arXiv:2611.29686v1 [math.MG] 22 Nov 2026

良态范数下的不同距离*

Lillian MacArthur† Adam Sheffer‡

摘要

我们从两个方面加深了对非欧几里得范数下 Erd˝os 不同距离问题的理解:

(i) 对于可在 o-极小结构中定义，且其非直线平分线具有有限交集的范数，我们得到了不同距离最小数量的下界 $\Omega(n^{5/6})$。特别地，这改进了所有非整数 $p > 1$ 的 ℓ_p 范数目前最佳的 $\Omega(n^{4/5})$ 下界。

(ii) 在所有半代数光滑范数下，我们推导出更强的界 $\Omega(n^{6/7-\varepsilon})$。

我们的证明技巧基于推导各种范数下平分线的性质。

1 引言

离散几何中的几个核心问题具有一种容易令人误解的特质：问题很容易向高中生描述，初看之下像个谜题。然而，研究这些问题需要建立深刻的理论，并理解其底层几何的性质。一个经典例子是埃尔德 ˝不同距离问题。这个问题的一个方面是：欧几里得距离与大多数其他距离范数有何不同。

1946年，埃尔德˝厄什 [10] 提出：在 $\mathbb{R}^2$中任意一个由 n 个点组成的集合所确定的不同距离，其最小数量是多少。将这个量记为 $d(n)$，他给出了下界 $d(n) = \Omega(n^{1/2})$和上界 $d(n) = O(n/\sqrt{\log n})$。埃尔德˝厄什猜想， $d(n) = \Theta(n/\sqrt{\log n})$。经过约65年以及大量针对这一问题的研究，Guth和Katz [12] 证明了 $d(n) = \Omega(n/\log n)$。尽管仍有 $\sqrt{\log n}$的差距，这个问题如今基本被认为已经解决。

在全文中，我们都在 $\mathbb{R}^2$ 中进行讨论，但不特别说明这一点。具体而言，在讨论范数时，这些范数定义于 $\mathbb{R}^2$ 中。关于范数及其所关联距离的技术性讨论，请参见第 2 节。Alon、Buci´c 和 Sauermann [1] 在 Matou˘sek[15] 先前工作的基础上证明了以下结果。

*本研究是2026年纽约离散数学本科生研究经历项目的一部分，获得了美国国家科学基金会资助项目 DMS-2349366 和 Jane Street 的支持。

†哈佛大学，*lcmacarthur@college.harvard.edu*

‡纽约市立大学，*adamsh@gmail.com*。获 PSC-CUNY 资助项目 GR-00017710 支持。

定理 1.1。 对于大多数范数， n 个点所确定的最少距离数为 $n - o(n)$ 。

在定理 1.1 中，记号 $o(n)$表示渐近地小于 n。“大多数范数”可以从拓扑角度来理解：考虑所有范数组成的空间时，不满足上述性质的范数所构成的子空间维数较低。更严格的细节请参见 [1]。

欧几里得范数并非定理 1.1 意义下的典型范数，因为 Erd˝os 的构造有 $\Theta(\sqrt{n}/\log n)$ 个距离。这引出了若干棘手的问题：欧几里得范数为何不同于大多数其他范数？其他常见范数，例如ℓ_p 范数，是否也以同样的方式特殊？

令人遗憾的是，关于上述问题，我们几乎一无所知。目前没有任何一个具体范数被证明在定理 1.1 的意义下是典型的。此外，也没有任何非欧几里得范数被证明是非典型的。[1]

Garibaldi 在 John Garnett 和 Terence Tao 的指导下，于其学位论文 [11], 中研究了不同范数下的不同距离问题。她定义了一类称为土豆度量的良态范数，其中包括所有 ℓ_p 距离。土豆度量是一种严格凸范数，并满足以下条件：(i) 单位圆只有有限条对称轴；(ii) 任意两条非直线平分线至多相交于有界个点。[2]欧几里得范数是唯一不满足条件 (i) 的范数，因此我们可以将该条件替换为范数是非欧几里得范数这一表述。对于土豆度量，Garibaldi 证明，任意 n 个点确定 $\Omega(n^{4/5})$ 个不同距离。对于 ℓ_p 距离且整数 p的情形，这个下界在 [2] 被改进为 $\Omega(n^{6/7-\varepsilon})$，对任意 $\varepsilon > 0$均成立。

本文为非欧几里得范数推导了两个新的不同距离界。第一个适用于在 o-极小结构中可定义的范数。直观而言，o-极小性 是对半代数集的重要推广，同时仍具有驯性几何行为。例如，在 o-极小结构中的曲线相交后形成有限个点与弧的并集。在 o-极小结构中定义的范数可能涉及指数函数、对数函数、三角函数（在某些限制条件下）、反三角函数、积分（例如 $y = \int_0^x \frac{e^t}{t} dt$）等等。

无法在 o-极小结构中定义的曲线示例：无界正弦波，以及由无穷多个弧构成的某些并集。关于 o-极小结构的更多详情，请参见第 2 节。

对于范数 $\|\cdot\|$，令 $d_{\|\cdot\|}(n)$ 表示 n 个点在 $\|\cdot\|$下能够确定的最少距离数。若一个范数的距离方程可在 o-极小结构中定义，我们就称该范数为 o-极小的 。

定理 1.2。 设 $\|\cdot\|$ 是一个严格凸的 o-极小范数，且任意两条非直线平分线的交集都有限。那么， $d_{\|\cdot\|}(n) = \Omega(n^{5/6})$。

我们可以将定理 1.2 中的范数视为性质良好的马铃薯范数。也就是说，这类马铃薯范数的单位圆和平分线具有良好性质，例如交点数有界。我们可以将它们称为甘薯度量。

[1]这一陈述排除了两种无趣的情形：椭圆范数和非严格凸范数。有关这两种情形的更多详情，请参见第 2 节。[2]关于单位圆、平分线等对象的定义，请参见第 2 节。Garibaldi 首先以稍有不同的方式定义了土豆度量，随后将定义扩展为此处所述的形式。

由于 ℓ_p 范数满足定理 1.2 的假设，我们得到了一个适用于具有非整数 p 的ℓ_p 范数的新界。此前由 Garibaldi 给出的最佳界为 $\Omega(n^{4/5})$。

推论 1.3. 对于所有 $p > 1$，我们有 $d_{\ell_p}(n) = \Omega(n^{5/6})$。

以下结果是定理 1.2 的另一个有用应用。若一条曲线可以表示为 $y = f(x)$，其中 f 是解析的，我们就称该曲线为解析曲线。

推论 1.4. 设 $\|\cdot\|$ 是一个具有解析平分线的严格凸 o-极小范数。那么 $d_{\|\cdot\|}(n) = \Omega(n^{5/6})$。

