贪心 UNO 的图灵完备性与最终周期无限牌堆

T. V. Kuptsov* G. A. Khaziev†

2026年11月16日

arXiv:2611.29739v1 [cs.CC] 22 Nov 2026

摘要

我们将任意双计数器米氏基机编码为一场使用最终周期无限抽牌堆 uw^{ω}的双人 UNO 对局。该构造使用一个固定的 17 张牌前缀，以及一个长度与指令数量呈二次关系的周期。当两位玩家都遵循相同的固定贪心策略时，对局恰好在机器停机时终止，且每种可行的手牌出牌都只有唯一的牌型。因此，贪心终止和指定玩家获胜，以及在不进行平局判定的强制出牌规则下获胜策略的存在性，都是 Σ_1^0-完全的。然而，在允许不受限制地选择合法动作的官方自愿抽牌规则下，有限对局是否存在是可判定的（且为原始递归的），可通过带状态向量加法系统（VASS）中的可达性来判定。最后，有限贪心对局的最大持续时间不存在关于输入长度的全可计算上界。

关键词： UNO；计算普适性；双计数器机；不可判定性；向量加法系统；最终周期词；忙海狸。

2020年数学主题分类： 主要分类 03D10、03D35；次要分类 68Q05、68Q45、91A46。

1 引言

算法博弈论中已有对 UNO 有限模型的研究。Demaine 等人证明了一个单人模型的 NP 完全性，以及某个特定非合作双人模型的多项式时间可解性 [2]。其他卡牌游戏能够模拟任意计算。对于万智牌，即使在没有其他有意义行动选择的局面中，不可判定性仍然成立 [3]，而 [4] 则确立了更强的算术复杂性。关于游戏王！的一项结果涉及获胜策略 [5]。与本文所考察的颜色或符号匹配、跳过牌和抽二操作相比，这些游戏采用了更丰富、特定于卡牌的效果。我们的无限牌堆模型不同于 [2] 中的有限模型；其复杂性结果讨论的是不同的判定问题。

我们模型中的抽牌堆是无限的，但具有有限描述：由一个有限前缀和其后重复出现的非空有限周期组成。在每个有限时刻，手牌都是有限的，尽管手牌数量事先没有上界。少数几种牌型的多重性充当计数器，而重复的抽牌堆则作为只读程序，控制这些计数器的更新。

主要定理断言，一固定可计算策略所诱导的唯一对局。规则允许玩家选择摸牌，而不打出可匹配的牌，这与

*力学与数学系，莫斯科国立罗蒙诺索夫大学，莫斯科，俄罗斯。

†俄罗斯科学院信息传输问题研究所（哈尔克维奇研究所），莫斯科，俄罗斯；中央大学，莫斯科，俄罗斯

Mattel 公布的规则 [9] 一致。贪心策略总是打出可用的可匹配牌；在构造的实例中，每种可用的手牌出牌都只有唯一的牌型，因此这一结果可直接推广到没有平局裁决顺序的双人强制出牌规则（推论 3.3）。因此，图灵完备性 指的是这些诱导出的动态过程；该定理并未对普通有限牌堆 UNO 中的最优对局作出任何断言。

强制出牌与自愿抽牌之间的区别会改变可判定性。强制出牌时，若缺少某种牌型，就会通过被迫抽牌而显现出来。在不受限制的合法选择下，抽牌并不能证明缺少某种牌型，而存在性终止则可以表述为固定维度向量加法系统的可达性。定理 9.4 确立了由此得到的可判定性和原始递归上界。

第 2 节定义游戏和判定问题，第 3 节陈述主要定理及其复杂性推论。第 4–7 节介绍并验证模拟。第 8 节研究最大有限持续时间，第 9 节讨论不受限制的合法出牌。附录汇集了操作细节、转换证明、其他轨迹、规模界以及计算检查。

2 游戏模型与判定问题

2.1 牌与回合规则

Let

$$\Gamma = \{r, y, g, b\} \times (\{0, 1, \ldots, 9\} \cup \{S, D\}).$$

第一个坐标表示颜色，第二个坐标表示数字、 S （跳过牌）或 D （抽二）。我们用 g0 表示 $(g,0)$，依此类推。如果两张牌的颜色或符号相同，则称它们兼容。手牌是 Γ 上的有限多重集；卡牌类型指的是 Γ 中的一个元素，而非某张实体牌。

有两名玩家，M 和 R。抽牌堆是一个无限词 $d_0 d_1 \ldots \in \Gamma^\omega$。开始时，R 从 M 开始轮流给每位玩家发七张牌。第十五张牌 d_{14} 成为初始弃牌堆顶牌（开局回合不触发任何跳过牌或抽二效果），然后由 M 先行动。

轮到玩家行动时，可以从手牌中打出一张可匹配的牌，也可以抽取一张牌。即使手牌中有可匹配的牌，也可以抽牌；若没有，则必须抽牌。抽到的牌若可匹配，可以立即打出，也可以留在手牌中；若不可匹配，则必须留在手牌中。留牌即结束回合。抽牌后，该回合不能再打出手牌中的其他牌。

打出数字牌后，轮到对手行动。跳过牌 S 会跳过对手，因此同一名玩家接着行动。抽二牌 D 会迫使对手抽取接下来的两张抽牌堆牌，且不能打出其中任何一张，跳过该对手的回合，并让打出 D 的玩家再次行动。任一玩家的手牌一旦出完，本轮立即结束，后续的牌效应或抽牌均不再进行。

我们考察一局对局，不使用万能牌或反转牌。假定玩家都及时进行 UNO 报牌，因此不会发生报牌处罚。本文不考虑计分、后续对局、弃牌回收和洗牌。抽取一张牌以及可以选择不打出可出的牌，均遵循制造商规则 [9]；无限抽牌堆以及上述省略事项共同构成了本文研究的数学模型。

2.2 最终周期性抽牌堆

输入是一对由 Γ 上的有限词构成的有限词 $(u,\ w)$，其中包含 $w \neq \varepsilon$，用于指定无限抽牌堆 uw^{ω}。牌的顺序固定且公开已知，每种类型的牌都可以出现任意多次。因此，该模型描述的是一个输入有限、但卡牌供应无界的情形，而不是一副实体 UNO牌组。即使$|u| < 15$，最初十五张牌仍决定初始发牌和弃牌。第 k 张牌可以通过 $(u,\ w,\ k)$ 有效计算。

2.3 贪心策略

定义 2.1（固定贪心策略）。 固定一个线性序 $\prec$ 于 Γ上。只要手牌中存在可匹配牌型，策略σ就打出手牌中按 $\prec$排序最靠前的可匹配牌型。否则，玩家抽一张牌；若该牌可匹配，则立即打出，否则将其留在手牌中。除非明确指定不受限制或强制出牌的选择，否则两名玩家都遵循 σ 。

根据上述规则，该策略是合法的。平局裁决顺序确保每个输入对应唯一确定的对局。在归约产生的实例中，每种可用的手牌出牌都只有唯一的牌型，因此无需使用该顺序。

2.4 判定问题

定义 2.2。 贪婪 UNO 终止问题是由有限词对 $(u,\ w)$ 构成的集合，其中有限词取自 Γ，且满足 $w \neq \varepsilon$：抽牌堆为 uw^{ω}、采用标准的七张牌初始发牌，并且两位玩家都遵循 σ 时，该游戏会终止。贪婪 UNO 中 R 获胜问题是相应的集合，其中 R 获胜。

