arXiv:2611.29705v1 [math.AG] 22 Nov 2026

关于 T Keller 映射的基理想与基点集

BARTOMEU ENRICH LUCAS 和 FRANCESC PLANAS-VILANOVA

ABSTRACT. 设 $\varphi_F\colon \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n$ 是由域 $\mathbb{k}$ 上的 n 个多项式 F_1、.....、F_n 定义的 Keller 映射，其中该域具有特征零，n 中的不定元为 $X = X_1$、.....、X_n。Miranda-Neto 将 φ_F的基理想定义为由 F_1、.....、F_n 生成的理想 I_F，并将 φ_F的基点集定义为由理想 I_F确定的仿射代数集$V_F = V(I_F)$。他证明了 I_F是一个根理想，是有限个 v_F 极大理想的交，其中 $\operatorname{card}(V_F) \leq v_F$，并约定当 I_F 为真理想时，$v_F = 0$。本文首先证明 $v_F \leq \dim_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[X]/I_F) \leq [\mathbb{k}(X)\colon \mathbb{k}(F)]$。利用对近期由 Alp¨oge 宣布的雅可比猜想反例所作的可逆仿射变换，我们表明 I_F 确实可能为真理想，且以下情形可能出现：$0 < \operatorname{card}(V_F) = v_F < [\mathbb{k}(X)\colon \mathbb{k}(F)]$，$0 < \operatorname{card}(V_F) = v_F = [\mathbb{k}(X)\colon \mathbb{k}(F)]$，$0 < \operatorname{card}(V_F) < v_F < [\mathbb{k}(X)\colon \mathbb{k}(F)]$以及 $0 = \operatorname{card}(V_F) < v_F < [\mathbb{k}(X)\colon \mathbb{k}(F)]$。最后，我们根据 V_F的不可约性，给出雅可比猜想的一个纯拓扑等价改述。

1. INTRODUCTION

设 $\mathbb{k}$ 是一个特征为零的域，$X = X_1$，...，X_n 是 $\mathbb{k}$ 上的 n 个变量，且 $\mathbb{k}[X]$ 是多项式环。设 F_1，...，F_n 是 $\mathbb{k}[X]$ 中的 n 个多项式，且 $F = (F_1, \ldots, F_n) \in \mathbb{k}[X]^n$。设 $\varphi_F\colon \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n$ 是由 $\varphi_F(x) = (F_1(x) \ldots, F_n(x))$ 定义的多项式映射，其中 $x \in \mathbb{k}^n$。若映射 φ_F 的雅可比矩阵 $J_F = (\partial F_i/\partial X_j)_{i,\,j}$ 的行列式是非零常数，则称其为 Keller 映射。若 φ_F 是 $\mathbb{k}^n$的自同构，即 φ_F 有多项式逆映射，那么根据链式法则，$\det(J_F)$ 是非零常数，因此 φ_F 是 Keller 映射。雅可比猜想指出，若 φ_F 是 Keller 映射，则 φ_F 是 $\mathbb{k}^n$ 的自同构（例如参见 [Kel], [BCW] 或 [vdE1], ；另见 [RD], ，其中对该猜想的起源作了最新探讨）。显然，当 $n = 1$时，该猜想成立；对于仿射变换或 de Jonqui`ères 映射，该猜想也成立（例如参见 [vdE1]）。

与 Keller 映射和雅可比猜想相关，在 [MN], Miranda-Neto 中，将 Keller 映射 φ_F 的基理想 I_F定义为理想 $I_F = \langle F_1, \ldots, F_n\rangle$ of $\mathbb{k}[X]$。他还将 φ_F的基点集 V_F定义为相应的代数集 $V_F = V(I_F) = V(F_1, \ldots, F_n) = \varphi_F^{-1}(\{0\})$。其主要结果 [MN，即定理 3.1], ，指出：要么 $I_F = \mathbb{k}[X]$，要么 I_F 是一个根理想，它是有限个 v_F （互不相同的）极大理想的交，其中 $\operatorname{card}(V_F) \leq v_F$ 且 $\operatorname{card}(V_F) \leq [\mathbb{k}(X)\colon \mathbb{k}(F)]$（参见 [MN 中推论 3.2 和注记 3.3 之前的评论

] 和[vdE1，定理 1.1.32]）。特别地，如果 $\mathbb{k}$ 是代数闭的，那么要么 $V_F = \varphi_F^{-1}(\{0\}) = \emptyset$，这等价于 $I_F = \mathbb{k}[X]$；要么 $V_F = \varphi_F^{-1}(\{0\}) = \{a_1, \ldots, a_{v_F}\}$ 是有限集，其中$a_i = (a_{i,\,1}$，.....，$a_{i,\,n}) \in \mathbb{k}^n$，这等价于 $I_F = \cap_{i=1}^{v_F}\langle X_1 - a_{i,\,1}$，.....，$X_n - a_{i,\,n}\rangle$。受其主要结果启发，他提出了雅可比猜想的以下等价表述：“如果φ_F是一个 Keller 映射，且 $I_F \subseteq \langle X_1$，.....，$X_n\rangle$，那么 $I_F = \langle X_1$，.....，$X_n\rangle$”（参见 [MN，猜想 C 和定理 5.1]）。

去年夏天，Levent Alp¨oge [Alp] 宣布发现了该猜想的一个反例；借助人工智能工具，他在 $n = 3$ 的完整一般情形下找到了这一反例，因此也适用于 $n \geq 4$。在 [AI], 中解释了该猜想失败的原因。在 Arno van den Essen 最近的一项工作 [vdE2]中，他为 $n = 3$的雅可比猜想构造了一个全新的反例，十分漂亮。

Date：2026年11月24日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 14R15、14R10、13F20。第二作者部分获得 PID2023-146936NB-I00 项目的资助，该项目由西班牙国家研究署 MICIU/AEI/10.13039/501100011033 和加泰罗尼亚政府研究与大学部通过 AGAUR 项目 2025 SGR 00878（GEOMVAP）资助。

（据我们所知，截至目前，$n = 2$上的雅可比猜想仍未解决。）Alp¨oge 给出的例子如下（见 https://x.com/jdlichtman/status/2079066717762863249）：

例 1.1. 设 $\Bbbk[X, Y, Z]$ 是变量 X、Y、Z 上的多项式环，其中系数取自特征为零的域 $\Bbbk$。设 $F = (F_1, F_2, F_3)$ 属于 $\Bbbk[X, Y, Z]^3$，定义如下：

$$F_1 = (1 + XY)^3 Z + Y^2(1 + XY)(4 + 3XY);$$
$$F_2 = Y + 3X(1 + XY)^2 Z + 3XY^2(4 + 3XY);$$
$$F_3 = 2X - 3X^2 Y - X^3 Z.$$

设 $\varphi_F\colon \Bbbk^3 \to \Bbbk^3$ 定义为 $\varphi_F(x, y, z) = (F_1(x, y, z)\ F_2(x, y, z)\ F_3(x, y, z))$。可以验证，$\varphi_F(0, 0, -1/4) = \varphi_F(1, -3/2, 13/2) = \varphi_F(-1, 3/2, 13/2) = (-1/4, 0, 0)$。因此，$\varphi_F$不是单射。此外，可以验证 $\det(J_F) = -2$，因此 φ_F 是 Keller 映射。

备注 1.2。计算机代数系统 SINGULAR [DGPS]，可通过 https://singular-in-browser.pages.dev/ 在线使用，借助它可以轻松验证例 1.1。具体如下：

```
环 A=0,(x,y,z),dp; //定义环 k[x,y,z]多项式 f1=(1+x*y)^3*z+y^2*(1+x*y)*(
4+3*x*y); //定义 f1 多项式 f2=y+3*x*(1+x*y)^2*z+3*x*y^2*(4+3*x*y);//定
义 f2 多项式 f3=2*x-3*x^2*y-x^3*z; //定义 f3 理想 I=f1,f2,f3;
subst(I,x,0,y,0,z,-1/4); // 点 (0,0,-1/4) 的像 subst(I,x,1,y,-3/2,z,13/2); // 点
(1,-3/2,13/2) 的像 subst(I,x,-1,y,3/2,z,13/2); // 点 (-1,3/2,13/2) 的像 矩阵 J=
jacob(I); det(J); //雅可比矩阵及其行列式
```

这篇简短的札记受到 Miranda-Neto 于 2019 年发表的工作启发 [MN], ，因此早于雅可比猜想在维数 $n \geq 3$ 时不成立这一发现。除此之外，[MN], 在推论 3.2 前的评论也引起了我们的注意，其中写道：“若 $I_F = \Bbbk[X]$，我们就令$v_F = 0$，尽管这种情形并无意义，而且我们认为它在 Keller 情形下不可能发生”。

我们首先在定理 2.4 中证明 $v_F \leq \dim_{\Bbbk}(\Bbbk[X]/I_F) \leq [\Bbbk(X) : \Bbbk(F)]$。由此可知，若 $v_F = [\Bbbk(X, Y, Z) : \Bbbk(F)]$, , 则 $\operatorname{card}(V_F) = v_F$。

我们在推论 3.3 中指出，例 1.1 的 Keller 映射满足 $\operatorname{card}(V_F) = v_F = 1$，而 $[\Bbbk(X, Y, Z) : \Bbbk(F)] = 3$。

随后，通过对例 1.1 应用一些可逆仿射变换，我们在命题 4.3 中证明，Keller 映射 G 的基理想实际上可能是整个环。在这种情况下，$\operatorname{card}(V_G) = v_G = 0$，而 $[\Bbbk(X, Y, Z) : \Bbbk(G)] = 3$。在命题 5.2 中，我们通过找到一个满足 $I_G \subsetneq \langle X, Y, Z\rangle$ 且 $\operatorname{card}(V_G) = v_G = [\Bbbk(X) : \Bbbk(G)] = 3$ 的非单射 Keller 映射 φ_G，给出了一个反例，从而反驳了针对 $n = 3$ 的 [MN 猜想 C], 。在命题 6.2 中，我们证明，如果 $\Bbbk = \mathbb{R}$，那么存在一个非单射 Keller 映射 φ_G，使得 $0 < \operatorname{card}(V_G) < v_G < [\Bbbk(X) : \Bbbk(G)] = 3$。在命题 7.2 中，我们证明，如果 $\Bbbk = \mathbb{Q}$，那么存在一个非满射 Keller 映射 φ_G，使得$0 = \operatorname{card}(V_G) < v_G = 1 < [\Bbbk(X) : \Bbbk(G)] = 3$。总结如下：