如果一个范数的单位圆是半代数集，我们就称该范数为半代数范数。（半代数集的定义见第 2 节。）我们的第二个不同距离界针对半代数范数。

定理 1.5. 设 $\|\cdot\|$ 是一个严格凸半代数范数，其平分线彼此相交的次数有限。那么所有 $\varepsilon > 0$ 都满足 $d_{\|\cdot\|}(n) = \Omega(n^{6/7-\epsilon})$。

与 o-极小情形一样，对于任何具有解析平分线的严格凸半代数范数，我们都可以应用定理 1.5。此结论的证明与推论 1.4 的证明相同，因此这里不再赘述。

我们的证明技巧基于研究各种范数下平分线的性质。例如，我们证明以下结果。

定理 1.6. 设 $\|\cdot\|$ 是一个严格凸的 o-极小范数。若两对点$(p_1, q_1) \neq (p_2, q_2)$ 满足 $\mathcal{B}(p_1, q_1) = \mathcal{B}(p_2, q_2)$，则此平分线是一条直线。

尽管有上述结果，我们对其他范数下不同距离问题的行为仍远未理解。以下列举几个尚未解决的核心问题：

- 找出一个严格凸范数 $\|\cdot\|$，使得 $d_{\|\cdot\|}(n) = \Theta(n)$。（后续问题：找出一个严格凸范数 $\|\cdot\|$，使得 $d_{\|\cdot\|}(n) = n - o(n)$。）
- 是否存在一种非椭球严格凸范数 $\|\cdot\|$，使得 $d_{\|\cdot\|}(n) = o(n)$ 。
- 求任意有限 $p > 1$ （或其他任何甘薯范数）下 $d_{\ell_p}(n)$ 的值。
- 对于良态范数而言，在一个 o-极小结构中可定义是否是自然的概念？如果不是，我们应该采用限制更多的定义，还是限制更少的定义？

在第 2 节中，我们将更详细地介绍技术预备知识。例如，我们会更详细地讨论距离度量和 o-极小结构。在第 3 节中，我们研究平分线更高级的性质。在第 4 节中，我们证明关于 o-极小距离的结果：定理 1.2 及其推论推论 1.3 和推论 1.4。在第 5 节中，我们证明半代数结果定理 1.5。

致谢。我们感谢 Aaron Anderson、Nathaniel Nadler、Abhiram Natarajan 和 Konrad Swanepoel 的宝贵讨论。

AI 使用声明。作者使用 ChatGPT（OpenAI）协助检索文献、绘制部分图表，并核实部分技术陈述的准确性。然而，AI 并未用于构思证明的任何部分。

2 技术预备知识

本节将介绍我们证明中使用的技术定义和工具。读者可以先略读本节，并在需要时再回来查阅。

范数、度量与单位圆。 回想一下，我们只考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的点集和范数。范数 $\|\cdot\|$ 会诱导出度量或距离：我们将点 $a, b \in \mathbb{R}^2$ 之间的距离记为 $\|p - q\|$。

在距离问题中，通常只考虑由范数诱导的度量。虽然存在并非由范数诱导的度量，但在我们的语境下，这些度量往往没有实际意义。例如，在这类度量下，平移可能会改变距离。我们遵循标准做法，只考虑由范数诱导的度量。此外，除非讨论“土豆度量”，否则我们尽量避免使用“度量”一词。

可以说，最广为人知的一类范数是 ℓ_p 范数。对于$p \in [1, \infty)$，向量 (a_x, a_y) 的 ℓ_p 范数为 $(|a_x|^p + |a_y|^p)^{1/p}$。这会诱导出距离

$$\|a - b\| = (|a_x - b_x|^p + |a_y - b_y|^p)^{1/p}.$$

当 $p = 2$ 时，这就是欧几里得距离。

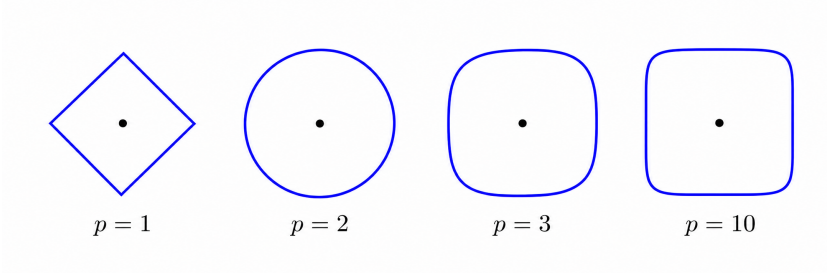

图 1：若干 ℓ_p 范数下的单位圆。

范数 $\|\cdot\|$ 的单位圆是 $\{v \in \mathbb{R}^2 : \|v\| = 1\}$。见图 1。由于 $\|\cdot\|$的对称性，单位圆关于原点具有 180 度旋转对称性。由于范数满足三角不等式，单位圆是凸的。当范数 $\|\cdot\|$ 的单位圆严格凸时，我们称该范数为严格凸 。换言之，单位圆的边界不含任何线段。这等价于对每一组线性无关的 a, b，$\|a + b\| < \|a\| + \|b\|$ 成立。尽管 ℓ_1 范数不是严格凸的，但对每个 $p \in (1, \infty)$，ℓ_p 范数都是严格凸的。见图 1。

特殊情形：椭球范数和非严格凸范数。 现在我们讨论两类范数；对于它们，我们已知一些相当精确的不同距离信息。椭球范数 是指单位圆为椭圆的范数。

命题 2.1. 设 $\|\cdot\|$ 为椭圆范数。那么，关于$\|\cdot\|$ 的不同距离问题等价于欧氏不同距离问题。

证明概要。 设 T 是一个可逆线性变换，它将由 $y^2 + x^2 = 1$ 定义的圆映射到 $\|\cdot\|$ 的单位圆。由于这个单位圆是一个椭圆，因此这样的变换存在。

注意，点 p、$q \in \mathbb{R}^2$ 之间的欧几里得距离等于 $\|T(p) - T(q)\|$。因此，T 是一个双射，它在点集之间保持距离集不变（分别根据欧几里得距离和 $\|\cdot\|$）。 □

在非严格凸范数下，单位圆包含一条线段。对于这样的范数，不难证明不同距离的最小数量为 $\Theta(\sqrt{n})$。例如，参见 [11, 第 2 节。2]。

半代数集。 如果集合 $S \subset \mathbb{R}^d$ 可以表示为有限个多项式方程和不等式的布尔组合，那么它就是半代数的。例如，半圆

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1 \text{ and } x \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