由于下一张抽牌堆牌可以计算出来，并且经过任意有限个回合后双方的手牌仍然有限，因此可以模拟任意指定有限回合数的贪婪对局。

3 双计数器机与主要定理

双计数器机有非负整数寄存器 $A,\ B$ 以及一个有限程序 $I_0, \ldots, I_{N-1}$，其标签取自 $\{0, \ldots, N-1\}$；其指令集为

$$\mathsf{INC}(X,t), \qquad \mathsf{DEC}(X,t_1,t_0), \qquad \mathsf{HALT}, \qquad X \in \{A,B\}.$$

INC 指令将 X 递增并跳转到 t。DEC 指令将 X 递减，并在满足 $X > 0$时跳转到 t_1 ，否则跳转到 t_0 ，且不修改 X。HALT指令会停止机器。初始状态的指令标签为 0，两个计数器均为 0。这些机器的停机问题是 Σ_1^0-完全 [1]。

定理 3.1（主定理）。 存在一个固定的 $u \in \Gamma^{17}$ ，以及一个可计算映射 $M \mapsto w_{\mathcal{M}} \in \Gamma^{+}$ ，使得对于每个具有 $N \geq 1$ 条指令的双计数器机 M，其在 $uw_{\mathcal{M}}^{\omega}$ 上的唯一贪心对局满足：

（i）在每个可达位置，当前玩家手牌中所有兼容的牌（若有）类型都相同。

(ii)对局终止当且仅当 M 停机；在此情况下 R 获胜。

(iii) 若 M 以寄存器 (a, b) 停机，则结束时 M 恰好拥有 a 张 *y2* 和 b 张 *y3*。

(iv) 周期长度为 $|w_{\mathcal{M}}| = O(N^2)$，其中隐含的常数是绝对常数。

推论 3.2。 贪婪 UNO 终止问题和贪婪 UNO 中 R 获胜问题都是 Σ_1^0-完全的。对于固定的17张卡牌前缀，以及贪心对局中始终至多出现一种可兼容手牌类型的实例，困难性依然成立。

证明。 这两个性质都是递归可枚举的：模拟唯一的贪心对局，并分别在对局终止或 R 获胜时接受。定理 3.1 给出的从双计数器机器停机问题出发的多对一归约证明了其困难性。所有构造的输入都满足牌型唯一性；该性质本身不必是可判定的。

□

由于在 $uw_{\mathcal{M}}^{\omega}$中从不需要进行平局判定，该归约也解决了 UNO 的常见强制出牌 变体中的策略决策问题。在这种变体中，只有当手牌中没有可匹配的牌时才允许抽牌；若抽到可匹配的牌，则必须立即打出；而持有多种可匹配牌型的玩家可以自由选择要打出的牌型。

推论 3.3 (强制出牌游戏复杂度)。 在使用最终周期性抽牌堆 uw^{ω}进行强制出牌 *UNO* 时，存在性终止、全称终止，以及存在一种策略使R 能保证在有限回合内获胜、无论M 采取何种合法强制出牌选择，这三者都是Σ_1^0-完全的。

证明。 在每个非终止的强制出牌状态下，当前玩家要么只有唯一的抽牌操作，要么可以从手牌中的至多 $|\Gamma| = 48$ 种可匹配牌型中选择。因此，强制出牌博弈树的出度有限，且其转移关系可计算。显然，存在性终止是递归可枚举的。根据柯尼希引理，当且仅当博弈树存在有限的统一深度上界时，每种强制出牌对局都会终止；当且仅当 R 存在有限深度的获胜策略树时，R 才有策略保证在有限时间内获胜。这两个条件都可以通过有界搜索验证，因此属于 Σ_1^0。对于 $uw_{\mathcal{M}}^{\omega}$，定理 3.1(i) 保证在每个可达状态下至多存在一种合法强制出牌操作，因此整个强制出牌博弈树收缩为唯一的贪心对局，从而三个问题都是 Σ_1^0-困难的。

□

4 编码机配置

4.1 卡牌多重性与读取边界

记作

$$J = \texttt{r1}, \qquad U_A = \texttt{y2}, \qquad U_B = \texttt{y3}, \qquad E = \texttt{y8}, \qquad F = \texttt{b9}, \qquad s_A = 2,\ s_B = 3.$$

牌型上的指数 x^k 表示由 k 张相同卡牌构成的多重集； E^+ 表示未指定数量的正数张卡牌。

读取边界是指即将消耗下一张抽牌堆牌之前的状态，此时 σ 规定的所有中间手牌出牌均已完成。用 rd 表示将要消耗该牌的玩家。由于每次出牌都会减少持有的卡牌总数，因此经过有限次手牌出牌后即可到达这样的边界。附录 A 给出了完整的状态和微步约定。

定义 4.1（边界配置）。对于 $j,\ a,\ b \ge 0$，配置 $\mathcal{C}(j,\ a,\ b)$ 是一种状态，其中牌堆顶弃牌为 $\mathtt{gS}$，玩家 R 即将消耗下一张牌堆中的牌，且各玩家手牌为

$$H_{\mathsf{R}} = \{F\}, \qquad H_{\mathsf{M}} = J^{2j} U_A^a U_B^b E^+.$$

这组非空的储备牌 E 可以防止 M 意外获胜。

4.2 指令地址

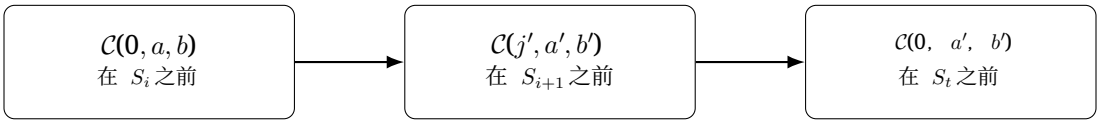
周期被划分为指令片段，$w = S_0 S_1 \cdots S_{N-1}$。如果某个片段的输入状态为 $j = 0$，那么该次出现就是活动的；否则就是非活动的。值 j 表示在执行下一条指令前要跳过的片段数。若要从指令 i 跳转到指令 t，设置

$$\mathrm{off}_i(t) = (t - i - 1) \bmod N \in \{0, \ldots, N-1\}.$$

对于标签 i处的 $\mathsf{DEC}(X, t_1, t_0)$ 指令，定义

$$o = \mathrm{off}_i(t_1), \qquad z = \mathrm{off}_i(t_0) + N\,\mathbf{1}_{\{\mathrm{off}_i(t_0) < o\}}. \tag{1}$$