基数(V_G)	v_G	$[\Bbbk(X, Y, Z) : \Bbbk(G)]$		
1	1	3	推论 3.3	任意特征为零的域
0	0	3	命题 4.3	任意特征为零的域
3	3	3	命题 5.2	任意特征为零的域
1	2	3	命题 6.2	$\Bbbk = \mathbb{R}$
0	1	3	命题 7.2	$\Bbbk = \mathbb{Q}$。

我们在定理 8.2 中给出雅可比猜想的一种纯拓扑等价改述，该改述以基点集的不可约性为依据，从而结束本文。

2. Preliminaries

我们先介绍一些预备结果，其中有些是众所周知的。为求完整，我们给出若干证明。与 X 类似，我们用 $Y = Y_1, \ldots, Y_n$ 表示一组在 $\Bbbk$ 上的 n 变量。

注记 2.1. 元素 $F = (F_1, \ldots, F_n) \in \Bbbk[X]^n$ 同时定义了一个多项式映射$\varphi_F\colon \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ 和一个 $\Bbbk$-代数的态射 $\phi_F\colon \Bbbk[X] \to \Bbbk[X]$，后者由 $\phi_F(X_i) = F_i$唯一确定。令 $G = (G_1, \ldots, G_n) \in \Bbbk[X]^n$。显然，$\varphi_G \circ \varphi_F = \mathrm{id}_{\Bbbk^n} \Leftrightarrow G(F) = (X) \Leftrightarrow \phi_G \circ \phi_F = \mathrm{id}_{\Bbbk[X]}$。因此，$\varphi_F$ 是 $\Bbbk^n$ 的自同构，当且仅当 ϕ_F 是 $\Bbbk[X]$ 的自同构。下面说明这也等价于 $\Bbbk[F] = \Bbbk[X]$。

假设 φ_F是一个自同构。那么，对于某个 $G \in \Bbbk[Y]^n$，有 $\varphi_G \circ \varphi_F = \mathrm{id}_{\Bbbk^n} = \varphi_F \circ \varphi_G$。因此，$G(F) = (X)$ 且 $F(G) = (Y)$。特别地，$X_i = G_i(F_1, \ldots, F_n) \in \Bbbk[F_1, \ldots, F_n]$ 且$\Bbbk[X] \subseteq \Bbbk[F]$。根据定义，$\Bbbk[F] \subseteq \Bbbk[X]$。因此，$\Bbbk[F] = \Bbbk[X]$。反过来，假设$\Bbbk[F] = \Bbbk[X]$。那么，$F_1, \ldots, F_n$ 在 $\Bbbk$上代数独立。事实上，若 $H \in \Bbbk[X_1, \ldots, X_n], H \neq 0$ 满足 $H(F_1, \ldots, F_n) = 0$，则 $\phi_F(H) = H(F) = 0$ 且 $H \in \ker(\phi_F)$。于是，$\Bbbk[X]/\ker(\phi_F) \cong \mathrm{Im}(\phi_F) = \Bbbk[F]$，并且 $\dim(\Bbbk[F]) = \dim(\Bbbk[X]/\ker(\phi)) < \dim(\Bbbk[X])$，这就产生了矛盾。由于 $\Bbbk[F] = \Bbbk[X]$，可知对每个 $i = 1, \ldots, n$，都存在 $G_i \in \Bbbk[Y]$，使得 $X_i = G_i(F_1, \ldots, F_n) = G_i(F)$。因此，$G(F) = (X)$ 且 $\varphi_G \circ \varphi_F = \mathrm{id}_{\Bbbk^n}$。下面考察 $F(G(Y)) = (Y)$，从而有$\varphi_F \circ \varphi_G = \mathrm{id}_{\Bbbk^n}$。对每个 $i = 1, \ldots, n$，令 $H_i(Y_1, \ldots, Y_n) = F_i(G_1(Y) \ldots, G_n(Y)) - Y_i \in \Bbbk[Y]$。将 $Y_1, \ldots, Y_n$ 代入 $F_1, \ldots, F_n$，并利用 $G_i(F) = X_i$，得到

$$H_i(F_1, \ldots, F_n) = F_i(G_1(F), \ldots, G_n(F)) - F_i = F_i(X_1, \ldots, X_n) - F_i(X_1, \ldots, X_n) = 0.$$

由于 F_1、……、F_n 代数独立，且 $H_i(F) = 0$，因此 $H_i = 0$，并且 $F(G(Y)) = (Y)$。

引理 2.2. 设 $\varphi_F\colon \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ 是一个多项式映射，$F = (F_1, \ldots, F_n) \in \Bbbk[X]^n$。

(1) 如果 V_F 非空，则 I_F 是 $\Bbbk[X]$的真理想。(2) 如果 I_F 是 $\Bbbk[X]$ 的真理想且 $\Bbbk$ 代数闭，则 V_F 非空。(3) 如果 $\varphi_F : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ 是 $\Bbbk^n$ 的自同构，则 φ_F 是 Keller 映射，并且存在唯一的 $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \Bbbk^n$，使得 $I_F = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n \rangle$。特别地，$V_F = \{a\}$ 是不可约的。(4) 如果 φ_F、$\varphi_G\colon \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ 是 Keller 映射，则 $\varphi_G \circ \varphi_F\colon \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ 是 Keller 映射。

证明。若 $a \in V_F$，则对每个 $i = 1$，都有 $F_i(a) = 0$，……，n。因此，$F_i \in I(\{a\})$ 且 $I_F = \langle F_1, \ldots, F_n \rangle \subseteq I(\{a\}) = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n \rangle \subsetneq \Bbbk[X]$。另一方面，若 I_F 是真理想，则存在 $\Bbbk[X]$ 的一个极大理想，使得 $I_F \subseteq \mathfrak{m}$。若 $\Bbbk$ 是代数闭的，根据弱零点定理，存在一个 $a \in \Bbbk^n$，使得 $\mathfrak{m} = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n \rangle = I(\{a\})$。因此，$a \in V(I(\{a\})) = V(\mathfrak{m}) \subseteq V(I_F) = V_F$，且 V_F 非空。

假设 φ_F 是一个自同构，特别地，根据链式法则，它是一个 Keller 映射。由于$\varphi_F\colon \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ 是双射，存在唯一的 $a \in \Bbbk^n$，使得 $\varphi_F(a) = (0, \ldots, 0)$。因此，

$$V_F = \{x \in \Bbbk^n \mid F_1(x) = 0, \ldots, F_n(x) = 0\} = \{x \in \Bbbk^n \mid \varphi_F(x) = 0\} = \varphi_F^{-1}(\{0\}) = \{a\}.$$

因此，$I_F = \langle F_1, \ldots, F_n \rangle \subseteq I(V(F_1, \ldots, F_n)) = I(V_F) = I(\{a\}) = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n \rangle$。我们来看另一个包含关系：$\langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n \rangle \subseteq I_F$。根据注记 2.1，由于 φ_F是一个自同构，因此 $\Bbbk[F] = \Bbbk[X]$。于是，对于每个 $i = 1, \ldots, n$，都存在 $P_i \in \Bbbk[Y]$，使得$X_i - a_i = P_i(F_1, \ldots, F_n)$。设$P_i = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \mu_{i,\alpha} Y^\alpha = \lambda_i + H_i(Y)$，其中$\lambda_i = \mu_{i,0} \in \Bbbk$ 且$H_i = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}} \mu_{i,\alpha} Y^\alpha \in \Bbbk[Y]$，其中 $H_i(0) = 0$。特别地，$X_i - a_i = P_i(F) = \lambda_i + H_i(F)$，且 $\lambda_i = -H_i(F_1, \ldots, F_n) + (X_i - a_i) \in I_F + \langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n \rangle = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n \rangle$。因此，存在多项式$g_{i,j} \in \Bbbk[X]$，使得$\lambda_i = \sum_{j=1}^n g_{i,j} \cdot (X_j - a_j)$。在$a_j$ 处对 X_j 求值，得到 $\lambda_i = 0$。因此，对所有 $i = 1, \ldots, n$，都有 $X_i - a_i = H_i(F_1, \ldots, F_n) \in I_F$。此外，若$I_F = I(\{a\}) = I(\{b\})$，则 $\{a\} = V(I(\{a\})) = V(I(\{b\})) = \{b\}$。最后，由于 $I_F = I(\{a\})$，因此$V_F = V(I_F) = V(I(\{a\})) = V(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n) = \{a\}$，并且 V_F 是不可约的。

链式法则表明 $J_{G(F)}(X) = J_G(F(X)) \cdot J_F(X)$。矩阵 $J_G = (a_{i,j}) \in \mathbf{M}_{n \times n}(\Bbbk[X])$ 的各项均为多项式 $a_{i,j} = \frac{\partial G_i}{\partial X_j} \in \Bbbk[X]$。根据定义，如果 $p, q \in \Bbbk[X]$，那么 $(p + q)(F) =$

$p(F)+q(F)$ 且 $(pq)(F)=p(F)q(F)$。因此,

$$\begin{aligned}\det(J_G)(F) &= \left(\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n}(-1)^{\epsilon(\sigma)}a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{n,\sigma(n)}\right)(F) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n}(-1)^{\epsilon(\sigma)}\left(\left(a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{n,\sigma(n)}\right)(F)\right)\\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n}(-1)^{\epsilon(\sigma)}a_{1,\sigma(1)}(F)\cdots a_{n,\sigma(n)}(F)=\det(J_G(F)).\end{aligned}$$

如果 φ_F和 φ_G是 Keller 映射，那么 $\det(J_F)=c$ 且 $\det(J_G)=d$，其中 $c,d\in\Bbbk\setminus\{0\}$。因此，$\det(J_{G(F)})=\det(J_G(F))\det(J_F)=(\det(J_G)(F))\cdot\det(J_F)=d\cdot c\in\Bbbk\setminus\{0\}$ 且 $\varphi_G\circ\varphi_F$ 是 Keller 映射。□

命题 2.3。设 $F=(F_1,\dots,F_n)$、$P=(P_1,\dots,P_n)$、$Q=(Q_1,\dots,Q_n)$，其中 $F,P,Q\in\Bbbk[X]^n$。设 $G=Q(F(P))$，其中 $G=(G_1,\dots,G_n)\in\Bbbk[X]^n$。假设 φ_F是 Keller 映射，且 φ_P,φ_Q是可逆仿射变换。则以下结论成立。