是半代数的。事实上，其定义由一个多项式方程和一个多项式不等式拼接而成。关于半代数集的深入讨论，参见例如 [3, 4, 17]。

***O*-极小结构**。 为简便起见，我们只讨论$\mathbb{R}$上的 o-极小结构。更多信息参见例如 [7, 9]。

一般而言， o-极小结构 S 是由 $\mathbb{R}^d$ 的子集组成的一个集合族，且满足某些性质。这里， d 并非固定不变，也就是说， S 中的元素可以是不同维数空间的子集。不同空间中的相同集合被视为 S中的不同元素。例如， $\emptyset \subset \mathbb{R}^2$ 和 $\emptyset \subset \mathbb{R}^3$ 是 S中的不同元素。

S 的元素称为可定义集。要使 S 成为一个 o-极小结构，必须满足以下条件：

- 对于每个 d， $\mathbb{R}^d$ 的所有半代数集都是可定义集，包括 $\mathbb{R}^d$ 和 $\emptyset$。
- S 在有限交、并集、补集、笛卡尔积和逐坐标投影运算下封闭。交集、并集和逆映射都保持所在空间 $\mathbb{R}^d$的维数，但笛卡尔积和投影则不然。例如，从 $\mathbb{R}^d$ 中移除一个坐标的投影会得到 $\mathbb{R}^{d-1}$的一个元素。

- 中包含于 $\mathbb{R}^1$ 的可定义集，恰好是由有限个点和开区间（包括无界区间）构成的并集。

o-极小结构 $\mathbb{R}_{exp} = (\mathbb{R}; +, \cdot, 1, 0, exp)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中所有可通过一阶公式[3] 描述的子集的集合。公式中包含实变量、实常数、加法、乘法、不等式、等式、指数函数 e^x、逻辑运算且、或和非，以及量词存在 和“对所有”。以下是 $\mathbb{R}_{exp}$中可定义集的几个例子：

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = x^2 \cdot e^{3x^2} \right\},$$

$$\left\{x \in R \ : \ \exists y \ (y^2 = x \text{ and } e^y < 30) \right\}.$$

一个显著更一般的 o-极小结构是 $\mathbb{R}_{\mathrm{Pf}}$，即由所有***Pfaff***函数生成的实域扩张。这个结构的定义复杂得多，因此这里不作介绍（例如参见 [18]）。这个 o-极小结构包含由指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数以及带有积分的函数（如 $y = \int_0^x \frac{e^t}{t} dt$）等组合定义的集合。（它只支持值域有界的正弦和余弦函数。）

—

[3]我们回顾一下，一阶 意味着我们只能对实变量进行量化。例如，我们不能对这些变量上的函数进行量化。

从以上例子来看，人们可能会想， o-极小结构是否涵盖了所有可以想象的集合。事实并非如此。例如，无限正弦波无法在任何 o-极小结构中定义。由无限多个弧的并集构成的各种曲线也无法定义。

直观地说， o-极小结构是一些在多个方面都表现良好的集合族。例如，每个集合都必须只有有限多个连通分支。每个可定义集都允许有限胞腔分解：它可以划分为有限多个简单的可定义部分，且每个部分都与一个开盒同胚。

一个中的可定义集族是一个有 $d+2$ 个变量的可定义集。固定最后 d 个变量的取值后，我们就得到 $\mathbb{R}^2$ 中一个可定义集的定义。例如， $\mathbb{R}^2$ 中的圆族可以用以下方式定义：

$$f(x, y, a, b, r) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2$$

事实上，固定 a、b、r 的取值，就得到一个特定的圆。一个族的维数是参数 d 的个数，这些参数定义了 $\mathbb{R}^2$ 中的一个集合。例如， $\mathbb{R}^2$ 中的圆族是三维的。当定义公式是半代数的时，我们也可以使用术语半代数族。

研究 $\mathbb{R}^2$ 中由多项式定义的集合时，我们有一些取决于这些多项式次数的界。例如，对于代数曲线的连通分支数，以及没有公共分支的两条代数曲线的交点数，都存在这样的界。

对于在一个 o-极小结构中可定义的集合，也会出现类似的情况。在这种情形下，界取决于定义公式，而不取决于参数的取值。也就是说，对于来自同一个可定义族的所有曲线，这些界都是一致的。这可以看作是代数情形下有界描述复杂度的类似概念。更多信息请参见例如 [7, 定理 3.12]。

引理 2.2. 设 F 是在一个 o-极小结构中可定义的 $\mathbb{R}^2$ 的一个族。那么存在一个仅依赖于 F 的常数 N，使得 F中的每个集合至多有 N 个连通分支。

几何关联。 令 $\mathcal{M}$为一个 o-最小结构。令 $\mathcal{P}$ 为点集，令 Γ 为可定义集的集合，二者均位于 $\mathbb{R}^2$中。一个关联是一个对（p， γ） $\in \mathcal{P} \times \Gamma$，满足 $p \in \gamma$。令 I（$\mathcal{P}$， Γ）表示 $\mathcal{P} \times \Gamma$中的关联数。关联研究是一个活跃的研究前沿，并具有诸多应用。有关该主题的更多信息，请参见例如 [17]。

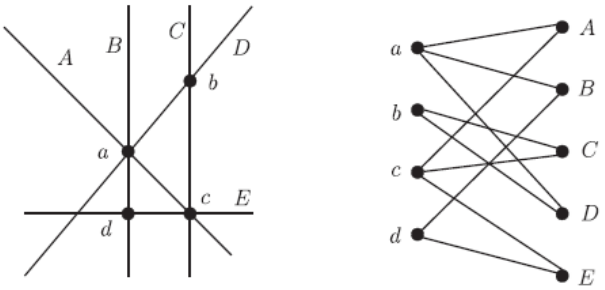

图 2：一个点线构型（左）及其关联图（右）。

$\mathcal{P} \times \Gamma$ 的关联图是一个二部图，其中一侧为 $\mathcal{P}$ 中的每个点各对应一个顶点，另一侧为 Γ中的每个集合各对应一个顶点。如果 $p \in \gamma$，则点 p 对应的顶点与集合 γ 对应的顶点之间有一条边。例如，请参见图 2。回忆一下，$K_{s,\,t}$ 是一个完全二部图，一侧有 s 个顶点，另一侧有 t个顶点。在图 2 中，该图不包含$K_{2,\,2}$。事实上，任意一对点至多确定一条直线。

以下是 Chernikov、Galvin 和 Starchenko [5,定理 5.14]的一个特例。

引理 2.3. 设 $\mathcal{P}$ 是 m 中一个由点组成的集合。对于一个 o-极小结构 $\mathcal{M}$，设 F是 $\mathbb{R}^2$中的一个 d维可定义集族。设 Γ 是来自F的 n 个集合组成的集合族，使得 $\mathcal{P} \times \Gamma$ 的关联图不包含$K_{r,\,r}$。那么

$$I(\mathcal{P}, \Gamma) = O_r\left(m^{\frac{d}{2d-1}} n^{\frac{2d-2}{2d-1}} + m + n\right).$$