因此 $0 \le o \le N-1$、$o \le z \le 2N-1$ 和 $z \equiv \mathrm{off}_i(t_0)$（模 N）。零分支中额外增加一个完整周期，仅用于确保 $z - o \ge 0$。



$$j' \equiv t - i - 1 \pmod N, \qquad (i+1) + j' \equiv t \pmod N$$

图 1：指令指针：第一支箭头表示活动段，第二支表示 j'被动段（可能为零）。索引按模 N 计算；将 N 加到 j' 会遍历一个完整周期。

5 将指令编译为牌组段

5.1 基本块

卡片符号并置表示拼接；Π^k 是单词 Π 的 k 个副本。常量块为

$$\begin{aligned}
\mathsf{TEST} &= \mathtt{rS\ g0\ r0\ rS\ rS\ gS\ r4\ gS},\\
\mathsf{GIVE} &= \mathtt{g0\ g0\ yS\ g0},\\
\mathsf{FLAG} &= \mathtt{g4\ g4\ g0},\\
\Pi &= \mathtt{r1\ g0}.
\end{aligned}$$

对于一个由牌型组成的列表 $x_1, \ldots, x_m$，若 m 为奇数，则在末尾添加一个 $E = \mathtt{y8}$；所得偶数长度列表的长度为 $2h$。定义

$$\mathsf{PRE}(x_1 \cdots x_m) = \left(\prod_{k=1}^{h} \mathtt{gD}\, x_{2k-1} x_{2k} \right) \mathtt{gS}. \tag{2}$$

情形 $m = 0$ 给出 $\mathsf{PRE}(\varepsilon) = \mathtt{gS}$。对于 $X \in \{A, B\}$，令

$$c_X = \mathtt{g}s_X \in \{\mathtt{g2}, \mathtt{g3}\}, \qquad \mathsf{CORE}_X = c_X\,\mathtt{gS\ gS\ g0\ gS\ gS}.$$

这里 c_X 是一张单独的卡牌，而不是由两个符号拼接而成。

5.2 指令片段及其规范

对于指令 I_i，按以下情况之一定义其片段 S_i：

$$\mathsf{INC}(X,t):\quad S_i = \mathsf{TEST}\,\mathsf{PRE}(J^{o}U_X)\,\mathsf{GIVE}\,\mathsf{FLAG}\,\Pi^{o}\,c_X\,\texttt{gS}\ \texttt{gS}\ \texttt{rS}\ \texttt{rS}\ \texttt{gS}, \tag{3}$$

$$\mathsf{DEC}(X,t_1,t_0):\quad S_i = \mathsf{TEST}\,\mathsf{PRE}(J^{z+1})\,\mathsf{GIVE}\,\mathsf{FLAG}\,\Pi^{o}\,\texttt{g0}\,\mathsf{CORE}_X\,\texttt{g0}\,\Pi^{z-o}\,\texttt{g1}\ \texttt{rS}\ \texttt{gS}, \tag{4}$$

$$\mathsf{HALT}:\quad S_i = \mathsf{TEST}\,\mathsf{FLAG}\,\texttt{g0}\ \texttt{gS}\ \texttt{bS}\ \texttt{gS}\ \texttt{g0}\ \texttt{gS}. \tag{5}$$

对于递增情形，$o = \mathsf{off}_i(t)$；对于递减情形，o，z 与（1）中相同。指数均非负。周期中至多出现 16 种牌型，而包括初始前缀在内的整个构造中至多出现 18 种牌型。

引理 5.1（片段规范）。假设在 $\mathcal{C}(j,a,b)$ 中进入了 S_i。若 $j \geq 1$，则任意指令类型的一个片段以 $\mathcal{C}(j-1,a,b)$ 结束。若 $j = 0$，则：

(a) 一个 递增(X,t) 片段会递增编码寄存器 X，并以 $j' = \mathrm{off}_i(t)$ 结束；

(b) 一个 递减(X,t_1,t_0) 片段，如果 $X > 0$，则递减该寄存器并以 $j' = o$ 结束；或者，如果 $X = 0$，则保持其不变并以 $j' = z$ 结束；

(c) 一个活跃的 停机 片段会以 R 获胜结束游戏，并使 U_A、U_B 保持未触及 d.

每个已完成的非终止片段中的每张牌恰好被消耗一次，并且从一副手牌中打出的每张牌都有唯一确定的类型。

6 局部构件验证

6.1 边界手牌类型与轨迹记法

通过读取边界处的完整动作轨迹对构件进行检查。在编译后执行中，边界手牌由以下类型组成：

$$H_{\mathsf{M}} = J^{m}U_A^{a}U_B^{b}E^{e}(\texttt{r4})^{f}, \qquad H_{\mathsf{R}} = FJ^{q}(\texttt{yS})^{\eta},$$

其中 m、a、b、$q \geq 0$、$e \geq 1$ 和 f、$\eta \in \{0,1\}$。每个引理都规定了可能存在的临时卡牌。特别是，在这些边界处，手牌中不含绿色卡牌或符号 0 卡牌。此限制不适用于构件内部：例如，TEST 会暂时将 g0 留在 R 的手牌中。

对于玩家 P，记号 $P{:}\,{+}x$ 表示“抽取 x 并立即打出”，$P{:}\,\langle x\rangle$ 表示“抽取并留存 x”，而 $P{:}\,{-}x$ 表示“不抽牌，直接从手牌中打出 x ”。D 的效果另行说明。在下面的验证中，F 和至少一个 E 会持续存在，因此不会有终止状态打断这些轨迹。

6.2 多重性不变性

引理 6.1（多重性不变性）。假设两个实例的差异仅在于一名玩家多了一张类型为 x 的牌。若较小重数的实例在指定的有限区间内始终保留至少一张 x，且所有可从手牌打出的卡牌牌型均不相同，那么在该区间内，两种执行过程采取相同的动作序列并消耗相同的牌堆符号；它们的 x 重数始终相差一。

证明。 对基本操作进行归纳。某种牌型是否可用，仅取决于其重数是零还是正数；根据假设，这两种执行过程中的判断结果一致。因此，所选牌型、新抽取符号的兼容性、 S 和 D 的效果，以及随后由哪位玩家行动，均一致。重数之差保持不变。在相关应用中，持续存在的储备牌排除了提前获胜的可能。

□

6.3 测试、加载、标记和窗口

引理 6.2 （测试、加载、标记和窗口）。 在编译所用的状态中，无需选择可打出的牌型，以下结论均成立：

（1）从 $C(j,a,b)$ 开始，代码块 TEST 会使牌堆顶牌为 gS，第 $=\mathsf{R}$， $H_{\mathsf{R}}=\{F\}$。如果 $j=0$，手牌不变；如果 $j\geq 1$，则从 M 中移除两张 J，并向M中加入一张 $r4$。

（2）当牌堆顶牌为 gS、第 $=\mathsf{R}$，且 $H_{\mathsf{R}}=\{F\}$（R的手牌中没有其他牌）时，代码块PRE$(x_1\cdots x_m)$会将列出的所有 x_i 放入M的手牌中，并且（如果奇偶性要求）还会放入一张 E，随后牌堆顶牌恢复为 gS，且为第 $=\mathsf{R}$。

（3）当牌堆顶牌为 gS、第 $=$R，且R 没有绿色牌或零符号牌时，GIVE 会恰好将一张yS 放入R的手牌中，并使牌堆顶牌变为 $g0$，第 $=\mathsf{R}$。