(1) $\Bbbk[Q(F)]=\Bbbk[F]$和 ϕ_P诱导出 $\Bbbk(X)$的一个自同构，使得 $\phi_P(\Bbbk(F))=\Bbbk(F(P))$。(2) $F_1,\dots,F_n$代数独立，且 $\Bbbk(F)\subset\Bbbk(X)$是一个有限域扩张。(3) 对每个 $x\in\Bbbk^n$，$\mathrm{card}(\varphi_F^{-1}(\{x\}))\le[\Bbbk(X):\Bbbk(F)]$。(4) $\varphi_G=\varphi_Q\circ\varphi_F\circ\varphi_P\colon\Bbbk^n\to\Bbbk^n$ 是一个 Keller 映射，且 $[\Bbbk(X):\Bbbk(G)]=[\Bbbk(X):\Bbbk(F)]$。

证明。根据假设，$Q_i=\sum_{j=1}^n a_{i,j}X_j+b_i$，其中$a_{i,j},b_i\in\Bbbk$且 $M=(a_{i,j})$是一个 $n\times n$可逆矩阵。因此，$Q_i(F)=Q_i(F_1,\dots,F_n)=\sum_{j=1}^n a_{i,j}F_j+b_i\in\Bbbk[F]$且 $\Bbbk[Q_1(F)\dots,Q_n(F)]\subseteq\Bbbk[F]$。令 $N=(c_{i,j})=M^{-1}$。于是，$F_i=\sum_{j=1}^n c_{i,j}(Q_j(F)-b_j)\in\Bbbk[Q_1(F)\dots,Q_n(F)]=\Bbbk[Q(F)]$。因此，$\Bbbk[Q(F)]=\Bbbk[F]$。根据假设，$\phi_P\colon\Bbbk[X]\to\Bbbk[X]$是一个自同构，且$\phi_P(g)=g(P)$，$g\in\Bbbk[X]$。因此，它诱导出一个自同构 $\phi_P\colon\Bbbk(X)\to\Bbbk(X)$，定义为 $\phi_P(g/h)=g(P)/h(P)$。由于 $\phi_P(F_i)=F_i(P)$，因此 $\phi_P(\Bbbk(F))\subseteq\Bbbk(F(P))$。此外，由于任意 $F_i(P)=\phi_P(F_i)\in\phi_P(\Bbbk(F))$，可知 $\Bbbk(F(P))\subseteq\phi_P(\Bbbk(F))$。这就证明了第 (1) 项。(2) 和 (3) 的证明见 vdE1，第 1.1.31 命题和第 1.1.32 定理。根据注记 2.1，φ_G是一个 Keller 映射。由第 (1) 项，$\Bbbk[Q(F)]=\Bbbk[F]$，因此 $\Bbbk(Q(F))=\Bbbk(F)$，且$[\Bbbk(X):\Bbbk(F)]=[\Bbbk(X):\Bbbk(Q(F))]$。将第 (1) 项的第二部分应用于 $Q(F)$，而非 F，可推知存在 $\Bbbk(X)$的一个自同构，使得 $\phi_P(\Bbbk(Q(F)))=\Bbbk(Q(F(P)))=\Bbbk(G)$。因此，$[\Bbbk(X):\Bbbk(F)]=[\Bbbk(X):\Bbbk(Q(F))]=[\Bbbk(X):\Bbbk(G)]$。□

回想一下，根据 [MN，定理 3.1], , Keller 映射 $\varphi_F\colon\Bbbk^n\to\Bbbk^n$ 的基理想 I_F 等于 v_F 个互不相同的极大理想的交，其中 $v_F=0$，若 $I_F=\Bbbk[X]$。

定理 2.4. 设 $\varphi_F\colon\Bbbk^n\to\Bbbk^n$ 是一个 Keller 映射。那么，

$$\mathrm{card}(V_F)\le v_F\le\dim_{\Bbbk}(\Bbbk[X]/I_F)\le[\Bbbk(X):\Bbbk(F)].$$

若 $\Bbbk$ 是代数闭的，则 $\mathrm{card}(V_F)=v_F$。若 $v_F=[\Bbbk(X):\Bbbk(F)],$, 则 $\mathrm{card}(V_F)=v_F$。

证明. 设 $I_F=\cap_{i=1}^{v_F}\mathfrak{m}_i$ 是 I_F 的极小主分解，其中 $I_F=\Bbbk[X]$，若 $v_F=0$。那么，$V_F=V(I_F)=V(\cap_{i=1}^{v_F}\mathfrak{m}_i)=\cup_{i=1}^{v_F}V(\mathfrak{m}_i)$。注意，若 $V(\mathfrak{m}_i)$ 非空，则存在 $a\in V(\mathfrak{m}_i)$，因此 $I(\{a\})\supseteq I(V(\mathfrak{m}_i))\supseteq\mathfrak{m}_i$。由于 $\mathfrak{m}_i$ 是极大理想，因此 $\mathfrak{m}_i=I(\{a\})$，且 $V(\mathfrak{m}_i)=V(I(\{a\})=\{a\}$ 是一个点。所以，$V(\mathfrak{m}_i)$ 要么为空，要么是一个点。因此，$\mathrm{card}(V_F)\le v_F$（见 [MN] 中推论 3.2 之前的注释）。特别地，若 $\Bbbk$ 是代数闭的，则 $\mathrm{card}(V_F)=v_F$。

令 L 为 $\Bbbk$ 的代数闭包。令 $\varphi_{F,L}\colon L^n\to L^n$ 为由 $F\in L[X]^n$ 定义的 Keller 映射。令 $I_{F,L}=\langle F_1,\dots,F_n\rangle_{L[X]}=I_FL[X]$ 为 $\varphi_{F,L}$ 的基理想；根据 Miranda-Neto 定理 [MN 定理 3.1]，它可写为 $I_{F,L}=\cap_{j=1}^{v_F,L}\mathfrak{n}_j$，其中 $\mathfrak{n}_j$ 是 $L[X]$的极大理想。由于 L 是代数闭的，对于某个点 $q_j\in L^n$ 和 $L[X]/\mathfrak{n}_j\cong L$，有 $\mathfrak{n}_j=I(\{q_j\})$。令 $V_{F,L}=V(I_{F,L})=\cup_{j=1}^{v_F,L}V(\mathfrak{n}_j)=\{q_1,\dots,q_{v_{F,L}}\}$ 为 $\varphi_{F,L}$ 的基点集。

由于 L 是一个自由（因此平坦的） $\Bbbk$-模，与 L 张量相乘保持正合性。因此，由短正合列 $0 \to I_F \to \Bbbk[X] \to \Bbbk[X]/I_F \to 0$，我们可推出短正合列

$$0 \to I_F \otimes_{\Bbbk} L \to \Bbbk[X] \otimes_{\Bbbk} L \to (\Bbbk[X]/I_F) \otimes_{\Bbbk} L \to 0.$$

通过自然同构 $\Bbbk[X] \otimes_{\Bbbk} L \cong L[X]$，$I_F \otimes_{\Bbbk} L$ 可与 $I_F L[X] = I_{F,\,L}$ 识别。因此，$(\Bbbk[X]/I_F) \otimes_{\Bbbk} L \cong L[X]/I_{F,\,L}$。由于 $\Bbbk[X]/I_F$ 是一个以 $\{e_i\}_{i\in\Lambda}$ 为基的自由 $\Bbbk$-模，也就是说，则 $L[X]/I_{F,\,L} \cong (\Bbbk[X]/I_F) \otimes_{\Bbbk} L$ 是一个以 $\{e_i \otimes 1\}_{i\in\Lambda}$ 为基的自由 L-模。特别地，$\dim_{\Bbbk}(\Bbbk[X]/I_F) = \dim_L(L[X]/I_{F,\,L})$。由中国剩余定理，

$$\Bbbk[X]/I_F \cong \Bbbk[X]/\mathfrak{m}_1 \times \ldots \times \Bbbk[X]/\mathfrak{m}_{v_F} \text{ and } L[X]/I_{F,L} \cong L[X]/\mathfrak{n}_1 \times \ldots \times L[X]/\mathfrak{n}_{v_{F,L}}.$$

特别地，

$$v_F \leq \sum_{i=1}^{v_F} \dim_{\Bbbk}(\Bbbk[X]/\mathfrak{m}_i) = \dim_{\Bbbk}(\Bbbk[X]/I_F) = \dim_L(L[X]/I_{F,L}) = \sum_{j=1}^{v_{F,L}} \dim_L(L[X]/\mathfrak{n}_j) = v_{F,L}.$$

由于 L 是代 g数闭 y 的 $= 卡$, $v_{F,L}$ $(V_{F,L})$. By Prop命题 2.3 , $\operatorname{card}(V_{F,L}) \leq [L(X) : L(F)]$.

