财政反馈下合规动态的解析建模：临界阈值、干预成本与滞后现象

Luca Meacci[1,2], FranciscoJ. Muñoz[3], Juan Carlos Nuño[3] *[1]"Ulisse Dini"数学与信息学系，佛罗伦萨大学，Viale Morgagni 67/a，50134 佛罗伦萨，意大利[2]信息工程系（DINFO），佛罗伦萨大学，Via di S. Marta 3，50139 佛罗伦萨，意大利[3]马德里理工大学应用数学系，28040 马德里，西班牙

arXiv:2611.29688v1 [math.DS] 22 Nov 2026

摘要

税收及其他集体义务的合规通常依靠来自合规者的资源来执行，因此不合规会削弱自身的威慑机制。我们建立了一个可精确求解的财政反馈下合规动力学模型。个体通过模仿表现更好的人，在缴税和逃避缴税之间作出选择；用于打击逃税的预算来自收入的一定份额，并在执法与教育之间分配。该模型给出了平衡点、临界阈值及其分岔、维持合规所需的预算、崩溃后恢复合规所需的预算，以及阈值附近的恢复时间的闭式表达式。单靠财政反馈不会产生临界点：只有当罚款或教育等改变个体激励的工具由税基出资时，才会出现滞后现象。更严厉的制裁会同时降低维持预算和救助预算，但超过某个临界水平后，会使系统呈现双稳态。因此，制裁力度的选择是在效率与韧性之间进行权衡，我们通过韧性指标和韧性约束设计问题对其进行量化。执法与教育之间预算的最优分配也可用闭式形式求得。敏感性分析识别出决定预防成本和恢复成本的参数；对个体代理的随机模拟以及缓慢预算周期的模拟证实了分析预测。该框架为在税收合规及具有类似反馈机制的其他执法问题中分配稀缺干预资源提供了定量指南。

关键词： 合规动态；财政反馈；临界点；逃避缴税；最优资源配置；演化博弈论

1 引言

逃避缴纳税款、冒领福利以及乘坐公共交通时逃票，三者有一个共同点
结构：个体享用集体资源，却不承担相应的成本。犯罪经济学和税收合规研究了这类行为对被抓可能性及代价的反应 [1, 2, 3, 4]，；演化博弈论则表明，在通过模仿学习的种群中，制裁机构如何维持个体的贡献 [5, 6]。犯罪的种群动力学模型 [7, 8, 9] 将预算纳入考量：用于打击作弊者的资源，来自作弊者所剥削的社会。在 Nuño、Herrero 和 Primicerio 的模型 [8] （以下简称 NHP）中，共同财富的 φ 部分用于打击作弊，其中 s 用于教育，其余用于警察。

*通讯作者： juancarlos.nuno@upm.es

合规与执法之间的这种耦合构成了一个反馈回路，而反馈回路通常会导致替代稳定状态和突变 [10]。当一个以诚实者为主的均衡和一个以不诚实者为主的均衡都稳定时，社会的历史便会产生影响：崩溃之后，仅仅恢复过去维持合规的预算并不足够。我们要探讨的是，出现这种情况需要哪些要素，以及其影响有多大。在包含多个社会阶层和众多参数的模型中，这个问题通常要针对具体情形逐一进行数值求解。这里我们采取相反的路径，寻找一种足够简单的情形，使答案能够直接写出。

NHP 除了其主要的三阶层模型外，还提出了一个仅包含缴费者和作弊者的两类模型，其中作弊招募是自发发生的；他们根据该模型的等倾线论证了其稳态是唯一的，并指出该稳态是渐近稳定的。与大多数犯罪人口模型一样，该模型规定了个体在各阶层之间转移的比率。本文则运用演化博弈论 [5, 11]，从个体决策出发推导这些比率。每个个体要么缴费，要么作弊；这两种选择的收益取决于政策，并通过共同预算取决于其他所有人的行为；个体则通过模仿表现更好的他人来改变选择 [12]。最终得到的仍然是一个描述缴费者和作弊者比例的微分方程系统，因此，博弈论描述并没有取代人口描述：它为后者提供了微观基础。它所增加的是，每种政策工具都通过其对收益或移除的影响发挥作用，因此可以判断哪些工具会改变行为。所得模型仍是二维的，并且正如我们将展示的那样，是可精确求解的。以下所有结果均针对这一模型以及时间恒定的政策。

从建模的角度看，负责促进合规的机构面临的问题，是如何在反馈作用下分配稀缺资源。每年，该机构都要决定支出多少，以及如何在执法（审计、检查、制裁）和预防（教育、信息宣传活动）之间分配资金，而可用资源取决于合规者的数量。税务管理是主要例子，也是本文始终采用的例子；但只要执法经费由合规者承担，同样的结构就会出现：例如，公共交通中的票价检查由票务收入支付，渔业或废物管理法规的监督由许可证费和征收费提供经费，或者反腐败部门由会因腐败而减少的公共预算资助。一个实用的模型应能告诉决策者，哪些工具可以推动系统跨越阈值，预防崩溃和从崩溃中恢复各需多少成本，这些成本对不确定参数有多敏感，以及如何分配既定预算。本文构建的模型刻意保持简单，以便能够以闭式形式得出这些答案，经数值验证，并概括为可供决策使用的形式。下文将两种行为称为缴费和作弊（逃避缴费），并将个体称为缴费者和作弊者。

我们的结果如下。

1. 该模型可精确化简为关于作弊者比例的标量方程，其零点和斜率给出了所有平衡点及其稳定性，并且不存在周期轨道（第3节）。

2. 当 $\lambda\,|\mathrm{d}\Delta\pi/\mathrm{d}c| > \mu$ at完全合规时，无作弊者状态与作弊状态呈双稳态，当且仅当 λ为模仿率， $\Delta\pi$ 为作弊收益优势， c为缴费者比例， μ 为自发退出率（定理1）。由税基资助的警察对作弊者的移除会从该判据中完全消去，因此在此模型中，单靠警察，或任何以绝对金额设定的预算集，都不会产生滞后现象；而作用于激励的制裁和教育则会产生滞后现象（第4节）。

3. 在实施制裁的情况下，双稳态区间、临界制裁、尖点和折叠曲线均可用闭式表示；即使存在自发作弊，这一点也成立（第5节和第6节）。救助崩溃社会的成本至多是维持守规社会成本的某个固定倍数，且该倍数与制裁无关；采用恒定政策进行救助所需的时间，则会随着超额预算的平方根倒数而发散（第7节）。

4. 维持预算在执法和教育之间的最低成本分配可以用闭式表示；仅当 $\lambda\eta > k(1+\lambda F)$ 时，该分配才包含教育，因此制裁会挤出教育。更严厉的制裁会降低维持预算和救助预算，但超过某个临界值后，会产生一个临界点；韧性指标和受韧性约束的设计问题明确展现了这一权衡（第8节）。

5. 闭式弹性确定了控制预防和恢复成本的参数；基于个体的随机模拟以及缓慢预算周期验证了分析预测；决策表总结了维护和救助预算以及恢复时间（第9节和第10节）。

注释1解释了为什么第4节的结论特定于两类结构。

2 模型

2.1 NHP 的两类模型

考虑一个规模恒定的种群，其中有 Y 名作弊者和 $N-Y$ 名缴费者，并令 W 表示共同财富。每名缴费者每单位时间缴纳 a 。日常支出占 W 的 θ ，反作弊支出占 W 的 φ，其中又分为教育（$s\varphi W$）和警察支出，即执法支出（$(1-s)\varphi W$）。NHP [8, 附录] 提出

$$\dot{Y} = \frac{\bar{\tau}_1}{1+\eta_1 s\varphi W}(N-Y) - (\mu + k(1-s)\varphi W)Y, \qquad \dot{W} = a(N-Y) - (\theta+\varphi)W. \tag{1}$$

缴费者以速率 $\bar{\tau}_1$ 成为作弊者，该速率会因教育而降低；作弊者则会自发停止作弊（速率 μ），或被警察发现（速率 $k(1-s)\varphi W$），之后重新缴费。对于其参数值（$\mu = 0.01$、 $k = 1$、 $\theta = 1$、 $\bar{\tau}_1 = 0.01$、 $\eta_1 = 100$），NHP 根据方程（1）的等倾线论证其均衡是唯一的，并指出该均衡是渐近稳定的。下面的命题2将针对随后引入的更一般模型，使这一稳定性表述更加严谨。

2.2 一个简单的演化博弈

模型（1）是通常意义上的种群模型：它说明在种群层面，个体从一个类别转移到另一个类别的速度。其比率是现象学的；它们概括了行为，却没有说明个体为何作弊，而政策只能通过假定其对某一比率的影响来表示。为了构建一个模型，使这些比率由是否作弊这一决策本身推导而来，我们将种群描述为参与一场简单的演化博弈。

是否作弊本质上是一个策略性决策。作弊对某个体是否有利，取决于其他人的做法，因为侦查和教育的资金来自纳税者缴纳的税款：作弊的人越多，预算就越少，被抓到的概率就越低，教育的效果也越弱，因此作弊对所有人都更具吸引力。个体收益之间这种相互依存关系，正是引言中所述的财政反馈，也正是这一情形成为博弈的原因。

对这一博弈进行经典分析时，会假设每位纳税人都知道被侦查的概率、制裁措施以及其他人的行为，并据此选择最佳回应；其结果将是一个纳什均衡。这种描述说明了哪些状态与理性选择相一致，却没有说明社会如何从一种状态转变到另一种状态，而这恰恰是临界点和滞后现象所关注的问题。此外，这种分析对个体的要求很高；事实上，个体往往只模糊地了解审计概率，而且主要通过周围人的经历来了解这一概率，关于税收合规的实证文献和基于主体的文献一再发现了这一点 [3, 4]。

演化博弈论 [5, 11]保留了战略结构，即策略的收益取决于群体状态，但它不再采用优化，而是以一条简单规则来描述策略如何改变：在这里，个体会模仿表现更好的人。成功的行为会扩散，失败的行为则会减少；由此得到一个微分方程系统，描述采用各类策略的个体比例，既刻画瞬态动力学，也刻画静止点。这两种观点仍然彼此关联，因为在模仿机制下，每个纳什均衡都是一个静止点，而每个稳定静止点都是一个纳什均衡 [5]。

