m$ 的部分连接层得到的下界 $\chi_3^{\det}(n) \geq n^c$，具有 $c \leq 1/3$。

该定理利用了这样一个事实：后续顶点在较早块的预留集之外没有邻点；这一限制若不成立，定理是否仍成立尚无定论。

证明。 令 $B_1, \ldots, B_m$ 为这些块，$R_i \subseteq B_i$ 为对手在 $B_i$ 之后选取的预留集；其颜色为 col($i$)。$B_i$ 中的每个顶点在每个更早的预留集中都有一个邻点，因此算法只能使用 $[m-1]$ 中的颜色，而块 $i$ 的颜色集为 $[m-1] \setminus \{\text{col}(1), \ldots, \text{col}(i-1)\}$，包含 $m-i$ 种颜色。算法 RR 以轮转方式为每个块 $i \leq m-1$ 着色，使块 $i$ 中的顶点按循环顺序使用其颜色集中的颜色。由于 $R_i$ 是单色的，轮转迫使 $|B_i| \geq (m-i)(|R_i|-1)+1$。

对于 $i \leq m-1$，让 RR$_i$ 对局进行到块 $i$ 结束，然后切换到枢纽策略。后续顶点 $u$ 在 $R_i$ 中有一个邻点；令 $g(u)$（$u$ 的枢纽）为其中最早出现的顶点，并将 $u$ 染成由 $g(u)$ 和 Lovász、Saks 和 Trotter 的算法 [24, （定理 4.2 及其证明 ] ）在其组 $\{u' : g(u') = g(u)\}$ 内赋予的颜色 $u$ 组成的有序对。每个组在任何 3-着色中都不会使用其枢纽的颜色，因此它是二分图，至多使用 $\tau := 2\lfloor \log_2 N \rfloor + 1$ 种颜色；而有序对至多有 $|R_i|\tau$ 个。若 $|R_i|\tau \leq m-1-i$，则 RR$_i$ 将这些有序对单射地映射到 $[m-1] \setminus \{\text{col}(1), \ldots, \text{col}(i)\}$ 的 $m-1-i$ 种颜色中，因此它绝不会使用 $[m-1]$ 之外的颜色，对手也无法迫使它使用 $m$ 种颜色。这些颜色也可能出现在预留集之外、块 1，...，$i$ 中的顶点上；这无关紧要，因为这些顶点没有后续邻居。因此，若对手能迫使使用 $m$ 种颜色，则 $|R_i|\tau \geq m-i$，从而 $|R_i|(2\log_2 N+1) \geq m-i$。对手是确定性的，而且 RR$_i$ 与 RR 在块 $i$ 结束前的行为一致，因此 RR 对局的预留集 $R_i$ 对所有 $i$ 必须同时满足此界。对 $i$ 求和 $|B_i| \geq (m-i)((m-i)/(2\log_2 N+1) - 1) + 1$，即可得到该界。 □

## D.5 非自适应构造

**对数因子是必要的**。在对 $K_K$ 进行一次非自适应膨胀时，$\sigma(v_t)$ 的索引在 $v_t$ 的 $K-t$ 后继邻居中均匀分布。由于每个块中的顶点具有相同的较早邻居，First-Fit 会为每个块中的所有顶点着单一颜色。只有当每个索引类都非空时，它才会恰好使用全部 $K$ 种颜色，因此

$$\Pr[\text{First-Fit uses at most } K-1 \text{ colors}] = 1 - \prod_{d=1}^{K-1} \text{surj}(R,d), \quad \text{where}$$

$$\text{surj}(R,d) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \binom{d}{i} \left(1 - \frac{i}{d}\right)^R,$$

$R$ 个均匀球命中全部 $d$ 个箱子的概率。对固定的 $\varepsilon$ 和 $K \to \infty$，因此，若要以概率 $1-\varepsilon$ 实现强制，则顶层需要 $R \geq (1-o(1))(K-1)\ln((K-1)/\varepsilon)$。这比顶层块为每个后续邻居提供一个服务器所需的 $K-1$ 个顶点多出 $\ln((K-1)/\varepsilon)$ 倍；对于较大的 $K$，它仍少于自适应顶层块所需的 $(K-1)(K-2)$ 个 $+1$ 顶点；但与预留不同，隐藏索引类的代价是每台服务器都要增加一个对数因子。

最佳确定性　确定性算法以以下概率逃脱这种非自适应膨胀 :

| $K=4$, 块大小 $R$ | 1–3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 最佳逃脱概率 | 1 | 263/324 | 1211/1944 | 1735/3888 | 7343/23328 | 90857/419904 |
| First-Fit | 1, 1, 5/6 | 11/18 | 91/216 | 61/216 | 485/2592 | 2881/23328 |