(4) 假设牌堆顶牌为 $g0$（或者当 $\eta=0$ 时为 gS），$\mathrm{rd}=$R，且手牌为 $H_{\mathsf{M}}=J^mU_A^aU_B^bE^e(r4)^f$ 和 $H_{\mathsf{R}}=F(yS)^\eta$，其中 m、a、$b\geq 0$、 $e\geq 1$、 f、$\eta\in$ 属于 0、1。那么，如果 FLAG 存在，它会从 M 中消耗唯一的 $r4$。之后，若该标记存在，牌堆顶牌为 $g0$，且 $\mathrm{rd}=\mathsf{R}$；否则为 $\mathrm{rd}=$M。

(5) 若牌堆顶牌为 $g0$，$\mathrm{rd}=P$，且双方手牌中都没有绿色牌或零符号牌，则每个 $\Pi=r1\ \ g0$ 都会向 P 的手牌中添加一张 J，而不改变rd 或牌堆顶牌。额外出现一张 $g0$ 则会交换rd。

证明。 对于 (1)，完整动作轨迹如下，省略未改变的类型 U_A,U_B,E,F：

输入	按确切顺序排列的操作
$j=0$	R: +rS, R: ⟨g0⟩, M: +r0, R: −g0, M: ⟨rS⟩, R: ⟨rS⟩, M: +gS, M: −rS, M: +r4, R: −rS, R: +gS。
$j\geq 1$	R: +rS, R: ⟨g0⟩, M: $-J$, R: +r0, M: $-J$, R: +rS, R: +rS, R: +gS, R: −g0, M: ⟨r4⟩, R: +gS。

在这两种情况下，TEST 的八个牌堆符号都会被恰好用完。当 $j=1$ 时，原有的两张 J 会消失，而数量更多时则会剩下正数张。结束时，R 手中只剩下 F。

对于 (2)，R 抽取并将每张 gD 打到绿色牌堆顶牌上。每次这样的对局都会使 M 收到接下来的两个符号，但没有机会打出它们。R 打出收尾 gS 后仍保留出牌权。空列表的情况也由一张绿色跳过牌构成。

对于 (3)，四个牌堆符号会引出如下序列：R: +g0，M: +g0，R: ⟨yS⟩，M: +g0。

对于 (4)，当 $\eta=0$ 手牌 $H_{\mathsf{R}}=\{F\}$ 中没有跳过牌时，因此牌堆顶牌 gS 与牌堆顶牌 g0 同为有效的读取边界。玩家 R 首先抽牌并打出 g4，它按颜色与 g0 或 gS 匹配。存在标志时，接着依次为 M：−r4、R：+g4和 M：+g0。没有标志时，则接着依次为 M：+g4 和 R：+g0。这些序列实现了所需的读取者变化，并消耗全部三个符号。

对于 (5)， P 先抽牌并留着不匹配的 r1；随后对手抽牌并打出 g0，因此读取器返回到 P。只有一张 g0 且读取器为 P时，具体轨迹为 P：接着是另一位玩家进行下一次抽牌。读取边界处的手牌限制可防止中途打出其他牌型；所有读取器情况见附录 C。

□

6.4 递减核心

引理 6.3 (递减核心)。 假设牌堆顶牌是 *g0*，手牌分别为 $H_{\mathsf{M}} = J^m U_A^a U_B^b E^e$ 和 $H_{\mathsf{R}} = FJ^q$*yS*，其中 m、a、b、$q \geq 0$ 和 $e \geq 1$。代码块 核心$_X$ 具有以下效果：

输入	寄存器更新	输出读取器
rd $=$M	$none$	M
rd $=$ R 和 $X > 0$	$X \leftarrow X - 1$	M
rd $=$R 和 $X = 0$	$none$	R

在每个分支中，六个牌堆符号都会被消耗，牌堆顶牌变为 *gS*，而 R 的 *yS* 已被打出。所有其他边界牌类型的多重性保持不变。

证明。 设 c_X 为 g2 或 g3。完整轨迹为

分支	有序操作
第 $=$M	M: $+c_X$, R: $+$gS, R: $-$yS, R: $+$gS, R: $+$g0, M: $+$gS, M: $+$gS。
第 $=$R, $X > 0$	R: $+c_X$, M: $-U_X$, R: $-$yS, R: $+$gS, R: $+$gS, R: $+$g0, M: $+$gS, M: $+$gS。
第 $=$R, $X = 0$	R: $+c_X$, M: $+$gS, M: $+$gS, M: $+$g0, R: $+$gS, R: $-$yS, R: $+$gS。

如果寄存器非零，则恰好打出一张 U_X。紧接着，R 打出跳过牌 yS 并保留回合，从而防止再打出第二张寄存器卡牌，无论其重数如何。另外两个分支不会触及 U_X。所示轨迹中的每次手牌出牌，其类型都各不相同且彼此兼容。

□

6.5 消耗临时地址牌

引理 6.4 (消耗小装置)。 假设牌堆顶牌为 *g0*, $H_{\mathsf{R}} = FJ^q$，且 M 至少有 $q+1$ 张 J，并且双方手牌中都没有其他红色牌或符号为 1 的牌。若 rd $=$ R，则单词 *g1 rS gS*会从 R 移除所有 q 张 J，并从 M恰好移除 $q+1$ 张。若 rd $=$ M 且 $q = 0$，则会从 M恰好移除一张 J。两种情况最后的牌堆顶牌均为 *gS*，rd $=$ R，且 $H_{\mathsf{R}} = \{F\}$。

同样地，如果牌堆顶牌为 *gS*，rd $=$R， $H_{\mathsf{R}} = FJ^q$，且 M 至少有 q 张 J，并且没有其他红色或符号为 1 的卡牌，那么单词 *rS rS gS* 会从每位玩家的手牌中恰好移除 q 张 J，最后牌堆顶牌为 *gS*，rd $=$ R，且 $H_{\mathsf{R}} = \{F\}$。

证明。 在第一种情况下，rd 为 $=$ R，R 抽牌并打出 g1，M 必须打出一张 J。随后两位玩家轮流打出手牌中的 J，直到 R 的 q 张卡牌用尽。因此，M 已打出 $q+1$ 张卡牌。接着 R 抽牌并打出 rS 和 gS，连续打出两张跳过牌后仍保有出牌权。rd 为 $=$M， $q = 0$ 时，M 抽牌并打出 g1，R 抽牌并保留不兼容的 rS，M 打出一张 J，R 打出保留的 rS，然后抽牌并打出 gS。

对于第二个构件，R 抽取并打出第一张 rS。随后，R 手牌中的每张 J 都与 M 手牌中的一张 J 交替出现。当 R 手牌中的 J 用尽时，R 打出第二张抽到的 rS以及最后一张 gS。这也包括 $q = 0$，此时交替次数为零。对 q 使用归纳法可确保计数准确。储备牌类型可避免提前获胜。

□

7 模拟的正确性

7.1 指令段

引理 *5.1* 的证明。 用 J_M, J_R 表示各玩家手中 J 的数量。除非另有明确说明，否则中间小装置不会改变寄存器牌类型 U_A, U_B 。储备牌的数量 E 始终大于零。

