arXiv:2611.29700v1 [math.CA] 22 Nov 2026

定性 WALA、Alberti 表示与 Lipschitz 可微性

DAVID BATE

Abstract. 我们证明，现有的 Lipschitz 可微空间理论表明：满足 David–Semmes 的 WALA 条件的定性类比的度量测度空间具有许多独立 Alberti 表示，并为确定此类空间何时可整流提供了条件。

最近，Merlo [17]证明了，David–Semmes 的 WALA 条件蕴含欧几里得空间中测度的一致可整流性。该证明的第一步是证明这一结论的定性类比。WALA 条件是可微性的定量概念，因此其定性类比与正则可微性非常接近。在本文中，我们通过应用 [5], 中关于在 Lipschitz 可微空间中构造独立 Alberti 表示的结果，以及 [7, 9]中的结果来推出可整流性，从而证明 Merlo 的定性结论。

定义 1。 在本文中固定一个度量测度空间（X， d， μ）（即配备局部有限 Borel 正则外测度的完备可分度量空间）。

在 Cheeger [10], (X， d， μ) 开创的理论基础上，若存在可数个 U_i，覆盖 X，以及 Lipschitzφ_i: $X \to \mathbb{R}^{n_i}$，使得每个 Lipschitz f: $X \to \mathbb{R}$ 在 μ-几乎处处的 $x_0 \in U$ （相对于 φ）可微：存在唯一的 $Df(x_0) \in \mathbb{R}^n$，满足

$$f(x) - f(x_0) = Df(x_0) \cdot (\varphi(x) - \varphi(x_0)) + o(d(x, x_0)). \tag{1}$$

一个曲线片段 是双利普希茨的 γ: dom $\gamma \subset [0,1] \to X$（其中 dom γ 为紧集）。曲线片段的集合 $\Gamma(X)$ 配备片段图像之间的 Hausdorff 距离（见 [5, 定义 2。1]）。 μ的一个*Alberti* 表示 由 $\Gamma(X)$ 上的有限 Borel 测度组成，并且满足

$$\mu \ll \int_{\Gamma(X)} \mathcal{H}^1|_\gamma \, \mathrm{d}\eta(\gamma).$$

（此公式总是定义一个 X上的博雷尔测度。）Alberti 表示η_1， ...， η_n 若存在一个利普希茨 φ: $X \to \mathbb{R}^n$ 以及线性无关锥 C_1， ...， $C_n \subset \mathbb{R}^n$，使得 $(\varphi \circ \gamma)'(t) \in C_i \setminus \{0\}$ 对几乎处处的 $t \in$ dom γ以及η_i-几乎处处的 $\gamma \in \Gamma(X)$，对每个 $1 \le i \le n$均成立，则称其为独立的 。这是对 Alberti [1] 思想以及 Alberti、Cs¨ornyei、Preiss [2, 3],后续工作的度量空间改编

沿用 Dorronsoro [13], David–Semmes [11] 和 Merlo [17], 关于 $x \in \operatorname{spt}\mu$,$r > 0$和 f 的做法： $X \to \mathbb{R}$ Borel，定义 $I(f, x, r)$ 为 $|f|/r$ 在$B(x, r)$ 上的平均积分。若 $X = \mathbb{R}^m$，令 $\Omega(f, x, r)$ 表示对所有仿射 A: $X \to \mathbb{R}$ 取$I(f - A, x, r)$ 的下确界。我们称 μ 满足

定性 *WALA* 如果对于每个利普希茨 f: $X \to \mathbb{R}$以及 μ-几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^m$, $\Omega(f, x, r) \to 0$当 $r \to 0$。

在 [5] 中，我们用独立 Alberti 表示给出了 Lipschitz 可微空间的若干种刻画。其基本思路是首先证明，独立 Alberti 表示的存在性可由某类集合 () 是否为 -零集来刻画。

本说明不包含任何由 AI 生成的内容。

其次，通过构造一个在此类集合上几乎处处不可微的 Lipschitz 函数，证明任意 $A(\varphi)$ 集都是 μ-零集。本文指出，同样的结果也适用于满足定性 WALA 的测度。