当这些集合是半代数集时，Sharir 和 Zahl [16] 得到了一个更强的关联界。

引理 2.4. 设 $\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{R}^2$中一个由点组成的集合，且令 Γ 为 $\mathbb{R}^2$中的一组 n 半代数集。假设 Γ 中的集合属于一个具有常数描述复杂度的 s维族，并且 Γ中任意两个集合都不共享无限连通分支。那么对于每个 $\varepsilon > 0$，有

$$I(\mathcal{P}, \Gamma) = O\left(m^{\frac{2s}{5s-4}} n^{\frac{5s-6}{5s-4}+\epsilon} + m^{2/3} n^{2/3} + m + n\right)$$

一个有趣的开放问题是将引理 2.4 推广到由 Pfaff函数定义的曲线；或者更大胆地，推广到在一个 o-极小结构中可定义的曲线。

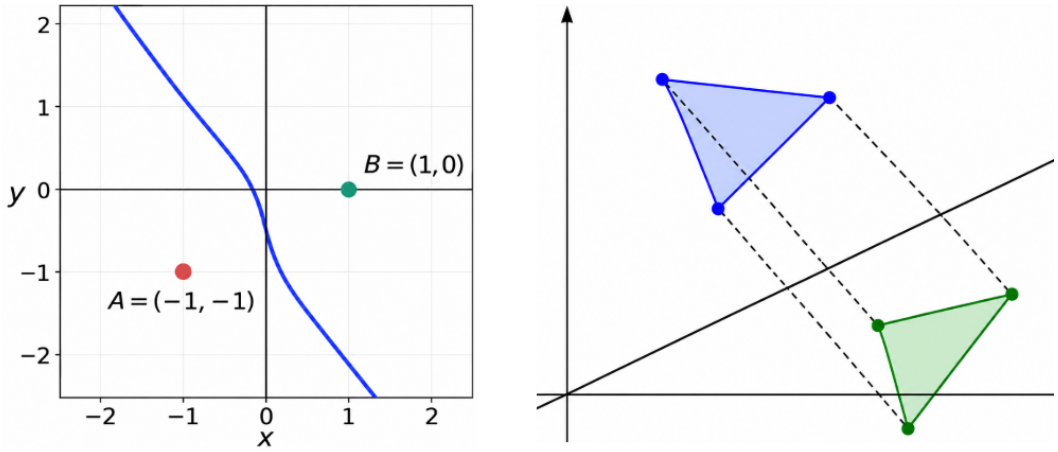

图 3：左：范数下的非直线平分线。右：斜反射。

平分线。 两个不同点 $p,\ q \in \mathbb{R}^2$ 的平分线为 $\mathcal{B}(p,\ q) = \{r \in \mathbb{R}^2 : \|p - r\| = \|q - r\|\}$. 在非欧几里得范数下，平分线不一定是直线。例如，见图 3 左侧。然而，对于严格凸范数，每条平分线都与一条直线同胚（见 [13]）。现在我们来刻画直线平分线。

斜反射 是标准反射的一种推广。这种反射仍然是关于一条直线的反射，但反射方向不一定垂直于该直线。见图 3 右侧。特别地，设 ℓ_1，ℓ_2 为经过原点的不同直线。每个向量 $v \in \mathbb{R}^2$ 都可以唯一地写成 $v = u_1 + u_2$，其中 $u_1 \in \ell_1$和 $u_2 \in \ell_2$。沿方向 ℓ_2 关于 ℓ_1 的斜反射为 $R(u_1 + u_2) = u_1 - u_2$。

关于前一段，我们注意到：(i) 每个 $r \in \ell_1$ 满足$R(r) = r$；(ii) 每个 $r \in \ell_2$ 满足 $R(r) = -r$；(iii) 复合 $R \circ R$ 是恒等变换；(iv) R 可能不保持欧氏距离和角度。

γ 中曲线的仿射对称是一个将 γ 映射到自身的可逆仿射变换。为简便起见，今后提到仿射对称时，我们将始终简称为对称。

引理2.5。 平分线 $\mathcal{B}(p, q)$ 是直线，当且仅当单位圆具有保持 $p - q$.的斜反射对称

证明。 我们对 $\mathbb{R}^2$ 进行平移，使得 $\frac{p+q}{2} = 0$。这得到 $q = -p$，进而推出

$$\mathcal{B}(p, q) = \mathcal{B}(p, -p) = \{v \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|v - p\| = \|v + p\|\}.$$

首先，我们假设 $\mathcal{B}(p, -p)$ 是一条直线。设 $v \in \mathbb{R}^2$ 为该直线方向上的一个向量。根据定义，对于每个 $\lambda \in \mathbb{R}$，都有$\|\lambda v - p\| = \|\lambda v + p\|$。我们注意到， p 和 v 的方向不同。因此， $\mathbb{R}^2$ 中的每个点都可以唯一地表示为 $\lambda v + \mu p$，其中 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$。于是，变换 $T(\lambda v + \mu p) = -\lambda v + \mu p$是一个将 $p - q = 2p$ 映射到自身的斜反射。根据范数的绝对齐次性，

$$\|T(\mu p + \lambda v)\| = \|\mu p - \lambda v\| = |\mu| \cdot \|(\lambda/\mu) \cdot v - p\| = |\mu| \cdot \|(\lambda/\mu) \cdot v + p\| = \|\mu p + \lambda v\|.$$

也就是说，范数 $\|\cdot\|$ 在 T下保持不变。特别地， T是单位圆的一种对称。

对于命题的另一个方向，我们假设单位圆具有一种斜反射对称性 T，且该对称性保持 $p - q$。根据范数的绝对齐次性， T 也是单位圆任意缩放后的对称。换言之，T保持任意向量的长度（严格来说， T 是一个等距变换）。由于 T 是关于一条经过原点的直线的斜反射，因此存在一个非零 $v \in \mathbb{R}^2$，满足$T(v) = -v$。由于 T 是一个等距变换，每个 $\lambda \in \mathbb{R}$ 都满足

$$\|p + \lambda v\| = \|R(p + \lambda v)\| = \|p - \lambda v\|.$$

由此可得，对于每个 $\lambda \in \mathbb{R}$，都有 $\lambda v \in \mathcal{B}(p, -p)$。也就是说， $\mathcal{B}(p, -p)$ 是经过原点、方向为 v 的直线。 □