增量段。 设 $o = \mathrm{off}_i(t)$。主动情形 $j = 0$ 经过 TEST 时，不会改变 $J_M = 0$ ，也不会设置标志。在被动情形 $j \geq 1$中，测试会移除两个 J副本，留下 $J_M = 2j - 2$，并设置一个标志 r4。随后，PRE($J^o U_X$) 模块无条件地将 J 的 o 个副本和一个 U_X 副本放入 M 的手牌。接着，GIVE 将一张 yS 放入 R 的手牌，而 FLAG 清除标志，因此

	$j = 0$	$j \geq 1$
J_M	o	$2j - 2 + o$
rd	M	R

(top g0).

o 个 Π 副本会再将 o 个 J 副本加入当前读取者的手牌：主动情形下加入 M 的手牌，被动情形下加入 R 的手牌。

现在来看接下来的三个牌堆符号 c_X gS gS。在主动分支中，M 抽牌并打出c_X；R 抽牌并打出 gS，打出其存放的 yS，然后抽牌并打出第二张 gS。因此， U_X 副本数量的增量得以保留。在被动分支中，R 抽牌并打出c_X，随后 M 必须恰好打出一个 U_X副本。前面的 PRE 保证有这样一张牌可用。玩家 R 立即打出其 yS，接着打出两张绿色跳过牌，从而抵消加载造成的增加。无论在哪个分支，此时牌堆顶牌都是 gS ，且 rd = R。

收尾 rS rS gS 在被动分支中，恰好从 R 中耗尽 o 张垃圾 J 牌，并从 M 中耗尽相应的 o。在主动分支中，它什么也不耗尽。所得数值为

	$j = 0$	$j \geq 1$
J_M at exit	$2o$	$2j - 2$
X at exit	$X + 1$	X.

这些就是所需的转移。

条件递减段。 令 o， z 如（1）所示。在前缀代码块之后

$$\mathsf{TEST}\ \mathsf{PRE}(J^{z+1})\ \mathsf{GIVE}\ \mathsf{FLAG}\ \Pi^o$$

我们得到

	$j = 0$	$j \geq 1$
J_M	$z + 1 + o$	$2j - 2 + z + 1$
J_R	0	o
rd	M	R

(top g0).

接下来的单个 g0 会切换读取器。对 CORE_X 应用引理 6.3，再应用下面的 g0，得到三种情况：

	$j \geq 1$	$j = 0,\ X > 0$	$j = 0,\ X = 0$
rd	R	R	M
ΔX	0	-1	0
J_M	$2j - 2 + z + 1$	$z + 1 + o$	$z + 1 + o$
J_R	o	0	0

（牌堆顶牌 g0）。

由于 $z-o\ge 0$，代码块 Π^{z-o} 会在前两种情况下向 R 添加 $z-o$ 个 J 垃圾副本，在第三种情况下向 M 添加同样数量的副本。最后的 g1 rS gS 应用引理 6.4：前两种情况下有 rd = R，而第三种情况下有 rd = M 和 $J_R=0$。M 中剩余的 J 副本数恰好为

$$\begin{aligned} j\ge 1:&\quad (2j-2+z+1)-\big(o+(z-o)+1\big)=2j-2,\\ j=0,\ X>0:&\quad (z+1+o)-\big((z-o)+1\big)=2o,\\ j=0,\ X=0:&\quad (z+1+o)+(z-o)-1=2z. \end{aligned}$$

寄存器的变化正是前表所列的内容。所有情况最终都以边界配置结束，其中包含 $H_{\mathsf{R}}=\{F\}$。

停机段。在 HALT 中，TEST 留下牌堆顶牌 gS 和 $H_{\mathsf{R}}=\{F\}$（$\eta=0$），因此引理 6.2(4) 可直接应用于 TEST FLAG，留下牌堆顶牌 g0；当 $j=0$ 时读取器为 M，当$j\ge 1$ 时读取器为 R。在主动分支中，M 抽取并打出下一张 g0。随后 R 抽取并打出 gS 和 bS。由于此时牌堆顶牌为蓝色，R 立即打出其手中唯一剩余的卡牌 $F=$ b9 并获胜。没有打出任何寄存器卡牌，停机段中剩余未使用的符号也无需消耗。

在被动分支中，尾部抽取的完整卡牌序列为

$$\mathsf{R}:+\mathsf{g0},\quad \mathsf{M}:+\mathsf{gS},\quad \mathsf{M}:+\mathsf{bS},\quad \mathsf{M}:+\mathsf{gS},\quad \mathsf{M}:+\mathsf{g0},\quad \mathsf{R}:+\mathsf{gS}.$$

玩家 R 始终没有机会打出 F。手牌恢复为规范类型，其中有$J_M=2j-2$, $H_{\mathsf{R}}=\{F\}$，且寄存器保持不变；最终牌堆顶牌为 gS，读取器为 R。

可打出类型的唯一性。完整的局部轨迹证明了这一点。M 通常保留的唯一红色牌是 J；它的标记仅在 TEST 和 FLAG 之间存在，而这段期间不会向该玩家展示红色牌堆顶牌。两种黄色寄存器类型可以同时存在，但每当 M 在递减步骤中打出一张黄色牌，下一回合就轮到 R；R 手中的单张 yS 会立即打出，并使其保留出牌权。引理 6.2–6.4 和停机轨迹涵盖了其余情况。因此，在贪婪执行过程中不会用到平局判定。 □

7.2 初始化与机器模拟

定理 *3.1* 的证明。固定长度为 17 的前缀

$$u=\mathtt{y8}\ \ \mathtt{b9}\,(\mathtt{g5}\ \ \mathtt{g5})^{6}\,\mathtt{g5}\ \ \mathtt{g0}\ \ \mathtt{gS}. \tag{6}$$

前十四张牌交替发给两名玩家，M 得到备用牌 E 和六张 g5，R 得到牌 F 和六张 g5。第十五张牌是普通的牌堆顶弃牌 g5。两名玩家交替弃掉手中的十二张 g5；这些出牌各自都只有一种兼容类型。随后 M 抽取并打出 g0，R 抽取并打出 gS。这样，在第一个片段 S_0 之前，立即建立起 $\mathcal{C}(0,0,0)$。

如图 1 所示，程序计数器分布在片段索引和跳转计数器上。在片段 S_i 的入口处，令边界状态为 $\mathcal{C}(j,\ a,\ b)$，并定义

$$p\equiv i+j\pmod N.$$

我们对已完成的片段进行归纳，证明 p 是机器当前模拟的指令标签，而 $a,\ b$ 是其寄存器值。初始状态满足 $i=j=0$。当$j>0$时，引理 5.1 将该片段转化为被动片段，同时保持寄存器值不变

并将 j 替换为 $j-1$。将片段索引推进到 $i+1$ 模 N 后，$(i+j) \bmod N$ 保持不变。当 $j=0$ 时，该片段按规定实现指令 I_i。任何转移到标签 t 的非停机转换都会产生一个新的计数器，其值为 $j' = \text{偏离}_i(t)$，或者对于零分支，为 $j' = z \equiv \text{偏离}_i(t)$（模 N）。因此

$$(i+1) + j' \equiv t \pmod{N},$$

且存储的寄存器值的演变与明斯基机中的完全一致。由于 $0 \le j' \le 2N-1$，相邻模拟机器指令之间由有限个被动段隔开。

在活动 HALT 处，根据引理 5.1，R 获胜。在此之前，R 保留 F，而 M 至少保留一个 E，因此双方都无法提前获胜（另见附录 A）。如果机器永不停机，就会进入无限多个片段，对局也将无限持续。如果机器停机，根据归纳法，最后的 U_A，U_B 计数与机器的寄存器值一致。类型唯一性这一结论也可由引理 5.1 得出。