注意，$\Bbbk(X) = \Bbbk(F)(X_1, \ldots, X_n)$，且 $L(X) = L(F)(X_1, ..., X_n)$。对于每个 $i = 1, \ldots, n$，令 $M_i = \Bbbk(F)(X_1, \ldots, X_i)$ 和 $N_i = L(F)(X_1, \ldots, X_i)$，$M_0 = \Bbbk(F)$ 和 $N_0 = L(F)$。特别地，$M_n = \Bbbk(X)$ 和 $N_n = L(X)$。由于 $X_1, \ldots, X_n$ 在 $\Bbbk(F)$ 上是代数的，因此，对于每个 i =1, $\ldots, n$，$M_{i-1} \subset M_i$ 和 $N_{i-1} \subset N_i$ 都是代数扩张，并且 $[N_i\colon N_{i-1}] = \deg(\operatorname{Irr}(X_i, N_{i-1})) \leq \deg(\operatorname{Irr}(X_i, M_{i-1})) = [M_i\colon M_{i-1}]$，其中 $\operatorname{Irr}(\alpha, K)$ 表示域 K上代数元素 α 的不可约多项式。因此，

$$[L(X) : L(F)] = \prod_{i=1}^{n} [N_i : N_{i-1}] \leq \prod_{i=1}^{n} [M_i : M_{i-1}] = [\Bbbk(X) : \Bbbk(F)].$$

因此，$v_F \leq$维数$_{\Bbbk}(\Bbbk[X]/I_F) = v_{F,L} =$基数$(V_{F,L}) \leq [L(X)\colon L(F)] \leq [\Bbbk(X)\colon \Bbbk(F)]$。特别地，若 $v_F = [\Bbbk(X)\colon \Bbbk(F)]$,，则 $v_F =$ 维数 $_{\Bbbk}(\Bbbk[X]/I_F) = \sum_{i=1}^{v_F}$ 维数 $_{\Bbbk}(\Bbbk[X]/\mathfrak{m}_i)$。因此，每个 $\Bbbk[X]/\mathfrak{m}_i$ 的维数都是 1，且 $\mathfrak{m}_i = I(\{p_i\})$，其中某个点为 $p_i \in \Bbbk^n$。所以，$V_F = V(I_F) = \cup_{i=1}^{v_F} V(\mathfrak{m}_i) = \{p_1, \ldots, p_{v_F}\}$，且基数$(V_F) = v_F$。□

3. The degree of the field extension in Example 1.1

让我们计算例 1.1 中代数域扩张 $\Bbbk(F_1, F_2, F_3) \subset \Bbbk(X, Y, Z)$ 的次数。关于一种略有不同的方法，参见 [AI，第 5 页，注 4.4], 之前。

命题 3.1. 设 F_1, F_2, F_3 是例 1.1 中的三个多项式，且 $F = (F_1, F_2, F_3)$。令 $A = 27Y_1^2Y_3^2 - 18Y_1Y_2Y_3 + 16Y_1 + Y_2^3Y_3 - Y_2^2$, $B = 4 - 3Y_2Y_3$ 和 $C = -2Y_3$, $A, B, C \in \Bbbk[Y_1, Y_2, Y_3]$。那么，

$$A(F_1, F_2, F_3)X^3 + B(F_1, F_2, F_3)X + C(F_1, F_2, F_3) = 0, \tag{1}$$

$$Y = (9X^2F_1F_3 - 3XF_2F_3 - X^2F_2 - 3F_3 + 6X)/(3X^2F_2F_3 + 3XF_3 - 4X^2) \text{ and} \tag{2}$$

$$Z = (2X - 3X^2Y - F_3)/X^3. \tag{3}$$

特别地，$[\Bbbk(X, Y, Z)\colon \Bbbk(F)] = 3$。

证明. 回忆一下，根据定义，F_1, F_2, F_3 分别为：$F_1 = (1 + XY)^3Z + Y^2(1 + XY)(4 + 3XY)$, $F_2 = Y + 3X(1 + XY)^2Z + 3XY^2(4 + 3XY)$ 和 $F_3 = 2X - 3X^2Y - X^3Z$。因此，

$$Z = (2X - 3X^2Y - F_3)/X^3.$$

由此可得，$\Bbbk(X, Y, Z) = \Bbbk(X, Y, F_1, F_2, F_3)$。另一方面，可以验证：

$$3XF_1 - (1 + XY)(F_2 - Y) = 0. \tag{4}$$

将 F_2 乘以 X^2，得到：

$$X^2F_2 = X^2Y + 3(1 + XY)^2(X^3Z) + 3X^3Y^2(4 + 3XY). \tag{5}$$

将 X^3Z 代入（5）中的 $2X-3X^2Y-F_3$，得到：

$$X^2F_2=-3X^2Y^2F_3+(4X^2-6XF_3)Y+(6X-3F_3),$$

so

$$3X^2Y^2F_3-(4X^2-6XF_3)Y-(6X-X^2F_2-3F_3)=0. \tag{6}$$

将方程 (4) 乘以 $3XF_3$，再减去方程 (6)，得到：

$$3XF_3(3XF_1-(1+XY)(F_2-Y))-3X^2Y^2F_3+(4X^2-6XF_3)Y+(6X-X^2F_2-3F_3)=0.$$

展开此表达式，并合并变量 Y 的相关项：

$$Y(-3X^2F_2F_3-3XF_3+4X^2)+(9X^2F_1F_3-3XF_2F_3-X^2F_2-3F_3+6X)=0. \tag{7}$$

设 $N=9X^2F_1F_3-3XF_2F_3-X^2F_2-3F_3+6X$ 和 $D=3X^2F_2F_3+3XF_3-4X^2$。则，$Y=N/D$ 和 $Y\in\Bbbk$（X、F_1、F_2、F_3）。因此 $\Bbbk$（X、Y、Z）$=\Bbbk$（F_1、F_2、F_3）（X）。由方程 (4)，得到：

$$XY^2+(1-XF_2)Y+(3XF_1-F_2)=0. \tag{8}$$

将 $Y=N/D$ 代入方程 (8)，并乘以 D^2，得到：

$$XN^2+(1-XF_2)DN+(3XF_1-F_2)D^2=0. \tag{9}$$

将 D 和 N 的值代入方程 9，得到：

$$3X^2\cdot\left[(27F_1^2F_3^2-18F_1F_2F_3+16F_1+F_2^3F_3-F_2^2)X^3+(4-3F_2F_3)X-2F_3\right]=0.$$

通过 $3X^2$ 化简后，我们得到

$$\underbrace{(27F_1^2F_3^2-18F_1F_2F_3+16F_1+F_2^3F_3-F_2^2)}_{A}X^3+\underbrace{(4-3F_2F_3)}_{B}X+\underbrace{(-2F_3)}_{C}=0. \tag{10}$$

因此，X 在 $\Bbbk(F)$ 上是代数的，并且 $[\Bbbk(F)(X):\Bbbk(F)]\leq 3$。例 1.1 表明，$(-1/4,0,0)$ 通过 φ_F 至少有 3 个原像。根据命题 2.3，$[\Bbbk(X,Y,Z):\Bbbk(F)]\geq 3$。因此，我们得到等式 $[\Bbbk(X,Y,Z):\Bbbk(F)]=3$。要使用 Singular [DGPS],https://singular-in-browser.pages.dev/ 检查等式 (7) 和 (10)：

```
环 A=(0,a,b,c),(x,y,z),dp; //定义环 A 多项式 f1=(1+x*y)^3*z+y^2*(1+x*y)*(4+3
*x*y); //定义 f1 多项式 f2=y+3*x*(1+x*y)^2*z+3*x*y^2*(4+3*x*y);//定义 f2 多项
式 f3=2*x-3*x^2*y-x^3*z; //定义 f3 y*x*(3*x*f2*f3+3*f3-4*x)-(9*x^2
*f1*f3-3*x*f2*f3-f2*x^2-3*f3+6*x); //这为零，因此 y 属于 k(x,f1,f2,f3) 多项式
ny=9*x^2*a*c-3*x*b*c-b*x^2-3*c+6*x; //y 的分子 多项式 dy=x*(3*x*b*c+3
*c-4*x); //y 的分母 多项式 g=x*ny^2+(1-x*b)*dy*ny+(3*x*a-b)*dy^2; 多项式 h=
(27*a^2*c^2-18*a*b*c+16*a+b^3*c-b^2)*x^3+(4-3*b*c)*x-2*c; g-3*x^2*h; //这
为零 (27*f1^2*f3^2-18*f1*f2*f3+16*f1+f2^3*f3-f2^2)*x^3+(4-3*f2*f3)*x-2*f3;

                                                                    //零
```

□

推论 3.2。令 F_1、F_2、F_3 为例 1.1 中的三个多项式，并令 $F=(F_1,F_2,F_3)$。令 A、B、$C\in\Bbbk[Y_1,Y_2,Y_3]$ 为命题 3.1 中定义的多项式。令 $(a,b,c)\in\Bbbk^3$、$G_1=F_1-a$、$G_2=F_2-b$、$G_3=F_3-c$，且令 $G=(G_1,G_2,G_3)$。则，$\varphi_G:\Bbbk^3\to\Bbbk^3$ 是一个 Keller 映射，并且

$$A(a,b,c)X^3+B(a,b,c)X+C(a,b,c)\in I_G. \tag{11}$$

此外，如果对于某个 $(x,y,z)\in\Bbbk^3$，有 $(a,b,c)=\varphi_F(x,y,z)$，那么

$$A(a,b,c)x^3+B(a,b,c)x+C(a,b,c)=0, \tag{12}$$

其中 $A(a,b,c)=27a^2c^2-18abc+16a+b^3c-b^2$，$B(a,b,c)=4-3bc$ 和 $C(a,b,c)=-2c$。

证明。显然， $\varphi_G : \mathbb{k}^3 \to \mathbb{k}^3$ 是一个 Keller 映射（另见命题 2.3）。根据命题 3.1 中的等式 (1), 并利用二项式展开，可得:

$$\begin{aligned} 0 &= A(F_1,F_2,F_3)X^3 + B(F_1,F_2,F_3)X + C(F_1,F_2,F_3) \\ &= A(G_1+a,G_2+b,G_3+c)X^3 + B(G_1+a,G_2+b,G_3+c)X + C(G_1+a,G_2+b,G_3+c) \\ &= A(a,b,c)X^3 + B(a,b,c)X + C(a,b,c) + PX^3 + QX + R, \end{aligned}$$

此处 $P,Q,R \in \langle G_1,G_2,G_3\rangle = I_G$，因此 $A(a,b,c)X^3 + B(a,b,c)X + C(a,b,c) \in I_G$.