具有无穷多个斜反射对称的平面凸体必定是椭圆（例如，参见 [8, 命题 2.6]）。因此，对于非椭圆范数，直线平分线只有有限多个方向。

推论 2.6。 对于每个非椭圆范数，都存在一个常数 c，使得所有直线平分线都具有 c方向之一。

我们将利用另一种所有平分线都具有的对称性。

命题 2.7。 平分线 $\mathcal{B}(p,q)$ 具有绕中点 $\frac{p+q}{2}$ 旋转 *180* 度的旋转对称性。

证明。 我们平移平面，使得 $\frac{p+q}{2} = (0,\ 0)$。现在我们有 $q = -p$. 接下来只需证明每个 $r \in \mathcal{B}(p,\ q)$ 都满足 $-r \in \mathcal{B}(p,\ q)$。 固定这样一个 $r \in \mathcal{B}(p,\ q)$。根据定义，$\|r-p\| = \|r+p\|$，进而可推出

$$\|(-r)-p\| = \|r+p\| = \|r-p\| = \|(-r)+p\|.$$

因此，我们得到 $-r \in \mathcal{B}(p,\ q)$，这正是所需结论。 □

3 o-极小范数中的平分线

第 2 节介绍了平分线的一些基本性质。本节将研究平分线更复杂的性质，其中一些是在 o-极小范数的背景下进行的。

在本文余下部分，我们只考虑非椭球严格凸范数。请注意，定理 1.2 和定理 1.5 仅讨论严格凸范数。此外，Guth–Katz 结果 [12] 和断言 2.1 对椭球范数给出了更强的界。也就是说，定理 1.2 和定理 1.5 对这类范数立即成立。

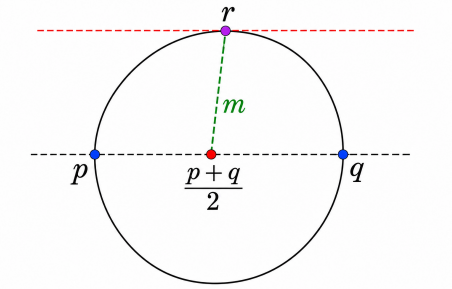

图 4：我们考虑 r 与中点（$p+q$）之间直线的斜率/2。

下文中，圆 是到某个圆心的距离为特定值的点的集合。特别地，这并非欧几里得意义下的圆。凸曲线 γ 上一点 r 的支撑直线 是包含 r 且定义了一个包含 γ 的闭半平面的直线。见图 4。关于以下引理，参见 [6] 的定理 1 和备注 1。

引理 3.1。 对于点 p、$q \in \mathbb{R}^2$，设 C 为以中点 $(p+q)/2$ 为圆心、半径为 $\|p-q\|/2$ 的圆。设 r 是 C 上的一个点，其支撑直线平行于经过 p 和 q 的直线。设 m 为中点 $(p+q)/2$ 与 r 之间直线的斜率。（见图 *4*。）

(a) 如果 $B(p、\ q)$ 具有渐近线，则该直线的斜率为 m。

(b) 如果 $B(p,q)$ 没有渐近线，那么 $B(p,q)$ 就在两条斜率为 m 的直线之间振荡。也就是说，平分线会无限多次地趋近这两条直线中的每一条。

引理 3.1 推出以下结论。

Lemma 3.2. 如果 p_1-q_1 和 p_2-q_2 的方向不同，则 $\mathcal{B}(p_1,\ q_1) \neq \mathcal{B}(p_2,\ q_2)$。

证明。 设 C_1 和 C_2 为引理 3.1陈述中定义的圆。设 m_1 和m_2 为该引理中描述的斜率。这些斜率在对平面进行平移和均匀缩放时保持不变。因此，不失一般性，我们可以假设 $(p_1+q_1)/2=(p_2+q_2)/2=(0,0)$，并且 $\|\frac{p_1-q_1}{2}\|=\|\frac{p_2-q_2}{2}\|=1$。换言之，$C_1=C_2$ 是以原点为中心的单位圆。我们将此圆记作 C。

设 r_1 和 r_2 为引理 3.1 中所描述的点。那么， m_i 是经过原点和 r_i 的直线的斜率。由范数的严格凸性和对称性可知，当且仅当 $r_1=\pm r_2$ 时， $m_1=m_2$ 。

由于范数是严格凸的， C 上任意两个点都没有相同的支撑直线。因此，如果 p_1-q_1 和 p_2-q_2 具有不同方向，那么 $r_1\neq\pm r_2$。这又意味着 $m_1\neq m_2$。由引理 3.1，我们得出 $\mathcal{B}(p_1,q_1)\neq\mathcal{B}(p_2,q_2)$。 □

现在我们开始研究 o-极小范数下平分线的性质。

引理 3.3。 考虑一个范数 $\|\cdot\|$，它在 o-极小结构 $\mathcal{M}$ 中可定义。那么，在 $\|\cdot\|$ 下的所有平分线都可在 $\mathcal{M}$ 中定义。

证明。 考虑两个点 $p_1=(x_1,y_1)$ 和 $p_2=(x_2,y_2)$。根据范数定义，将 x_1， y_1， x_2， y_2 视为变量时，$(p_1,p_2)\mapsto\|p_1-p_2\|$ 在 $\mathcal{M}$中是可定义的。因此，对于任意固定点 $u\in\mathbb{R}^2$，限制 $p_1\mapsto\|p_1-u\|$ 也是可定义的。事实上，这个限制是先与一个簇相交，再进行逐坐标投影所得的结果。由此可推出， $x\mapsto\|x-u\|-\|x-v\|$ 的零点集是可定义的。这个零点集就是平分线 $\mathcal{B}(u,v)$。 □

现在我们可以证明定理 1.6 了。我们先回顾该结果的表述。

定理 1.6。 设 $\|\cdot\|$ 是一个严格凸的 o-极小范数。若两对点$(p_1,q_1)\neq(p_2,q_2)$ 满足 $\mathcal{B}(p_1,q_1)=\mathcal{B}(p_2,q_2)$，则该平分线是一条直线。

证明。 令 $\gamma=\mathcal{B}(p_1,q_1)=\mathcal{B}(p_2,q_2)$。 根据命题 2.7，平分线 γ关于两个中点 $(p_1+q_1)/2$ 和 $(p_2+q_2)/2$均具有 180 度旋转对称性。

我们先考虑上述两个中点不同的情况。在这种情况下，两个旋转对称性也不同。将两个不同的 180 度旋转复合，总会得到一个非恒等平移。也就是说， γ 具有平移对称性。设 v 为该平移的向量。我们任取一个点 $p\in\gamma$。由上可知， γ 包含无限集合 $\{p+nv:\ n\in\mathbb{Z}\}$。根据引理 2.2， γ 包含直线 $\{p+av:\ a\in\mathbb{R}\}$。由于所有平分线都与直线同胚， γ 就是上述直线。

剩下的情况是 $(p_1+q_1)/2=(p_2+q_2)/2$。由于平移不会改变平分线的形状，我们可以假设公共中点是原点。现在有 $q_1=-p_1$ 且 $q_2=-p_2$。根据引理 3.2， p_1-q_1 和p_2-q_2 具有相同的方向。也就是说，存在 $s\in\mathbb{R}$ 使得

$$(p_1,-p_1)=(p_1,q_1)=s\cdot(p_2,q_2)=s\cdot(p_2,-p_2).$$

我们声称， γ 具有伸缩对称性。事实上，对于任意点 $r\in\gamma$，我们有

$$\|r-p_1\|=\|r+p_1\|\quad\Rightarrow\quad\|sr-sp_1\|=\|sr+sp_1\|\quad\Rightarrow\quad\|sr-p_2\|=\|sr+p_2\|.$$