从这个意义上说，演化博弈论并非取代微分方程描述，而是从个体行为推导出这种描述。在我们的设定中，每个个体要么缴费（P），要么作弊（C）；这两种选择的收益取决于政策和共同财富（第2.3节），而个体通过模仿来调整自己的选择（第2.4节）。相应地，种群模型中的比率获得了行为层面的含义，每种政策工具也都以明确的方式发挥作用：罚款和教育会改变收益，进而影响模仿者的决策；侦查还会直接清除作弊者。这两种渠道的区别是第4节结果的关键。

2.3 收益

我们用 $y = Y/N$ 表示作弊者比例，用 $c = 1 - y$ 表示缴费者比例，并令$w = W/(aN)$，因此 $w = 1$ 表示人人都缴费的社会的年度缴款。收益以缴税者的年度税款为单位，按年计量。令 $B(w)$表示个体从共同财富所提供的福利中获得的收益。缴费者获得这项福利并缴纳税款：

$$\pi_P = B(w) - 1.$$

作弊者获得相同的福利并节省税款，但要承担两项成本。侦查是一个随机事件，发生率为每年 $d(w) = k(1-s)\varphi w$ （警察预算为财富的$(1-s)\varphi$ 倍，且 k为其效率）；每次侦查都会使作弊者受到制裁 $F \geq 0$，因此每年的预期制裁为 $Fd(w)$，这与威慑经济学理论 [1]中的设定一致。此外，作弊还会带来道德或心理成本 $m(w) \in [0, 1)$，而教育会提高这一成本；沿用 NHP 的做法，他们令教育将招募人数按因子 $1/(1 + \eta_1 s\varphi W)$降低，我们取 $1 - m(w) = g(w) = 1/(1 + \eta s\varphi w)$，其中 $\eta \geq 0$。因此

$$\pi_C = B(w) - m(w) - Fd(w),$$

而作弊比缴费更有利，优势为

$$\Delta\pi(w) = \pi_C - \pi_P = g(w) - Fd(w), \qquad g(w) = \frac{1}{1 + \eta s\varphi w}, \qquad d(w) = k(1 - s)\varphi w. \tag{2}$$

福利 $B(w)$相互抵消：无论是否缴费，每个人都能享受公共物品，这正是社会困境。我们还忽略了个体税款对 w的影响，其量级为 $1/N$。没有教育和制裁时， $\Delta\pi = 1$ ，作弊总是有利可图。

2.4 从个体修正到人口方程

现在，我们分四步从个体行为推导作弊者比例方程。考虑一个由 N 个体组成的种群，其中 Y 个个体作弊。

步骤 *1*：个体规则。每个个体都会不时重新考虑自己的策略，具体而言，每年以速率为 1 的泊松过程所确定的时刻进行策略调整，且彼此独立。进行策略调整时，个体会随机观察种群中的另一名成员及其收益。如果对方采用相同的策略，则不作任何改变。如果对方采用另一种策略，调整策略的个体就以概率

$$p_{\text{switch}} = \lambda \left[\pi_{\text{other}} - \pi_{\text{own}}\right]_+, \qquad [x]_+ = \max(x, 0), \tag{3}$$

其中 $\lambda > 0$ 足够小，使得 $p_{\text{switch}} \le 1$ ($\lambda \le 1$/最大值 $|\Delta\pi|$)。因此，个体绝不会模仿表现更差的策略；优势越大，模仿更优策略的频率就越高。这就是 Schlag [12], 提出的比例模仿规则。他证明，在仅使用个体自身收益和一名随机抽样个体收益的规则中，只有这种比例形式的规则能在所有情况下提高种群的预期收益；而在大规模人口中，这类规则会产生复制子动力学。由于 $\pi_C - \pi_P = \Delta\pi$，缴税者遇到作弊者时会以概率 $\lambda[\Delta\pi]_+$转换策略，而作弊者遇到缴税者时则会以概率 $\lambda[-\Delta\pi]_+$转换策略。

步骤 *2*：其他事件。另外还有三种事件会改变策略，且不涉及比较收益：缴费者可能以速率 $\tau_0 g(w)$自发开始作弊，教育会像式（1）那样降低该速率（“探索”，或用生物学术语来说，即突变）；作弊者可能以速率μ自发停止作弊；作弊者也可能以速率 $d(w)$被发现，之后缴纳制裁款，且该个体恢复缴税。

步骤 *3*：短时间内的期望变化。在一个短时间间隔（$t,\ t+\Delta t$）内，$N-Y$个缴费者中的每一个都会以概率 Δt修改策略，以概率 Y/N 遇到作弊者，随后以概率 $\lambda[\Delta\pi]_+$切换策略；此外，它还会以概率 $\tau_0 g\,\Delta t$自发开始作弊。Y个作弊者中的每一个都会以概率 Δt修改策略，以概率（$N-Y$）$/N$ 遇到缴费者并以概率 $\lambda[-\Delta\pi]_+$切换策略，或者以概率 $\mu\Delta t$自发停止作弊，或以概率 $d\,\Delta t$被发现。忽略 Δt^2阶及更高阶项后，作弊者数量的期望变化 ΔY 满足

$$\frac{\mathbb{E}[\Delta Y]}{\Delta t} = \lambda \frac{(N-Y)\,Y}{N}\Big([\Delta\pi]_+ - [-\Delta\pi]_+\Big) + (N-Y)\,\tau_0 g - (\mu+d)\,Y, \tag{4}$$

其中，第一项汇总了模仿作弊者的缴税者和模仿缴税者的作弊者，第二项表示自发进入，最后一项表示退出和侦查。除以 N 并记作$y = Y/N$、$c = 1-y$，又由于 $[x]_+ - [-x]_+ = x$，两个模仿流合并为一个净流 $\lambda y c\,\Delta\pi$：当作弊更有利时（$\Delta\pi > 0$），缴税者转变为作弊者；当作弊较不有利时（$\Delta\pi < 0$），作弊者转变为缴税者。

步骤 *4*：大规模人口。过程 $Y(t)$是一个马尔可夫跳跃过程，其跳跃幅度为 ± 1。当 $N \to \infty$ 时，比例 $y(t) = Y(t)/N$ 在每个有限时间区间上收敛到微分方程的解；该方程的右端项是步骤 3 中计算出的单位时间预期变化，波动量级为 $N^{-1/2}$ （Kurtz定理 [13]）。财富也同样如此，其遵循式（1）的平衡关系 $W = a(N-Y) - (\theta+\varphi)W$，除以$aN$后得到 $\dot{w} = c - (\theta+\varphi)w$。

结果是

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \underbrace{\tau_0\, g(w)\, c}_{\text{spontaneous entry}} + \underbrace{\lambda\, y\, c\, \Delta\pi(w)}_{\text{imitation}} - \underbrace{\mu y}_{\text{drop-out}} - \underbrace{d(w)\, y}_{\text{detection}}, \\ \dot{w} &= c - \rho w, \qquad \rho := \theta + \varphi, \qquad c = 1 - y. \end{aligned} \tag{5}$$

模仿项是双策略博弈的复制子方程：对于平均收益$\bar{\pi} = y\pi_C + c\pi_P$，有 $y(\pi_C - \bar{\pi}) = yc\,\Delta\pi$，因此，模仿会使某一策略的增长与其出现频率以及相对于平均值的收益优势成正比 [14, 5]。因子 yc 表示一次策略调整将不同策略的个体聚集在一起的概率；当所有人都采用相同策略时，该因子为零，因为此时没有可供模仿的不同策略。本文中，政策三元组 $(\varphi,\ s,\ F)$保持不变。征收的罚款不会计入 W。状态空间$\{0 \le y \le 1,\quad w \ge 0\}$ 是正向不变的，且 $w(t) \le \max\{w(0),\ 1/\rho\}$。

命题1 对于 $\lambda = 0$，系统 *(5)* 是归一化变量下 *NHP* 的两类模型 *(1)*，其中 $\tau_0 = \bar{\tau}_1$ 和 η, k 按 aN重新缩放。

证明。将（1）的第一个方程除以 N，第二个方程除以 aN，并令 $\eta_1 W = \eta_1 aN\, w$和 $kW = kaN\, w$。□

因此，NHP两类模型就是作弊仅通过自发进入传播时的极限情形。在 $\lambda > 0$下，威慑在（5）中具有两种截然不同的作用：$-dy$ 项会清除作弊者，而 $-\lambda yc\,Fd$ 项会降低作弊对模仿者的吸引力。第4节表明，在该模型中，只有第二类作用能够产生滞后现象。

表1：模型（5）的变量和参数。比率的单位为每年；预算份额是共同财富的比例。

符号	含义	参考值
y, $c = 1 - y$	作弊者和缴费者的比例	–
w	完全合规时年度收入单位下的共同财富	–
	合规	
φ	用于打击作弊的预算份额	决策变量
s	用于教育的预算比例	决策变量
F	每次查获的处罚，以纳税年数计	决策变量
θ	日常开支的预算份额	1
k	执法效率	1
η	教育效率	100
λ	模仿率	0.1
μ	作弊者自发退出率	0.01
τ_0	自发参与作弊率	0, 10^{-3}, 10^{-2}
D, E	完全遵从时的执法与教育力度，公式（7）	推导得出

参数。 表1列出了模型的变量和参数。除非另有说明，我们采用NHP中的取值： $\mu = 0.01$、 $k = 1$、 $\theta = 1$ （时间以年计），以及模仿率 $\lambda = 0.1$，其值等于三类NHP模型的传染率。自发进入 τ_0 要么为零，此时可以单独考察模仿渠道；要么取较小值（10^{-3}，或 10^{-2}，即NHP的附录中的取值 $\bar{\tau}_1$ ）。对于教育，我们采用 $\eta = 100$，即NHP的附录中的取值。

3 约化与全局动力学

在方程（5）的一个均衡处， $w = c/\rho$。代入第一个方程定义标量函数

$$G(y) := \dot{y}\big|_{w=(1-y)/\rho} = \tau_0\, \hat{g}(c)\, c + y\, h(c), \qquad h(c) := \lambda c\, \widehat{\Delta\pi}(c) - \mu - Dc, \tag{6}$$

其中，帽子表示在 $w = c/\rho$ 处取值的函数：

$$\hat{g}(c) = \frac{1}{1 + Ec}, \qquad \widehat{\Delta\pi}(c) = \hat{g}(c) - FDc, \qquad D := \frac{k(1-s)\varphi}{\theta + \varphi}, \qquad E := \frac{\eta s \varphi}{\theta + \varphi}. \tag{7}$$