构件长度关于 o，$z = O(N)$ 呈线性，且每个程序有 N 个片段。因此$|w| = O(N^2)$；附录 D 给出了一个明确的上界。 □

8 有限对局的最大持续时间

令 $T(uw^\omega)$ 表示对局终止时直至终止所经历的完整玩家回合数，其中也计入玩家只抽牌并保留一张卡牌的回合。允许用不同表示法表示同一个无限词。对于输入描述 $(u,\ w)$，定义其长度为 $|u| + |w|$。

定义 8.1。对于 $n \in \mathbb{N}$，令

$$\mathrm{UNO}(n) = \max\Big(\{0\} \cup \{T(uw^\omega) : |u| + |w| \le n,\ w \neq \varepsilon,\ \text{the greedy play terminates}\}\Big).$$

在 Γ 上，总长度不超过 n 的有限词对只有有限多个，因此最大值定义良好且有限。下一个命题表明，它没有全可计算上界。

命题 8.2。没有全可计算函数 $f\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 能在每个参数处都作为 UNO 的上界。

证明。假设对于每个 n，都有 $f(n) \ge \mathrm{UNO}(n)$。给定一台双计数器机 $\mathcal{M}$，按照定理 3.1 构造 $uw^\omega_{\mathcal{M}}$，并计算 $n = |u| + |w_{\mathcal{M}}|$。模拟 $f(n)$ 回合的贪心对局，除非对局提前终止。若对局终止，则该机器停机。否则，对局不可能在之后终止，因为任何描述长度不超过 n 的终止对局，其持续时间都不会超过 $f(n)$。这样便能判定停机问题，矛盾。 □

9 不受限制的对局与存在性终止

定理 3.1 的唯一性和模拟断言要求强制兼容出牌。现在我们允许采用第 2 节中的所有合法行动，包括在有可匹配的牌可出时选择抽取而不出牌。

9.1 无限合法出牌

命题 9.1. 在不受限制的合法对局中，对于每个初始状态，只要抽牌堆无限且双方的手牌均非空，就存在无限对局。

证明。 每位玩家都可以选择抽牌，而不打出手中已有的可匹配的牌；即使抽到的牌可以匹配，也可以将其留在手中。如果双方始终如此行事，就不会有卡牌被打出，也不会有任何一方的手牌变空，游戏便会永远继续下去。 □

因此，对于所有此类输入，“每一场合法对局都会终止”这一性质都不成立。正如下面的例子所示，即使是有限对局，也无法从贪心模拟中推断出来。

9.2 无限制对局下的被动停机片段

命题 9.2 (被动停机构件失效)。 在不受限制的合法出牌下，*(5)* 中的被动停机 片段可以以R获胜告终。因此，引理 *5.1* 的结论无法推广到任意合法对局。

证明。 从$\mathcal{C}$(1，0，0)开始。打出 TEST FLAG 后，牌堆顶牌是 g0，下一个读取器是 R，手牌为 $H_{\mathsf{M}} = E^{+}$ 和 $H_{\mathsf{R}} = \{F\}$，剩余片段为

g0 gS bS gS g0 gS.

玩家 R 抽牌并打出 g0。玩家 M 抽到可以接牌的 gS，但将其留在手中。玩家 R 抽牌并留下一张 bS，它与 g0不相容。随后 M 打出存下的 gS，抽牌并打出接下来的 gS 和 g0，然后让出回合。玩家 R 抽牌并打出最后一张 gS，接着打出存下的bS，最后打出剩余的 b9。两张跳过牌都让 R 保留回合，而最后一次出牌使 R 手牌出尽。因此，在这些合法选择下，被动片段会终止。□

9.3 通过向量加法系统可达性的存在性终止

尽管如此，存在性问题仍有一种独立于贪心构造的判定程序。

定义 9.3 （存在性终止）。 给定最终周期性抽牌堆的有限描述（u， w），Uno-Exists-Finite 要求判定：在不施加 σ 的情况下，依据第 2 节的规则，是否存在某个有限合法出牌序列。对于 $P \in \{\mathsf{M}, \mathsf{R}\}$，Uno-Exists-$P$-Win 要求判定：是否存在这样的对局，并且最终以 P 获胜。初始发牌和抽牌堆顺序由输入固定；只有玩家的合法选择会发生变化。

定理 9.4 （存在性终止的可判定性与复杂度）。 Uno-Exists-Finite和 Uno-Exists-P-Win 对于第 *2* 节规则下的最终周期性无限抽牌堆都是可判定的——更确切地说，它们是原始递归的。

证明。 **计数器与有限控制**。 我们构造一个具有有效表示的带状态的向量加法系统（VASS），其可达关系刻画了合法的非终止历史。其计数器向量为 $h = (h_{P,\,x})_{P\in\{\mathsf{M},\mathsf{R}\},\;x\in\Gamma} \in \mathbb{N}^{2|\Gamma|}$；$h_{P,\,x}$ 是类型 x 在 P 手牌中的重数。有限控制记录当前玩家、牌堆顶弃牌、下一张牌堆符号在有限前缀/周期中的位置，以及一个用于标识普通回合、刚抽到一张牌或待执行强制抽两张牌的有限阶段。牌堆位置只有 $|u| + |w|$ 种可能： u 中的指针向前移动，而 w 中的指针循环移动。

合法操作。 这些规则由有限转移集合表示，每个转移是否启用仅取决于更新后的向量是否满足非负性。从手牌中打出兼容类型 x 会减去$e_{P,\,x}$ 并根据其符号改变有限控制；当且仅当$h_{P,\,x} \geq 1$时，该转移才会启用。抽取固定牌堆中的下一个符号 x 会加上 $e_{P,\,x}$ 并推进指针，而不受当前手牌影响：自愿抽牌始终合法。当新抽到的 x 与

上一张牌堆顶牌兼容时，玩家可以将它留在手中，也可以立即打出同一张 x 。若选择后者，增加和减去$e_{P,\ x}$ 的效果会相互抵消，但牌堆指针会推进，且打出卡牌的效果仍会生效。不兼容的抽到卡牌必须留在手中。抽二牌通过两次强制递增计数器和跳过一个回合来模拟；跳过牌只会改变有限控制。兼容性是在有限控制中存储的牌型之间进行测试，而非通过针对计数器的谓词判断。因此，无需检查是否没有可打出的手牌：玩家始终可以抽牌。

非终止历史。当某个玩家的手牌变为空时，游戏立即结束。在每次普通（非终止）弃牌转移中，扣除弃掉的卡牌后，我们要求当前玩家的手牌仍非空。这可以表示为有限个正计数器测试的析取。测试 $h_{P,y} \geq 1$ 可以通过在两个转移中暂时扣除再恢复 $e_{P,y}$，并经过一个新建的中间控制状态，在向量加法系统中实现。因此，它不会引入零测试。所有普通摸牌转移都会保持手牌非空（包括立即打出摸到的卡牌，这不会改变手牌数量），而且所有初始手牌都非空。因此，经过这些非终止控制状态的任何计数器路径都对应一场合法且尚未结束的游戏。

