arXiv:2611.29751v1 [math.DG] 22 Nov 2026

具有 Spin(7) 整体单值化的紧致非形式流形$\mathrm{Spin}(7)$

YAROSLAV BAZAIKIN

摘要。我们构造了一个具有 Spin(7) 整体单值化的紧致单连通八维流形，并在其上构造了一个次数为 (3，2，2) 且不包含零的三重马西积。该流形是一个平坦轨形的消解。Joyce 粘接定理赋予它一个无挠 Spin(7) 结构。消解映射经过 $Y \times S^1$ 的一个商空间，其中 Y 是 Martín-Merchán 的非形式的 G_2 流形。到该商空间的映射具有映射度一，因此拉回保持非零的马西配对。在消解流形上，用于检测的度二上同调类湮灭了全部不确定性。单连通性与非形式性共同推出其整体单值化为 Spin(7)。该流形具有 (b_2，b_3，b_4^+，b_4^-) =(22，10，91，27)。

1. 引言

根据 Deligne、Griffiths、Morgan 和 Sullivan 的定理，紧致凯勒流形具有形式性 [8, 第 6]节。Cavalcanti [6]研究了特殊和乐背景下形式性的拓扑条件。Amann 和 Kapovitch 记录了这样的猜想：每个具有特殊和乐的紧致单连通流形都是形式的 [1, 猜想 2]。对于整体单值化 G_2，Amann 和 Taimanov 证明了 Joyce 的例子之一具有形式性 [2], ，而 Martín-Merchán 构造了一个紧致单连通非形式的例子 [13]。Fiorenza、Kawai、Lê 和 Schwachhöfer 证明，在紧致无挠 Spin(7) 流形上，非平凡的实三重马西积的映射度必须为 (2, 2, 2)，或为 (2, 2, 3) 的某个置换 [9,推论 5.5(3) 和注 5.6]。我们在一个具有完整全纯群 Spin(7) 的紧致单连通流形上实现了 (3, 2, 2) 的情形。

定理 1.1。存在一个紧致、单连通的光滑八维流形 M，它具有无挠的 $\mathrm{Spin}(7)$ 结构，其度量的整体单值化恰为 $\mathrm{Spin}(7)$。存在有理上同调类 $A \in H^3(M)$ 以及 $B, C, W \in H^2(M)$，使得 $\langle A, B, C\rangle$ 有定义，且

$$|\langle nW, [M]\rangle| = 8 \qquad for\ every\ n \in \langle A, B, C\rangle. \tag{1.1}$$

特别地，M 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$ 上都不是形式的。

设 $\rho : Y \to X$ 是 Martín-Merchán 示例中平坦七维轨形的消解。我们选取 X 的一个对合 τ，它可提升为 Y 上的一个反向定向对合 $\tilde{\tau}$。将 τ 与圆反射 $s \mapsto -s$ 结合，得到平坦轨形 $\mathcal{O} = (X \times S^1)/\langle(\tau, -1)\rangle$。我们构造 $\mathcal{O}$ 的一个光滑消解，其映射可分解为

$$M \xrightarrow{r} Z \xrightarrow{\bar{\rho}} \mathcal{O}, \qquad Z = (Y \times S^1)/\langle(\tilde{\tau}, -1)\rangle.$$

映射 $\bar{\rho}$ 由 $\rho \times$id 诱导，并消解从 X 继承而来的分支。映射 r 消解了其余奇点 Z，它们沿着互不相交的四维中心延伸。

对于度量，我们使用平坦表示 $\mathcal{O} = T^8/\Gamma$。我们为指数为二的子群 $H \subset \Gamma$构造复解消 $V \to T^8/H$，首先在每个交点处消解继承分支。V的剩余商具有单个实奇异分支，其消解给出 M。这些局部模型带有相容的拟渐近局部欧几里得（QALE）Spin(7) 结构，因此 Joyce 粘接定理在 M上给出一个无挠 Spin(7) 结构。

The Y 上的第一个 Massey输入和圆周形式 ds 在该乘积作用下都变号对合 因此，其乘积是不变的。 $Y \times S^1$ 上的一个定义系统下降到 Z 并

日期：2026年11月15日。2020 数学主题分类。主要分类 53C29；次要分类 55P62、55S30。关键词和短语。特殊和乐、非形式流形、Massey 积、轨形解消。

沿着度一映射 r 拉回到 M，其中一个度二上同调类检测该乘积，并消除其全部不确定性。商空间 Z 是单连通的，消解其余的中心不会改变其基本群。随后，非形式性排除了其余的真整体单值化群，因为这些群会使 M 成为Kähler流形。

推论 1.2。 定理*1.1* 中的流形

$$(b_k)_{k=0}^{8} = (1, 0, 22, 10, 118, 10, 22, 0, 1), \tag{1.2}$$

$$(b_2, b_3, b_4^+, b_4^-) = (22, 10, 91, 27),$$

$$\chi(M) = 144, \qquad \operatorname{sign}(M) = 64. \tag{1.3}$$

命题2.2 给出了 Massey 积的传递公式。第3 节和4 节描述了平坦商空间，并构造了它的无挠消解。第5节证明了因子分解，并确定了 $\tilde{\tau}$ 在例外类上的作用。第6 节完成了定理 1.1的证明。附录A 确定了七维 Massey 周期的符号和归一化。附录B 计算了贝蒂数和符号。

除非另有说明，所有上同调群均取有理系数。微分形式的乘积表示楔积。定向分别为七维情形下的 $dt\,dx_1\,dy_1\,dx_2\,dy_2\,dx_3\,dy_3$，以及其与最后一个圆周的乘积上的 $ds \wedge \mathrm{vol}_7$。

2. 对合下的马西积

若一个空间的多项式微分形式代数可通过乘法拟同构与微分为零的上同调代数相连，则称该空间在零特征域上是形式的。对于定义在 $\mathbb{R}$ 上的光滑流形，也可以改用德拉姆代数 [14]。一个已定义且不包含零的三重马西积是形式性的障碍。

我们采用以下约定。若闭元素 α，β，γ的映射度为 p，q，r和 $du = \alpha\beta$,$dv = \beta\gamma$，则

$$m = \alpha v + (-1)^{p+1} u\gamma \tag{2.1}$$

是闭的，并表示三重积。其不确定性为

$$[\alpha]H^{q+r-1} + H^{p+q-1}[\gamma]. \tag{2.2}$$

引理 2.1。 设 P 是一个闭的定向有理同调 n-流形。若 $w \in H^{n-p-q-r+1}(P)$满足 $[\alpha]w = [\gamma]w = 0$，则与 w 配对在 $\langle[\alpha], [\beta], [\gamma]\rangle$ 上为常数。若该值非零，则此积不包含零。

证明。 对任意映射度符合 (2.2) 的类 h，k，结合律和分次交换律给出 $(\alpha h + k\gamma)w = 0$。 □

对于光滑作用在流形 P上的有限群 K，取一个等变三角剖分 [10]，并进行重心细分，直到作用成为正规作用 [5, 第 III 章第 1] 节。该商空间可被三角剖分为 P/K，而不变有理分片多项式形式逐单形下降。这就将商空间上的形式代数与不变子代数等同起来。这里 $A_{\mathrm{PL}}(X)$ 表示 X 的奇异单形上的有理多项式形式代数。将其限制到所选三角剖分的单形上，可得到到该三角剖分上的分片多项式形式代数的乘法拟同构。因此，这些代数可以计算有理上同调和 Massey 积 [14, 第 7] 节。对 K 取平均后，得到 $H^*(P/K; \mathbb{Q}) = H^*(P; \mathbb{Q})^K$。若作用保持定向，则其局部链环是球面的有限商，且具有球面的有理上同调。因此，该商空间是一个有理同调流形。对于具有平凡的一般稳定子的有效作用，积分满足

$$\int_{P/K} \eta = \frac{1}{|K|} \int_P \widetilde{\eta}, \tag{2.3}$$

其中，η 是 P/K 上的紧支撑顶次形式，$\widetilde{\eta}$ 是其在 P上的拉回。对于连续映射，我们通过函子 A_{PL}利用 Massey 积的自然性。

命题 2.2. 设 Y 是一个带有反定向光滑对合 τ的闭定向七维流形。假设 $a,b,c,w\in H^2(Y;\ \mathbb{Q})$ 满足

$$\tau^*(a,b,c,w)=(-a,b,c,w),\qquad ab=bc=aw=cw=0,$$

并令 $\mu=\langle mw,[Y]\rangle\neq 0$ 对 $m\in\langle a,b,c\rangle$。设 $Z=(Y\times S^1)/\langle(\tau,-1)\rangle$，并以 $ds\wedge$ 体积形式 $_Y$为定向，其中 $\int_{S^1}ds=1$。若 $r:\ M\to Z$ 是一个映射度为 $d\neq 0$ 的闭定向八维流形上的连续映射，则存在有理上同调类 $A\in H^3(M)$ 以及 $B,C,W\in H^2(M)$，使得

$$\langle nW,[M]\rangle=\frac{d}{2}\,\mu\qquad(n\in\langle A,B,C\rangle).\tag{2.4}$$

特别地， M 在 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$上都不是形式的。

证明。 我们在 Y 的 τ-等变三角剖分上使用有理分片多项式形式，并对 $S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 作仿射细分，其顶点位于 $s=0,\tfrac14,\tfrac12,\tfrac34$。对于乘积，反复对乘积胞腔复形作重心细分，直到 $(\tau,-1)$ 的作用是正则的。