参数 D 是完全合规社会中每个个体的侦查率，而 E 是相应的教育力度。在均衡状态下，侦查率为 $d = Dc$：由于预算是由缴费者创造的财富的一部分，因此它与合规程度成正比。当 $\tau_0 = 0$ 时，函数 $h(c)$ 是作弊者的人均增长率。

命题2 方程（5）的均衡点为 $(y^*, (1 - y^*)/\rho)$ ，其中 $G(y^*) = 0$。当 $G'(y^*) < 0$ 时，均衡是渐近稳定的；当 $G'(y^*) > 0$ 时，它是鞍点。此外，在 $0 < y < 1, w > 0$ 中，方程（5）没有周期轨道；如果其均衡点均为双曲的，则每条轨迹都收敛于某个均衡点。

证明。 第一条结论由 $\dot{w} = 0 \iff w = c/\rho$ 得出。令 f_1, f_2 表示式 (5) 的右端项，并令 $J_{11} = \partial_y f_1$, $J_{12} = \partial_w f_1$ 表示均衡处的值。由于 $G(y) = f_1(y,(1-y)/\rho), G' = J_{11} - J_{12}/\rho$。雅可比矩阵为 $J = \left(\begin{smallmatrix} J_{11} & J_{12} \\ -1 & -\rho \end{smallmatrix}\right)$，其行列式 $\det J = -\rho J_{11} + J_{12} = -\rho G'$，迹 $\operatorname{tr} J = G' + J_{12}/\rho - \rho$。由于 g 随 w 增大而减小，而 d 随 w 增大而增大，

$$J_{12} = \tau_0 c\, g'(w) + \lambda y c \left(g'(w) - F d'(w)\right) - d'(w)\, y \le 0.$$

因此， $G' < 0$ 意味着 $\det J > 0$ 且 $\operatorname{tr} J < 0$，而 $G' > 0$ 意味着 $\det J < 0$。为证明不存在周期轨道，在 $\Omega = \{0 < y < 1,\, w > 0\}$ 上取 Dulac函数 $\beta = 1/(yc)$。于是

$$\frac{f_1}{yc} = \frac{\tau_0 g}{y} + \lambda\Delta\pi - \frac{\mu + d}{c}, \qquad \frac{f_2}{yc} = \frac{c - \rho w}{yc},$$

因此

$$\partial_y\Big(\frac{f_1}{yc}\Big) + \partial_w\Big(\frac{f_2}{yc}\Big) = -\frac{\tau_0 g}{y^2} - \frac{\mu + d}{c^2} - \frac{\rho}{yc} < 0.$$

根据 Bendixson–Dulac判据 [15]，单连通域 Ω 中不存在周期轨道，也不存在连接鞍点的轨道环。轨迹有界，因此根据庞加莱–本迪克森定理，每个 ω极限集都由均衡点组成；又由于均衡点有限且均为双曲的，因此每个极限集都只包含一个均衡点。□

命题2将分岔分析简化为对标量函数 G的分析。财富以每年 $\rho \approx 1$ 的速率趋于稳定，其速度远快于作弊者比例（速率约为 λ 和 μ），因此 $\dot{y} \approx G(y)$ 也是瞬态动力学的良好近似；我们在第7节中使用这一近似。

4 财政反馈何时会产生滞后现象?

我们首先令 $\tau_0 = 0$，这样无作弊者状态 $y = 0$ 便是一个均衡，且 $G(y) = y\,h(1 - y)$。内部均衡是 $(0,\ 1)$ 内 h的零点；由于 $G'(y) = h(c) - y\,h'(c)$，当 $h'(c) > 0$ 时，内部均衡稳定；当 $h'(c) < 0$ 时，它是一个鞍点；而当 $h(1) < 0$ 时，无作弊者状态稳定。

为揭示其结构，我们先陈述适用于一般函数的判据。假设在均衡状态下， d和 $\Delta\pi$ 通过光滑函数 $d(c) \geq 0$和$\Delta\pi(c)$依赖于合规，并令 $h(c) = \lambda c\,\Delta\pi(c) - \mu - d(c)$。

定理1 令 $\tau_0 = 0$，并令某一政策参数穿过使 $h(1) = 0$ 横截的一个值。在该值处，无作弊者状态经历跨临界分岔。如果

$$\sigma := \mu + \lambda\,\Delta\pi'(1) - \big(d'(1) - d(1)\big) < 0, \tag{8}$$

该分岔是亚临界的：在无作弊者状态稳定的一侧，存在一个具有 $c < 1$ 的鞍点和一个稳定作弊平衡点，因此社会呈现双稳态。如果 $\sigma > 0$ 它是超临界的：在无作弊者状态稳定的区域内，无作弊者状态是唯一的吸引子；而在其不稳定的区域内，则出现具有 $c < 1$ 的稳定作弊状态分支。

证明。求导得， $h'(1) = \lambda\Delta\pi(1) + \lambda\Delta\pi'(1) - d'(1)$。在分岔点处， $h(1) = 0$，即 $\lambda\Delta\pi(1) = \mu + d(1)$，因此 $h'(1) = \sigma$。在 $c = 1$附近， $h(c) \approx h(1) + \sigma(c - 1)$，所以从 $y = 0$ 分岔出的内部均衡位于 $c_r = 1 - h(1)/\sigma$处。如果 $\sigma < 0$ 且 $h(1) < 0$ （无作弊者状态稳定），那么 $c_r < 1$ 且 $h'(c_r) < 0$：它是一个鞍点。此外， $h(0) = -\mu - d(0) < 0$，并且$h > 0$ 恰好低于 c_r，因此 h 在$(0, c_r)$中还有另一个零点，并在该点递增：这是一个稳定作弊平衡点。如果 $\sigma > 0$，则 $c_r < 1$ 要求 $h(1) > 0$，且分岔出的均衡具有 $h'(c_r) > 0$，所以它是稳定的。□

该判据可解读如下。在接近完全合规时，合规度下降会通过两种渠道削弱威慑：一是激励，速率为 $\lambda|\Delta\pi'(1)|$（作弊变得更有利可图）；二是移除，即侦查率下降得比合规度本身更快，这一因素的贡献为$d'(1) - d(1)$。当两者之和超过作弊者自行退出的速率 μ时，就会出现滞后现象。

在模型 (5) 中， $d(c) = Dc$，因此 $d'(1) - d(1) = 0$：由税基出资的警察所产生的机械效应恰好相互抵消。原因在于，警察移除、 Dcy 和模仿、 $\lambda yc\,\Delta\pi$，

具有相同的形式；若不影响激励，警察只会将有效模仿率从 λ 降低到 $\lambda - D$。将 (7) 中的 $\Delta\pi$ 代入，判据变为

$$\lambda\Big(FD + \frac{E}{(1+E)^2}\Big) > \mu \qquad \text{at the threshold} \quad \frac{\lambda}{1+E} = \mu + D(1+\lambda F). \tag{9}$$

引理1 对于模型 *(5)*，h 在 $[0,1]$上是凹的。因此，对于 $\tau_0 = 0$，至多有两个内部均衡，且至多有两个吸引子。

证明。 $h(c) = \lambda c/(1+Ec) - \lambda FDc^2 - Dc - \mu$，且每一项关于 $c \geq 0$ 都是凹的。 □

由此可得四个推论。

推论1（仅有警察）若 $F = 0$ 且 $E = 0$，则 $h(c) = (\lambda - D)c - \mu$ 是线性的，并且对于每项政策，都存在唯一吸引子：若 $D \geq \lambda - \mu$，则为 $y^* = 0$；否则为 $y^* = 1 - \mu/(\lambda - D)$。对于 $\tau_0 > 0$，G 是一个恰有一个零点位于$(0,\ 1)$内的二次函数，该零点是全局吸引的。

证明。 第一部分显而易见。对于 $\tau_0 > 0$，$G(0) = \tau_0 > 0$ 且 $G(1) = -\mu < 0$；在 $(0,\ 1)$ 上变号的二次函数在那里恰有一个零点；根据命题2，该零点吸引每条轨迹。□

推论1将 NHP 对其两类模型（$\lambda = 0$）所得的唯一性结论扩展到任意模仿率：在两类设定中，单独的模仿不会产生临界点，税基提供资金的警察也不会产生临界点。

推论2（预算集为绝对金额）如果用于打击作弊的资源是固定金额 M 而不是财富的份额，即 $d = k\ (1-s)\ M$ 和 $g = 1/\ (1+\eta sM)$ 不依赖于 c，那么 h 关于 c 是线性的，并且对于每项政策和每个F，吸引子都是唯一的。

因此，在两类模型中，滞后现象既需要财政反馈，也需要一种作用于激励的威慑机制。接下来的两个推论给出了后者的两种情形。

推论3（制裁）令 $E = 0$。对于某些警察预算，无作弊者状态与某个作弊状态构成双稳态，当且仅当

$$F > F_c := \frac{\mu}{\lambda(\lambda - 2\mu)}, \qquad \textit{which requires} \quad \lambda > 2\mu. \tag{10}$$

证明。 在阈值 $D_T = (\lambda - \mu)/(1 + \lambda F)$ 处，(9) 表示为 $\lambda F(\lambda - \mu) > \mu(1 + \lambda F)$，即 $\lambda F(\lambda - 2\mu) > \mu$。全局结论由命题 3 中明确给出的区间得出。□

推论4（教育） 设 $F = 0$。当且仅当在阈值处 $\lambda E/(1+E)^2 > \mu$ 时，无作弊者状态的分岔是亚临界的。由于 $E/(1+E)^2 \leq 1/4$，仅靠教育只有在 $\lambda > 4\mu$ 时才能产生滞后现象；对于 $\lambda = 0.1$, $\mu = 0.01$，这种情况发生在 $E \in (0.127,\ 7.87)$。

例如，在 $\eta = 100$ 和 $s = 0.5$ 时，阈值处为 $E \approx 2.2$，且当 $\varphi \in [0.0452, 0.0526]$ 时社会处于双稳态。其机制与制裁相同：教育所产生的作弊道德成本由税基提供资金，因此合规下降时，这种成本也会减弱。