在 Lipschitz 可微空间中，人们通常会考虑这样一个等价条件（允许进行可数分解）：任意“无穷小线性无关”的向量值Lipschitz函数的维数都存在一个上界：如果 $F\colon X \to \mathbb{R}^d$ 是 Lipschitz 的，并且对于一个具有正测度的 x_0 集合，$\operatorname{Lip}(a(x_0) \cdot F, x_0) > 0$对于每个 $a \in \mathbb{S}^{d-1}$ 都成立，那么 $d \le n$。这一思想起源于 [10]，后来被广泛重复使用，参见例如 [6, 15, 16]。其一个推论是，无需对 φ 的正则性作任何要求：如果 φ 是任意一个 函数，对所有 f 都满足 (1)，那么存在另一个 Lipschitz φ，也对所有 f 满足 (1)。同样的思想也可应用于定性 WALA。

观察2。对于 $d \ge n+2$，令 $f_1, \ldots\ldots, f_d\colon X \to \mathbb{R}$，$\varphi\colon X \to \mathbb{R}^n$ 博雷尔，$x \in X$ 且 $r > 0$。对于 $\epsilon > 0$ 以及每个 $1 \le i \le d$，假设存在 $A_i \in \mathbb{R}^n$，使得 $I(f_i - A_i \cdot \varphi, x_0, r) \le \epsilon$. 令 $F\colon X \to \mathbb{R}^d$ 为其分量是 f_i 的函数。那么存在 $a \in \mathbb{S}^{d-1}$，使得 $I(a \cdot (F - F(x_0)) x_0, r) \le d\epsilon$. 这启发了下面的定义。对于 $\mathcal{F}$ 的一组博雷尔 $g\colon X \to \mathbb{R}$，定义 $\Omega_{\mathcal{F}}(f, x, r)$，其方式与 Ω 类似，但使用 $\mathcal{F}$ 中的元素而非仿射函数。

我们将这一观察与倍增条件结合起来：设 $D \subset X$ and$C$、$T > 0$，使得

$$\mu(B(x, 2r)) \le C\mu(B(x, r)) \quad \forall x \in D, 0 < r < T. \tag{2}$$

对于 $r < T/4$，令 $g = a_r \cdot (F - F(x_0))/r$。如果 $L > 0$，F 是 L-利普希茨的，且 $g(x) \ge \epsilon r$，那么在 $B(x, \eta r)$ 上，g 有 $\epsilon r/2$ 作为下界，其中 $\eta = \min(1, \epsilon/2L)$。如果 $x, x_0 \in D$，那么 $\mu(B(x, \eta r)) \gtrsim_L \eta\, \mu(B(x_0, 2r))$，因此 $I(a_r \cdot (F - F(x_0)) x_0, r) \to 0$ 意味着

$$\lim_{r \to 0} \sup_{B(x_0, r) \cap D} |a_r \cdot (F - F(x_0))|/r \to 0. \tag{3}$$

因此，定性 WALA 与可微性之间唯一显著的区别在于，式 (3) 中的线性组合可能取决于 r，而对于可微性则不然。在 [5, 8] 中，构造出的 Lipschitz 函数具有既大又任意小的差商，这意味着它们不可微。线性组合的唯一性在这些论证中不起作用，因此这些方法很容易调整到定性 WALA 的情形。

我们需要对 [5] 中的两个陈述进行修改，以记录每个证明的更多性质。

引理 3 ([5] 引理 4.2)。设 (X, d, μ) 是一个度量测度空间，$S \subset X$博雷尔且 $0 < \alpha < 1$。假设存在一个 *1-Lipschitz* 函数序列$f_i\colon X \to \mathbb{R}$，以及序列 $\theta_i > 0$ 和 $\sigma_i > 0$，使得对于每个 $x_0 \in S$ 以及任意$y, z \in B(x_0, \sigma_i)$，