假设 $a = F_1(x,y,z)$、 $b = F_2(x,y,z)$ 和 $c = F_3(x,y,z)$，其中某个 $(x,y,z) \in \mathbb{k}^3$。在 $A(F_1,F_2,F_3)X^3 + B(F_1,F_2,F_3)X + C(F_1,F_2,F_3) = 0$ 中，用 x,y,z 代入 X,Y,Z，这是 $\mathbb{k}[X,Y,Z]$ 中的一个等式，由此得到 $A(a,b,c)x^3 + B(a,b,c)x + C(a,b,c) = 0$。明确写出 $A(a,b,c)$、 $B(a,b,c)$ 和 $C(a,b,c)$ 的值，得到 $(27a^2c^2 - 18abc + 16a + b^3c - b^2)x^3 + (4 - 3bc)x - 2c = 0$。□

推论 3.3. 设 F_1、 F_2、 F_3 是例 1.1 中的三个多项式，且 $F = (F_1,F_2,F_3)$。那么，$I_F = \langle X、 Y、 Z\rangle$，且 $\mathrm{card}(V_F) = v_F = 1$；而 $[\mathbb{k}(X,Y,Z): \mathbb{k}(F)] = 3$。

证明。根据命题 3.1， $[\mathbb{k}(X,Y,Z): \mathbb{k}(F)] = 3$。在方程 (11) 中取 $(a,b,c) = (0,0,0)$。于是，$G = (G_1,G_2,G_3) = (F_1,F_2,F_3) = F$， $I_G = I_F$，并且 $A(0,0,0)X^3 + B(0,0,0)X + C(0,0,0) \in I_G = I_F$。但是， $A(0,0,0) = 0$， $B(0,0,0) = 4$，且 $C(0,0,0) = 0$。因此， $4X$，从而 $X \in I_F$。由于 $F_2 = Y + XP$，所以 $Y \in \langle F_2、 X\rangle \subset I_F$。由于 $F_1 = (1 + XY)^3Z + YQ$，所以 $F_1 = Z + YR$ 且 $Z \in \langle F_1、 Y\rangle \subset I_F$。因此， $\langle X、 Y、 Z\rangle \subseteq I_F$。另一重包含关系由 F_1、 F_2、 F_3 的定义得到。特别地， $v_F = 1$、 $V_F = V(I_F) = \{(0,0,0)\}$，且 $\mathrm{card}(V_F) = v_F$。要用 SINGULAR、[DGPS]，进行验证，请添加该行

```
理想 I=f1,f2,f3; lift(I,x); lift(I,y); lift(I,z);
```

对应例 1.1 中的代码。 □

推论 3.3 表明，存在一个 Keller 映射 φ_F，它不是自同构，并且满足 $I_F = \langle X,Y,Z\rangle$。因此，引理 2.2 的 (3) 的逆命题通常并不成立。

4. The base ideal might be improper

为说明 Keller 映射的基理想可能不是真理想，我们使用下面的引理。

引理 4.1。设 $\varphi_F: \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n$ 是一个非满射 Keller 映射。设 $a = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{k}^n, a \notin \mathrm{Im}(\varphi_F)$。设 $G = (F_1 - a_1,\ldots,F_n - a_n) \in \mathbb{k}[X]^n$。那么， $\varphi_G: \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n$ 是一个非满射 Keller 映射，并且 V_G 为空。此外，如果 $\mathbb{k}$ 是代数闭的，那么 $I_G = \mathbb{k}[X]$ 不是一个真理想。

证明。令 $Q = (X_1 - a_1,\ldots,X_n - a_n) \in \mathbb{k}[X]^n$。那么， $G = Q(F)$ 且 $\varphi_G = \varphi_Q \circ \varphi_F$。由于 φ_F 和 φ_Q 都是 Keller 映射，因此 φ_G 是 Keller 映射。由于 φ_F 不是满射，且 φ_Q 可逆，因此 φ_G 不是满射。此外，由于 a 不在 φ_F 的像中， $V(I_G) = V(F_1 - a_1,\ldots,F_n - a_n) = \{x \in \mathbb{k}^n \mid F_1(x) = a_1,\ldots,F_n(x) = a_n\} = \emptyset$。如果 $\mathbb{k}$ 是代数闭的，那么 $\mathrm{rad}(I_G) = I(V(I_G)) = I(\emptyset) = \mathbb{k}[X]$，且 $I_G = \mathbb{k}[X]$ 不是一个真理想。□

因此，当 $\mathbb{k}$ 是代数闭的，要证明 Keller 映射的基理想可能不是真理想，只需找到一个非满射的 Keller 映射。我们知道，例 1.1 中的 Keller 映射不是单射。下面来看它是否也不是满射。事实上，我们找到的空纤维对应于 [AI 定理 4.2] 中的 $t = 3/2$。这里我们采用的方法略有不同，并未使用 $\mathbb{k} = \mathbb{C}$。

引理 4.2。设 F_1、 F_2、 F_3 是例 1.1 中的三个多项式，且 $F = (F_1,F_2,F_3)$。设 A、 B、 $C \in \mathbb{k}[Y_1,Y_2,Y_3]$ 是命题 3.1 中定义的多项式。那么，点 $(\frac{-}{427}, \frac{-}{43}, 1)$ 不属于 φ_F 的像。此外，$A(\frac{-}{427}, \frac{-}{43}, 1) = 0$， $B(\frac{-}{427}, \frac{-}{43}, 1) = 0$，且 $C(\frac{-}{427}, \frac{-}{43}, 1) = -2$。

证明。若对某个 $(x,y,z) \in \mathbb{k}^3$，有 $(a,b,c) = \varphi_F(x,y,z)$，则根据推论 3.2 中的等式 (12)：

$$A(a,b,c)x^3 + B(a,b,c)x + C(a,b,c) = 0,$$

其中 $A(a,b,c) = (27a^2c^2 - 18abc + 16a + b^3c - b^2)$，$B(a,b,c) = 4 - 3bc$ 且 $C(a,b,c) = -2c$。为使该方程在 x 中导出矛盾，我们可以取 $c = 1$ 和 $b = 4/3$，使得 $C(\cdot,\cdot,1) = -2$ 且 $B(\cdot,4/3,1) = 0$。此外，若取 $a = 4/27$，则 $A(4/27, 4/3, 1) = 0$。□

由引理 4.2 和引理 4.1 可推出，若 $\mathbb{k}$ 是代数闭的，则存在一个 Keller 映射 $\varphi_G : \mathbb{k}^3 \to \mathbb{k}^3$，使得 $I_G = \mathbb{k}[X]$。事实上，甚至可以不要求 $\mathbb{k}$是代数闭的。回想例 1.1，$\mathbb{k}$ 只是一个特征为零的域。

命题 4.3。设 F_1, F_2, F_3 是例 1.1 中的三个多项式，且 $F = (F_1, F_2, F_3)$。设 $G_1 = F_1 - \frac{4}{27}$, $G_2 = F_2 - \frac{4}{3}$, $G_3 = F_3 - 1$ 以及 $G = (G_1, G_2, G_3)$。则，φ_G：$\mathbb{k}^3 \to \mathbb{k}^3$ 是一个非满射 Keller 映射，且 $I_G = \mathbb{k}[X]$。特别地，V_G 不可约。

证明。根据例 1.1 和引理 4.2，φ_F 是一个非满射 Keller 映射。根据引理 4.1，φ_G 是一个非满射 Keller 映射。根据推论 3.2 和引理 4.2，$A(\frac{4}{27}, \frac{4}{3}, 1)X^3 + B(\frac{4}{27}, \frac{4}{3}, 1)X + C(\frac{4}{27}, \frac{4}{3}, 1) = -2 \in I_G$。因此，$I_G = \mathbb{k}[X]$ 和 $V_G = V(I_G) = \emptyset$ 不可约。

使用 SINGULAR [DGPS], https://singular-in-browser.pages.dev/ 在线版本：

环 A=0,(x,y,z),dp; //定义环多项式 f1=(1+x*y)^3*z+y^2*(1+x*y)*(4+3*x*y); 多项式 g1=f1-(4/27); //定义 f1 和 g1 多项式 f2=y+3*x*(1+x*y)^2*z+3*x*y^2*(4+3*x*y);多项式 g2=f2-(4/3); //定义 f2 和 g2 多项式 f3=2*x-3*x^2*y-x^3*z; 多项式 g3=f3-1; //定义 f3 和 g3 理想 Ig=g1,g2,g3; //定义理想 J lift(Ig,1); //用 gi 表示 1

□

5. THE BASE IDEAL OF A KELLER MAP MIGHT BE PROPER AND NOT MAXIMAL

为了说明 Keller 映射的基理想可能严格包含于原点处的极大理想中，我们使用以下引理。

引理 5.1. 设 φ_F：$\mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n$ 为一个非单射 Keller 映射。设 $a, b, c \in \mathbb{k}^n$，其中 $a = (a_1, \ldots, a_n)$，$b = (b_1, \ldots, b_n)$，$a \neq b$，且 $c = (c_1, \ldots, c_n)$，使得 $\varphi_F(a) = \varphi_F(b) = c$。设

$$P = (X_1 + a_1, \ldots, X_n + a_n),\ Q = (X_1 - c_1, \ldots, X_n - c_n) \ \ and \ \ G = Q(F(P)),$$

其中 $F, P, Q, G \in \mathbb{k}[X]^n$。设 φ_G：$\mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n$ 为由 G 定义的多项式映射。于是，$\varphi_G = \varphi_Q \circ \varphi_F \circ \varphi_P$ 是一个非单射 Keller 映射，$V_G \supseteq \{0, b-a\}$ 且

$$I_G \subseteq \langle X_1, \ldots, X_n \rangle \cap \langle X_1 - (b_1 - a_1), \ldots, X_n - (b_n - a_n) \rangle.$$

特别地，$I_G \subsetneq \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$。

证明。根据 G 的定义，$\varphi_G = \varphi_Q \circ \varphi_F \circ \varphi_P$。显然，$\varphi_P$ 和 φ_Q 是可逆 Keller 映射。因此，φ_G 是一个非单射 Keller 映射。此外，$\varphi_G(0) = \varphi_Q(\varphi_F(\varphi_P(0))) = \varphi_Q(\varphi_F(a)) = \varphi_Q(c) = 0$。类似地，$\varphi_G(b-a) = \varphi_Q(\varphi_F(\varphi_P(b-a))) = \varphi_Q(\varphi_F(b)) = \varphi_Q(c) = 0$。因此，$\{0, b-a\} \subseteq \varphi_G^{-1}(\{0\}) = V_G = V(I_G)$ 且

$$I(\{0\}) \cap I(\{b-a\}) = I(\{0, b-a\}) \supseteq I(V(I_G)) \supseteq I_G.$$

因此，$I_G \subseteq \langle X_1, \ldots, X_n \rangle \cap \langle X_1 - (b_1 - a_1) \ldots, X_n - (b_n - a_n) \rangle$。由于 $a \neq b$，因此可得 $I_G \subsetneq \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$。□

通过适当修改例 1.1 并应用引理 5.1，我们为 $n = 3$ ([MN，猜想 C]) 构造了一个反例。这里，我们得到 $\mathrm{card}(V_G) = v_G = [\mathbb{k}(X, Y, Z) : \mathbb{k}(G)]$。