终止历史。对于每个玩家 P，添加一个独立的终止转移，用于从该玩家的手牌中打出一张可匹配的牌。此转移执行扣除操作，并进入一个没有普通游戏转移的终止控制状态；它并不要求手牌为空。只有当获胜玩家在终止状态下的每个计数器都恰好为零时，才接受此转移。为了将这一部分零可达性条件化归为普通向量加法系统可达性，在终止状态中添加自环，每个自环扣除另一名玩家所持每种牌型的一张卡牌，并要求到达一个指定最终控制状态中的全零标记。终止转移之后，P 的计数器都不能再改变，因此，当且仅当弃牌确实清空了 P的手牌时，才能到达全零标记。见证可达性的路径映射为一场以 P获胜告终的合法游戏；反过来，任何这样的游戏都会产生一条见证向量加法系统路径。对两名玩家的情况取析取，即可得到有限对局存在性。

VASS 的普通可达性（等价于带有限控制的佩特里网）是可判定的 [6, 7]。此外，所构造的 VASS 维度固定为 $d = 2|\Gamma| = 96$ ，且与 $(u,\ w)$ 无关，其中$|u| + |w|$ 只影响有限控制的规模。根据 Leroux 和 Schmitz 给出的固定维数上界，[8], 在 d 维 VASS 中的可达性属于原始递归（处于快速增长复杂度类$\mathcal{F}_{d+4} = \mathcal{F}_{100}$）；因此，这两个判定问题都属于原始递归。

□

备注 9.5。该定理讨论的是在自愿抽牌规则下存在某种能够终止的对局，而不是存在一种能够战胜同样可以选择自愿抽牌的对手的获胜策略（对比强制出牌规则下的推论 3.3）。自愿抽牌规则下的双人策略问题涉及交替量词，无法由 VASS 可达性直接推出；其可判定性仍未解决，Uno-Exists-Finite 的精确初等复杂度也同样如此。此外，该结果依赖于我们明确指定的卡牌字母表，其中不包含变色加抽四牌的手牌颜色限制；若要考虑该限制，则需另行分析。

10 结论

在强制兼容出牌规则下，颜色或符号匹配、跳过牌和抽二足以模拟双计数器机。最终周期性抽牌堆具有有限描述；手牌中无界的牌的重数则提供了记忆。

在强制出牌规则下，贪心终止、指定玩家获胜和获胜策略存在性均为 Σ_1^0-完全；而在官方自愿抽牌规则下，有限合法出牌序列的存在性可通过固定维数向量加法系统可达性在原始递归时间内判定。强制出牌提供了模拟所用的零测试；自愿抽牌则允许在不使用零测试的情况下表示存在性问题，而该问题

的精确复杂度，以及自愿抽牌下获胜策略的可判定性，仍是自然的开放问题。

A 操作语义与非终止安全性

定义 A.1（微步与读取边界）。 完整状态由双方的有限手牌多重集、牌堆顶弃牌、当前回合玩家以及下一个待读取的摸牌堆索引组成。微步 可以是打出手牌、进行一次普通单张摸牌并选择是否立即打出所摸的牌，或因 D而进行强制双张摸牌。最后一种操作会消耗摸牌堆中连续的两张牌，且不会将回合交给接收者。第 4 节引入的读取边界，出现在 σ 规定的所有手牌出牌完成之后、消耗下一张摸牌堆牌之前。读取器 rd 是将要消耗下一张牌的玩家。由于每次手牌出牌都会减少手中牌的总数，因此在摸牌之前最多只能进行有限次手牌出牌。

引理 A.2（不会提前获胜）。 在主动触发停机之前，构造中的任何片段都无法终止游戏。在每个片段边界，R 都持有其持久牌 $F = b9$，而M至少保留一张 $E = y8$。在每个非终止构件中，这些牌始终不会被打出，不过任一方的手牌中都可能暂时包含其他牌。

证明。 可打出的牌型恰好由引理 6.2–6.4 和停机轨迹涵盖。在那里既不打出F，也不打出 E；PRE构件可能生成额外的 E，但绝不会消耗它。只有活动停机尾部会在 R 能打出 F 的回合到达蓝色牌堆顶牌。因此，持久的储备牌可防止任一手牌过早打空。 □

B 块边界处的转移证书

该表总结了边界变换。每一行均继承第 6 节中对应引理的完整输入假设；中间列列出了与该变换最相关的条件。这里， q 表示 R 持有的 J 临时副本数量。完整动作轨迹见证明和附录 C。

代码块	相关输入	输出变换
TEST	$\mathcal{C}(0,\ a,\ b)$ 或 $\mathcal{C}(j,\ a,\ b),\ j>0$	J_M： $0 \mapsto 0$ 或 $2j \mapsto 2j-2$，带有标志 r4；牌堆顶牌 gS，读入 =R
PRE$(x_1 \cdots x_m)$	牌堆顶牌 gS，读取器 $=$ R，$H_R = \{F\}$	添加 $x_1, \ldots, x_m$，并可能将 E 添加到 H_M；牌堆顶牌相同以及读取器
GIVE	牌堆顶牌 gS，rd $=$ R	将 yS 添加到 H_R；牌堆顶牌 g0，rd =R
FLAG	top g0（或 gS，$\eta = 0$）；引理 6.2(4)	移除标记；牌堆顶牌 g0；如果存在标记，则为 rd $=$ R，M 否则
Π	牌堆顶牌 g0，rd $= P$	$J_P \leftarrow J_P + 1$；读取器和牌堆顶牌保持不变
核心$_X$	牌堆顶牌 g0，yS $\in H_R$	读取器 M $\to$ M（不更新）；当 $X > 0$ 时，R $\to$ M（递减）；当 $X = 0$ 时，R $\to$ R
g1 rS gS	牌堆顶牌 g0，rd =R，$J_R = q$，$J_M \geq q+1$	$J_R \leftarrow 0$，$J_M \leftarrow J_M - q - 1$；牌堆顶牌 gS，rd $=$ R
rS rS gS	牌堆顶牌 gS，rd =R，$J_R = q$，$J_M \geq q$	$J_R \leftarrow 0$，$J_M \leftarrow J_M - q$；牌堆顶牌 gS，rd $=$ R

C 附加局部转移轨迹

本附录汇集了用于补充引理 6.2–6.4 的参数化轨迹。记号$P:+x$、 $P:\langle x\rangle$、 $P:-x$ 分别表示摸牌并打出、摸牌并保留以及从手牌打出。每一行都假定存在一个边界状态：双方手牌中均没有绿色牌或零符号牌，也没有其他兼容的红色手牌类型。