$$|f_i(y) - f_i(z)| \le \theta_i d(y, z).$$

还假设存在递减序列 $R_i > r_i > 0$，使得 $R_{i+1} < \sigma_i$、$R_{i+1} < 2^{-(i+1)}\alpha r_i$、$\theta_i \le \alpha 2^{-i}$ 以及 $|f_i|_\infty \le R_i$ 对每个 $i \in \mathbb{N}$均成立。那么存在一个 *3*-利普希茨函数 $F\colon X \to \mathbb{R}$，使得对于几乎处处的 $x_0 \in S$，每个 $i \in \mathbb{N}$ 以及任意满足 $r_i \le d(x, x_0)$ $x \in X$，

$$\frac{|F(x) - F(x_0) - (f_i(x) - f_i(x_0))|}{d(x, x_0)} \le \alpha. \tag{4}$$

引理 4 ([5] 引理 6.5)。设 (X, d, μ) 为一个度量测度空间，$\varphi\colon X \to \mathbb{R}^n$~为 *1*-利普希茨函数，$S \in A(\varphi)$ 且 $U \supset S$为紧集。那么，对于任意 $0 < \delta, \xi, \lambda < 1$，存在一个 $R > 0$，使得对于任意 $0 < r < R$，存在一个紧集 $S' \subset S$，满足$\mu(S') \ge \mu(S) - \xi, \sigma > 0$，以及一个 *1*-利普希茨函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$，使得

(1) 对于每个 $x_0 \in S'$，存在 $v \in \mathbb{S}^{n-1}$，使得对于每个满足$r \le d(x, x_0) \le R$ 和 $|(\varphi(x) - \varphi(x_0)) \cdot v| \ge \lambda d(x, x_0)$的 $x \in U$，

$$|f(x) - f(x_0)| \ge |(\varphi(x) - \varphi(x_0)) \cdot v|/2.$$

(2) 对于每个 $x_0 \in S'$ 和 $y, z \in B(x_0, \sigma)$

$$|f(y) - f(z)| \le \delta d(y, z).$$

在 [8, 引理 2.1] 中，证明了下面类似于 (5) 的条件等价于关于 $x_0 \in X$ 相对于 φ的 Cheeger 导数的唯一性： $X \to \mathbb{R}^n$。通过在许多互不相交的环带中找到由该条件给出的点，[8, 定理 2.4] 的证明构造出了许多无穷小线性无关的 Lipschitz 函数。本注记的主要贡献在于：如果这些点出现在相同的尺度上，那么所构造的函数将违反观察2。

定义 5 （与 [5] 定义 3.6**比较**）。如果一个紧集 $U \subset X$ 满足以下条件，则称其具有结构化邻域。存在一个紧 $D \supset U$、 T， $C > 0$使得 (2) 成立。对于 $d \in \mathbb{N}$，存在 M_1、.....、 $M_d \in \mathbb{N}$ 以及 N_1， N_2， $N_3 \in \mathbb{N}$ 满足$M_j \ge M_{j-1} + N_3 + N_1 + 1$ 和 $0 < \lambda$， $\rho < 1$; 存在一个递增序列 $i(k) \to \infty$ 以及一个由 1-Lipschitz 函数组成的有限集 $\mathcal{P}$ φ: $X \to \mathbb{R}^n$ 使得以下条件成立：对于每个 $x_0 \in U$ 和 $k \in \mathbb{N}$， $1 \le j \le d$ 存在 $\varphi \in \mathcal{P}$ 和 m_1， $m_2 \in \mathbb{N}$ 满足$N_3 \ge m_2 \ge m_1 + 1 + N_2$，使得对于每个 $l = 1$，2，

$$\sup \frac{|(\varphi(x) - \varphi(x_0)) \cdot v|}{d(x, x_0)} \ge \lambda \|v\| \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

其中上确界取遍 $x \in D \cap B(x_0, \rho^{i(k)+M_j+m_l}) \setminus B(x_0, \rho^{i(k)+M_j+m_l+1})$。