选取 a、b、c、w 的闭代表元，使其具有指定的 τ 奇偶性，并选取原始元 $du=ab$、$dv=bc$。分别将 u、v 替换为 $(u-\tau^*u)/2$、$(v+\tau^*v)/2$ 后， u 变为奇的，v 变为偶的，而它们的微分保持不变。所得代表元 $m=av-uc$ 是奇的，因此 $ds\wedge m$ 可下降到 Z。由引理 2.1 可知，a、b、c 中的每个类（包括 $[m]$）与 w 配对所得均为 μ。

令 $\theta=ds$，并在 $Y\times S^1$ 上取

$$A_0=a\theta,\qquad B_0=b,\qquad C_0=c,\qquad W_0=w.$$

A_0B_0 和 B_0C_0 的原始元分别为 $u\theta$ 和 v，由此得到马西积代表元

$$n_0=A_0v+(u\theta)C_0=\theta(av-uc)=\theta m.$$

输入和原始元在 $\sigma=(\tau,-1)$ 下不变，因此整个定义系统可下降到 Z。我们沿用下降后各形式的记号。令 $q:\ Y\times S^1\to Z$ 为商映射。在指定的定向及 $\int_{S^1}\theta=1$ 下，等式（2.3）给出

$$\langle n_0W_0,[Z]\rangle=\tfrac12\langle\theta mw,[Y\times S^1]\rangle=\tfrac{\mu}{2}.$$

设 $(A,\ B,\ C,\ W)=r^*([A_0],\ [B_0],\ [C_0],\ [W_0])$。由自然性可得 $n=r^*[n_0]\in\langle A,\ B,\ C\rangle$，而映射度公式给出 $\langle nW,\ [M]\rangle=d\mu/2$。由于 q^* 在有理上同调中是单射，关系 $aw=cw=0$ 蕴含 $[A_0][W_0]=[C_0][W_0]=0$ 在 Z上成立。因此 $AW=CW=0$，且 W消去了全部不确定性

$$AH^3(M)+H^4(M)C.\tag{2.5}$$

因此，每个有理代表元都有相同的非零配对。扩张到$\mathbb{R}$后，同一个代表元和消失关系对每个实代表元都给出相同结论。因此， M 在两个域上都不是形式的。□

3. 平坦轨形及其奇点

我们确定 Joyce 消解构造所需的不动点集构型和法商空间模型。

3.1. 环面、格与形式。设

$$E=\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}),\qquad T^7=(\mathbb{R}/4\mathbb{Z})_t\times E^3,\qquad T^8=T^7\times(\mathbb{R}/\mathbb{Z})_s,\tag{3.1}$$

其中 $z_j=x_j+iy_j$。度量是未缩放实坐标 $(t,\ x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ x_3,\ y_3,\ s)$ 下的欧几里得度量。令

$$\omega=dx_1dy_1+dx_2dy_2+dx_3dy_3,$$

$$\varphi=dt\wedge\omega+\Re(dz_1dz_2dz_3),\tag{3.2}$$

$$\Phi=ds\wedge\varphi+*_7\varphi.\tag{3.3}$$

特别地,

$$\varphi = dt(dx_1dy_1 + dx_2dy_2 + dx_3dy_3) + dx_1dx_2dx_3 - dx_1dy_2dy_3 - dy_1dx_2dy_3 - dy_1dy_2dx_3.$$

对于下文定义的群， φ 下降到 T^7/G，而 Φ 下降到 T^8/Γ。

3.2. **群作用**。定义

$$\begin{aligned} F(t,z_1,z_2,z_3) &= (t+1, iz_1, iz_2, -z_3),\\ \iota_1(t,z_1,z_2,z_3) &= (t, -z_1, -z_2, z_3+\tfrac{1}{2}),\\ \iota_2(t,z_1,z_2,z_3) &= (t, -z_1, -z_2, z_3+\tfrac{i}{2}),\\ \kappa(t,z_1,z_2,z_3) &= (1-t, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3). \end{aligned} \tag{3.4}$$

它们在 s上平凡作用。群 $G = \langle F, \kappa, \iota_1, \iota_2\rangle$ 的阶为32，并保持 φ不变。商空间 $X = T^7/G$ 是 Martín-Merchán的轨形：先对 F 取商得到其中使用的映射环面，然后再对 ι_1, ι_2取商，最后再对 κ取商。

现在令

$$\tau(t,z_1,z_2,z_3) = (1-t, z_1, z_2, \tfrac{1}{4} - z_3), \qquad \sigma(t,z,s) = (\tau(t,z), -s). \tag{3.5}$$

所有平移均取自格（3.1）。直接复合可得

$$\tau^2 = 1, \quad \tau F \tau = F^{-1}\iota_1, \quad [\tau,\kappa] = [\tau,\iota_1] = [\tau,\iota_2] = 1. \tag{3.6}$$

此外 $\tau^*\varphi = -\varphi$。这一点可以直接看出： dt 变号；前两个复坐标保持不变，而 dz_3 变号； dx_3dy_3 保持不变。诱导度量保持不变，而七维定向反转。因此$\tau^*(*_7\varphi) = *_7\varphi$，因为定向反转会使霍奇星算子变号。因此$\sigma^*\Phi = \Phi$。

定义 3.1。本文研究的轨形为

$$\mathcal{O} = T^8/\Gamma, \qquad \Gamma = \langle G, \sigma\rangle.$$

若奇异分支的二阶稳定子属于 G ，则称该分支为旧分支；否则称为新分支。此标记是后续消解方案的一部分。

每个群元素都有唯一的标准形

$$F^a\kappa^b\iota_1^c\iota_2^d\sigma^e, \qquad 0 \le a < 4, \quad b,c,d,e \in \{0,1\}. \tag{3.7}$$

为证明存在性，利用 (3.6) 将 σ移到右侧，并使用 $\kappa F\kappa = F^{-1}$ 以及 G中 ι_1、ι_2的中心性。为证明唯一性，标准形恒等式必须满足：由其在 s上的作用可知 $e = 0$；由 t的符号可知 $b = 0$；接着，由 t 模 4 的平移可知 $a = 0$；再由 z_3的平移可知 $c = d = 0$。因此 $|\Gamma| = 64$，且 G 是指数为二的正规子群，而旧/新标记在共轭下不变。由于 $T^8/G = X \times S^1$，对 Γ/G 取商空间得到 $\mathsf{O} = (X \times S^1)/(\tau, -1)$。

子群

$$H = \langle F^2, \kappa, \iota_1, \iota_2, \sigma\rangle \tag{3.8}$$

由指数为偶数的元素组成，且指数为二。其列出的五个生成元彼此交换，阶均为二；标准形将其同构识别为 $(\mathbb{Z}/2)^5$。二进制指标和标签的运算均在 $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上进行。对于指数、仿射坐标和整数值参数，我们使用它们的代表元 0、1。对于 α， c， $d \in \mathbb{F}_2$，令

$$\begin{aligned} O_{\alpha d} &= F^{2\alpha}\kappa\iota_2^d, \qquad U_{\alpha cd} = F^{2\alpha}\iota_1^c\iota_2^d\sigma,\\ R_{\alpha c} &= F^{2\alpha+1}\kappa\iota_1^c, \qquad J_c = \kappa\iota_1^c\sigma. \end{aligned} \tag{3.9}$$

3.3. **不动点集构型**。沿用 Joyce [11, 定义 13.2.1，第 346],页，令

$$\mathcal{L} = \{D : D \text{ is a connected component of } \mathrm{Fix}(A),\ A \le \Gamma\}.$$

这包括 $T^8 = \mathrm{Fix}(\{1\})$。对于 $D \in \mathcal{L}$，其逐点稳定子 $A_D = \{\gamma \in \Gamma : \gamma|_D = \mathrm{id}\}$作用于其常法空间 W_D。在 D 的一般点处，法商空间为 W_D/A_D。 D的集合稳定子模去 A_D后，作用于 D 及此商空间；法作用由仿射映射的导数给出。我们通过列出各个元素的不动集及其交点来确定 $\mathcal{L}$ 。

将 $q = t/4 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 记作仿射坐标；这不会改变度量约定。将坐标分解为

$$\mathsf{A} = (x_1, y_1, x_2, y_2), \qquad \mathsf{B} = (q, x_3, y_3, s).$$

对于元素（3.7），其作用为

$$z_j \longmapsto i^a(-1)^{c+d}\begin{cases} z_j & b = 0, \\ \bar{z}_j & b = 1, \end{cases} \qquad (j = 1,\ 2), \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} q &\longmapsto (-1)^{b+e}\left(q - \tfrac{1}{8}\right) + \tfrac{1}{8} + \tfrac{a}{4}, \\ x_3 &\longmapsto (-1)^{a+e}x_3 + (-1)^a\left(\tfrac{e}{4} + \tfrac{c}{2}\right), \\ y_3 &\longmapsto (-1)^{a+b+e}y_3 + (-1)^{a+b}\tfrac{d}{2}, \\ s &\longmapsto (-1)^e s. \end{aligned} \tag{3.11}$$

不动点集是其 A 部分和 B 部分的乘积。圆反射有两个不动点；非平凡平移没有不动点。在 E 中，$z \mapsto \pm\bar{z}$ 对任一符号都固定两个圆，而$z \mapsto i\bar{z}$ 和 $z \mapsto -i\bar{z}$ 分别固定单个圆 $x = y$ 和 $x = -y$。