命题 5.2. 设 F_1, F_2, F_3 为例 1.1 中的三个多项式，且 $F = (F_1, F_2, F_3)$。设 $P = (P_1, P_2, P_3) = (X, Y, Z - \frac{1}{4})$, $Q = (Q_1, Q_2, Q_3) = (X + \frac{1}{4}, Y, Z)$，且 $G = Q(F(P))$，其中 F, P, Q, G 属于 $\Bbbk[X, Y, Z]^3$。设 φ_G: $\Bbbk^3 \to \Bbbk^3$ 为由 G定义的多项式映射。那么，$\varphi_G = \varphi_Q \circ \varphi_F \circ \varphi_P$是一个非单射凯勒映射，且 $I_G \subsetneq \langle X, Y, Z\rangle$。具体而言，

$$I_G = \langle X, Y, Z\rangle \cap \langle X - 1, Y + \tfrac{3}{2}, Z - \tfrac{27}{4}\rangle \cap \langle X + 1, Y - \tfrac{3}{2}, Z - \tfrac{27}{4}\rangle,$$

$V_G = \{(0, 0, 0), (1, -3/2, 27/4), (-1, 3/2, 27/4)\}$ 且 $\mathrm{card}(V_G) = v_G = [\Bbbk(X, Y, Z) : \Bbbk(G)] = 3$。

证明。令 $a = (0, 0, -1/4)$, $b = (1, -3/2, 13/2)$, $b' = (-1, 3/2, 13/2)$ 和 $c = (-1/4, 0, 0)$。例 1.1 告诉我们，$\varphi_F(a) = \varphi_F(b) = \varphi_F(b') = c$。由引理 5.1，推得 $\varphi_G = \varphi_Q \circ \varphi_F \circ \varphi_P$是一个非单射凯勒映射，$V_G \supseteq \{0, b - a, b' - a\}$ 和 $I_G \subseteq \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{m}_3$，其中 $\mathfrak{m}_1 = \langle X, Y, Z\rangle$,$\mathfrak{m}_2 = \langle X - 1, Y + \frac{3}{2}, Z - \frac{27}{4}\rangle$ 和 $\mathfrak{m}_3 = \langle X + 1, Y - \frac{3}{2}, Z - \frac{27}{4}\rangle$。利用命题 2.3、3.1 和定理 2.4，推得 $3 \le \mathrm{card}(V_G) \le v_G \le [\Bbbk(X) : \Bbbk(G)] = 3$。因此，$v_G = 3$ 和$I_G = \mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{n}_2 \cap \mathfrak{n}_3 \subseteq \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{m}_3 \subset \mathfrak{m}_i$，故存在 $\mathfrak{n}_{j(i)} \subseteq \mathfrak{m}_i$。由于 $\mathfrak{n}_{j(i)}$ 是极大的，故 $\mathfrak{n}_{j(i)} = \mathfrak{m}_i$和 $\{\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_3\} = \{\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3\}$。于是，$I_G = \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{m}_3$。为验证这一点，我们可以使用 Singular [DGPS], https://singular-in-browser.pages.dev/:

环 A=0,(x,y,z),dp; //定义环 A option(redSB); //强制约化 Gröbner 基的唯一性 多项式 f1=(1+x*y)^3*z+y^2*(1+x*y)*(4+3*x*y); //定义 f1 多项式 f2=y+3*x*(1+x*y)^2*z+3*x*y^2*(4+3*x*y);//定义 f2 多项式 f3=2*x-3*x^2*y-x^3*z; //定义 f3 多项式 f1p=subst(f1,z,z-1/4); //定义 f_1(p) 多项式 f2p=subst(f2,z,z-1/4); //定义 f_2(p) 多项式 f3p=subst(f3,z,z-1/4); //定义 f_3(p) 多项式 g1=f1p+1/4; 多项式 g2=f2p; 多项式 g3=f3p; 理想 Ig=g1,g2,g3; //定义理想 Ig 理想 m1=x,y,z; 理想 m2=x-1,y+3/2,z-27/4; 理想 m3=x+1,y-3/2,z-27/4; 理想 J=交(m1,m2,m3); std(Ig); std(J); // Ig 和 J 相等

□

6. The real case

如果 $\Bbbk = \mathbb{R}$，那么存在一个 Keller 映射 φ_G，其 $0 < \mathrm{card}(V_G) < v_G < [\Bbbk(X, Y, Z) : \Bbbk(G)] = 3$。这回答了 Miranda-Neto 在维数 2 中提出的一个问题（见定理 5.1 之前的 [MN], ）。我们首先在 $\mathbb{C}^3$ 中寻找一个点，使得例 1.1 的 φ_F 的原像有两个非实点。

引理 6.1。设 F_1, F_2, F_3 为例 1.1 中的三个多项式，且 $F = (F_1, F_2, F_3)$。那么，$\varphi_F^{-1}(\{(\frac{1}{4}, 0, 0)\}) = \{(0, 0, 1/4), (i, \frac{3}{2}i, -\frac{13}{2}), (-i, -\frac{3}{2}i, -\frac{13}{2})\}$。

证明。如果对于某个 $(x, y, z) \in \Bbbk^3$，$(a, b, c) = \varphi_F(x, y, z)$，那么

$$\left\{\begin{array}{lcll} a & = & F_1(x, y, z) & = (1 + xy)^3 z + y^2(1 + xy)(4 + 3xy), \\ b & = & F_2(x, y, z) & = y + 3x(1 + xy)^2 z + 3xy^2(4 + 3xy), \\ c & = & F_3(x, y, z) & = 2x - 3x^2 y - x^3 z. \end{array}\right. \tag{13}$$

此外，根据推论 3.2 中的等式 (12):

$$A(a, b, c)x^3 + B(a, b, c)x + C(a, b, c) = 0,$$

其中 $A(a, b, c) = (27a^2c^2 - 18abc + 16a + b^3c - b^2)$，$B(a, b, c) = 4 - 3bc$ 且 $C(a, b, c) = -2c$。取 $\Bbbk = \mathbb{C}$。为了使 $x \in \mathbb{R}$ 在 $A(a, b, c)x^3 + B(a, b, c)x + C(a, b, c) = 0$中有唯一根，令 $A(a, b, c) = B(a, b, c)$ 且 $C(a, b, c) = 0$，于是方程变为 $A(a, b, c) \cdot x(x^2 + 1) = 0$。但是，若 $C(a, b, c) = 0$，则 $c = 0$；并且若进一步 $A(a, b, c) = B(a, b, c)$，则 $B(a, b, c) = 4$ 且 $A(a, b, c) = 16a - b^2 = 4$。

例如，对于 $(a,b,c) = (1/4, 0, 0)$，上述结论成立。在这种情况下，$x \in \{0, i, -i\}$。若 $x = 0$，利用方程 (13)，可得 $1/4 = a = z + 4y$ 且 $0 = b = y$，$(x, y, z) = (0, 0, 1/4)$。假设$x = \pm i$ 且 $(1/4, 0, 0) = \varphi_F(i, y, z) = (F_1(i, y, z)\ F_2(i, y, z)\ F_3(i, y, z)$。在命题 3.1 的等式 (2) 中，以$\pm i, y, z$ 替换 X, Y, Z，得到 $y = \pm 6i/4 = \pm 3i/2$。在同一命题的等式 (3) 中，以$\pm i, \pm 3i/2, z$ 替换 X, Y, Z，得到 $z = (\pm 2i + 3(\pm 3i/2)) / \mp i = -13/2$。因此，$\varphi_F^{-1}(\{(1/4, 0, 0)\}) = \{(0, 0, 1/4), (i, 3i/2, -13/2), (-i, -3i/2, -13/2)\}$。

在 https://singular-in-browser.pages.dev/ 中使用 SINGULAR [DGPS]：

```
环 A=(0,i),(x,y,z),dp; 最小多项式 =i^2+1;//定义 有理数域的 i 扩张 [x,y,z]多项
式 f1=(1+x*y)^3*z+y^2*(1+x*y)*(4+3*x*y); //定义 f1 多项式 f2=y+3*x*(1+
x*y)^2*z+3*x*y^2*(4+3*x*y);//定义 f2 多项式 f3=2*x-3*x^2*y-x^3*z; //定义
f3 理想 I=f1,f2,f3; subst(I,x,0,y,0,z,1/4); // 点 (0,0,1/4) 的像
subst(I,x,i,y,3i/2,z,-13/2); // 点 (i,3i/2,-13/2) 的像
subst(I,x,-i,y,-3i/2,z,-13/2); // 点 (-i,-3i/2,-13/2) 的像
```

□

命题 6.2. 设 F_1、F_2、F_3 是例 1.1 中的三个多项式，且 $F = (F_1, F_2, F_3)$。令 $P = (P_1, P_2, P_3) = (X, Y, Z + \frac{1}{4})$，$Q = (Q_1, Q_2, Q_3) = (X - \frac{1}{4}, Y, Z)$，以及 $G = Q(F(P))$，其中 F、P、Q、G 属于 $\Bbbk[X, Y, Z]^3$。令 $\varphi_G \colon \Bbbk^3 \to \Bbbk^3$ 为由 G 定义的多项式映射。那么，$\varphi_G = \varphi_Q \circ \varphi_F \circ \varphi_P$ 是一个非单射凯勒映射。

(*a*) 若 $\Bbbk = \mathbb{C}$，则 $I_G = \langle X、\ Y、\ Z\rangle \cap \langle X - i、\ Y - \frac{3}{2}i、\ Z + \frac{27}{4}\rangle \cap \langle X + i、\ Y + \frac{3}{2}i、\ Z + \frac{27}{4}\rangle$。特别地，$V_G = \{(0, 0, 0)、(i, \frac{3}{2}i, -\frac{27}{4})、(-i, -\frac{3}{2}i, -\frac{27}{4})\}$，且 $\operatorname{card}(V_G) = v_G = [\mathbb{C}(X, Y, Z) : \mathbb{C}(G)] = 3$。(*b*) 若 $\Bbbk = \mathbb{R}$，则 $I_G = \langle X、\ Y、\ Z\rangle \cap \langle X - \frac{2}{3}Y、\ Y^2 + \frac{9}{4}、\ Z + \frac{27}{4}\rangle$。特别地，$V_G = \{(0, 0, 0)\}$，且 $1 = \operatorname{card}(V_G) < v_G = 2 < [\mathbb{R}(X, Y, Z) : \mathbb{R}(G)] = 3$。