观察 6. 设 (X, d, μ) 为度量测度空间，并假设 $U \subset \tilde{X}$具有结构化邻域，且对每个 $\varphi \in \mathcal{P}$， $S \in A(\varphi) \cap U$。假设这些参数满足 $\rho^{N_2} < \lambda/8$, $\rho^{N_1} < (\rho\lambda/48d)^d/d$。那么，对任意 $\delta > 0$，存在由 *Lipschitz* 函数 Φ: $X \to \mathbb{R}^d$ 构成的有限集 $\mathcal{S}$、一个满足$\mu(S') \ge \mu(S) - \delta$ 的 $S' \subset S$，以及 $i(k)$ 的一个（未重新标记的）子序列，使得对每个$x_0 \in S'$ 和 $k \in \mathbb{N}$,

$$\max_{\Phi \in \mathcal{S}} \min_{a \in \mathbb{S}^{d-1}} \sup_{D \cap B(x_0, \rho^{i(k)})} |a \cdot (F_\Phi - F_\Phi(x_0))| \rho^{-i(k)} \gtrsim_{C, \rho, M_d, N_1, N_3, d} 1. \tag{6}$$

证明。对每个 $k \in \mathbb{N}$，令 $\theta_k \le \alpha 2^{-k}$。对每个 $\varphi \in \mathcal{P}$ 和 $k \in \mathbb{N}$，令 $\delta = \theta_k$,$\xi = 2^{-k}\mu(S)/2|\mathcal{P}|$，并令 $S'_{\varphi,k}$, $R_{\varphi,k}$ 和 $v_{\varphi,k}$ 为将引理 4 应用于 φ 所得。取一个子序列后，不妨设对每个$k \in \mathbb{N}$， $\rho^{i(k)} < \min\varphi, R_{\varphi,k}$。现在令 $R_k = \rho^{i(k)}$，并对每个 $i \in \mathbb{N}$ 令 $r_k = \rho^{i(k)+M_d+N}$，且 $0 < \alpha < \min(\lambda\rho/16, \rho^{N_1})$。由引理 4 得到 $f_{\varphi,k}$ 和 $\sigma_{\varphi,k}$。那么 $f_{\varphi,k}$ 具有如下性质：对每个 $x_0 \in S'_\varphi$，满足关于 $i(k)$ 的定义 5 的 $= \cap_k S'_{\varphi,k}$，以及 φ 和 M_j，都存在 $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$，使得 $N_3 \ge m_2 \ge m_1 + 1 + N_2$，并且存在 $x_1, x_2 \in D$，使得$\rho^{i(k)+M_j+m_l+1} \le d(x_l, x_0) \le \rho^{i(k)+M_j+m_l}$，且

$$\frac{|f_{\varphi,k}(x_l) - f_{\varphi,k}(x_0)|}{d(x, x_0)} \ge \frac{\lambda}{2}. \tag{7}$$

现在我们按照 [5, 引理 41]的证明，类似地修改每个$f_{\varphi,\ k}$。对于每个 $1 \le j \le d$，将 $f_{\varphi,\ k}$ 与函数 $t \mapsto \text{dist}(t,\ 2\rho^{i(k)+M_j}\mathbb{Z})$进行后复合，以得到$g^j_{\varphi,\ k}$。这一复合可能会破坏（7）中的条件，使得 x_1 或 x_2中的一个成立，但不会同时成立。事实上，如果$|g^j_{\varphi,\ k}(x_2) - g^j_{\varphi,\ k}(x_0)| \le \lambda d(x_2,\ x_0)/4$，那么 $\text{dist}(f_{\varphi,\ k}(x_0)\ \mathbb{Z}\rho^{i(k)+M_j}) \le \rho^{i(k)+M_j+m_2}$

and

$$\begin{aligned}|g^j_{\varphi,k}(x_1) - g^j_{\varphi,k}(x_0)| &\geq \lambda\rho^{i(k)+M_j+m_1+1}/2 - 2\rho^{i(k)+M_j+m_2}\\ &\geq \rho^{i(k)+M_j+m_1+1}(\lambda/2 - 2\rho^{N_2})\\ &\geq \lambda\rho d(x_1,x_0)/8.\end{aligned}$$