引理 3.2（所有非空不动点集）。 在 63 个 Γ的非恒等元中，恰有 18个具有不动点： 14 个具有四维不动环面，另有 *4* 个具有孤立不动点。这 18 个元素全部都是对合。它们的不动点集列于表 *1*中；其他所有元素的作用都没有不动点。

证明。 如果 $e = b = 0$，则 B 中的方程迫使 $a = c = d = 0$，从而得到恒等元。

对于 $e = 0$，$b = 1$，当 a 为偶数时，它们迫使 $c = 0$；当 a 为奇数时，它们迫使 $d = 0$。在两种情况下， q 和 z_3 的一个坐标都会发生反射，因此 B 中的不动集由四个二维环面组成。A 中每个 E 因子在 a 为偶数时贡献两个圆，在 a 为奇数时贡献一个圆，分别得到 16 个和 4 个四维环面。

对于 $e = 1, b = 0$，当 x_3 中存在非零四分之一平移时，奇数 a 被排除。对于 $a = 2\alpha$，所有四个 B 坐标均被反射，而 A 上的作用为 $(-1)^{\alpha+c+d}$。因此，当 $\alpha + c + d = 0$ 或 1 时，不动集分别由 16 个四维环面或 256 个点组成。

最后， $e = b = 1$ 迫使 $a = d = 0$。坐标 x_3、 s 会被反射，而 q、 y_3 则是自由的；每个 E 因子贡献两个不动圆。因此，对于每个 ，有 16 个四维环面。我们得到表 1，所有列出的映射都是对合。 □

表 1. 具有不动点的非恒等元。对于每个元素，在 T^8 上计数分支。

族	元素 维数$_{\mathbb{R}}$		分支 分支	
$O_{\alpha d}$	4	4	16	旧，复
$R_{\alpha c}$	4	4	4	old, real
$U_{\alpha cd}$, $\alpha + c + d = 0$	4	4	16	new
$U_{\alpha cd}$, $\alpha + c + d = 1$	4	0	256	new
J_c	2	4	16	new

3.4. **交点与正规模型**。 不同的旧不动环面彼此不相交。这可直接由（3.11）得出：不同的偶数 a 具有互不相交的 t 层级，不同的 d 具有互不相交的 y_3 层级；奇数和偶数 a具有互不相交的 t 层级；对于固定的奇数 a， c 的两种取值具有互不相交的 x_3层级。因此，每个非平凡旧稳定子都是二阶循环群。

引理 3.3（稳定子界）。 Γ 中的每个点稳定子的阶为1、2 或4。四阶稳定子是一个克莱因四元群，其中在 G中恰有一个非恒等元。

证明。 对于稳定子 K，交集 $K \cap G$ 的阶至多为二。商空间$K/$（$K \cap G$）嵌入 Γ/G中，而后者的阶为二。因此 $|K| \leq 4$。每个具有不动点的非恒等元根据引理 3.2都是对合，从而排除了四阶循环群。如果$|K| = 4$，则它与 G 的交集必须具有二阶。 □

固定 x 的任何子群都包含于其点稳定子 Γ_x中。因此，为完成$\mathcal{L}$，还需找出克莱因四元群的公共不动集。旧的奇-a 不动点集无法与任何新的不动集相交：它们的 x_3 坐标是 $1/4$的倍数，而每个新的不动点都有 x_3 的奇数倍 $1/8$。因此，每个四阶稳定子都包含于偶-a子群中。

以下给出全部八个四阶稳定子的显式公式。选取 $a \in \{0,2\}$ 与$c, d \in \{0,1\}$，并令

$$g = F^a \kappa \iota_2^d, \qquad h = F^a \iota_1^c \iota_2^d \sigma, \qquad K(a,c,d) = \{1, g, h, gh\}. \tag{3.12}$$

记 $a = 2\alpha$，则有 $g = O_{\alpha d}$ 与 $h = U_{\alpha cd}$。关于公共不动点的 q 与 y_3 方程分别迫使 g 与 h中出现相同的 a 与 d。反之，这些选取给出非空的公共不动轨迹。由于 $gh = J_c$，将 h 替换为 J_c 不会改变公共不动集与所生成的群。

四个 B 坐标中每一个都有两个可能的不动值，总共给出 16 种选取。在 A 上， h 通过 $(-1)^{a/2+c+d}$ 作用。若该符号为 $+1$，则 g 的两个实不动方向保持自由，公共不动集是 64 个二维环面的并。若为 -1，则全部四个 A 坐标都被固定，共有 256 个点。由此每种类型各得四个群，因此在取商空间之前共有 256 个二维环面和 1024 个点。

对于 $\alpha + c + d = 1$，$\mathrm{Fix}(U_{\alpha cd}) = \mathrm{Fix}(K(2\alpha,\ c,\ d))$；因此，每个孤立不动点的完全稳定子都是 $K(2\alpha,\ c,\ d)$。

记 $A_1 = \mathbb{C}^2/\{\pm 1\}$。在开四维分层上，稳定子在法空间上作用为 $-\mathrm{id}$，因此完整的局部模型为 $\mathbb{R}^4 \times A_1$。

在二维不动点集处，将其法空间分解为 K 的三条复特征线。元素 g， h， gh 分别作用于

$$(-1,-1,1), \quad (-1,1,-1), \quad (1,-1,-1) \tag{3.13}$$

这些线上的作用分别为。完整的局部模型为 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^3/(\mathbb{Z}/2)^2$。其三个四维分支分别由 g， h， gh 固定，其中 g 标记为旧。

在一个点处， g 在适当的复坐标下作用为 $(-1,\ -1,\ 1,\ 1)$，而 gh 作用为 $(1,\ 1,\ -1,\ -1)$；同时 h 在 $\mathbb{C}^4$ 上作用为 $-\mathrm{id}$。因此，局部模型为

$$(\mathbb{C}^2/\{\pm 1\}) \times (\mathbb{C}^2/\{\pm 1\}). \tag{3.14}$$

这里 h 有一个孤立不动点，但其完全稳定子是 K：局部而言 $\mathrm{Fix}(h) = \mathrm{Fix}(K)$。有两个四维分支，分别由 g 和 gh固定，标记为旧和新。图 1展示了它们在 $\mathcal{L}$中的这些关联。

$\mathcal{L}$ 的非平凡成员是上文列出的四维环面、二维环面和点。逐点稳定子阶为四的不同成员彼此不相交：若它们相交，就会迫使稳定子相同，而其不动集的不同分支不可能相交。因此，$\mathcal{L}$ 的奇异部分中，唯一的真包含关系是二维环面或点包含于四维环面中。特别地，点分层不位于二维分层上。 $R_{\alpha c}$-轨迹与由 H的非平凡子群固定的整个构形互不相交。

在 $\mathcal{O}$ 中的连通奇异层维数为 4、2、0，数量分别为 21、16、64；轨道数见附录B。仿射作用置换 $\mathcal{L}$，并保持旧/新标记



图1. 稳定子阶数为四的两类分层附近的局部关联。顶点表示完全稳定子，括号内为实分层维数；箭头 $S \to T$ 表示局部上 $T \subset S$。

并确定法向过渡映射。现在，我们为这些数据构造相容的标记消解和度量。

4. 消解及其 R-数据

我们使用指数为二的子群 H (3.8) 来构造消解 $M \to \mathcal{O}$。T^8/H 的相交分支具有复法向模型。先消解旧复分支，再消解新复分支，得到一个光滑复四维流形 V。剩余作用 $\bar{}$ 的 F 提升为 F 的一个对合 V。消解 $V/\langle F\rangle$ 中独立的实奇异分支，定义了 M。

为了得到 Joyce 关于平坦商空间 $\mathcal{O}$ 的 R-数据，我们在第3 节的不动点集数据基础上，补充局部乘积消解、带有相容 QALE 极限的无挠乘积 $\mathrm{Spin}(7)$ 结构，以及保持这些结构的仿射映射的提升 [11, 定义 13.2.2，第 347]页。

4.1. 适配 Cayley 形式的复结构。为了一致地消解复模型，在同一个实环面上引入以下复坐标：

$$u_1 = x_1 + ix_2, \quad u_2 = y_1 - iy_2, \quad u_3 = t - iy_3, \quad u_4 = s + ix_3. \tag{4.1}$$

它们的格分别为，

$$\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}, \quad 4\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}.$$

因此，这是四个矩形椭圆曲线的乘积；特别地，它是一个射影复环面。其标准Kähler形式和体积形式为

$$\omega' = dx_1 dx_2 - dy_1 dy_2 - dt\, dy_3 + ds\, dx_3, \qquad \Omega' = du_1 du_2 du_3 du_4. \tag{4.2}$$

引理4.1。 在上述定向固定的情况下，

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\omega'^2 - \Re\Omega'. \tag{4.3}$$

子群 H (3.8) 是全纯且保体积的。其线性像是对四个复坐标作偶数个符号变换所构成的群。之外的每个元素都是反全纯的。

证明。 展开（4.2）可得（4.3）。在 u 坐标下，生成元的作用如下：

Map	Image of (u_1, u_2, u_3, u_4)
F^2	$(-u_1, -u_2, u_3 + 2, u_4)$
κ	$(u_1, -u_2, 1 - u_3, u_4)$
ι_1	$(-u_1, -u_2, u_3, u_4 + i/2)$
ι_2	$(-u_1, -u_2, u_3 - i/2, u_4)$
σ	$(u_1, u_2, 1 - u_3, -u_4 + i/4)$
F	$(-\bar{u}_2, \bar{u}_1, \bar{u}_3 + 1, \bar{u}_4)$