也就是说， $sr \in \gamma$，正如所声称的那样。

现在固定一个不等于原点的 $r \in \gamma$。由上文可知， γ 包含无限集合 $\{s^n r : n \in \mathbb{Z}\}$。与之前一样，这意味着 γ 包含直线 $\{ar : a \in \mathbb{R}\}$。由于所有平分线都与直线同胚， γ 就是上述直线。 □

我们还要求可定义平分线具有以下性质。

引理 3.4。 设 $\|\cdot\|$ 是一个严格凸的 o-极小范数，其中任意两条非直线平分线的交点个数均有限。那么存在 N，使得任意两条非直线平分线至多相交 N 次。

证明。 设 $\mathcal{M}$ 是一个 o-极小结构，且其范数是可定义的。考虑平分线交集族

$$\left\{\mathcal{B}(p_1,q_1)\cap\mathcal{B}(p_2,q_2) \;:\; p_1,q_1,p_2,q_2\in\mathbb{R}^2,\; p_1\neq q_1,\; p_2\neq q_2,\; (p_1,q_1)\neq(p_2,q_2)\right\}.$$

如第 2 节所定义，这是一个可定义的集合族。它是一个八维族，取决于 $\mathbb{R}^2$ 中四个点的八个坐标。

考虑两对点 $(p_1, q_1) \neq (p_2, q_2)$，使得 $\mathcal{B}(p_1, q_1)$ 和 $\mathcal{B}(p_2, q_2)$ 均非直线。根据引理的假设， $\mathcal{B}(p_1, q_1)\cap\mathcal{B}(p_2, q_2)$ 是有限的。因此，引理 2.2 表明，存在一个 N，使得 $\mathcal{B}(p_1, q_1) \cap \mathcal{B}(p_2, q_2)$ 至多相交于 N 个点。 □

4 定理 1.2 及其应用

本节中，我们证明定理 1.2 及其应用——推论 1.3 和推论 1.4。这些证明建立在 Garibaldi 的工作 [11] 及其在 [2]中的推广之上。我们先收集一些工具。

引理 4.1。 设 $\|\cdot\|$是一个严格凸的 o-极小范数，且任意两个非直线平分线的交集均为有限集。设 $\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的 m 点集， Γ是由 n 个非直线平分线组成的集合。则

$$I(\mathcal{P},\Gamma)=O\left(m^{4/7}n^{6/7}+m+n\right).$$

证明。 根据引理 3.3， Γ 中的元素在 $\mathcal{M}$下可定义。注意，平分线 $\mathcal{B}(p, q)$由 p 和 q 的四个坐标确定。也就是说， Γ 中的元素属于一个四维族（定义见第 2 节）。根据引理 3.4，存在常数 r，使得 Γ 中的两个元素至多相交于 $r-1$ 个点。这意味着 $\mathcal{P}\times\Gamma$ 的关联图不包含 $K_{r,\,r}$。因此，我们可以对 $d=4$应用引理 2.3，从而得到当前引理的断言。 □

我们回顾一下，多重图 中同一对顶点之间可以有多条边。多重图的重数 是共享同一对端点的边的最大数量。图 G 的交叉数 是 G的任意平面绘图中相交边对数的最小值。我们将这个数记为 $cr(G)$。有关交叉数和以下引理的更多信息，请参见 [19]。

引理 4.2。 每个重数为 k 且满足 $|E| > 5k \cdot |V|$ 的多重图 $G = (V, E)$ 都满足

$$cr(G)=\Omega\left(\frac{|E|^3}{k\cdot|V|^2}\right).$$

下文中，每当我们提到圆时，它都不是欧几里得圆，而是在当前范数下，与给定圆心保持固定距离的点的集合。现在我们可以证明定理 1.2 了。我们首先回顾这一结果的表述。

定理 1.2. 设 $\|\cdot\|$ 是一种严格凸的 o-最小范数，其中任意两条非直线平分线的交集都是有限的。那么， $d_{\|\cdot\|}(n) = \Omega(n^{5/6})$。

证明。设 $\mathcal{P}$ 是一个 n 点集， D 是由 $\mathcal{P}$ 张成的距离集。令 $t = |D|$。设 Γ 是所有以 $\mathcal{P}$ 中的点为圆心、半径取自 D 的圆的集合。也就是说， Γ 是一个 nt 圆集。对于每个 $p \in \mathcal{P}$，以 p 为圆心的 t 个圆包含 $\mathcal{P} \setminus \{p\}$ 中的所有点。这意味着

$$I(\mathcal{P}, \Gamma) = n(n-1) = \Theta(n^2).$$

我们如下定义一个多重图 $G = (V, E)$。对于 $\mathcal{P}$ 中的每个点，设一个顶点。对于每个与 $\mathcal{P}$ 中至少三个点关联的圆 $\gamma \in \Gamma$，在 γ 上每两个相邻出现的顶点之间添加一条边（也就是说，它们之间没有第三个点）。

我们不妨假设 $t = O(n/\log n)$，否则定理的证明就完成了。这意味着 $|\Gamma| = O(n^2/\log n)$。我们从 Γ 中移除所有至多包含 $\mathcal{P}$中两个点的圆。由上文可知，经过这一步后，我们仍有$I(\mathcal{P}, \Gamma) = \Theta(n^2)$。

考虑一个剩余的圆 $\gamma \in \Gamma$，它与 $\mathcal{P}$中的 $k \geq 3$个点关联。根据定义， γ 对应于 G的 k 条边。因此， $|E| = I(\mathcal{P}, \Gamma) = \Theta(n^2)$。

我们可以通过按给定方式画出 $\mathcal{P}$ 中的点和 Γ 中的圆，在 $\mathbb{R}^2$ 中绘制 G。由于每对圆至多相交两次，这幅图中的交叉点数至多为 $2\binom{|\Gamma|}{2} = O(n^2t^2)$。这意味着 $cr(G) = O(n^2t^2)$。