我们将 x' 记作满足此不等式的点 x_1，x_2。另一方面，对于任意 $d(x, x_0) \geq \rho^{i(k)+M_{j-1}+N_3}$，

$$\frac{|g^j_{\varphi,k}(x) - g^j_{\varphi,k}(x_0)|}{d(x,x_0)} \leq \frac{\rho^{i(k)+M_j}}{\rho^{i(k)+M_{j-1}+1}} = \rho^{N_1}.$$

如有必要，对 $i(k)$ 取一个子序列后，我们可以假设，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，$i(k+1) \leq \min_{\varphi,\, k} \rho_{\varphi,\, k}$，并且引理 3 的假设成立（对于序列 $i(k)$）。最后，令 $S' = \cap_{\varphi,\, k} S'_{\varphi,\, k}$，于是 $\mu(S') \geq \mu(S)/2$。

现在固定 $\Phi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_d) \in \mathcal{P}^d$。对于每个 $1 \leq j \leq d$，将引理 3 应用于序列 $g^j_{\varphi_j,\, k}$，得到一个 Lipschitz 函数 F^j_Φ。记坐标为 F^j_Φ 的函数为 F_Φ。对于某个 $k \in \mathbb{N}$，假设 $x_0 \in S'$、φ_j 和 M_j 对每个 $1 \leq j \leq d$ 都满足定义 5。那么由上文可知，对于每个 $1 \leq j \leq d$ 以及任意满足 $d(x, x_0) \geq \rho^{i(k)+M_{j-1}+N_3}$ 的 $x \in D$，

$$\frac{|F^j_\Phi(x) - F^j_\Phi(x_0)|}{d(x,x_0)} \leq \rho^{N_1} + \alpha \leq 2\rho^{N_1}, \tag{8}$$

并且存在 $x_j \in D$，满足 $\rho^{i(k)+M_j+N_3} \leq d(x_j, x_0) \leq \rho^{i(k)+M_j}$，使得

$$\frac{|F^j_\Phi(x'_j) - F^j_\Phi(x_0)|}{d(x'_j,x_0)} \geq \frac{\lambda\rho}{8} - \alpha \geq \frac{\lambda\rho}{16}. \tag{9}$$

对于任意 $a \in \mathbb{R}^d$，存在 $z \in D \cap B(x_0, \rho^{i(k)}) \setminus B(x_0, \rho^{i(k)+M_d+N_3})$，满足

$$|a \cdot (F_\Phi(z) - F_\Phi(x_0))| \geq \|a\|\rho^{N_1} d(z, x_0). \tag{10}$$

事实上，假设这不成立。对于任意 $1 \leq i \leq d$，对 i 应用（9），对 $j > i$ 应用（8），再利用每个 F^j_Φ 对 $j < i$ 都是 1-利普希茨的、（10）的否定以及三角不等式，可得

$$\lambda\rho|a_i|/16 < d\text{最大值}_{j<i}\ |a_j| + 2d\rho^{N_1}\text{最大值}_{j>i}\ |a_j| + d\rho^{N_1}\text{最大值}_j\ |a_j| \leq d\text{最大值}_{j<i}\ |a_j| + 3d\rho^{N_1}\text{最大值}_j\ |a_j|.$$

将 j 从 1 迭代到 d，得到最大值 $|a_j| < d(48d/\rho\lambda)^d\rho^{N_1}$ 最大值 $|a_j|$，矛盾。□

定理 7。 设 (X, d, μ) 是一个度量测度空间，并假设 $U \subset X$ 具有结构化邻域，其参数满足观察 6 中的条件。此外，对于任意利普希茨 $F\colon X \to \mathbb{R}^d$，任意 $r > 0$ 以及几乎处处的 $x_0 \in U$，存在 $a_r \in \mathbb{S}^{d-1}$ 使得

$$\lim_{r\to 0} \sup_{D\cap B(x_0,r)} |a_r \cdot (F - F(x_0))| r^{-1} = 0.$$

于是，$\mu|_U$ 可以可数分解为若干片段，并且每个片段都具有 n-独立 *Alberti* 表示（每个表示均相对于某个 $\varphi \in \mathcal{P}$）。