前五行的复行列式均为一。它们的符号向量张成秩为三的偶符号子群；线性表示的核由平移构成。最后一行对复结构进行共轭，并将 ω' 映到 $-\omega'$，将 Ω' 映到 Ω'，从而保持（4.3）。□

商空间 T^8/H 仅具有此前已分类的复奇点。由 F 诱导的剩余映射是一个反全纯对合，因为 $F^2 \in H$。其不动点集与复奇点集不相交：否则，一个奇数阶-F 元素与 H 的一个元素会固定同一点，这与第 3.4 节相矛盾。

4.2. **Eguchi–Hanson 替换与标记。** A_1 的极小解消为

$$\rho_{\mathrm{EH}} : \operatorname{Tot} \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(-2) \longrightarrow A_1.$$

它带有 Eguchi–Hanson ALE 超凯勒度量，其例外球面 S 的自交数为 -2。我们用 EH 表示其底层解消。三维自对偶法向二形式空间中的一条定向射线确定一个复结构 I，其归一化条件为 $I^2 = -1$，并为 S定向。S 的面积确定度量的尺度。我们称生成元 $u \in H^2$(EH; $\mathbb{Z}$)（$\langle u, [S] \rangle = 1$）为例外根。过渡映射作用于 u时所带的符号定义了根局部系统。若所有单值化符号均为正，则该系统是平凡的，例外上同调直和项也不带扭曲。

在光滑复 A_1 分层上，我们采用从（4.1）继承的复结构。在交点处，由 G给出的标记规定先解消旧分支。

4.3. **带标记的局部解消。** 对于横截曲线模型（3.13），商格为

$$N = \mathbb{Z}^3 + \mathbb{Z}\tfrac{e_1+e_2}{2} + \mathbb{Z}\tfrac{e_1+e_3}{2}, \qquad [N : \mathbb{Z}^3] = 4. \tag{4.4}$$

不变单项式格为

$$M_N = \{(r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{Z}^3 : r_1 \equiv r_2 \equiv r_3 \pmod 2\}.$$

令 $m_{ij} = (e_i + e_j)/2$，其中 m_{12} 标记为旧分支。四个极大锥为

$$\begin{aligned} C_1 &= \langle e_1, m_{12}, m_{13} \rangle, \quad C_2 = \langle e_2, m_{12}, m_{23} \rangle, \\ C_3 &= \langle e_3, m_{12}, m_{13} \rangle, \quad C_4 = \langle e_3, m_{12}, m_{23} \rangle. \end{aligned} \tag{4.5}$$

它们由先沿 m_{12}、再沿 m_{13} 和 m_{23}细分得到。$\mathbb{Z}^3$ 中的每个行列式的绝对值均为 $1/4$，这正是 N的余体积；因此，每个锥在商格中都是正则的。所有本原射线都位于 $r_1 + r_2 + r_3 = 1$中，所以该消解是无挠的。

我们通过指定高度来构造严格凸支撑函数 ψ

$$h(e_i) = 0, \qquad h(m_{12}) = -3, \qquad h(m_{13}) = h(m_{23}) = -1. \tag{4.6}$$

对每个锥 C_j，令 ℓ_j 为在其射线生成元上取这些高度值的线性函数。这些线性片段在公共面上相合，并由 $\psi|_{C_j} = \ell_j$ 定义 ψ。最后一列按 $(e_1,\ e_2,\ e_3,\ m_{12},\ m_{13},\ m_{23})$ 的顺序列出$h(v) - \ell_j(v)$:

Cone	ℓ_j	Gaps
C_1	$(0,\ -6,\ -2)$	$(0,\ 6,\ 2,\ 0,\ 0,\ 3)$
C_2	$(-6,\ 0,\ -2)$	$(6,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 0)$
C_3	$(-2,\ -4,\ 0)$	$(2,\ 4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)$
C_4	$(-4,\ -2,\ 0)$	$(4,\ 2,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)$

所有锥外间隙均为正，因此该消解在仿射商空间上是射影的。扇与支撑函数在交换两个新分支（等价地，交换 e_1 和 e_2）时保持不变。旧/新标记在 Γ 下保持不变，因此三个分支唯一可能的非平凡置换是交换两个新分支。

高度（4.6）仅用于确立射影性。度量类将在第 4.6 节中单独选取。

引理 4.2（先消解旧分支）。在两个极大局部模型中，先消解旧分支后，会留下具有横截奇点 A_1的光滑、互不相交的新中心。消解这些中心得到曲线模型中的扇（4.5），以及点模型中的 EH ×EH 。这些消解及其新例外因子的收缩，与保持旧分支的同构（包括反全纯同构）相交换。

证明。在曲线模型中，选择局部横截复坐标 $(z_1,\ z_2,\ z_3)$ 如（3.13）所示。于是，旧生成元和新生成元分别作用为

$$g(z_1,z_2,z_3)=(-z_1,-z_2,z_3),\qquad h(z_1,z_2,z_3)=(-z_1,z_2,-z_3).$$

解析 g 后，EH 的两个图表为

$$(v,w)=(z_1^2,z_2/z_1),\qquad (v',w')=(z_2^2,z_1/z_2),\qquad w'=w^{-1},\quad v'=vw^2.$$

剩余对合的作用为

$$(v,w,z_3)\longmapsto(v,-w,-z_3),\qquad (v',w',z_3)\longmapsto(v',-w',-z_3). \tag{4.7}$$

其不动直线 $w=z_3=0$ 和 $w'=z_3=0$ 在不同的极点处与例外球面相交，并且在图表重叠区域内不相交。它们在商空间中的像具有横截奇点A_1。恢复公共切向坐标后得到两个不相交的光滑曲面中心。对它们进行解析后插入 m_{13} 和 m_{23} 于 m_{12}之后，得到（4.5）以及态射

$$\widetilde{\mathbb{C}^3/K}\longrightarrow(\mathrm{EH}\times\mathbb{C})/\langle h\rangle\longrightarrow\mathbb{C}^3/K. \tag{4.8}$$

这第一步也有一种内在描述。商空间为

$$\operatorname{Spec}\mathbb{C}[X,Y,Z,T]/(T^2-XYZ),\qquad X=z_1^2,\quad Y=z_2^2,\quad Z=z_3^2,\quad T=z_1z_2z_3.$$

旧轴的理想为 $(X,\ Y,\ T)$。在正锥上，其牛顿函数为

$$\min(2n_1,2n_2,n_1+n_2+n_3)=\min(2n_1,2n_2).$$

它在 $n_1=n_2$ 处改变线性表达式，因此该理想的归一化爆破就是沿 m_{12} 的细分。因此，它与 $(\mathrm{EH}\times\mathbb{C})/\langle h\rangle$ 是同一个部分解消。在相关的曲面构造中，[4, Section 3], $M_{1,\ 2}$ 替换一个循环商奇点，而$M_{1,\ 1}$ 解消剩下的唯一 A_1 点。

在点模型中，$g=(-1,\ -1,\ 1,\ 1)$ 和 $gh=(1,\ 1,\ -1,\ -1)$。对 g 进行解消并取 gh 的剩余作用之商空间，得到 $\mathrm{EH}\times A_1$。剩余的中心是 $\mathrm{EH}\times\{0\}$，其极小解消给出 EH ×EH。

旧分支理想的归一化爆破与保持这些理想的同构相容。剩余的极小 A_1 解消也具有相同性质。这些构造也与复共轭相容。这就证明了所述解消及其收缩的相容性。□

4.4. **整体复解消**。我们通过

$$f:V\longrightarrow T^8/H \tag{4.9}$$

先解消旧复分支，再解消新分支来构造。旧分支彼此不相交，因为完全稳定子至多包含一个非恒等旧元素。因此可以同时进行它们的归一化爆破。在一般旧曲面处，这是极小的 A_1 解消；在交点处，则是引理4.2的第一步。根据该引理，剩余的中心光滑且彼此不相交，其法向奇点为 A_1。对它们进行极小解消即可完成构造。

局部模型表明，V 光滑且无挠。它也是射影的：基底T^8/H 是射影的，而且两个步骤都是射影爆破。支撑函数（4.6）在曲线模型上给出一个相对充分的异常除子；其旧系数和新系数分别与普通模型和乘积模型中相应的选取一致。

在复正规坐标下，第 3 节的仿射过渡映射是带酉相位的带符号复置换，或其复共轭，并保持旧分支不变。

对角相位作用于环面簇消解，而相关置换保持其扇不变。因此，引理 4.2 将局部态射粘合起来，并将由 F 在T^8/H 上诱导的对合提升为 $\bar{F}$在 V上的反全纯映射。提升后的映射满足原有的群关系：两个¯这样的映射若在例外轨迹之外相同，则由连续性可知它们处处相同。特别地， F是一个对合。

由等变性， f下降为部分解消 $V/\langle\bar{F}\rangle \to \mathcal{O}$，因为 $(T^8/H)/(\Gamma/H) = \mathcal{O}$。¯剩余奇异轨迹是 Fix($F$) 的像；接下来我们描述它的消解。