我们希望应用引理 4.2，为 $cr(G)$得到一个下界。然而， G的重数可能过高，因而无法从中获得帮助。为了解决这个问题，我们首先从 G中丢弃重数较高的边。

移除高重数边。 考虑一条边 $(p, q) \in E$，它由围绕点 $r \in \mathcal{P}$ 的圆上连续出现的 p 和 q 产生。根据定义，$r \in \mathcal{B}(p, q)$。我们从 G 中移除所有满足 $\mathcal{B}(p, q)$ 为直线的此类边。根据推论 2.6，所有直线平分线的斜率都属于某个包含 $O(1)$ 个斜率的集合。也就是说，每个点 $r \in \mathcal{P}$ 与直线平分线形成$O(1)$ 个关联。对于这样一条直线， D 中的每个元素至多对应 $n/2$ 对以该直线为平分线的点对 (p, q)。事实上，$\mathcal{P}$ 中的每个点至多参与这样一对点对。由此可知， $O(nt) = O(n^2/\log n)$ 条边由直线平分线产生。移除这些边后， G 还有 $\Theta(n^2)$ 条边。

现在， G 只包含这样的边 (p, q)：其中 $\mathcal{B}(p, q)$ 是非直线平分线。此类边的重数至多为 $\mathcal{P}$ 中位于 $\mathcal{B}(p, q)$ 上的点数。令 Γ_j 为包含 $\mathcal{P}$ 中至少 2^j 个点、但少于 2^{j+1} 个点的非直线平分线集合。根据 Γ_j 的定义和引理 4.1，我们有

$$2^j \cdot |\Gamma_j| \leq I(\mathcal{P}, \Gamma_j) = O\left(n^{4/7}|\Gamma_j|^{6/7} + n + |\Gamma_j|\right).$$

在上述界的右侧，当 j 大于某个固定常数时， $+|\Gamma_j|$ 项不可能占主导。对于每个这样的 j，整理上式可得

$$|\Gamma_j| = O\left(\frac{n^4}{2^{7j}} + \frac{n}{2^j}\right).$$

在上述界中，当 $2^j = O(\sqrt{n})$ 时，第一项占主导。对于下面将要设定的 k ， G 中重数至少为 k 的边数小于

$$\sum_{j=\log k}^{\log n} |\Gamma_j| \cdot 2^{j+1} = O\left(\sum_{j=\log k}^{0.5\cdot\log n} \frac{n^4}{2^{7j}} \cdot 2^j + \sum_{j=0.5\cdot\log n}^{\log n} \frac{n}{2^j} \cdot 2^j\right)$$

$$= O\left(\sum_{j=\log k}^{0.5\cdot\log n} \frac{n^4}{2^{6j}} + \sum_{j=0.5\cdot\log n}^{\log n} n\right) = O\left(\frac{n^4}{k^6} + n\log n\right).$$

我们令 $k = cn^{1/3}$ 为一个常数 c。这意味着重数至少为 k 的边数为 $O(n^2/c^6)$。回顾一下， G 有 $\Theta(n^2)$条边。当 c 是一个充分大的常数时，移除所有重数至少为 k 的边后， G中仍有 $\Theta(n^2)$条边。我们执行这一移除操作，从而得到 G的重数现在小于 $cn^{1/3}$。

收尾。 利用上述关于 G重数的界，现在我们可以应用引理 4.2。不难验证，引理的假设 $|E| > 5cn^{1/3} \cdot n$确实成立。因此得到

$$cr(G) = \Omega\left(\frac{n^6}{cn^{1/3} \cdot n^2}\right) = \Omega(n^{11/3}).$$

回顾上述界 $cr(G) = O(n^2t^2)$。由于移除边不会增加交叉点的数量，该界仍然成立。结合关于$cr(G)$的上界和下界可得 $n^{11/3} = O(n^2t^2)$。重新整理后得到 $t = \Omega(n^{5/6})$，符合要求。

□

接下来，我们将说明如何通过应用定理 1.2 得到推论 1.3。我们先回顾这一结果的表述。

推论 1.3。 对于所有 $p > 1$，我们有 $d_{\ell_p}(n) = \Omega(n^{5/6})$。

证明。 取实数幂和绝对值运算属于 o-极小结构 $\mathbb{R}_{exp}$，其定义见第 2 节（更多信息请参见例如 [21]）。也就是说， ℓ_p 范数 $\|v\|_{\ell_p} = (|v_x|^p + |v_y|^p)^{1/p}$ 可在 $\mathbb{R}_{exp}$中定义。Garibaldi [11] 证明了，在 ℓ_p 范数下，非直线平分线具有有限交集。因此，我们可以应用定理 1.2。

□

接下来需要证明推论 1.4。我们先回顾这一结果的表述。

推论 1.4。 设 $\|\cdot\|$ 是一个具有解析平分线的严格凸 o-极小范数。那么 $d_{\|\cdot\|}(n) = \Omega(n^{5/6})$。

证明。 根据 V¨ais¨al¨a [20], , 对于每条非直线平分线 $\mathcal{B}(p, q)$，都存在 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得 $\mathcal{B}(p, q)$ 可参数化为 $y = f(x)$。根据推论的假设， f是解析的。

考虑上述参数化为 $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的两条非直线平分线。根据定理 1.6，这两条平分线并不相同。延拓定理 指出，若 f_1 和 f_2 在某个开区间上取值相同，则这两个函数处处取值相同（例如，参见 [14, 推论 1.2.5]）。

由上述可知， f_1 和 f_2 在整个开区间上的取值不可能相同。因此，根据引理 2.2，这两条平分线只有有限交集。于是我们可以应用定理 1.2。

□

5 定理 1.5

本节证明定理 1.5。我们先给出引理 4.1 的一个半代数类比。

引理 5.1. 设 $\|\cdot\|$ 是一种严格凸半代数范数，且任意两条非直线平分线的交集均为有限集。设 $\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中由 m 个点组成的集合，Γ 是由 n 条非直线平分线组成的集合。那么，对于每个 $\varepsilon > 0$，有

$$I(\mathcal{P}, \Gamma) = O(m^{1/2}n^{7/8+\epsilon} + n^{2/3}m^{2/3} + m + n).$$

证明. 每条平分线由两个点定义，这两个点共包含四个坐标。这意味着 Γ 中的元素属于一个四维半代数族。根据本引理的假设，两条平分线不能共有一维分支。

由引理 3.4，存在常数 r，使得 Γ 中任意两个元素至多相交于 $r-1$ 个点。因此，我们可以对 $s = 4$ 应用引理 2.4。这立即得出本引理的结论。

□

现在我们可以证明定理 1.5 了。首先回顾该结果的表述。

定理 1.5. 设 $\|\cdot\|$ 是一个严格凸半代数范数，其平分线彼此相交的次数有限。那么所有 $\varepsilon > 0$ 都满足 $d_{\|\cdot\|}(n) = \Omega(n^{6/7-\epsilon})$。

证明。 我们以与定理 1.2 的证明完全相同的方式开始当前的证明。由于半代数集也可以在一个 o-极小结构中定义，因此该证明中除开头之外的所有步骤在这里同样成立。

为简洁起见，我们不再重复证明中相同的开头。我们像之前一样定义 t、D 和多重图 G。我们还从 G 中移除对应于直线平分线的边，并像之前一样得到界 $cr(G) = (n^2t^2)$ 和 $|E| = \Theta(n^2)$。