证明。设 $a = (0, 0, 1/4)$、$b = (i, 3i/2, -13/2)$、$b' = (-i, -3i/2, -13/2)$ 和 $c = (1/4, 0, 0)$。由引理 6.1，$\varphi_F(a) = \varphi_F(b) = \varphi_F(b') = c$。由引理 5.1，我们推得 $\varphi_G = \varphi_Q \circ \varphi_F \circ \varphi_P$是一个非单射 Keller 映射，$V_G \supseteq \{0, b - a, b' - a\}$ 和 $I_G \subseteq \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{m}_3$，其中 $\mathfrak{m}_1 = \langle X、\ Y、\ Z\rangle$、$\mathfrak{m}_2 = \langle X - i、\ Y - \frac{3}{2}i、\ Z + \frac{27}{4}\rangle$ 和 $\mathfrak{m}_3 = \langle X + i、\ Y + \frac{3}{2}i、\ Z + \frac{27}{4}\rangle$。等式 $I_G = \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{m}_3$可由命题 5.2 的证明同理得出。由于 $X - \frac{2}{3}Y = (X \mp i) - \frac{2}{3}(Y \mp \frac{3}{2}i)$ 且 $Y^2 + \frac{9}{4} = (Y - \frac{3}{2}i)(Y + \frac{3}{2}i)$，我们推得 $J := \langle X - \frac{2}{3}Y, Y^2 + \frac{9}{4}, Z + \frac{27}{4}\rangle \subseteq \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{m}_3$。此包含关系诱导出一个满射的 $\Bbbk$-代数态射：

$$\Bbbk[Y]/(Y^2 + \tfrac{9}{4}) \cong \Bbbk[X, Y, Z]/J \to \Bbbk[X, Y, Z]/(\mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{m}_3) \cong (\Bbbk[X, Y, Z]/\mathfrak{m}_2) \times (\Bbbk[X, Y, Z]/\mathfrak{m}_3$$

由于两个环作为 $\Bbbk$-向量空间的维数均为 2，因此我们得到等式 $J = \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{m}_3$。

要检查这一点，我们可以使用 SINGULAR [DGPS], https://singular-in-browser.pages.dev/：

```
环 A=(0,i),(x,y,z),dp；最小多项式 =i^2+1；//定义有理数域的 i 扩张 [x,y,z]option(redSB)；//
强制约化 Gröbner 基的唯一性 多项式 f1=(1+x*y)^3*z+y^2*(1+x*y)*(4+3*x*y)；//定义 f1 多
项式 f2=y+3*x*(1+x*y)^2*z+3*x*y^2*(4+3*x*y)；//定义 f2 多项式 f3=2*x-3*x^2*y-x^3*z；//
定义 f3 多项式 f1p=subst(f1,z,z+1/4)；//定义 f_1(p) 多项式 f2p=subst(f2,z,z+1/4)；//定义 f_2
(p) 多项式 f3p=subst(f3,z,z+1/4)；//定义 f_3(p) 多项式 g1=f1p-1/4；多项式 g2=f2p；多项式
g3=f3p；理想 Ig=g1,g2,g3；//定义理想 Ig 理想 m1=x,y,z；理想 m2=x-i,y-(3i/2),z+27/4；理想
m3=x+i,y+(3i/2),z+27/4；理想 In=交(m1,m2,m3)；std(Ig)；std(In)；交(m2,m3)；
```

□

7. The rational case

如果 $\Bbbk=\mathbb{Q}$，则存在一个 Keller 映射 φ_G，满足 $0=\mathrm{card}(V_G)<v_G=1<[\Bbbk(X,Y,Z)\colon \Bbbk(G)]=3$。

引理 7.1. 设 F_1、F_2、F_3 是例 1.1 中的三个多项式，且 $F=(F_1,F_2,F_3)$。设 A、B、$C\in\Bbbk[Y_1,Y_2,Y_3]$ 是命题 3.1 中定义的多项式。若 $\Bbbk=\mathbb{C}$，则 $(\frac{1}{3},\frac{4}{3},1)$ 属于 φ_F 的像。若 $\Bbbk=\mathbb{Q}$，则 $(13,43,1)$ 不属于 φ_F 的像，并且 $A(\frac{1}{3},\frac{4}{3},1)=\frac{25}{27}$、$B(\frac{1}{3},\frac{4}{3},1)=0$，且 $C(13,43,1)=-2$。

证明。若 $(a,b,c)=\varphi_F(x,y,z)$，其中某个 $(x,y,z)\in\Bbbk^3$，则由推论 3.2 中的等式 (12) 可得：

$$A(a,b,c)x^3+B(a,b,c)x+C(a,b,c)=0, \tag{14}$$

其中 $A(a,b,c)=(27a^2c^2-18abc+16a+b^3c-b^2)$，$B(a,b,c)=4-3bc$ 且 $C(a,b,c)=-2c$。我们选取 (a,b,c)，使得 $B(a,b,c)=0$ 且 $A(a,b,c)X^3+C(a,b,c)$ 在 $\mathbb{Q}[X]$ 中不可约。因此$b=4/3$。取 $c=1$，则 $A(a,b,c)=27a^2-8a+16/27$。若 $a=1/3$，则 $A(a,b,c)=25/27$ 且$\frac{25}{27}X^3-2$ 在 $\mathbb{Q}[X]$ 中不可约。因此，对于 $(a,b,c)=(1/3,4/3,1)$，不存在满足方程 (14) 的有理数 x。由此可知，点 $(1/3,4/3,1)$ 不在 φ_F 的像中。令 $\Bbbk=\mathbb{C}$。假设 $(1/3,4/3,1)=\varphi_F(x,y,z)=(F_1(x,y,z)\ F_2(x,y,z)\ F_3(x,y,z))$，其中 $x^3=54/25$，因此$1/x=(25/54)x^2$ 且 $1/x^3=(25/54)$。在命题 3.1 的等式 (2) 和 (3) 中，将 X,Y,Z 替换为 x,y,z，得到 $y=\frac{-25x^2+30x+36}{54}$ 和 $z=\frac{-50x^2+125x-115}{54}$。因此，$\varphi_F^{-1}(\{(\frac{1}{3},\frac{4}{3},1)\})=\{(x_k,\frac{-25x_k^2+30x_k+36}{54},\frac{-50x_k^2+125x_k-115}{54})\mid x_k=e^{2k\pi i/3}\sqrt[3]{\frac{54}{25}}\}$。

使用 Singular [DGPS], https://singular-in-browser.pages.dev/:

环 A=(0,a),(x,y,z),dp; 最小多项式 =a^3-54/25; // 定义 Q(a)，其中 a^3=54/25 多项式 f1=(1+x*y)^3*z+y^2*(1+x*y)*(4+3*x*y); //定义 f1 多项式 f2=y+3*x*(1+x*y)^2*z+3*x*y^2*(4+3*x*y);//定义 f2 多项式 f3=2*x-3*x^2*y-x^3*z; //定义 f3 理想 I=f1,f2,f3; 多项式 xk=a; 多项式 yk=(-25*a^2+30*a+36)/54; 多项式 zk=(-50*a^2+125*a-115)/54; subst(I,x,xk,y,yk,z,zk); //返回 1/3,4/3,1

□

命题 7.2. 令 F_1,F_2,F_3 为例 1.1 中的三个多项式，且 $F=(F_1,F_2,F_3)$。令$G_1=F_1-\frac{1}{3}$, $G_2=F_2-\frac{4}{3}$, $G_3=F_3-1$和 $G=(G_1,G_2,G_3)$。令 $\varphi_G\colon \Bbbk^3\to\Bbbk^3$为由 G定义的多项式映射。那么，φ_G 是 Keller 映射。若 $\Bbbk=\mathbb{C}$, I_G 是适当的。若 $\Bbbk=\mathbb{Q}$，则 V_G 为空，且I_G 是 $\mathbb{Q}[X]$的极大理想。特别地，$0=\mathrm{card}(V_G)<v_G=1<[\mathbb{Q}(X,Y,Z)\colon \mathbb{Q}(G)]=3$。

证明。根据例 1.1，φ_F是一个 Keller 映射。令 $Q=(X-\frac{1}{3},Y-\frac{4}{3},Z-1)\in\Bbbk[X,Y,Z]^3$。于是，$G=Q(F)$ 以及 $\varphi_G=\varphi_Q\circ\varphi_F$。由于 φ_F和 φ_Q 是 Keller 映射，因此 φ_G是一个 Keller 映射。

假设 $\Bbbk=\mathbb{C}$。根据引理 7.1，存在 $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$，使得 $\varphi_F(x,y,z)=(\frac{1}{3},\frac{4}{3},1)$。因此，$\varphi_G(x,y,z)=\varphi_Q(\varphi_F(x,y,z))=\varphi_Q(\frac{1}{3},\frac{4}{3},1)=(0,0,0)$，并且 $(x,y,z)\in\varphi_G^{-1}(\{(0,0,0)\})=V_G$。从而，$I(\{(x,y,z)\})\supset I(V_G)\supset I_G$，其中 $I(\{(x,y,z)\})$ 是极大理想，因此 I_G是适当理想。（事实上，I_G 是三个极大理想的交。）

假设 t $\Bbbk=\mathbb{Q}$。根据引理 7.1，$(\frac{1}{3},\frac{4}{3},1)\notin\mathrm{Im}(\varphi_F)$。然后，根据引理 4.1，$V_G$为空 .