¯**4.5. 实消解与流形** M。 F 在 V 上的对合恰有一个不动分支

$$L \cong N_1 \times S^1, \qquad N_1 = T^3/\langle (a,b,c) \mapsto (-a,-b,c+\tfrac{1}{2})\rangle. \tag{4.10}$$

这里 a,b,c的周期均为一。甲板变换是自由的。取 Fix($F^3\kappa$) 中满足 $t=0$, $z_1 = a - ia$, $z_2 = b - ib$, $z_3 = ic$ 的分支 D。将群元素记作 $F^j\kappa^k\iota_1^l\iota_2^m\sigma^n$。为保持 D， x_3 方程要求 $n = l = 0$，而 t 方程要求 $(j,k) = (0,0)$ 或 $(3,1)$；m 任意。由此得到的四个元素都保持 D，因此其集合稳定子为 $\langle F^3\kappa, \iota_2\rangle$。其轨道包含 $64/4 = 16$ 个分支，这正是旧奇-F 分支的总数。这证明了剩余轨迹的连通性以及所述商空间描述。元素 ι_2 按所示方式作用为自由对合，并在 s上平凡作用。 L 的切丛和法丛具有有限平坦正交 holonomy。

复例外轨迹上不会出现额外的不动点。若存在这样的点，它在 T^8/H 中的像将具有奇数阶F 稳定子，此外还含有 H的一个非平凡元素，这与第 3.4节矛盾。因此，复爆破不会改变 L 的一个邻域，其平坦切丛和法丛也保持不变。

在 $V/\langle\bar{F}\rangle$ 中， L 的像仍记为 L，其横截模型为 $\mathbb{R}^4/\{\pm 1\}$。使用平行方向 $\ell = dy_3 = dc$ 在 N_1 上解消此模型。在诱导的积定向下， $ds\wedge\ell + *_3\ell$ 固定了 L 上的一个自对偶方向，而相应的法向超凯勒方向决定了 EH。元素 ι_2 保持该方向不变，且其酉提升保持例外球面的定向。因此，根局部系统是平凡的，故选择非扭曲 方案。

提升在乘积模型上等距作用，因此平行 Cayley 形式与其拉回之差的范数为常数。由于 ι_2 保持平坦极限 Φ不变，该范数沿 Eguchi–Hanson 端趋于零，因而恒为零。沿 L 进行替换的尺度可以独立选取，因为 L 与复分层不相交。对于被 τ 在第5节中交换的两个旧分支，我们采用相同的尺度。

¯令 M表示沿 L通过这种非扭曲的 Eguchi–Hanson 替换得到的紧致光滑流形，该流形由 $V/\langle F\rangle$ 得到。拼接使用固定的平坦管状坐标中的 ρ_{EH} 。消解映射 $\pi_M\colon M \to \mathcal{O}$ 是以下复合映射

$$M \longrightarrow V/\langle\bar{F}\rangle \longrightarrow \mathcal{O},$$

其中第二个映射由 f诱导。

4.6. 相容度量与 Joyce 定理。 现在还需为定义 M 的复局部消解配备相容度量。QALE 凯勒度量在远离其奇异方向处渐近于平坦商空间，并沿这些方向 [12, 定义 2.1]渐近于与低维消解模型的乘积。Joyce 证明了保正则形式消解是局部乘积消解，并且每个具有 QALE 代表的凯勒类都包含唯一的 Ricci 平坦 QALE 凯勒度量 [12, 命题 3.2 和定理 3.3]。现在，我们选取在分层的所有相交处限制相匹配的这类凯勒类。

对于曲线模型， [12] 的例 3.6 在 $\mathbb{C}^3/(\mathbb{Z}/2)^2$, 上给出了全部四个保正则形式消解的 QALE 凯勒度量，其中包括标记扇（4.5）。由 Γ诱导的过渡映射分别保持 U 和 J 这两个族，这由（B.3）可知。将其中一个这样的 Kähler形式在由线性过渡映射和标记扇的对称性 $e_1 \leftrightarrow e_2$ 生成的有限群上取平均。对于全纯映射使用 $\gamma^*\omega$ ，对于反全纯映射使用 $-\gamma^*\omega$ 。每一项都是

正的闭（1，1）-形式。它们的平坦极限一致，并且对它们的低维极限取平均会保持QALE条件。因此，平均后的形式仍然是 QALE 的，并具有所需的对称性。

在每个渐近 A_1 因子中，平均形式在例外球面上的周期就是其面积。将 $\lambda_{\mathrm{old}} > 0$ 记为旧周期，将 $\lambda_{\mathrm{new}} > 0$ 记为由此扇对称性交换的两个新球面的公共周期。在每个曲线模型上都使用这一相同的标记类。在点模型上，使用周期为 λ_{old}和 λ_{new}的 Eguchi–Hanson类之积；在普通复 A_1 分支上，使用具有相应周期的类。这是在各分层上统一选定的一组周期。一个公共的膨胀为粘合定理提供小尺度。

Joyce 定理在每个选定的类中给出唯一的 Ricci平坦QALE度量 g，其 Kähler形式为 ω。在曲线模型上，这就是平均形式所属的类。全纯过渡映射将 g 拉回为同一类中的 Ricci平坦QALE度量，因此根据唯一性，它保持 g 不变。对于反全纯过渡映射 γ， γ^*g 的 Kähler形式为 $-\gamma^*\omega$，同样属于所选定的类。于是由唯一性可得

$$\gamma^* g = g, \qquad \gamma^*\omega = -\omega.$$

在固定的局部乘积识别下，极限 Kähler 类是所选类的限制。这可由对例外球面的周期取极限得到。由于 $H^2(\mathrm{EH};\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$，这些周期决定了这些类。法向复结构固定，因此唯一性表明，Ricci 平坦极限与所选的 Eguchi–Hanson 度量相同[12, 命题 7.1 和定理 3 的证明。3]。

在每个维数为 π 的复法向解消 m上，零典范性给出一个处处不为零的¯全纯延拓 Ω，它延拓了 $\pi^*\Omega_{\mathrm{flat}}$。Joyce 的方程 $\omega^m = C_m\Omega \wedge \Omega$ 具有与平坦模型中相同的常数C_m 第129–130]页。因此 Ω 具有常范数且平行。它与切向因子上的平坦全纯体积形式的乘积按引理4.1中的方式变换。因此，过渡映射保持相应的凯莱形式。

在每个全纯比较坐标图 ψ中，令 ω, Φ 和 ω_0, Φ_0 分别表示消解和乘积模型上的 Kähler 形式与 Cayley 形式，两者均包含平坦切因子。全纯体积形式在 ψ下相同，因为它们延拓自同一个平坦形式。因此，(4.3) 给出

$$\psi^*\Phi - \Phi_0 = \omega_0 \wedge D + \tfrac{1}{2} D \wedge D, \qquad D = \psi^*\omega - \omega_0.$$

乘积联络保持复结构和 ω_0，因此度量估计 [12,方程 (9)] 以相同的权重控制 D 的每个导数。莱布尼茨法则和零阶权重的有界性给出了 Cayley 形式所需的估计 [11,定义 13.1.8，方程 (13.3)，第 344] 页。

曲线消解与其平坦复切线一起使用，而点消解为 EH ×EH。它们的收缩映射是引理4.2中的局部态射。对于 $\mathcal{L}$ 的奇异部分中第 3.4节所述的每个真包含，匹配周期和上述唯一性给出了所需的 A_1 乘积极限。成员 $T^8 \in \mathcal{L}$ 带有平凡法丛消解和原有的平坦 Spin(7) 结构；与该成员的相容性就是 QALE 渐近行为中的平坦极限条件。

命题 4.3（指定 R-数据的存在性）。 上述复模型和非扭曲实模型为原平坦商空间 $\mathcal{O}$定义了 *R*-数据。流形 M 在第*4.5* 节 中构造，具有无挠 Spin(7) 结构。

证明。 第 4.3–4.4 节 给出了复局部消解，而先前选择的度量则给出了相容的里奇平坦度量和等变凯莱形式。不相交实分支具有第 4.5 节中的无扭 R-数据。我们在 Joyce 构造中使用了上述构造的局部乘积识别和提升的仿射过渡映射 [11, 定义 13.2.5，第 348]。所得的消解是第 M 节 4.5中的流形：局部识别与到 $\mathcal{O}$ 的投影相交换，因此在重叠区域上，它们在稠密正则部分上一致，从而

处处由连续性成立。Joyce 定理 13.6。2 [11, 第 362] 因此适用于原平坦商空间 $\mathcal{O} = T^8/\Gamma$。 □

5. 解消映射的分解

我们构造 $\tilde{\tau}$ 在 Y 上的提升，并计算其对命题 2.2中所用例外类的作用。然后证明 π_M 可通过 $Y \times S^1$ 的商空间按 $(\tilde{\tau}, -1)$进行分解。

5.1. 七维解消。 令 $\rho\colon Y \to X = T^7/G$ 为定理 3 和注记 4]中解消的平坦 Kummer 实现。我们在平坦管状坐标中使用标准的吹下映射。对于 X的十个旧奇异分支 N_j 中的每一个，表中给出了 T^7中的一个代表环面。它与 s-圆的乘积是 T^8 中所示对合的不动集的一个分支，见（3.9）。参数 a, b, c的周期均为一，而 $r = 0, 1, 2, 3$依次对应于 $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0,0), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$：