注释1 推论*1*和推论*2*中的抵消效应，基于两类模型的两个特征：均衡时的财富与缴税者人数成正比，因此侦查率相对于合规的弹性恰好为*1*；并且每个缴税者都可以被招募去作弊。一般而言，这两点都不成立。在三类*NHP*模型中，富裕缴税者的贡献高于贫困缴税者，而且阶层构成取决于教育预算，因此财富及其带来的侦查未必与合规成正比；同时，可转变为作弊者的缴税者群体也会随财富而变化。在定理*1*中，第一个效应通过 $d'(1) - d(1)$ 体现，第二个效应则通过模仿项中的一个额外因子体现；即使政策对激励毫无影响，二者中的任一效应都可能使 σ 为负。因此，本节关于警察和绝对预算的论述仅适用于两类结构。

表 2：由 (12) 得到的 $\tau_0 = 0$、 $E = 0$、 $s = 0$ 的双稳态区间。 y_-：下边界（$D = D_T$）和折叠点（$D = D_{SN}$）处稳定作弊状态的作弊者比例。 $R = D_{SN}/D_T$。

F	D_T	D_{SN}	φ_T	φ_{SN}	R	y_-（D_T）	y_-（D_{SN}）
2	0.0750	0.0754	0.0811	0.0816	1.006	0.333	0.186
5	0.0600	0.0642	0.0638	0.0686	1.070	0.667	0.442
10	0.0450	0.0537	0.0471	0.0567	1.193	0.778	0.568
30	0.0225	0.0351	0.0230	0.0364	1.560	0.852	0.692
100	0.0082	0.0172	0.0083	0.0175	2.097	0.878	0.759

5 制裁：双稳态区间的闭式

令 $\tau_0 = 0$ 和 $E = 0$ （例如 $s = 0$或 $\eta = 0$）。那么

$$h(c) = -\lambda F D\, c^2 + (\lambda - D)\, c - \mu, \tag{11}$$

并且所有量都可以显式计算。

命题 3 令 $\tau_0 = 0$、 $E = 0$ 和 $F > F_c$。当且仅当 $D_T < D <D_{SN}$ 时，社会处于双稳态，其中

$$D_T = \frac{\lambda - \mu}{1 + \lambda F}, \qquad D_{SN} = \lambda\Big(\sqrt{1 + F\mu} - \sqrt{F\mu}\Big)^2. \tag{12}$$

当 $D > D_{SN}$ 时，无作弊者状态是唯一的吸引子；而当 $D < D_T$ 时，它不稳定，作弊状态是唯一的吸引子。稳定作弊状态和鞍点的合规程度为

$$c_{\mp} = \frac{\lambda - D \mp \sqrt{(\lambda - D)^2 - 4\lambda F D \mu}}{2\lambda F D}, \tag{13}$$

并且在 $D = D_{SN}$ 处，它们在 $c_v = 2\mu/(\lambda - D_{SN})$处合并。在 $F = F_c$ 处，该区间收缩为点 $D_T = D_{SN} = \lambda - 2\mu$，此处跨临界分岔与鞍结分岔相遇。用预算份额表示， $\varphi = \theta D/(k(1 - s) - D)$。

证明。 (11)的零点为(13)； c_- 稳定， c_+ 是鞍点，因为 $h'(c_-) > 0 > h'(c_+)$。当判别式为正时，它们存在，即当 $D < D_{SN}$时，其中 $D < D_{SN}$是$(\lambda - D)^2 = 4\lambda F \mu D$的较小根，也就是(12)。当且仅当 $h(1) < 0$时，无作弊者状态稳定，即 $D > D_T$。双稳态还要求 $0 < c_- < c_+ < 1$。已知 $h(1) < 0$ 且 $h(0) < 0$，当且仅当抛物线的顶点$(\lambda - D)/(2\lambda F D)$位于$(0, 1)$内时，这一条件成立。顶点随 D增大而下降；在 $D = D_T$处，当且仅当 $\lambda - D_T < 2\lambda F D_T$时，顶点低于1，这就是推论3的条件 $F > F_c$。在折叠点处，顶点为 $c_v = 2\mu/(\lambda - D_{SN})$；直接计算可得， $D_T = D_{SN} = \lambda - 2\mu$（因此 $c_v = 1$）当且仅当 $F = F_c$，并且当 $F > F_c$时 $D_T < D_{SN} < \lambda - 2\mu$。当 $F < F_c$ 时，重根位于 $c_v > 1$，在状态空间之外，且无作弊者状态的分岔为超临界。□

图1展示了 (D, F) 平面上的区间，图2展示了三种制裁下平衡点随 D 变化的情况；表2给出了数值结果，这些结果与对二维系统 (5) 进行直接延拓所得结果一致，精度达到延拓网格的精度。

区间的两个边界具有直接含义。 D_T 是使守规社会保持合规所需的预算， D_{SN} 是在恒定政策下救援崩溃社会所需的预算；二者的比值衡量滞后现象的成本。滞后现象并不要求制裁达到使作弊无利可图的程度：在区间下边界，守规社会中作弊者的预期年度制裁为 $FD_T = F(\lambda - \mu)/(1 + \lambda F) < 1 - \mu/\lambda$，低于每个 F所带来的收益；而在 $F = F_c$ 处，该制裁等于 μ/λ，即 NHP 速率收益的十分之一。关键不在于制裁的大小，而在于其效果随合规程度下降而消退的速度。

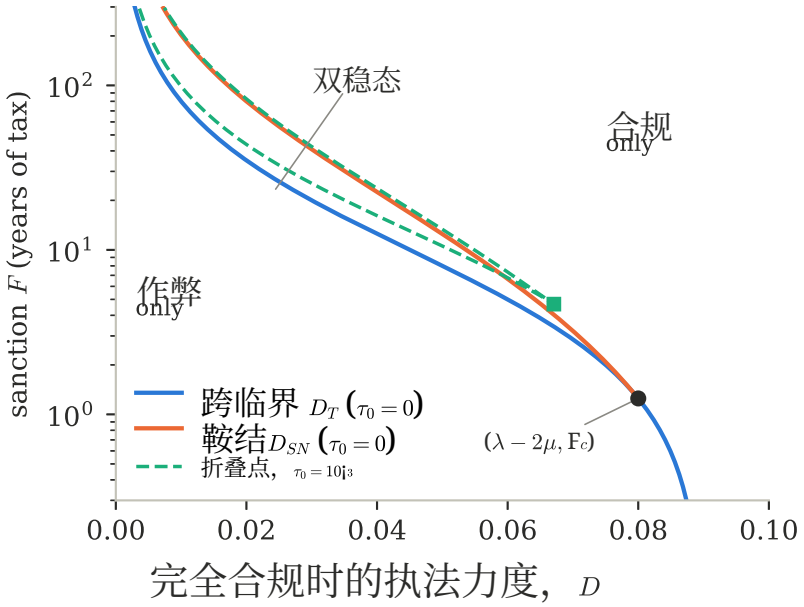

图1：执法力度 D 与制裁 F $(E = 0)$平面上的分岔集。实线：由 (12) 得到的跨临界线 D_T和鞍结线 D_{SN}，适用于 $\tau_0 = 0$；它们交于 $(\lambda - 2\mu,\ F_c)$。虚线：由 (16) 得到的两条折叠线，适用于 $\tau_0 = 10^{-3}$，交于尖点 (15)（方形）。预算份额为 $\varphi = \theta D/(k(1-s) - D)$。参数为 $\lambda = 0.1$、 $\mu = 0.01$。

命题4 比值 $R(F) = D_{SN}/D_T$在 $F = F_c$处等于1，并趋向于

$$R_\infty = \frac{\lambda^2}{4\mu(\lambda - \mu)} \tag{14}$$

当 $F \to \infty$ 时。对于 $\lambda = 0.1,\ \mu = 0.01,\ R_\infty = 2.78$。

证明。 当 F 较大时， $\sqrt{1+F\mu} - \sqrt{F\mu} = 1/(\sqrt{1+F\mu} + \sqrt{F\mu}) \sim 1/(2\sqrt{F\mu})$，因此 $D_{SN} \sim \lambda/(4F\mu)$，而 $D_T \sim (\lambda - \mu)/(\lambda F)$。□

制裁会降低两种预算，幅度大致为 $1/F$，但从相对意义上看，会扩大区间：制裁较重时，挽救一个崩溃社会的成本几乎是维持一个合规社会的三倍，且与制裁力度无关。这个界限只取决于模仿与退出的比值。

6 自发作弊：尖点的闭式解

当 $\tau_0 > 0$ 时，无作弊者状态不再是均衡，跨临界分岔展开为一对在尖点 [16]处相遇的鞍结分岔。对于 $E = 0$， G 是关于 y的三次多项式，

$$G(y) = -Ay^3 + (2A - \lambda + D)\,y^2 + (\lambda - D - \mu - \tau_0 - A)\,y + \tau_0, \qquad A := \lambda F D,$$

整个分岔集都有显式表达式。

命题5 设 $E = 0$ 和 $\tau_0 > 0$。尖点为

$$y_c = \frac{\tau_0^{1/3}}{\tau_0^{1/3} + \mu^{1/3}}, \qquad A_c = \left(\tau_0^{1/3} + \mu^{1/3}\right)^3, \qquad D_c = \lambda - A_c(2 - 3y_c), \qquad F_{\text{cusp}} = \frac{A_c}{\lambda D_c}, \tag{15}$$

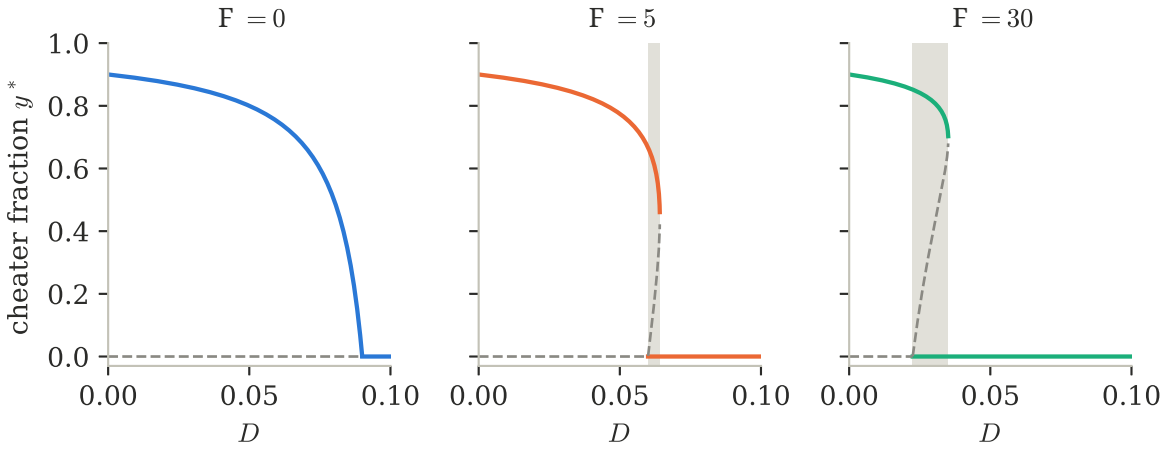

图 2：均衡作弊者比例与执法力度的关系 D，对应 $F = 0$、5 和 30（$\tau_0 = 0$，$E = 0$）。实线：稳定；虚线：不稳定。阴影部分：双稳态区间 (12)。没有制裁时，无作弊者状态的分岔为超临界；当 $F_c = 1.25$ 以上时，则为亚临界。