证明。该证明与 [5, 定理 6.6]的证明非常相似。根据 [4, 命题 2.10], ，存在一个可数的 Borel 分解 $U = S \cup \cup_j U_j$，其中每个 $\mu|_{U_i}$相对于某个 $\varphi \in \mathcal{P}$具有 n-独立 Alberti 表示，并且对所有 $\varphi \in \mathcal{P}$都有 $S \in\!\!\!\smile A(\varphi)$。应用观察 6 于 $\delta = \mu(S)/2$，可得到 S' 和 $\mathcal{S}$。由于$\mathcal{S}$ 是有限的，对于任意 $x_0 \in S$，都有某个单独的 $\Phi \in \mathcal{S}$ 在无穷多个 k上取得式 (6) 中的最大值，这与假设矛盾。因此，$\mu(S') = \mu(S) = 0$。□

注 8。 定义 5 的假设可以削弱，同时仍可得到定理 7；我们选择这些假设，是为了尽可能少地修改 [5]中的证明。

本文刻画了具有许多独立 Alberti 表示的测度何时是可整流的，特别是 Lipschitz 可微空间中的一个图表 U 上的测度何时是可整流的。充分条件在 [9]中得到了改进。应用这些结果可得以下结论。

推论 9。 除定理 7 中的假设外，假设

$$\Theta^{*,n}(\mu,x) := \limsup_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^n} > 0$$

对于 μ-几乎处处的 $x \in U$成立。那么 $\mu|_U$ 是 n-可整流的。

定义 5 中的条件可以在欧几里得空间中得到明确验证。

推论 10 ([17] 定理 1.1）。对于 $\alpha \geq 0$，设 μ 是定义在 $\mathbb{R}^m$上的 *Borel* 测度，满足 $\Theta^{*,\alpha}(\mu, x) < \infty$ 并且

$$\Theta^{\alpha}_{*}(\mu,x) := \liminf_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^\alpha} > 0$$

对于 μ-几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^m$成立。假设 $\mathcal{F}$ 是 *Borel* 函数的有限维子空间 $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$，并且对于每个 *Lipschitz* $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$，$\Omega_{\mathcal{F}}(f,r,x) \to 0$ 对于 μ-几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^m$成立，如同$r \to 0$ 。那么 $\alpha = n \in \mathbb{N}$，且 μ 是 n-可整流的。

证明。令 $n = \lceil \alpha \rceil$ 且 $d \geq$ 维数为 $\mathcal{F} + 2$。我们必须检查定义 5 和定理 7 的假设是否成立。存在一个可数分解 $\mathbb{R}^m = N \cup \bigcup_i D_i$，其中每个 D_i 都是紧集，$\mu(N) = 0$，并且对于每个 $i \in \mathbb{N}$，$x \in D_i$,

$$\frac{r^\alpha}{i} \leq \mu(B(x,r)) \leq i r^\alpha \quad \forall 0 < r < \frac{1}{i}.$$

因此存在 λ，$\rho > 0$ 使得，对于每个 $x_0 \in D_i$ 和 $k \in \mathbb{N}$，若 $\rho^k \leq 1/i$，则 (5) 对 $i(k) = k$，$m_l = 0$ 以及某个正交投影 φ 成立（Ahlfors α正则测度不可能在定量意义上接近某个 $n-1$ 维子空间）。通过将 $\lambda > 0$ 略微减小，这些 φ 可以从有限的预先指定集合 $\mathcal{P}$中选取。对于任意 $N_2 \in \mathbb{N}$，只要将 N_3 选得足够大，$\mathbb{S}^{m-1}$ 的紧性便保证存在 m_1，m_2 满足 (5)。因此，定理 7 给出了每个 D_i 的一个可数博雷尔分解，将其分解为一些集合，使得在这些集合上，μ具有 n-独立 Alberti 表示。