设 Γ_j 是 Γ 中至少关联 2^j 个 $\mathcal{P}$ 中的点、但关联点数少于 2^{j+1} 的非直线平分线构成的集合。对每个 Γ_j，我们应用引理 5.1。我们取 $\varepsilon' > 0$，其值将在下文确定，从而得到

$$2^j|\Gamma_j| \le I(\mathcal{P}, \Gamma_j) = O\left(n^{1/2}|\Gamma_j|^{7/8+\epsilon'} + n^{2/3}|\Gamma_j|^{2/3} + n + |\Gamma_j|\right).$$

当 j 大于某个特定常数时，项 $+|\Gamma_j|$ 不可能主导上述界。重新整理界中的其余项，并令 ε' 相对于 ε 足够小，可得

$$|\Gamma_j| = O\left(\frac{n^{4/(1-8\varepsilon')}}{2^{8j/(1-8\varepsilon')}} + \frac{n^2}{2^{3j}} + \frac{n}{2^j}\right) = O\left(\frac{n^{4+2\varepsilon}}{2^{8j}} + \frac{n^2}{2^{3j}} + \frac{n}{2^j}\right).$$

在上述界中，当 $j \le \frac{2+2\varepsilon}{5}\log n$ 时，第一项占主导；当 $\frac{2+2\varepsilon}{5}\log n < j \le \frac{1}{2}\log n$，时，第二项占主导；而当 $j > \frac{1}{2}\log n$ 时，第三项占主导。因此，重数至少为 k 的剩余边的数量小于

$$\sum_{j=\log k}^{\log n} |\Gamma_j| \cdot 2^{j+1} = O\left(\sum_{j=\log k}^{\frac{2+2\varepsilon}{5}\log n} \frac{n^{4+2\varepsilon}}{2^{8j}} \cdot 2^j + \sum_{j=\frac{2+2\varepsilon}{5}\log n}^{0.5\cdot\log n} \frac{n^2}{2^{3j}} \cdot 2^j + \sum_{0.5\cdot\log n}^{\log n} \frac{n}{2^j} \cdot 2^j\right)$$

$$= O\left(\frac{n^{4+2\varepsilon}}{k^7} + \frac{n^2}{(n^{(2+2\varepsilon)/5})^2} + n\log n\right) = O\left(\frac{n^{4+2\varepsilon}}{k^7} + n^{(6-4\varepsilon)/5}\right).$$

我们令 $k = n^{2/7+2\varepsilon}$，并移除所有重数至少为 k 的边。根据上述结果，移除的边数为 $O(n^{2-12\varepsilon})$，因此 G 还剩下 $\Theta(n^2)$ 条边。现在，G 的重数小于 $n^{2/7+2\varepsilon}$。

利用上述重数界，我们现在可以应用引理 4.2。不难验证，条件 $|E| > 5n^{2/7+2\varepsilon} \cdot n$ 确实成立。由此可得

$$cr(G) = \Omega\left(\frac{n^6}{n^{2/7+2\varepsilon} \cdot n^2}\right) = \Omega(n^{26/7-2\varepsilon}).$$

回顾上述界 $cr(G) = O(n^2t^2)$。由于移除边不会增加交叉点的数量，该界仍然成立。结合 $cr(G)$ 的上界和下界可得 $n^{26/7-2\varepsilon} = O(n^2t^2)$。重新整理后得到 $t = \Omega(n^{6/7-\varepsilon})$，符合要求。

□

为了进一步发展基于马铃薯的记号，我们将非直线平分线具有有限交集的半代数范数称为*ube* 范数。ube 范数确实是甜土豆范数的子集，因为半代数集在每个 o-最小结构中都是可定义的。

参考文献

[1] N. Alon、M. Buci´c 和 L. Sauermann，典型范数中的单位距离与不同距离，《几何与泛函分析》**35**（2025），1–42。[2] M. AlQady、R. Chabot、W. Dudarov、L. Ge、M. Juvekar、S. Kundeti、N. Kundu、K. Lu、Y. Moreno、S. Peng、S. Speas、J. Starzycka、H. Steinthal、A. Vitko，《Lp 空间中的不同距离》，《计算几何：理论与应用》**100**（2022），101785。[3] S. Basu、R. Pollack 和 M.-F. Roy，《实代数几何中的算法》，Springer Berlin Heidelberg，2006。[4] J. Bochnak、M. Coste 和 M.-F. Roy，《实代数几何》Springer Science & Business Media，2013。[5] A. Chernikov、D. Galvin 和 S. Starchenko，远端结构中的切割引理与扎兰凯维奇问题，《数学精选》**26** （2020），25。[6] A. G. Corbalan、M. Maz´on 和 T. Recio，严格凸距离下平分线的几何，《国际计算几何与应用杂志》**6** （1996），45–58。[7] M. Coste，《*O*-极小几何导论》，1999年。[8] S. Dewar，赋范平面中的无穷小刚性，《*SIAM* 离散数学杂志》**34**（2020），1205–1231。[9] L. van den Dries，《温和拓扑与 *o*-极小结构》，剑桥大学出版社，1998。[10] P. Erd˝os，关于 n 个点的距离集合，《美国数学月刊》**53** （1946年），248–250。

[11] J. S. Garibaldi，*Erd˝os* 凸度量中的距离问题，加利福尼亚大学洛杉矶分校，2004年。[12] L. Guth 和 N. H. Katz，关于平面中的 Erd˝os 不同距离问题，《数学年刊》（2015年），155–190。[13] A. G. Horv´ath，关于闵可夫斯基赋范空间中的平分线，《匈牙利数学学报》**89**（2000年），233–246。[14] S. G. Krantz 和 H. R. Parks，《实解析函数入门》，Springer Science & Business Media，2002年。[15] J. Matou˘sek，对于大多数范数，单位距离的数量几乎是线性的，《数学进展》**226** （2011年），2618–2628。[16] M. Sharir 和 J. Zahl，将代数曲线切割为伪线段及其应用，《组合理论杂志*A*辑》**150**（2017年），1–35。[17] A. Sheffer，《多项式方法与关联理论》，剑桥高等数学研究丛书 197，2022年。[18] P. Speissegger，某个 o-极小结构的 Pfaffian闭包，《纯粹与应用数学杂志》**508** （1999年），189–211。[19] L. A. Sz´ekely，离散几何中的交叉数与棘手的 Erd˝os 问题，《组合学、概率与计算》**6** （1997年），353–358。[20] J. V¨ais¨al¨a，赋范平面中平分线的斜率，《代数与几何贡献》**54** （2013年）：225–235。[21] A. Wilkie，o-极小结构，*S´*《*Bourbaki* 研讨班》**985** （2007年），11。