作弊者比例 $y \in (0,1)$ 处的折叠点曲线以参数形式表示为

$$D(y) = \lambda - \frac{2\mu}{1-y} - \frac{\tau_0\,(1-2y)}{y^2}, \qquad F(y) = \frac{1}{\lambda D(y)}\Big(\frac{\mu}{(1-y)^2} + \frac{\tau_0}{y^2}\Big). \tag{16}$$

当 $\tau_0 \to 0$，$(y_c,\ D_c,\ F_{\text{cusp}}) \to (0,\ \lambda - 2\mu,\ F_c)$。

证明。在尖点处，三次多项式有一个三重根，$G(y) = -A(y-y_c)^3$。比较系数可得$2A - \lambda + D = 3Ay_c$、$\lambda - D - \mu - \tau_0 - A = -3Ay_c^2$和 $\tau_0 = Ay_c^3$。在前两个式子之间消去 $\lambda - D$，得 $A(1 - 3y_c + 3y_c^2) = \mu + \tau_0$；由于 $1 - 3y + 3y^2 = (1-y)^3 + y^3$，用第三个式子相除，得 $\big((1-y_c)/y_c\big)^3 = \mu/\tau_0$，从而得到 (15)。对于折叠点，设 $G = \tau_0 c + y\,(-Ac^2 + uc - \mu)$，其中$u = \lambda - D$、$c = 1 - y_c$。条件 $G = 0$和 $G'(y) = 0$是关于（A，u）的线性方程；用 G' 减去 G/y，得 $y(2Ac - u) = \tau_0/y$，再由 $G = 0$得 $Ac^2 = \mu + \tau_0 c^2/y^2$，即 (16)。□

自发作弊会使区间向更大的预算偏移，并提高实现双稳态所需的制裁水平：$F_{\text{cusp}} = 2.44$、4.68 和 13.3，分别对应 $\tau_0 = 10^{-4}$、10^{-3} 和 10^{-2}；而 $F_c = 1.25$ 对应$\tau_0 = 0$。对于 $F = 30$，区间在 $\tau_0 = 10^{-3}$ 时为 $\varphi \in [0.0274, 0.0372]$，在$\tau_0 = 10^{-2}$时为 $[0.0399, 0.0445]$；而 $\tau_0 = 0$ 时为 $[0.0230, 0.0364]$（图 1）。

7 救援需要多长时间?

刚越过折叠点时，崩溃状态虽已消失，但动力学仍会在原处减慢：轨迹必须经过一个瓶颈，即鞍结的“幽灵” [17]。设 $\tau_0 = 0$、$E = 0$，并假设政策从D_{SN}提高到 $D_{SN} + \Delta D$时，社会处于折叠态 $y_v = 1 - c_v$。将式（6）在（y_v，D_{SN}）附近展开并保留最低阶项，利用 $h(c_v) = h'(c_v) = 0$和 $h'' = -2\lambda F D$，

$$\dot{y} \approx -y_v\Big[c_v(1 + \lambda F c_v)\,\Delta D + \lambda F D_{SN}\,(y - y_v)^2\Big].$$

从 y_v 积分即可得到离开瓶颈所需的时间。沿着慢流形 $w = c/\rho + \dot{y}/\rho^2 + \ldots$，财富的滞后使作弊者动力学减慢了 $1+\kappa$ 倍，$\kappa = -J_{12}/\rho^2$，其中 J_{12} 如命题2的证明所示。结果为

$$T \simeq \frac{\pi\,(1+\kappa)}{2\,y_v\sqrt{\lambda F D_{SN}\,c_v(1+\lambda F c_v)\,\Delta D}}, \qquad \kappa = \frac{k(1-s)\varphi_{SN}\,y_v\,(1+\lambda F c_v)}{(\theta + \varphi_{SN})^2}. \tag{17}$$

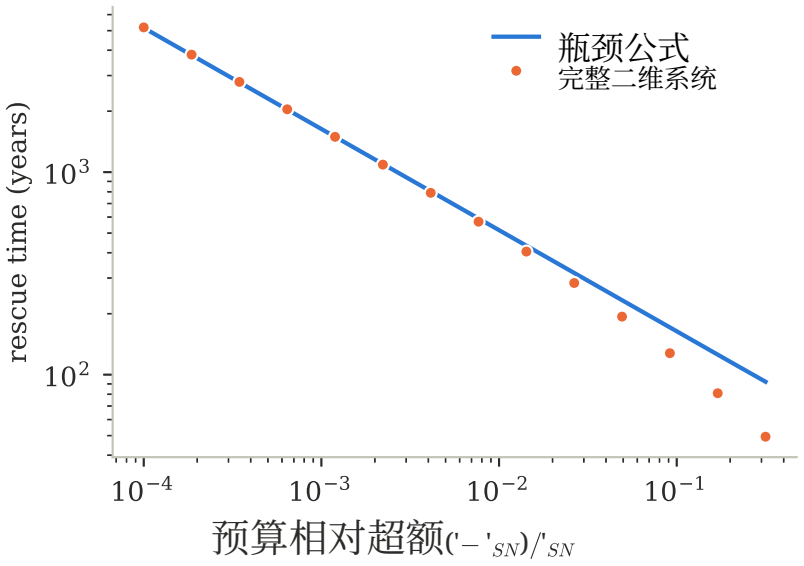

图3：从折叠态到作弊者比例减半所需的挽救时间，与预算份额相对于 φ_{SN} ($F = 30$, $s = 0$, $\tau_0 = 0$) 的超额比例之间的关系。实线：瓶颈公式 (17)；圆点：完整系统 (5) 的积分结果。

图3将（17）与完整系统（5）到达 $y_v/2$ 所需的时间进行了比较，其中 $F = 30$（$y_v = 0.692$, $\kappa = 0.045$）：超额预算低于 0.3% 时，两者相差不超过 1%；低于 1% 时，相差不超过 4%；再远一些时，二次近似会高估所需时间。挽救时间在 $\Delta D^{-1/2}$ 时趋于无穷。预算比 φ_{SN} 高出 1% 时，挽救约需 490 年；高出 10% 时，约需 120 年。由于模型中的比率以年为单位，这表明，在人类时间尺度上，仅略高于阈值的恒定政策根本无法实现救援；若要更快地实现救援，政策就必须随时间变化。

8 最优干预设计

前几节的闭式结果将分岔分析转化为一系列设计问题。我们探讨两个问题：如何在执法和教育之间分配预算，以最低成本维持社会合规；以及在成本和韧性都很重要时，如何选择制裁。本节中始终假设 $\tau_0 = 0$，因此，维持合规意味着保持无作弊者状态稳定。

8.1 最低维持预算

设 $x = \varphi/(\theta+\varphi) \in [0, 1)$ 表示用于打击作弊的公共支出占比，$s \in [0, 1]$ 表示分配给教育的公共支出占比，其余用于执法；则$D = k(1 - s)x$ 且 $E = \eta s x$。在两类模型中，教育仅通过作弊的道德成本发挥作用，该成本用 η 衡量。根据定理1和式（9），无作弊者状态渐近稳定，当且仅当

$$H(s, x) := \frac{\lambda}{1 + \eta s x} - \mu - k(1 - s)x(1 + \lambda F) < 0. \tag{18}$$

决策者希望找到能够维持合规的最小投入，

$$x_T = \inf\{x \in [0, 1) : \ H(s, x) < 0 \text{ for some } s \in [0, 1]\}, \tag{19}$$

边界 $H = 0$ 即为失去合规的阈值。

命题 6 设 $\tau_0 = 0,\ \ \rho = \lambda/\mu$ 且

$$Q := \sqrt{\frac{\lambda\eta}{k(1+\lambda F)}}. \tag{20}$$

式 *(19)* 的解为：

(i) 若 $Q \le 1$ （仅执法）： $s^* = 0$ 且 $x_T = (\lambda-\mu)/(k(1+\lambda F))$；

(ii) 若 $1 < Q \le \rho$ （混合方案）：

$$s^* = \frac{Q-1}{2Q-1-Q^2/\rho}, \qquad x_T = \frac{\lambda(2Q-1)/Q^2-\mu}{k(1+\lambda F)}; \tag{21}$$

(iii) 若 $Q > \rho$ （仅教育）： $s^* = 1$ 且 $x_T = (\lambda-\mu)/(\mu\eta)$。

证明。 H 随 x 增大而减小，对每个 s均如此，因此 x_T 是使 $\min_s H = 0$ 成立时 x 的取值。 H 关于 s 为凸函数，且 $\partial_s H = x(k(1+\lambda F) - \lambda\eta/(1+\eta s x)^2)$；若 $Q \le 1$，则对所有 $s \ge 0$ 均为正，因此得到 (i)；否则，它在 $1+\eta s x = Q$ 处变为零。将 $1+\eta s x = Q$ 和 $k(1+\lambda F)/\eta = \lambda/Q^2$代入 $H = 0$，得到式 (21) 中的 x_T 以及 $\eta x_T = 2Q - 1 - Q^2/\rho$，因此 $s^* = (Q-1)/(\eta x_T)$ 如式 (21) 所示；当且仅当 $Q \le \rho$ 时，此点位于 $(0,1]$。若 $Q > \rho$，则在阈值处， H 随 s 在 $[0,1]$ 上减小，最小值出现在 $s = 1$，且 $H(1,x) = \lambda/(1+\eta x) - \mu$ 在 $x = (\lambda-\mu)/(\mu\eta)$ 处变为零。□