这些数值是精确的：对所有确定性算法进行有理数运算的动态规划，并实现两次；以及针对较小 $R$ 的原始博弈树搜索。

**显式实例**。对 $K_7$ 进行一次非自适应膨胀，每个块包含150 个顶点，索引在每个顶点的实际后继邻居中均匀选取，由此得到一个3-可着色图上的分布，该图有1050个顶点，任何确定性算法都以至少 7 的概率使用0。915。对 $K_8$进行两次以相同方式索引的非自适应膨胀，块大小依次为245 和 27293 ，得到53494 280 个顶点；算法以至少8 的概率使用0。906。由于任何算法至少使用一种颜色，因此任何随机化算法的期望用色数至少为 $8-7\cdot\,0.094>7.25$ ，高于显然的上限7。这两个概率均根据引理 C.2中的条件 (c) 计算。

随机化算法的迁移。定理 1.4 的证明对非自适应对手同样成立，只需用引理 C.2 替代引理 6.2。若一个分布定义在 $k'$-可着色图上，这些图有$N$ 个顶点且后度至多为 $D$ ，并以概率 $\rho>0$ 迫使算法使用 $K\geq 2$ 种颜色（因此 $N$、 $D\geq 1$），$0<\varepsilon<1$，且定理 1.4 证明中的 $j$ 至少为 1（否则无须处理），那么 $j$次非自适应膨胀，块大小为 $R_1=\lceil (K-1)D\ln(jND/\varepsilon)\rceil$ 和 $R_{i+1}=\lceil (K-1)R_i\ln(jNR_1\cdots R_i\cdot R_i/\varepsilon)\rceil$，会得到一个定义在 $k$-可着色图上的分布，并以概率 $\rho-\varepsilon$迫使算法使用 $K$ 种颜色。若下界$n^c$ 或 $2^{(\log n)^c}$ 能以恒定概率对每个确定性算法成立，则从任意 $k'\geq 3$ 迁移到 $k=3$也成立，但 $c$会更小。这并不涵盖 $\chi_{k'}^{\mathrm{rand}}$：期望代价为 $x$ 意味着以至少 $x/(2N)$ 的概率使用$x/2$ 种颜色，但通常无法保证该概率为恒定值。

## D.6 与 Li 的构造比较

图 4 比较了定理 6.4 的对手在 3-可着色图上迫使使用 $K$种颜色所需的顶点数，与 Li 的构造 [28] 对应的顶点数。Li 以渐近形式给出其界，且未给出递归中的常数，因此他的曲线是根据我们从其引理 [28, §§2.1–2.3]推导出的一种参数选择进行计算的结果。对于 $K\geq 3$，取$\beta:=\lceil \log_2 K\rceil\geq 2$，其中 $h$ 是满足 $\beta^h\geq K$的最小整数，并取阈值 $t_i:=\beta^i$ （适用于 $i<h$ ）和 $t_h:=K$，从 $(N,D)=(1,1)$ 开始，并对 $i=h-1,\dots,0$ 依次应用满足 $t=t_i$和 $q=t_{i+1}$的步骤

$$j:=\Big\lceil \frac{2q-t}{\lceil t/2\rceil}\Big\rceil,\quad B:=K(2^{j+1}-1),\quad R:=KqD,\quad N\leftarrow NRB,\quad D\leftarrow RB+B-1,$$

其中， $B$ 限定了一个小工具副本的大小， $R$ 限定了每个模拟顶点对应的副本数。图中绘出了最终的 $N$；其他常数会改变曲线，但不影响其增长率 $2^{\Theta((\log K)^3/(\text{对数 对数 }K)^2)}$。

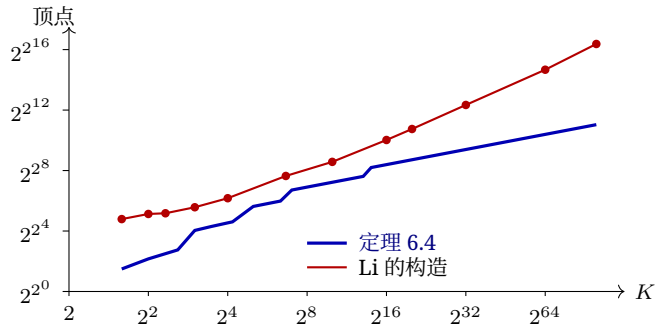



图 4：迫使使用 $K$ 种颜色的3-可着色图所需的顶点数，采用双对数坐标轴：定理 6.4 中层数最少但足够的对手，以及上文 Li 的构造所用的递归。