中心	固定对合	t	$(z_1,\ z_2,\ z_3)$	φ的拉回
N_1	$R_{1,0} = F^3\kappa$	0	$(a - ia,\ \ b - ib,\ \ ic)$	$2\,da\,db\,dc$
N_2	$R_{1,1} = F^3\kappa\iota_1$	0	$(a + ia,\ \ b + ib,\ \ -\frac{1}{4} + ic)$	$-2\,da\,db\,dc$
N_{3+r}	$O_{0,0} = \kappa$	$\frac{1}{2}$	$(a + i\epsilon_1,\ \ b + i\epsilon_2,\ \ c)$	$da\,db\,dc$
N_{7+r}	$O_{0,1} = \kappa\iota_2$	$\frac{1}{2}$	$(\epsilon_1 + ia,\ \ \epsilon_2 + ib,\ \ c - \frac{i}{4})$	$-da\,db\,dc$

表中的每个环面都是其像 N_j 的双重覆盖。其甲板变换为 $\iota(a,\ b,\ c) = (-a,\ -b,\ c + \frac{1}{2})$，由 ι_2 在 $j = 1, 2$ 时以及由 ι_1 在 $3 \le j \le 10$ 时诱导。将每个 N_j 按 φ 定向后，最后一列给出

$$\int_{N_1} \varphi = \int_{N_2} \varphi = 1, \qquad \int_{N_j} \varphi = \tfrac{1}{2} \quad (3 \le j \le 10). \tag{5.1}$$

拉回将 $H^*(N_j; \mathbb{R})$ 与覆盖环面的不变上同调等同起来。由于 da和 db 变号，而 dc 保持不变，一组基为 1、$[dc]$、$[da \wedge db]$和 $[da \wedge db \wedge dc]$。因此$b(N_j) = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$。形式 dc 下降到 ℓ_j，它张成了 N_j 上平行一形式的空间。用表中的坐标表示，

$$\ell_j = dy_3 \quad (j = 1, 2), \qquad \ell_j = dx_3 \quad (3 \le j \le 10). \tag{5.2}$$

令 $v_j = \ell_j^\sharp$ 为 ℓ_j 的度量对偶。对于如 [13, 第 2 节2] 中所述、满足 u, w 且垂直于 N_j 的向量，法向复结构 I_j 由 $g(I_j u, w) = (\iota_{v_j}\varphi)(u, w) = \varphi(v_j, u, w)$ 确定。

在 N_j 附近的替换为 $(N_j \times \mathrm{EH})/\langle \iota_* \rangle$，其中 N_j 是环面覆盖。环境对合的微分在由 ∂_t 张成的 I_j-复直线上作用为 $+1$，并在 z_1, z_2 方向的法向二维平面上作用为 -1。在适配于这些直线的平行酉标架中，法向作用及其提升在例外球面上的限制为

$$\iota_*(p, w_1, w_2) = (\iota p, w_1, -w_2), \qquad \iota_*(p, [W_1 : W_2]) = (\iota p, [W_1 : -W_2]).$$

例外集 $E_j = \rho^{-1}(N_j) \subset Y$ 是 N_j 上的一个平凡定向球面丛。为明确验证这一点，令 c 为经 $1/2$ 平移的圆坐标。映射

$$[(p, [W_1 : W_2])] \longmapsto ([p], [W_1 : e^{2\pi i c(p)} W_2]) \tag{5.3}$$

定义良好，因为两个负号在 ι 下相互抵消。其逆映射使用相反的指数映射。根据给定的 N_j 定向和纤维的复定向，为 E_j 定向。用 $\xi_j = \mathrm{PD}_Y[E_j] \in H^2(Y)$ 表示其庞加莱对偶。

平坦库默尔构造与 [13, 第 2.2 节第 1115–1116]页的消解，在每个 N_j上使用相同的部分。它们的粘接映射相差一个正的纤维缩放和一个等变流，因此彼此同痕。将该同痕延拓到领圈上，可得到一个保定向微分同胚，它保持每个 E_j 及其共定向。因此，ξ_j对应于已发表的类 x_j。

5.2. **提升 τ 并确定根号符号**。仿射对合 τ 在 (3.5) 中定义，它根据 (3.6) 归一化了 G $X = T^7/G$。为计算其在指定代表元上的作用，将其与 $\kappa\iota_1 \in G$复合。直接代入可得

源与目标	参数映射	根的 ℓ_j符号	根的符号
$N_1 \to N_2$	$(a,\ b,\ c) \mapsto (-a,\ -b,\ c)$	$+$	$-$
$N_2 \to N_1$	$(a, b, c) \mapsto (-a, -b, c)$	$+$	$-$
$N_{3+r} \to N_{3+r}$	$(a,\ b,\ c) \mapsto (-a,\ -b, -\frac{3}{4} - c)$	$-$	$+$
$N_{7+r} \to N_{7+r}$	$(a,\ b,\ c) \mapsto (a,\ b, -\frac{3}{4} - c)$	$-$	$+$

等式均按环面周期取模；在最后一行，$-\epsilon_i = \epsilon_i$ 按模一取值。该表描述了商空间中心所诱导的映射。

由于 $\tau^*\varphi = -\varphi$，法向Kähler形式的变换符号与 ℓ_j 的变换符号相反。因此，在第一对上，法向映射是反酉的，并反转例外 $\mathbb{CP}^1$的复定向；在其余中心上，它是酉的，并保留该定向。最小消解对酉变换以及与共轭复合的酉变换具有函子性。其标准提升在例外球面之外与径向识别相交换，并且在尺寸相等时保留 Eguchi–Hanson度量。在互换的一对上选取相等的尺寸。这些提升与管状邻域之外的原仿射映射共同给出一个光滑映射 $\widetilde{\tau}\colon Y \to Y$。

引理5.1。 映射 $\widetilde{\tau}$ 是一个反向定向对合，并且

$$\widetilde{\tau}^*\xi_1 = -\xi_2, \quad \widetilde{\tau}^*\xi_2 = -\xi_1, \quad \widetilde{\tau}^*\xi_j = \xi_j \quad (3 \le j \le 10). \tag{5.4}$$

证明。 根号符号如前表所示。在例外集的补集上，提升映射的平方为恒等映射，因为它覆盖 $\tau^2 = 1$。由连续性可知，其平方处处为恒等映射；同样的论证也验证了它与用于定义各局部丛的正规化子作用等变。在稠密的旧光滑轨迹上，定向反转成立，因此在 Y上也成立。□

下文只需要光滑对合及其在上同调上的作用；不要求扰动后的 G_2 度量保持不变。

对于 $j \ge 3$，固定对合属于 H，因此相应的分支在 V中得到消解。这里 $\ell_j = dx_3$，收缩（3.2）得到

$$\iota_{\partial_{x_3}}\varphi = -dt\,dy_3 + dx_1dx_2 - dy_1dy_2. \tag{5.5}$$

在每个选定代表元的法四维平面上，$ds\,dx_3$ 消失，因此所示形式是 ω'的限制。于是 I_j 在此处与来自 V的法复结构一致。在一个 F-平移下，这两个结构互为相反，因为 F通过引理 I_j传递 $F^*\omega' = -\omega'$和4.1。相反的复结构具有相同的复直线 Λ，它们位于实法空间 W 中。因此，满足 $([w], \Lambda)$ 且 $w \in \Lambda$ 的配对上的恒等映射，将它们的实 A_1消解在 $W/\{\pm 1\}$之上对应起来。它与过渡映射相交换，并反转例外球面的复定向。

环面 T^8 和 $T^8/\mathbb{Z}_2$ 在 $V/\langle F\rangle$ 这成为实奇异分支 L（4.10），使用 $\ell = dy_3$进行消解。

5.3. **中间商空间**。 定义紧商空间

$$Z = (Y \times S^1)/\langle\widetilde{\sigma}\rangle, \qquad \widetilde{\sigma}(y, s) = (\widetilde{\tau}y, -s). \tag{5.6}$$

乘积映射 $\rho \times \mathrm{id}\colon\ Y \times S^1 \to X \times S^1$ 消解了所有旧分支。由于 $\rho \circ \widetilde{\tau} = \tau \circ \rho$，它下降为部分消解 $\bar{\rho}\colon\ Z \to \mathcal{O}$，由 $\bar{\rho}([y, s]) = [\rho(y)\ \ s]$ 给出。

命题5.2（度一映射）。 对于命题 *4.3*中的 R-数据，消解映射 π_M 第*4.5* 节的分解为

$$M \xrightarrow{r} Z \xrightarrow{\bar{\rho}} \mathcal{O}, \tag{5.7}$$

其中， r 是一个映射度为一的连续消解映射。 Z 的奇异轨迹是由光滑四维中心组成的不交并，其横截模型为 $A_1 = \mathbb{C}^2/\{\pm 1\}$。

证明。 对于这两种消解，我们使用从 T^8 继承的平坦管状坐标图，并在它们的公共领圈上采用相同的径向识别。(5.5) 之后的识别与已解消的旧分支上的剩余对合可交换。因此，在每个交点处， Z 的局部模型就是引理 4.2的第一步。在曲线模型中，我们收缩两个不相交中心上方的新例外球面。在点模型中，该映射为$\mathrm{id} \times \rho_{\mathrm{EH}}\colon \mathrm{EH} \times \mathrm{EH} \to \mathrm{EH} \times A_1$，其中旧因子在前。在交点之外，我们在每个普通新分支上使用 ρ_{EH} ，并在每个普通旧复分支上采用相同的实识别。