参数 Q^2 比较了在 $s = 0$ 处教育对合规稳定性的边际效应 $\lambda\eta$ 与执法的边际效应 $k(1+\lambda F)$。因此，最优政策分为三种情形。如果 $Q \le 1$，等价地说， $\lambda\eta \le k(1+\lambda F)$，则全部预算都应投入执法。如果 $1 < Q \le \lambda/\mu$，最优方案则是混合方案，教育占比为 (21)；由于 $\lambda(2Q-1)/Q^2 < \lambda$ 对于 $Q \ne 1$，教育总会降低维持预算。如果 $Q > \lambda/\mu$，教育的效果非常显著，全部预算都应投入教育；教育占比 (21) 在 $Q = \lambda/\mu$ 处连续达到 1。制裁会将执法的边际价值乘以 $1+\lambda F$，因为每次侦查也会改变模仿者的激励，因此会挤出教育：对于 $\eta = 100$，只有在 $F < (\lambda\eta/k - 1)/\lambda = 90$ 时，教育才是成本最低政策的一部分（图 4）。在没有制裁且 $\eta = 100$ 的情况下，成本最低的维护政策采用 $s^* = 0.5$ 和 $\varphi = 0.0452$，所需预算不到仅采用执法时的一半（$\varphi = 0.099$）。

在最优分割下，对于图 4 中的每个 F，式（8）中的 $\sigma < 0$：维持社会合规的最低成本方法，是让社会处于双稳态区间内，因此，若社会维持在这一预算水平，遭受冲击并陷入作弊状态后便无法恢复。因此，单靠成本最小化会导致脆弱政策，这也促使我们提出第二个设计问题。

8.2 制裁：效率与韧性

双稳态区间的两条边界，即式（12）中的 D_T 和 D_{SN}，都会随 F 增大而下降，因此，更严厉的制裁会降低维持社会合规所需的预算，也会降低救助崩溃社会所需的预算。以 $F = 30$ 为例，在 $F = F_c$ （$\varphi_T = 0.087$）时，救助预算（$\varphi_{SN} = 0.036$）不到维持预算的一半。从预算角度看，制裁具有效率。不过，制裁并非没有风险：对于 $F \le F_c$，合规会在同一预算水平下丧失并恢复；而对于 $F > F_c$，冲击可能使合规社会陷入作弊状态，只有更高的预算 D_{SN} 才能将其救回，而且恢复缓慢（第7节）。

我们用韧性指标来衡量这种脆弱性

$$\mathcal{R} := \frac{D_{SN}}{D_T} = \frac{(1+\rho m)\left(\sqrt{1+m}-\sqrt{m}\right)^2}{1-1/\rho} \quad (m > m_c), \qquad \mathcal{R} = 1 \quad (m \le m_c), \tag{22}$$

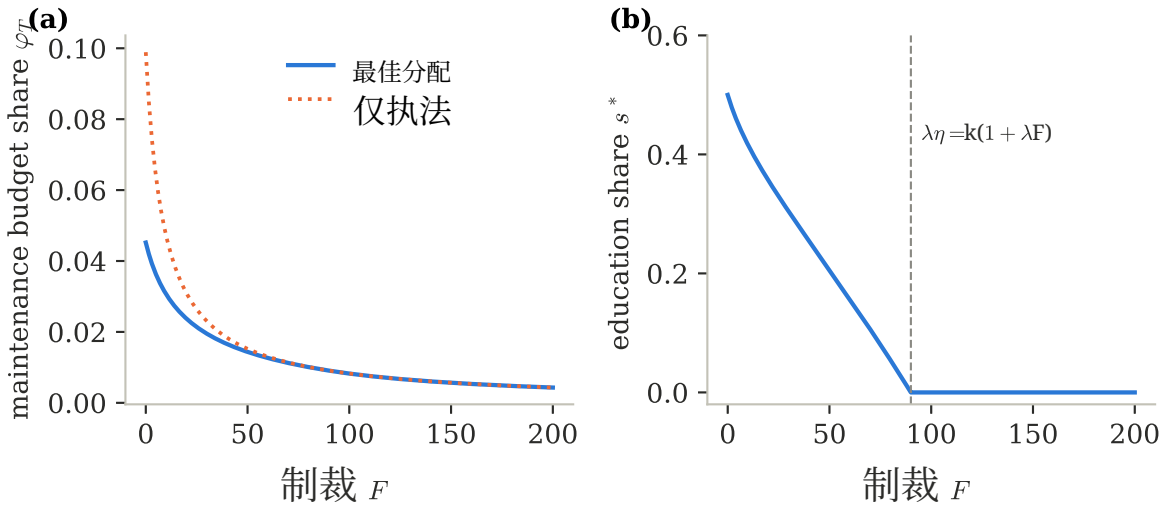

图4：（a）根据（21），在最佳分配（实线）和仅执法（虚线）两种情况下，维持守规社会继续合规所需的最低预算份额。（b）最佳分配中的教育占比 s^*。 $\eta = 100$， $\tau_0 = 0$。虚线标示 $Q = 1$，即 $\lambda\eta = k(1+\lambda F)$；高于该值后，教育不再是成本最低的维护政策。

该指标仅取决于两个无量纲组：模仿率相对于退出率的比值 $\rho = \lambda/\mu$，以及制裁相对于退出率的比值 $m = \mu F$；阈值 $m_c = \mu F_c = 1/[\rho(\rho-2)]$ 标志着突变的开始。对于较小的预算，$\mathcal{R}$ 也是预算份额 φ_{SN}/φ_T的比值。$\mathcal{R} = 1$ 表示系统具有韧性，不存在临界点；$\mathcal{R} \gg 1$ 表示系统脆弱，恢复成本高。对于图5中的每个 ρ，$\mathcal{R}$ 都会随 m 增加并趋近于 $R_\infty = \rho^2/[4(\rho-1)]$（命题4），因此，制裁越严厉，尤其是模仿相对于退出的速度越快，系统就越脆弱。对于 NHP 速率（$\rho = 10$）和 $F = 30$，$\mathcal{R} = 1.56$。

这种权衡可以表述为一个设计问题。仅采用执法时，若决策者接受的恢复预算不超过维持预算的$\mathcal{R}_{\max}$ 倍，且不能施加超过法定上限 $F_{\max}$的制裁，则其求解

$$\min_{F} \; D_T(F) \quad \text{subject to} \quad \mathcal{R}(F) \le \mathcal{R}_{\max}, \quad 0 \le F \le F_{\max}. \tag{23}$$

由于 D_T 随 F增加而减小，且$\mathcal{R}$ 随 F增加而增大，因此解是可接受的最大制裁，$F^* = \min\{F_{\max}, \mathcal{R}^{-1}(\mathcal{R}_{\max})\}$，其中$\mathcal{R}^{-1}$ 是(22)在 $F > F_c$上的反函数；若决策者希望完全避免临界点（$\mathcal{R}_{\max} = 1$），则选择 $F^* = \min\{F_{\max}, F_c\}$。表3给出了 NHP 速率下的解。实现完全韧性需要付出 $\varphi_T = 0.087$；若能容忍恢复预算达到维持预算的两倍，则可实现 $F^* = 80$，并将维持预算削减至$\varphi_T = 0.010$。在这条曲线上选择何处，取决于合规冲击发生的可能性，以及长期普遍作弊造成的代价有多高。这些信息虽不在模型的考察范围内，但决策者可以借助(22)和(23)明确权衡这些因素。

9 敏感性与稳健性

模型的参数，尤其是模仿率和退出率，难以估计，因此预算对这些参数的依赖程度至关重要。我们还检验了分析所依据的两项近似：用于推导第 2.4 节公式 (5) 的大规模人口极限，以及将政策描述为时间恒定的假设。

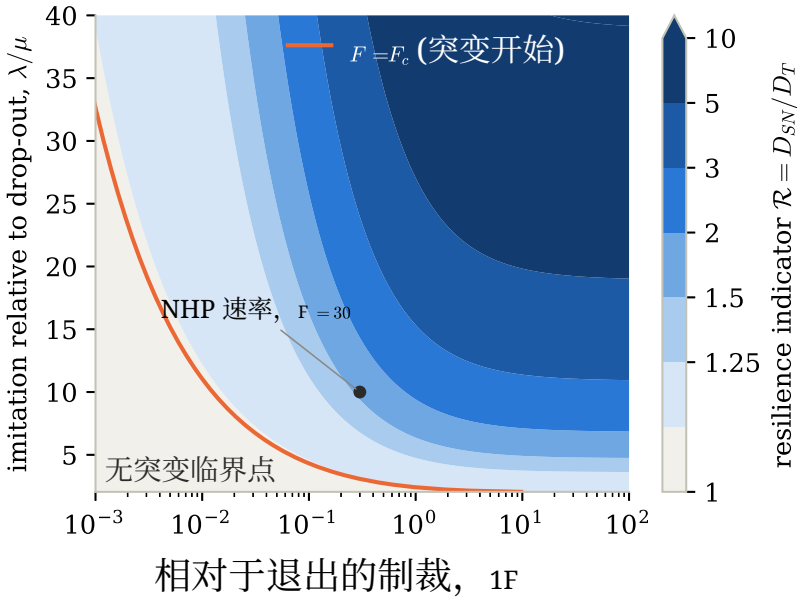

图5：韧性指标 (22) 随相对于退出的制裁 μF 以及相对于退出的模仿率 λ/μ ($\tau_0 = 0$, $E = 0$) 的变化。橙色线（$F < F_c$）左侧不存在突变临界点，且$\mathcal{R} = 1$。圆点标示出具有 $F = 30$ 的 NHP 速率。

表3：无须遵守法定上限时的韧性约束设计问题（23）的解（$F_{\max} = \infty$），仅执法，$\tau_0 = 0$, $\lambda = 0.1$, $\mu = 0.01$。

$\mathcal{R}_{\max}$	F^*	φ_T (维持)	φ_{SN} (救援)
1（无临界点）	1.25	0.0870	0.0870
1.10	6.2	0.0587	0.0650
1.25	12.5	0.0417	0.0526
1.50	25.9	0.0257	0.0390
2.00	80.0	0.0101	0.0204