由于 $\langle G_1,\ G_2,\ G_3\rangle_{\mathbb{C}[X,Y,Z]}$是 $\mathbb{C}[X,Y,Z]$的真理想，因此，$I_G=\langle G_1,\ G_2,\ G_3\rangle_{\mathbb{Q}[X,Y,Z]}$是 $\mathbb{Q}[X,Y,Z]$的真理想，否则，对于某个 $P_i\in\mathbb{Q}[X,Y,Z]\subset\mathbb{C}[X,Y,Z]$，$1=P_1G_1+P_2G_2+P_3G_3$和 1 会属于 $I_G\mathbb{C}[X,Y,Z]$。

根据推论 3.2 和引理 7.1，$A(\frac{1}{3},\frac{4}{3},1)X^3+B(\frac{1}{3},\frac{4}{3},1)X+C(13,43,1)=-\frac{25}{27}X^3-2\in I_G$。考虑由 $\phi(T)=X$ 定义的 $\mathbb{Q}$-代数态射 $\phi\colon \mathbb{Q}[T]\to\mathbb{Q}[X,Y,Z]$。由于 $\frac{25}{27}X^3-2$属于 I_G，且 I_G 是适当的，ϕ 诱导出如下 $\mathbb{Q}$-代数态射：

$$\overline{\phi}: K\stackrel{\mathrm{def}}{=}\mathbb{Q}[T]/\langle\tfrac{25}{27}T^3-2\rangle\to\mathbb{Q}[X,Y,Z]/I_G,$$

其中 $\overline{\phi}(T) = \overline{X}$。显然， K 是一个域，因此 $\overline{\phi}$ 是单射，而 K 是一个维数为 3 的 $\mathbb{Q}$-向量空间。特别地，由定理 2.4 以及命题 2.3 和 3.1,

$$3 \leq \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[X,Y,Z]/I_G) \leq [\mathbb{Q}(X,Y,Z) : \mathbb{Q}(G)] = [\mathbb{Q}(X,Y,Z) : \mathbb{Q}(F)] = 3.$$

因此，$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[X,Y,Z]/I_G) = 3$。由于 $\overline{\phi}$ 是两个 3 维向量空间之间的单射线性映射，因此它也是满射。因此，$\overline{\phi}$ 是 $\mathbb{Q}$-代数的同构。由于 K 是一个域，可知 $\mathbb{Q}[X,Y,Z]/I_G$ 是一个域，且 I_G 是一个极大理想。因此， $0 = \text{card}(V_G) < v_G = 1 < [\mathbb{Q}(X,Y,Z) : \mathbb{Q}(G)] = 3$。

要验证 I_G 是 极大的，且 Singular [DGPS], https://singular-in-browser.pages.dev /: LIB "primdec.lib"; 环 A=0,(x,y,z),dp; //定义环 多项式 f1=(1+x*y)^3*z+y^2*(1+x*y)*(4+3*x*y); 多项式 g1=f1-(1/3); //定义 f1 和 g1 多项式 f2=y+3*x*(1+x*y)^2*z+3*x*y^2*(4+3*x*y);多项式 g2=f2-(4/3); //定义 f2 和 g2 多项式 f3=2*x-3*x^2*y-x^3*z; 多项式 g3=f3-1; //定义 f3 和 g3 理想 Ig=g1,g2,g3; 列表 pd=primdecGTZ(Ig); // Ig 的主分解

□

注记 7.3. 若 $\Bbbk = \mathbb{C}$，则仅通过对例 1.1 应用一些可逆仿射变换，不可能找到一个 $\text{card}(V_G) = v_G = 2$ 的例子。这是因为 [AI], 中的定理 4.2 指出，$\text{card}(\varphi_F^{-1}\{(a,b,c)\}) \in \{0,1,3\}$。对于任意 $\Bbbk$，仅通过对例 1.1 应用一些可逆仿射变换，也不可能找到一个 $\text{card}(V_G) = 0 < v_G = 2$ 的例子。事实上，根据定理 2.4， $2 = v_G \leq \dim_{\Bbbk}(\Bbbk[X,Y,Z]/I_G) \leq [\Bbbk(X,Y,Z) : \Bbbk(G)] = 3$。但是，若 $v_G = 2$，则 $I_G = \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$ 且 $\Bbbk[X,Y,Z]/I_G \cong \Bbbk[X,Y,Z]/\mathfrak{m}_1 \times \Bbbk[X,Y,Z]/\mathfrak{m}_2$。由于 $\text{card}(V_G) = 0$，因此 $\mathfrak{m}_i$ 不是对应于一点的极大理想，且 $\dim_{\Bbbk}(\Bbbk[X,Y,Z]/\mathfrak{m}_i) \geq 2$，矛盾。

8. Topological reformulation of the Jacobian Conjecture

最后，我们给出雅可比猜想的一个纯拓扑重述。证明改编自 [MN，其中 Miranda-Neto 证明了猜想 C], 与雅可比猜想等价。

猜想 D. 设 $\Bbbk$ 为特征为零的域。设 $\varphi_F \colon \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ 为 Keller 映射。那么，V_F 是不可约的。

注 8.1. 注意，命题 4.3 在 $n = 3$时给出了猜想 D 的一个反例。

定理 8.2. 对于每个 $n \geq 1$，猜想 D 与雅可比猜想等价。

证明. 假设雅可比猜想成立。设 φ_F 为 Keller 映射。根据假设， φ_F是 $\Bbbk^n$的自同构。由引理 2.2， V_F 是不可约的。

固定 $n \geq 1$。假设猜想 D 对这样的 n 成立。我们来证明，雅可比猜想对同一个 n 也成立。根据 [vdE1, 引理 1.1.14], （该引理对每个特定的 $n \geq 1$分别成立），我们可以假设 $\Bbbk = \mathbb{C}$。因此，令 $\varphi_F \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 为 Keller 映射，其中$F = (F_1, \ldots, F_n) \in \mathbb{C}[X]^n$。我们来证明 φ_F 可逆。根据 [vdE1, 定理 4.2.1 的证明，第 82], 页，只需证明 φ_F 是单射。取 $a, b \in \mathbb{C}^n$，使得 $\varphi_F(a) = \varphi_F(b)$。令$P = (P_1, \ldots, P_n) = (X_1 + a_1, \ldots, X_n + a_n)$， $Q = (Q_1, \ldots, Q_n) = (X_1 - F_1(a) \ldots, X_n - F_n(a))$，并令$G = Q(F(P)) = F(X + a) - F(a)$，其中 $P, Q, G \in \mathbb{C}[X]^n$。根据定义， $\varphi_G = \varphi_Q \circ \varphi_F \circ \varphi_P$。显然， φ_P, $\varphi_Q \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 是可逆映射。因此， $\varphi_G \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 是 Keller 映射。利用猜想 D 成立这一假设，我们可推出 V_G 不可约。由于 $G(0) = 0$，每个 G_i 的常数项均为零，因此 $I_G = \langle G_1, \ldots, G_n \rangle \subseteq \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$。（在此处，我们不能使用猜想 C，因为在这一蕴含关系中，我们并未假设它成立。）根据 [MN] 中 Miranda-Neto 的定理 3.1， $I_G = \mathbb{C}[X]$ 或 $I_G = N_1 \cap \ldots \cap N_s$ 是有限个极大理想的根理想交

的个数 N_i。由于 $V_G = V(I_G)$ 不可约，因此 $I_G \subsetneq \mathbb{C}[X]$ 必须是真理想，并且对某个 $p_i =$ 有 $N_i = I(\{p_i\})$，其中 p_i,1, . . . ,p_i,n) $\in \mathbb{C}^n$。因此， $I_G = N_1 \cap \ldots \cap N_s$ 且 V_G =$V(N_1 \cap \ldots \cap N_s) = V(N_1) \cup \ldots \cup V(N_s) = V(I(\{p_1\})) \cup \ldots \cup V(\{p_s\}) = \{p_1, \ldots, p_s\}$。同样，由于 V_G 不可约，因此 $s = 1$，且 $I_G = N_1$ 是极大理想。但是，由于 $N_1 = I_G \subseteq \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$，所以$I_G = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$。这意味着，对每个 $i = 1, \ldots, n$，都有 $X_i = \sum_{j=1}^{n} g_{i,j} \cdot G_j$，其中 $g_{i,j} \in \mathbb{C}[X]$。在 $b - a$ 处计算 X，并利用 $G_j(b - a) = F_j((b - a) + a) - F_j(a) = F_j(b) - F_j(a) = 0$，可推出 $b_i - a_i = 0$，因此 $a = b$。□

Acknowledgement

我们感谢 Jos´e M[a] Giral、Zbigniew Hajto、Cleto B. Miranda-Neto、Bernat Plans 和 Santiago Zarzuela 所进行的富有启发性的讨论，这些讨论提升了本文的可读性和趣味性。特别感谢 Zbigniew Hajto，他发现了早期版本中的一个错误和几处印刷错误。本文中的计算使用了凯泽斯劳滕大学开发的计算机代数系统 Singular [DGPS] 完成。

第二作者得到项目 PID2023-146936NB-I00 的部分资助，该项目由西班牙国家研究署 MICIU/AEI/10.13039/501100011033 和加泰罗尼亚政府研究与大学部资助，并通过 AGAUR 资助项目 2025 SGR 00878 (GEOMVAP) 获得支持。

人工智能披露。本文在人工智能工具 [Gem], 的协助下完成，该工具用于提出想法，并为证明定理 2.4 、命题 3.1 、 6.2 和 7.2 以及引理 4.1 和 5.1 寻找更简洁的方法。我们还使用它改进了 Singular 中的代码行。对我们而言，这是一种新颖且出乎意料的工作方式。我们对本文内容承担全部责任。

利益冲突。作者声明不存在任何利益冲突。作者没有其他需要披露的相关财务或非财务利益。

References

[AI] 雅可比猜想的一个反例 https://www.ulam.ai/research/jacobian.pdf [Alp] L. Alp¨oge, 《关于雅可比猜想的三维反例的公告》。 𝕏，2026年7月。[BCW] H. Bass、E. H. Connell、D. Wright, *The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse* **7** 1982 2, 287 330 。《美国数学学会通报》（新辑）（），第—期。[DGPS] W. Decker、G.-M. Greuel、G. Pfister、H. Sch¨onemann, Singular 4-4-0——用于多项式计算的计算机代数系统。https://www.singular.uni-kl.de（2025）。[Gem] Google 2026。Gemini Flash [大语言模型]。https://google.com [Kel] O.-H. Keller, *Ganze Cremona-Transformationen* **47** 1939 1, 。（德文）《数学与物理月刊》（），第—期。[MN] C. B. Miranda-Neto, *An ideal-theoretic approach to Keller maps*, 《爱丁堡数学学会学报》（第2辑）62（2019），第4期，1033-1044。[RD] L. O. Rodr´ıguez D´ıaz, *On the origin of the Jacobian conjecture*。《巴黎科学院数学报告》364（2026），363-370。[vdE1] A. van den Essen, 《多项式自同构与雅可比猜想》，《数学进展》第190卷，Birkh¨auser，巴塞尔，2000年。[vdE2] A. van den Essen, *An elementary way to find a counterexample to the Jacobian Conjecture*。arXiv上的预印本，2026年。https://arxiv.org/pdf/2609.17795 299 306

Departament de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya. Diagonal 647, ETSEIB, 08028 Barcelona. Catalunya

Email address: bartomeu.enrich@estudiantat.upc.edu*Email address*: francesc.planas@upc.edu