在不相交的旧奇-F 对上， τ 交换 N_1 和 N_2 中的 X，因此 $\tilde{\tau}$ 交换它们在 Y中的已解消邻域。商空间将这两个乘积邻域识别起来，并且在此处是光滑的。固定第 $\ell = dy_3$ 4.5节中给定的法向方向和球面大小后，这就是沿着 L进行的相同非扭转替换。

新中心及其收缩对于标记模型而言是内在的，因此局部映射与第 4.4 节的过渡映射相交换。在每个重叠区域上，它们在 $\mathcal{O}$ 的正则轨迹的稠密原像上相一致，因而由连续性可知处处相一致。它们拼接成一个连续映射 r ，且 $\bar{\rho} \circ r = \pi_M$。局部模型给出了所述中心和横截奇点。在 $\mathcal{O}$ 的正则轨迹上，映射 r 是一个保定向微分同胚。由于 Z具有有理基本类，$r_*[M] = [Z]$。 □

6. 单连通性、非形式性与整体单值化

6.1. **单连通性**。

命题 6.1。 流形 M 是单连通的。

证明。 根据 [13, 定理 3，第 1113–1114] 页，流形 Y是单连通的。对合$\tilde{\tau}$ 在旧光滑轨迹中有一个不动点：取 $t = 1/2$、 $z_3 = 1/8$ 和一般的 z_1， z_2。在单连通空间 $Y \times \mathbb{R}$上，令

$$T(y, s) = (y, s + 1), \qquad R(y, s) = (\tilde{\tau} y, -s).$$

这些变换生成无限二面体群，其中有 $R^2 = 1$和 $RTR = T^{-1}$，轨道空间为 Z。 R 和 TR 均有不动点，分别位于所选 Y点上方的 $s = 0$ 和 $s = 1/2$ 处。Armstrong 轨道空间定理 [3] 将 $\pi_1(Z)$ 识别为该群模去由具有不动点的元素生成的正规子群。由于 R 和 TR 生成该群， $\pi_1(Z) = 1$。

根据命题 5.2， $M \to Z$ 将互不相交的正规 A_1 锥替换为 Eguchi–Hanson 空间。公共边界的纤维为 $\mathbb{RP}^3$。两个填充的纤维均为单连通，因此它们邻域的基本群均为同一个基底中心的基本群，而边界映射诱导到该群的同态相同。因此，根据范坎彭定理可得 $\pi_1(M) = \pi_1(Z) = 1$，即使存在平坦丛单值化时也是如此。 □

6.2. **非形式性**。 对于例外类 $\xi_j = \mathrm{PD}_Y[E_j]$，令

$$a = \xi_1 + \xi_2, \qquad b = \xi_7 + \xi_3, \qquad c = \xi_7 - \xi_3, \qquad w = \xi_1 - \xi_2. \tag{6.1}$$

上同调关系和 Martín-Merchán 构造的原函数给出

$$ab = bc = aw = cw = 0, \qquad \langle mw, [Y] \rangle = 16 \quad (m \in \langle a, b, c \rangle) \tag{6.2}$$

在我们的符号约定下；参见 [13, 引理16和定理 17]。附录A 记录了归一化并检验了这一周期。根据引理 5.1，

$$\tilde{\tau}^*(a, b, c, w) = (-a, b, c, w).$$

结合命题 5.2中的度一映射，这些恒等式满足命题 2.2的假设条件。下降类 $a\,ds$， b， c， w拉回到 M 后，因此得到（1.1），其配对为 $16/2 = 8$ ，对每个代表元均成立。因此， M 在 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$上都不是形式的。

6.3. **完整全纯群**。

命题 6.2。 M 上的无挠度量具有整体单值化 $\mathrm{Spin}(7)$。

证明。 该度量的整体单值化包含于 $\mathrm{Spin}(7)$ ，根据命题 4.3；并且 M 根据命题 6.1是单连通的。Joyce 的分类 [11, 定理 10.6.1，第 259] 页）留下了四种可能性：

$$\mathrm{Spin}(7), \qquad \mathrm{SU}(4), \qquad \mathrm{Sp}(2), \qquad \mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2).$$

在最后三种情形中的每一种情形下，平行复结构都会使 M 成为 Kähler 流形，因此根据 [8] 在 $\mathbb{R}$ 上是形式的。这与上述 Massey 积矛盾。因此整体单值化为 Spin(7)。□

这就完成了定理 1.1的证明。

附录 A. 七维 Massey 周期

我们采用 [13] 已发表的计算，并按照本文的约定记录其归一化。令 η_j 表示 2-形式，即 $E_j\subset Y$ 在 [13, 式（18）]中构造的托姆形式。这些形式的支撑两两不交，并满足 $[\eta_j]=\xi_j$。在每个例外纤维$S\cong\mathbb{CP}^1$上， E_j 的法丛在 $\mathcal{O}_S(-2)$上的限制为。因此，$\xi_j|_{\mathrm{EH}}=-2u$ 对于第4.2节的生成元，有

$$\int_{\mathbb{CP}^1}\eta_j=-2, \qquad \int_{\mathrm{EH}}\eta_j^2=-2. \tag{A.1}$$

引理9–10、式（20）–（21）中的上同调关系为 [13,]

$$\xi_i\xi_j=0\ (i\neq j), \qquad \xi_1^2=\xi_2^2, \qquad \xi_3^2=\xi_4^2=\cdots=\xi_{10}^2. \tag{A.2}$$

由此可得 $ab=bc=aw=cw=0$ （6.1）。对于不交支撑代表元， $ab=0$作为一个形式，而 $bc=\eta_7^2-\eta_3^2$。

根据 [13, 引理16，第 1125],页，存在一个光滑三形式 v ，使得

$$\begin{aligned} dv&=\eta_7^2-\eta_3^2,\\ v\eta_1&=-4\pi_1^*(\varphi|_{N_1})\eta_1, \qquad v\eta_2=4\pi_2^*(\varphi|_{N_2})\eta_2, \end{aligned} \tag{A.3}$$

其中 π_j 是解消邻域到 N_j的投影。取 ab的原函数为零，按照我们的约定（2.1），可得 $m=av$。若 $e_j=[\pi_j^*\ (\varphi|_{N_j})\ \eta_j]$，则 $[m]=-4e_1+4e_2$。由支撑不交及纤维积分可得

$$\langle e_j\xi_k,[Y]\rangle=0\quad(j\neq k), \qquad \langle e_j\xi_j,[Y]\rangle=-2\int_{N_j}\varphi.$$

利用（5.1），我们得到

$$\langle mw,[Y]\rangle=(-4)(-2)-4(-2)=16. \tag{A.4}$$

由于 $aw=cw=0$，引理 2.1 给出了每个实代表元对应的这一值。按照 [13, 方程（23）和定理 17] 的约定，采用 $-m$并得到 -16。

类 ξ_j是整的，因此 $H^*(Y;\ \mathbb{Q})\to H^*(Y;\ \mathbb{R})$ 的单射性也给出 $ab=bc=aw=cw=0$ 在 $\mathbb{Q}$ 上同样成立。因此，有理定义系统存在，且每个系统都可扩展为一个实定义系统，其配对根据（16）A.4）为

附录 B. 贝蒂数和符号

我们通过计算分支轨道及其切表示来证明1.2推论。这个过程具有统一性：用二进制坐标标记不动分支，计算诱导平移，并求出一个分支的稳定子所对应的不变外单项式。最后一步利用完整全纯群来确定符号。

B.1. **初等阿贝尔子群与共轭。** 将 $H \cong (\mathbb{Z}/2)^5$ 中的一个元素写作

$$v = F^{2p}\kappa^b \iota_1^r \iota_2^\ell \sigma^e, \qquad p, b, r, \ell, e \in \mathbb{F}_2. \tag{B.1}$$

由（3.10）–（3.11），其作用为

$$\begin{aligned} z_j &\longmapsto (-1)^{p+r+\ell}\,\mathrm{conj}^b(z_j), \quad j = 1, 2, \\ t &\longmapsto (-1)^{b+e}(t - \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2} + 2p, \\ x_3 &\longmapsto (-1)^e x_3 + e/4 + r/2, \\ y_3 &\longmapsto (-1)^{b+e} y_3 + (-1)^b \ell/2, \\ s &\longmapsto (-1)^e s. \end{aligned} \tag{B.2}$$

具有 H 不动点的元素是（3.9）中的族 O、U、J。

引理 B.1。 由 F 共轭对这些族的作用为

$$O_{\alpha d} \longmapsto O_{\alpha+1,d}, \qquad U_{\alpha c d} \longmapsto U_{\alpha+1,c+1,d}, \qquad J_c \longmapsto J_{c+1}. \tag{B.3}$$

因此，每个复例外扇区都通过 F与另一个复例外扇区交换。没有奇数-F元素会保持极大克莱因稳定子，或保持属于族O、U、J的不动分支。

证明。 生成元恒等式为

$$F\kappa F^{-1} = F^2\kappa, \qquad F\sigma F^{-1} = F^2\iota_1\sigma, \qquad F\iota_j F^{-1} = \iota_j.$$