9.1 阈值敏感性

令 $S_p^X = (p/X)\,\partial X/\partial p$ 表示量 X 相对于参数 p的弹性：p 变化 1%，X 就变化 S_p^X%。仅考虑执法且 $\tau_0 = 0$时，由 (12) 可得

$$S_\lambda^{D_T} = \frac{\lambda}{\lambda-\mu} - \frac{\lambda F}{1+\lambda F}, \qquad S_\mu^{D_T} = -\frac{\mu}{\lambda-\mu}, \qquad S_F^{D_T} = -\frac{\lambda F}{1+\lambda F},$$
$$S_\lambda^{D_{SN}} = 1, \qquad S_\mu^{D_{SN}} = S_F^{D_{SN}} = -\sqrt{\frac{\mu F}{1+\mu F}}, \tag{24}$$

以及 $S_p^{\mathcal{R}} = S_p^{D_{SN}} - S_p^{D_T}$；预算份额 φ 的弹性可通过乘以 $k(1-s)/(k(1-s) - D)$ 得出，对于较小的预算，该值接近于一。加入教育渠道后，式（21）在混合机制 $1 < Q \le \lambda/\mu$下给出 $S_\eta^{x_T} = \lambda(1-Q)/[Q^2 k(1+\lambda F)x_T]$。表4列出了 NHP 速率的数值。

表格展示了三点。预防成本主要受制裁影响：维持预算对 F 最为敏感，而对行为速率仅有较弱的敏感性，因此即使 λ和 μ 不确定，也能可靠地计算出维持预算。恢复成本主要受模仿率影响，其弹性恰好为 1：行为传播速度快 10% 的社会，需要增加 10% 的救助预算，因此恢复成本这一数量的不确定性更高。

表 4：维持预算 D_T、救助预算 D_{SN} 和韧性指标$\mathcal{R}$在 $\lambda = 0.1$、 $\mu = 0.01$、 $F = 30$下的弹性 (24)（仅执法， $\tau_0 = 0$）。最后一行：最优维护力度 x_T 相对于 η （$\eta = 100$）的弹性，适用于 $F = 0$，10，30。

	模仿率 λ	退出率 μ	制裁 F
维持预算 D_T	0.36	-0.11	-0.75
救助预算 D_{SN}	1.00	-0.48	-0.48
韧性指标 $\mathcal{R}$	0.64	-0.37	0.27
相对于 η 的最优维护力度 x_T：	-0.50 ($F = 0$)，	-0.42 ($F = 10$)，	-0.30 ($F = 30$)

此外，韧性指标随模仿率和制裁的提高而上升，随退出的增加而下降，这与图 5 一致。双稳态区域的边界对自发作弊也具有稳健性：对于 $\tau_0 = 10^{-3}$， $F = 30$ 的区间从 $[0.0230, 0.0364]$ 移至$[0.0274, 0.0372]$ （第 6 节）。

9.2 基于个体的模拟

我们直接模拟了第2.4节步骤1和2中的个体过程，不采用平均场极限，而是以步长为 $\Delta t = 0.02$ 年进行 τ 跳跃：每一步中，开始作弊的缴费者人数和停止作弊的作弊者人数均为泊松变量，其比率如式（4）所示；财富则根据当前缴费者人数更新。我们使用了 $F = 30$、 $s = 0$、 $\tau_0 = 10^{-3}$ 和 $\varphi = 0.032$，其值位于第6节的双稳态区间 $[0.0274, 0.0372]$ 内。图6显示，对 $N = 1000$ 和 $N = 10\,000$ 个体进行的模拟符合式（5）的解；从作弊者比例为5%和60%的初始状态出发，系统分别稳定在合规状态和作弊状态：两种状态共存并非大群体极限造成的假象。对每种规模进行了20次模拟，300年后的作弊者比例与确定性值（0.0319）的平均差异小于 10^{-3}；其标准差从 $N = 500$ 对应的 6.3×10^{-3} 降至 $N = 32\,000$ 对应的 1.0×10^{-3}，这符合波动量级为 $N^{-1/2}$ 的预期。

9.3 缓慢预算周期

为了说明滞后现象对决策者意味着什么，我们让预算份额在 3000 年内从 $\varphi = 0.06$ 缓慢降至 0.01，然后以相同速率升回原值（$F = 30$、 $s = 0$、$\tau_0 = 10^{-3}$）。预算降至 $\varphi \approx 0.023$ 时，社会便会崩溃；只有升至 $\varphi \approx 0.042$ 时才能恢复（图 7）。因此，仅将预算恢复到失去合规时的水平并不足够。两次状态切换都发生在区间的静态边界 0.0274 和 0.0372 之外，因为动力学在折叠点附近会减慢（第7节）：预算变化时，其影响会延迟显现，因此只有在阈值已被跨越之后，崩溃才会显现。

10 管理启示：决策表

表5汇总了三种制裁水平下决策者所需的各项数据：维持守规社会合规所需的预算份额（$\varphi_{\text{maintain}}$，即区间下界）、崩溃社会恢复所需的预算份额（$\varphi_{\text{rescue}}$，即上界）、崩溃状态下的作弊者比例，以及当预算比 φ_{rescue} 高出 10%、25% 和 50% 时，将作弊者比例降至 5% 以下所需的时间。所有数值均计入自发作弊（$\tau_0 = 10^{-3}$），且仅使用执法手段（$s = 0$）。

由此得出三项实用结论。第一，更严厉的制裁会显著降低两种预算，但也会扩大二者之间的差距：对于 $F = 100$崩溃社会而言，所需预算几乎是维持其合规所需预算的1.8倍，接近命题4的界限 $R_\infty = 2.78$。

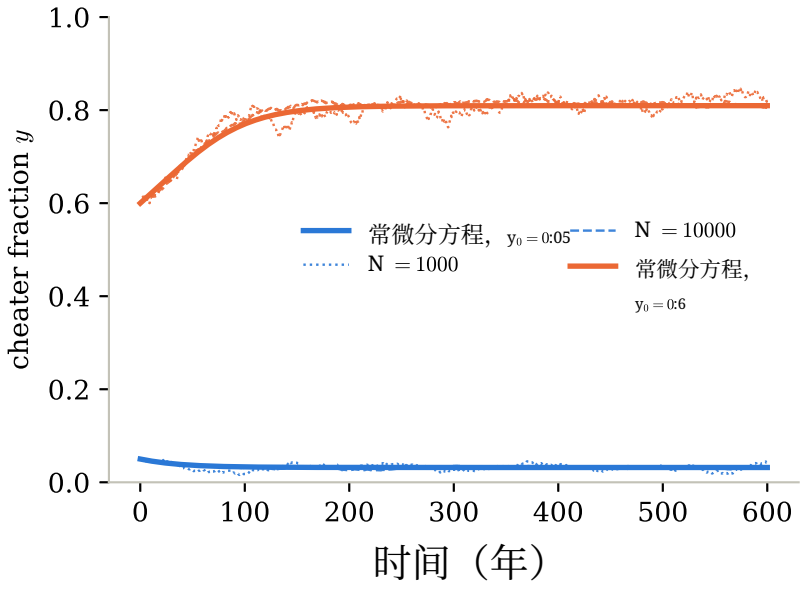

图6：大种群极限验证。粗线：从作弊者占比5%和60%开始的式（5）的解；细线： $N = 1000$ （点线）和 $N = 10\,000$（虚线）的基于个体的模拟。 $F = 30$、 $s = 0$、 $\tau_0 = 10^{-3}$、 $\varphi = 0.032$。

表5：决策表（$\tau_0 = 10^{-3}$、 $s = 0$，其他参数同第2节）。 $T_{+x\%}$：在预算份额高于 $\varphi_{\text{rescue}}$$x$% 时，将崩溃状态下的作弊者比例降至5%以下所需的年数。

F	$\varphi_{\text{maintain}}$	φ_{rescue}	$\varphi_{\text{rescue}}/\varphi_{\text{maintain}}$	崩溃的 y	$T_{+10\%}$	$T_{+25\%}$	$T_{+50\%}$
10	0.0541	0.0581	1.07	0.72	363	168	90
30	0.0274	0.0372	1.36	0.84	274	147	87
100	0.0100	0.0179	1.79	0.87	236	131	80

第二，这种差距只是崩溃成本的一部分。即使预算比救援阈值高出50%，按照原始模型的比率，恢复也需要约80–90年；而预算仅高出10%时，恢复则需要数百年。因此，崩溃期间损失的时间才是主要成本。由于所有比率都随模仿率 λ同比例变化，在行为传播更快的社会中，这些时间会更短，但它们的比值不会改变。第三，由于维持预算可以通过闭式计算得出（命题 6），机构能够监测当前预算与阈值之间的距离，并在合规丧失之前采取行动，这比事后行动便宜得多。

11 讨论

两类模型足够简单，因此能够精确回答一个更丰富的模型只能通过数值方法回答的问题：是什么让打击作弊者这件事具有历史依赖性？在这个模型中，答案是两种因素共同作用。第一种是财政反馈，它使执法力度与合规程度成正比。第二种是作用于激励的威慑机制，因此作弊者会通过改变行为来回应，而不仅仅是被清除。由税基资助的警察力量若不实施制裁，对作弊者的影响与模仿本身完全相同，只会重新调整模仿率；而以绝对金额设定的预算则完全没有反馈。在这两种情况下，稳态都是唯一的，这解释了 NHP 在其两类模型中发现的唯一性

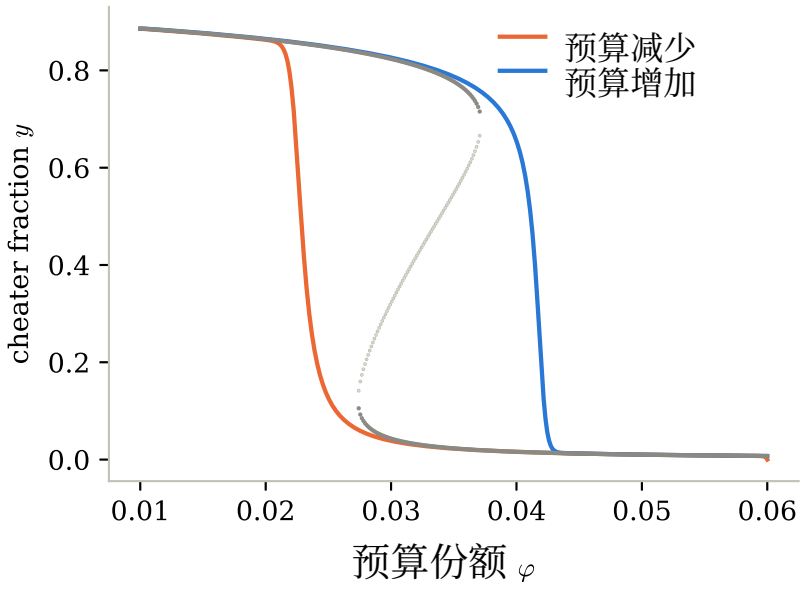

图7：缓慢预算周期下的滞后现象：预算份额从0.06降至0.01（橙色），再回升（蓝色），每个方向均历时3000年。灰色圆点：恒定预算下的稳定（深色）和不稳定（浅色）平衡点。 $F = 30$, $s = 0$, $\tau_0 = 10^{-3}$。