单牌切换和窗口。 当牌堆顶牌为 g0、rd 为 $=P$，且双方手牌均受上述限制时，单词 g0 被消耗为 $P:+$g0，之后对手成为下一位读取器。对于$\Pi = $ r1 g0，轨迹为 $P:\langle J\rangle$，随后为 $P:+$g0。因此，下一位读取器再次是 P，且 P持有一张额外的 J。该轨迹适用于任一读取器，并证明了引理 6.2(5) 的两种情况。在牌堆顶牌为 gS的读取边界处，单张 g0 也与之兼容，并会执行相同的读取器切换。

任意垃圾牌数量下的排空。 在 g1 rS gS 情形中，读取器为 R，首先 R：$+$g1，M：$-J$。接下来的 $2q$ 次手牌出牌为

$$(\mathsf{R}:-J,\ \mathsf{M}:-J)^q;$$

然后 R：$+$rS，再 R：$+$gS。玩家 R 打出了 J 的 q 张，M 打出了 $q+1$。若 $q=0$，中间代码块为空，且仍需先执行 M：$-J$；这就是 $q+1$前置条件的原因。当读取器为 M 且 $q=0$ 时，轨迹为 M：$+$g1，R：$\langle$rS$\rangle$，M：$-J$，R：$-$rS，R：$+$gS。对于第二个排空装置， rS rS gS 且读取器为 R 时，轨迹为 R：$+$rS，随后是 (R：$-J$，M：$-J$)^q，接着是 R：$+$rS 和 R：$+$gS。特别是，$q=0$ 仅涉及三次摸牌并打出操作。这些轨迹证明了对每个 $q\in\mathbb{N}$，两个断言均成立。

递增尾部。 紧接在尾部 c_X gS gS rS rS gS之前，读取器在主动分支中为 M，在被动分支中为 R；并且在主动分支中为 $H_{\mathsf{R}}=F$yS，在被动分支中为 $H_{\mathsf{R}}=FJ^o$yS。主动分支中经过 c_X gS gS 的轨迹为 M：$+c_X$, R：$+$gS, R：$-$yS, R：$+$gS；没有寄存器递减，第二个排空装置与 $q=0$一起完成该片段。在被动分支中，轨迹为 R：$+c_X$, M：$-U_X$, R：$-$yS, R：$+$gS, R：$+$gS；随后，第二个排空装置从每位玩家那里恰好移除 o 份 J。前面的 PRE 确保有一份 U_X 可用；打出一份即可抵消加载造成的增加，而无需考虑原始寄存器值。

情形的穷尽。 在每个代码块边界处，手牌仅具有相应输入假设中明确列出的类型。在 TEST 内部，仅有的额外手牌类型是g0、 rS以及最终标志 r4，这些已在完整测试轨迹中加以考虑；PRE 不会将回合授予 M；GIVE、FLAG 以及 II 代码块已在上文和引理 6.2 中涵盖；CORE$_X$ 的三种情形已由引理 6.3 穷尽；两种排空类型及其退化情形在此枚举。因此，片段证明中不存在被遗漏的、依赖于值的分支。这一情形穷尽论证独立于有限回归测试。

D 明确的描述长度界与示例

对于包含 m 个符号的列表，PRE 模块的长度为 $3\lceil m/2\rceil + 1$。由 (3)–(5) 直接可得，指令段的长度为

$$
\begin{aligned}
|S_i| &= 22 + 2o + 3\left\lceil \frac{o+1}{2} \right\rceil && \text{for INC},\\
|S_i| &= 27 + 2z + 3\left\lceil \frac{z+1}{2} \right\rceil && \text{for DEC},\\
|S_i| &= 17 && \text{for HALT}.
\end{aligned}
$$

由于 $o \le N-1$ 和 $z \le 2N-1$，所有情况均满足 $|S_i| \le 25 + 7N$，因此

$$
|w| \le N(25 + 7N), \qquad |u| = 17.
$$

例如，考虑双指令机器 $I_0 =$ 递增$(A,\ 1)$，$I_1 =$ 停机。这里 $N = 2$，$\mathrm{off}_0(1) = 0$，增量段长度为 25，停机段长度为 17，因此$|w| = 42$。执行完第一个片段后，M 恰好有一个 `y2`；下一个片段处于激活状态，R 获胜，且寄存器值保持不变。

E 计算检查及其范围

补充脚本 `verify_gadgets.py` 和 `uno_program_tests.py` 实现了逐步模拟器、构件编译器和回归测试。报告的 Python 3 运行包括 173 250 项参数化 INC/DEC 段检查（INC 10 500 项，DEC 162 750 项）、525 项 HALT 段检查、19 984 项基本块检查，以及独立的程序测试套件，其中包括使用种子 2331 生成的 400 个伪随机双计数器程序（另有 7 个确定性冒烟测试用例）。这 400 个程序中，有 90 个到达了停机状态；其余 310 个程序均运行至 100 个片段的上限。达到此上限并不能证明程序非终止。

这些脚本作为辅助文件随本预印本一同发布。这些有限检查是对动作轨迹证明的补充；它们本身并不能确立普适引理。

人工智能的使用

在准备本预印本期间，作者使用 OpenAI ChatGPT（GPT-6 Sol）进行编辑和阐述、审核部分证明、翻译、讨论 VASS 表述以及编写辅助验证脚本，并使用 Anthropic Claude（Opus 5.5）进行比较审阅并提供编辑建议。这些工具不是作者。作者核实了所有数学断言、证明、参考文献和代码，并对内容的原创性和准确性承担全部责任。

参考文献

[1] Minsky,M.L. 《计算：有限机器与无限机器》.Prentice–Hall, 1967.

[2] Demaine, E. D., Demaine, M. L., Harvey, N. J. A., Uehara, R., Uno, T. 和 Uno, Y. UNO 即使对单人玩家也很难。理论计算机科学 **521** (2014), 51–61. doi:10.1016/j.tcs.2013.11.023.

[3] Churchill, A., Biderman, S. 和 Herrick, A. 万智牌是图灵完备的。载于第十届算法趣味会议国际会议论文集（*FUN 2021*），LIPIcs **157**，文章 9 (2020), 9:1–9:19. doi:10.4230/LIPIcs.FUN.2021.9.[4] Biderman, S. 万智牌和算术一样难。*arXiv:2003.05119* (2020).https://arxiv.org/abs/2003.05119.[5] Nicolosi, O., Pisciotta, F. 和 Bresolin, L. 判定游戏王集换式卡牌游戏中的获胜策略很难。*arXiv:2603.02863* (2026). https://arxiv.org/abs/2603.02863.[6] Mayr, E. W. 一种用于一般Petri网可达性问题的算法。*SIAM*计算杂志 **13**(3) (1984), 441–460. doi:10.1137/0213029.[7] Kosaraju, S. R. 向量加法系统中可达性的可判定性（初步版本）。载于第十四届*ACM*计算理论年会论文集（*STOC ' 82*）(1982), 267–281. doi:10.1145/800070.802201.[8] Leroux, J. 和 Schmitz, S. 固定维度下，向量加法系统的可达性是原始递归的。载于第三十四届*ACM/IEEE*计算机科学逻辑年会论文集（*LICS 2019*）(2019), 1–13; *arXiv:1903.08575*. https://arxiv.org/abs/1903.08575.[9] Mattel. *UNO*豪华版：说明书，M2062-0920 (2007). https://service.mattel.com/instruction_sheets/M2062-0920.pdf.