一个测度所能拥有的独立 Alberti 表示的数量至多等于其 Hausdorff 维数。这是 Guth 的多线性 Kakeya 不等式 [14]或 De Philippis–Rindler 结构定理[12]的推论。有关详细信息，分别参见 [6, 定理 5。3] 或 [4, 定理 2。17] 因此必有 $\alpha = n$，此外，μ 是 n-可整流的。□

注 11。 如果对于某个 $m \in \mathbb{N}$有 $X = \mathbb{R}^m$，则可以改用 [4, 定理 2。18] 来推出可整流性（正如 [17, 命题 3。1]中所做的那样）。该证明结合了 Besicovitch–Federer 投影定理和 De Philippis–Rindler [12]。

注 12。 当 $d = n + 1$ 和多孔集的测度为零时，由定理 7得到的 Alberti 表示是普适的。因此，如果 X 可由可数个这样的 U覆盖，则根据 [5, 定理 7，X 是一个 Lipschitz 可微空间 8]。反之，Lipschitz 可微空间中的任意 n 维图表都满足定义 5 的假设。这是由于存在 n独立 Alberti 表示 [5, 定理 66] ，并且多孔集的测度为零[8,定理 24]。

References

[1] G. Alberti。《有界变差函数导数的秩一性质》*Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math.* 123。2（1993），第 239–274 页。[2] G. Alberti、M. Cs¨ornyei 和 D. Preiss。《Lipschitz 函数的可微性、零测集的结构及其他问题》。*Proceedings of the international congress of mathematicians*。2011 年，第 1379–1394 页。[3] G. Alberti、M. Cs¨ornyei 和 D. Preiss。《平面中零测集的结构及其应用》*Proceedings of the 4th European congress of mathematics*。2005 年，第 3–22 页。[4] D. Bate。《纯不可整流度量空间与 Lipschitz 函数的扰动》*Acta Math.* 224。1（2020），第 1–65 页。[5] D. Bate。《Lipschitz 可微空间中的测度结构》*J. Am. Math.Soc.* 28。2（2015），第 421–482 页。[6] D. Bate、I. Kangasniemi 和 T. Orponen。《通过多线性Kakeya不等式证明 Cheeger微分定理》*Pure Appl. Funct. Anal.* 8。6（2023），第 1587–1602 页。[7] D. Bate 和 S. Li。《可整流度量测度空间的刻画》*Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* 50。1（2017），第 1–37 页。[8] D. Bate 和 G. Speight。《度量测度空间中的可微性、孔隙性与倍增性》*Proc. Am. Math. Soc.* 141。3（2013），第 971–985 页。[9] D. Bate 和 J. Weigt。*Alberti representations and rectifiability of metric spaces*。2025 年。电子版：arXiv:2501.02948。[10] J. Cheeger。《度量测度空间上 Lipschitz 函数的可微性》*Geom. Funct. Anal.* 9。3（1999），第 428–517 页。[11] G. David 和 S. Semmes。*Analysis of and on uniformly rectifiable sets*。第 38 卷。Math. Surv. Monogr. 1993。[12] G. De Philippis 和 F. Rindler。《关于 $\mathcal{A}$-自由测度的结构及其应用》*Ann. Math. (2)* 184。3（2016），第 1017–1039 页。[13] J. R. Dorronsoro。《势空间的刻画》。英文。*Proc. Am. Math. Soc.* 95 （1985），第 21–31 页。[14] L. Guth。《多线性Kakeya不等式的一个简短证明》*Math. Proc. Camb.Philos. Soc.* 158。1（2015），第 147–153 页。[15] S. Keith。《度量测度空间的可微结构》*Adv. Math.* 183。2（2004），第 271–315 页。[16] B. Kleiner 和 J. M. Mackay。《度量空间上的可微结构：入门》*Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. (5)* 16。1（2016），第 41–64 页。[17] A. Merlo。*On the WALA conjecture Alberti representations and applications*。2026 年。电子版：arXiv:2605.29804。

Email address: david.bate@warwick.ac.uk

Zeeman Building, University of Warwick, Coventry CV4 7AL. ORCiD: 0000-0003-0808-2453