。制裁和提高作弊道德成本的教育都会随着合规程度下降而减弱；一旦超过明确给出的阈值（10）和推论4所述的阈值，两者都会产生临界点。一般判据（8）给出了任何此类渠道成立的条件。

这些闭式结果还给出了三条定量结论。发生滞后现象所需的制裁力度，在作弊主要通过模仿传播时较小（NHP 速率下为$F_c = 1.25$ 纳税年数），并会随着自发作弊的增加而增大（命题5）。与维持守规社会相比，救援一个崩溃社会的成本上限为 $\lambda^2/[4\mu$（$\lambda - \mu$）$]$, ，且与制裁力度无关。恒定政策若仅略高于救援阈值，响应就会很慢；其所需时间会随着超额预算的平方根倒数增大而发散。

对决策者的启示。在模型适用范围内，研究结果为管理由合规者出资的合规系统提供了五条实用建议。第一，将执法与当前收入挂钩会造成临界点风险：若执法预算不随收入下降而减少，而是以绝对数额固定下来，作弊就无法侵蚀该预算，也能消除滞后现象（推论2）。第二，执法机构需要关注的不是威慑水平，而是合规下降时威慑减弱的速度，这正是判据（8）所衡量的；罚款和教育在守规社会中可能有效，却也会使其变得脆弱，因为它们的效果依赖于会被作弊侵蚀的资源。第三，预防胜于补救：维持社会合规的成本只是救援崩溃社会所需成本的一小部分；而预算仅略高于阈值的救援行动过于缓慢，难以发挥作用，因此及时应对合规下降比最终投入多少更重要。第四，既定预算的最佳用途取决于现行制裁力度：罚款较轻时，应将部分预算用于教育；罚款较重时，执法则是效率更高的手段。第五，提高制裁力度可以提升效率，却要以牺牲韧性为代价：超过 F_c后，每种预算都更低，但系统会出现临界点；韧性指标（22）和设计问题（23）则使这种权衡得以量化。

其他合规系统。 分析中的任何内容都不专属于税款。只要合规是一种通过模仿传播的二元选择，且威慑具有机械

组成部分（移除）和激励组成部分（制裁、道德成本），并且执法预算来自合规者缴纳金额的一定份额，该模型就适用。公共交通中的逃票（检查费用由票务收入支付）、为捕捞配额监测提供资金的费用缴纳、废弃物倾倒或其他环境法规，以及由腐败所侵蚀的公共预算提供资金的腐败治理，都具有这一结构。在每种情况下，定理1都会确定能够产生临界点的工具；一旦估计出具体系统中的比率，闭式解便会给出相应的维持预算和救助预算。

局限性。 该模型没有社会结构：教育只能影响激励，而政策对种群阶层构成的影响（NHP 三阶层模型中包含了这种影响）并未体现（注释1）。罚款不会返还至共同财富中，否则会产生进一步的反馈；制裁则是年度税款的固定倍数。政策在时间上恒定，且种群为均匀混合；随时间变化的政策和空间结构是自然的扩展方向。最后，定理1是关于完全合规情形的局部结论，此时只有转换率在收益差为零处的导数才起作用；因此，对于非线性模仿规则，我们预期只要将 λ 替换为该导数，判据仍然成立，而第5–8节的闭式结果则采用线性规则。参数取自原始 NHP 模型，而非根据税收遵从数据估计得出；下一步可利用关于逃避缴税的纵向数据校准模仿率和退出率，以进一步实现定量预测。

12 结论

我们构建了一个可精确求解的合规模型，其中用于应对作弊的资源来自合规者。通过从个体模仿推导人口方程，可以将威慑机制的两种效应——移除和激励——区分开来，而这种区分得出了一个明确的判据：只有当作用于激励的工具由税基提供资金时，才会出现临界点；单独依靠财政拨款执法，或任何绝对数额固定的预算，都不会产生临界点。对于制裁而言，所有相关量都可以明确表示：双稳态区间、临界制裁、尖点、维持预算和救助预算、二者之比，以及阈值附近的缓慢恢复。这些闭式结果支持两个具有显式解的设计问题：将维持预算在执法与教育之间进行成本最低的分配，以及在韧性约束下选择制裁水平；敏感性分析表明，预防成本主要由制裁决定，而恢复成本主要由模仿速度决定。

除了税收合规应用之外，该模型还为量化受到财政反馈影响的社会经济系统中的预防成本、恢复成本和干预效果，提供了一个通用的分析框架。由于阈值和恢复要求均可用闭式形式表示，该框架尤其适用于资源受限的干预政策的设计与比较，也适用于结合合规数据进行校准，从而将其定性指导转化为定量方案。

A 数值方法

通过在 G 的 3001–4001 个网格点上对零点进行区间夹逼，并使用布伦特法细化，确定了平衡点；通过中心差分计算式 (5) 的 2×2雅可比矩阵，并根据其特征值确定稳定性。通过扫描φ（600–1200 个取值），记录两个稳定均衡共存的区间，从而得到双稳态区间；对于 $\tau_0 = 10^{-10}$，这些区间与式 (12) 的结果在扫描分辨率范围内一致（ φ中的 $\sim 2 \times 10^{-5}$ ），而对于 $\tau_0 = 10^{-3}$，则与参数折叠点 (16) 一致。通过使用 LSODA 对式 (5) 进行积分，计算挽救时间（相对容差为 10^{-10}）；积分从折叠态开始（y_v， $(1 - y_v)/(\theta + \varphi_{SN})$），直至 $y = y_v/2$。维护

最优值 (21) 通过与对 s进行直接数值最小化的结果比较加以验证。可向通讯作者索取用于复现所有结果和图表的 Python 代码。

CRediT 作者贡献声明

Luca Meacci: 概念化、方法论、形式分析、撰写——审阅与编辑。**Francisco J. Muñoz:** 概念化、方法论、形式分析、软件、可视化、撰写——初稿。**Juan Carlos Nuño:** 概念化、方法论、监督、撰写——审阅与编辑。

利益冲突声明

作者声明，他们没有已知的可能影响本文所报告研究工作的经济利益冲突或个人关系。

关于在稿件准备过程中使用生成式人工智能和人工智能辅助技术的声明

在准备这项工作期间，作者使用 Claude（Anthropic）协助落实作者提出的问题，并修订文本、代码和图表。使用该工具后，作者根据需要审阅并编辑了相关内容，并对已发表文章的内容承担全部责任。

数据可用性

本文所述研究未使用任何数据。可应要求向通讯作者索取能够重现所有结果和图表的 Python 代码。

致谢

本研究未获得公共、商业或非营利部门资助机构的任何专项资助。L.M. 感谢 Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica (GNFM) of the Istituto Nazionale di Alta Matematica (INdAM) 提供的支持。我们谨以此文献给 Mario Primicerio。

参考文献

[1] G. S. Becker，《犯罪与惩罚：一种经济学方法》，J. Polit. Econ. 76 (1968) 169–217。https://doi.org/10.1086/259394[2] M. G. Allingham，A. Sandmo，《所得税逃避：理论分析》，J. Public Econ. 1 (1972) 323–338。https://doi.org/10.1016/0047-2727(72)90010-2[3] J. Andreoni，B. Erard，J. Feinstein，《税收合规》，J. Econ. Lit. 36 (1998) 818–860。[4] M. Pickhardt，A. Prinz，《逃税行为动力学：综述》，J. Econ. Psychol. 40 (2014) 1–19。[5] J. Hofbauer，K. Sigmund，《进化博弈与种群动力学》，剑桥大学出版社，剑桥，1998。

[6]K. Sigmund，H. De Silva，A. Traulsen，C. Hauert，《社会学习促进公地治理制度》，《自然》466 (2010) 861–863。 https://doi.org/10.1038/nature09203[7] J. C. Nuño，M. A. Herrero，M. Primicerio，《犯罪性的三角形模型》，Physica A 387 (2008) 2926–2936。[8] J. C. Nuño，M. A. Herrero，M. Primicerio，《打击作弊者：投资方式与投资多少》，Eur. J. Appl. Math. 21 (2010) 459–478。 https://doi.org/10.1017/S0956792510000094 [9] J. C. Nuño，M. A. Herrero，M. Primicerio，《易犯罪社会的数学模型》，Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S 4 (2011) 193–207。[10] M. Scheffer，J. Bascompte，W. A. Brock，V. Brovkin，S. R. Carpenter，V. Dakos，H. Held，E. H. van Nes，M. Rietkerk，G. Sugihara，《临界转变的早期预警信号》，《自然》461 (2009) 53–59。 https://doi.org/10.1038/nature08227[11] W. H. Sandholm，《群体博弈与演化动力学》，麻省理工学院出版社，马萨诸塞州剑桥，2010。[12] K. H. Schlag，《为何模仿，若要模仿又该如何？一种针对多臂老虎机的有限理性方法》，J. Econ. Theory 78 (1998) 130–156。[13] T. G. Kurtz，《作为纯跳马尔可夫过程极限的常微分方程解》，J. Appl. Probab. 7 (1970) 49–58。[14] P. D. Taylor，L. B. Jonker，《演化稳定策略与博弈动力学》，Math. Biosci. 40 (1978) 145–156。 https://doi.org/10.1016/0025-5564(78)90077-9[15] L. Perko，《微分方程与动力系统》，第3版，施普林格，纽约，2001。[16] Yu. A. Kuznetsov，《应用分岔理论基础》，第3版，施普林格，纽约，2004。[17] S. H. Strogatz，《非线性动力学与混沌》，第2版，Westview出版社，科罗拉多州博尔德，2015。