它们给出（B.3）。由于 H 是阿贝尔的，FH 中每个元素的共轭作用都与 F 在 H上的共轭作用相同。$O_{\alpha d}$、$U_{\alpha c d}$ 和 J_c 中的每个元素都会在共轭作用下发生改变。在一个曲面分支处，其一般稳定子由该元素生成，因此集合稳定子必须保持该元素不变。在一个极大克莱因稳定子中，唯一的旧元素是 $O_{\alpha d}$，它也会被（B.3）改变。相同的论证适用于孤立不动轨迹，因为它们的完全稳定子是极大克莱因群。□

B.2. **分支标签及其平移。**对于一个旧元素 $O_{\alpha d}$，不动分支由下式描述

$$t = \alpha + \tfrac{1}{2} + 2T, \qquad y_3 = -\tfrac{d}{4} + \tfrac{Y}{2}, \qquad T, Y \in \mathbb{F}_2. \tag{B.4}$$

如果 $\alpha + d = 0$，两个虚坐标 y_1、y_2属于{0、$1/2$}，而 x_1、x_2是自由的；如果$\alpha + d = 1$，两个实坐标属于{0、$1/2$}，而虚坐标是自由的。令记录这两个不动坐标。其余坐标 、s 是自由的。因此共有 $2^4 = 16$ 个分支。

对于 $U_{\alpha c d}$，固定的 B 坐标使用标签 T、X、Y、$S \in \mathbb{F}_2$：

$$t = \alpha + \tfrac{1}{2} + 2T, \quad x_3 = \tfrac{1}{8} + \tfrac{c}{4} + \tfrac{X}{2}, \quad y_3 = \tfrac{d}{4} + \tfrac{Y}{2}, \quad s = \tfrac{S}{2}. \tag{B.5}$$

当 $\alpha + c + d = 0$ 时，四个 A 坐标均为自由坐标，共有 16 个曲面分支。当 $\alpha + c + d = 1$ 时，四个 A 坐标位于 {0、$1/2$} 中，从而得到 $16 \cdot 16 = 256$ 个点。

对于 J_c，B 中的不动坐标为

$$x_3 = \tfrac{1}{8} + \tfrac{c}{4} + \tfrac{X}{2}, \qquad s = \tfrac{S}{2}, \tag{B.6}$$

而 t, y_3 是自由的。它的两个固定 A 坐标分别是 $c = 0$ 的虚坐标和 $c = 1$的实坐标。它们提供另外两位 $\epsilon \in \mathbb{F}_2^2$，因此共有 16 个曲面分支。

引理 B.2 (标签平移)。 对于元素 v 属于 (B.1)，所有固定的 A 标签和位S 均保持不变。其余标签按以下方式在 $\mathbb{F}_2$中平移：

族	平移向量	*Rank*
$O_{\alpha d}$	$(\Delta T,\ \Delta Y) = (p+\alpha(b+e)\ \ \ell+d(b+e))$	2
$U_{\alpha cd}$	$(\Delta T,\ \Delta X,\ \Delta Y) = (p+\alpha(b+e)\ \ r+ce,\ \ \ell+d(b+e))$	3
J_c	$\Delta X = r+ce$	1

平移与初始分支标签无关。

证明。 每个固定的 A 坐标都是 0 或 $1/2$，而 H 的作用按符号对角化，因此这些标签保持不变。此外 $-S/2 = S/2$ 模 1。对于 t 坐标，在 (B.4) 或 (B.5) 中代入 (B.2，再将差除以二，得到 $\Delta T = p+\alpha(b+e)$模 2。例如，将 $x_3 = 1/8 + c/4 + X/2$ 从族 U 代入 (B.2。将像写成相同形式，可得

$$X' \equiv \begin{cases} X+r, & e=0, \\ -X+r-c, & e=1 \end{cases} \pmod 2, \qquad X'-X = r+ce \quad \text{in } \mathbb{F}_2.$$

这也证明了 J_c 的公式。代入 y_3，在常数 $\pm d/4$ 的两种取值下，均得到 $\Delta Y = \ell + d($ $b+e)$。这些表达式不包含起始位。最后，分别改变 p、 r 和 ℓ，即可得到它们出现的各行中的独立坐标平移。这就证明了所述的秩。□

秩为 r 的平移作用有大小为 2^r 的轨道，且其核的阶为 2^{5-r}。因此，分支稳定子为

$$N_O = \{p = \alpha(b+e),\ \ell = d(b+e)\}, \tag{B.7}$$

$$N_U = \{p = \alpha(b+e),\ r = ce,\ \ell = d(b+e)\}, \tag{B.8}$$

$$N_J = \{r = ce\}. \tag{B.9}$$

这些方程给出了该族中每个分支的稳定子。

B.3. **归一化曲面闭包的上同调**。对于每个族，将稳定子方程代入（B.2），即可得到切表示。对于 $O_{\alpha d}$，令$\eta = \alpha + d$。在两个自由的A 坐标上，共同符号为$(-1)^{r+\eta e}$；而在 x_3、 s 上，它为$(-1)^e$。两个特征 $r+\eta e$ 和 e 在 N_O上相互独立。因此，不变外单项式在每一对方向中要么同时包含两者，要么两者皆不包含。其庞加莱多项式为$(1+q^2)^2$。

对于曲面 $U_{\alpha cd}$，方程 $\alpha+c+d=0$给出 $p+r+\ell = cb$在 N_U上。因而，其在 (z_1, z_2) 上的切向作用为 $(-1)^{cb}\,\mathrm{conj}^b$。该表示具有两个平凡实方向，以及两个具有相同非平凡符号特征的方向。其不变外多项式为

$$(1+q)^2(1+q^2) = 1+2q+2q^2+2q^3+q^4.$$

对于 J_c，两个自由 A 方向的符号为 $(-1)^{p+\ell+c(b+e)}$，而 t, y_3 对的符号为 $(-1)^{b+e}$。这些特征在 N_J 上彼此独立，再次得到 $(1+q^2)^2$。

这些分支稳定子中的平移在环面上同调上作用平凡。有限商的有理上同调就是不变上同调。因此，这些切空间计算给出了每个正规化曲面闭包的上同调，包括那些稳定子作用具有不动点的情形。由此得到的轨道数和不变多项式为

族	元素	分支	轨道	每元素轨道数	多项式
$O_{\alpha d}$	4	16	4	4	$(1+q^2)^2$
$U_{\alpha cd}$，偶数	4	16	8	2	$(1+q)^2(1+q^2)$
J_c	2	16	2	8	$(1+q^2)^2$
$U_{\alpha cd}$，奇数	4	256	8	32	1（点）

这里的“偶”和“奇”指的是 $\alpha+c+d$。第一种多项式类型有 $16+16=32$ 个曲面扇区，第二种有 8 个，另有 128 个点扇区。在每个点处，恰有一个非恒等元具有孤立不动点集，即奇数 U，因此最后一行对点分层只计数一次，而非三次。

B.4. 低维分层与实分支。对于 $K(2\alpha,c,d)=O_{\alpha d},U_{\alpha cd}$，B 级别由 (B.5) 给出。 H 中任何保持某个分支不变的元素都必须满足 (B.8)。该核恰好是 $K(2\alpha,c,d)$：其自由参数 b,e 生成 $O_{\alpha d}$ 和 $U_{\alpha cd}$。其中每个元素都逐点固定公共不动分支。因此，它在 H 中的分支正规化子的阶为四。由引理 B.1 可知，在 Γ 中不存在更大的正规化子。每个 Γ 轨道的大小均为 16。四个偶数三元组给出 $4\cdot 64/16=16$ 个曲线分层，四个奇数三元组给出 $4\cdot 256/16=64$ 个点分层。

旧奇数-F 分支根据第 4.5 节中的正规化子计算构成一个轨道。40 个 H 下的复曲面轨道成对对应，因此有 F 个 $40/2+1=21$ 开四维分层。去除低维交点后，这些分层仍然连通，因为被去除的子集的实余维数至少为二。

B.5. **复解消的加性上同调**。 T^8 上的不变实外代数单项式，要么在四个复坐标平面中的每一个都含有偶数个方向，要么在每个平面中都含有奇数个方向。这些是与所有偶数个符号变换都配对为零的仅有的奇偶向量。因此

$$P_{T^8/H}(q)=(1+q^2)^4+16q^4=1+4q^2+22q^4+4q^6+q^8. \tag{B.10}$$

映射 $f\colon V\to T^8/H$ 是半小的：复余维数为 2、3、4 的纤维维数分别为 1、1、2。因此，相关分层是曲面和点；曲线不产生独立的直和项。归一化曲面闭包是复二维环面的有限全纯商空间，且为有理同调流形。因此，其交叉上同调就是普通有理上同调。顶层纤维局部系统是平凡的：全纯过渡映射保持 $\mathbb{CP}^1$ 的基本类，而点纤维 $\mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1$ 有一个顶维分支。若曲面闭包在局部将分支识别起来，则有限正规化映射给出交叉复形延拓。

射影半小分解定理 [7, 定理 3.4。1] 以及前面的四行计数给出

$$\begin{aligned} P_V(q)&=P_{T^8/H}(q)+32q^2(1+q^2)^2\\ &\quad+8q^2(1+q)^2(1+q^2)+128q^4,\\ b(V)&=(1,0,44,16,230,16,44,0,1),\quad \chi(V)=288. \end{aligned} \tag{B.11}$$

B.6. **实替代**。 对于 $L=N_1\times S^1$，环面覆盖上的有效甲板变换作用具有切表示 $\mathrm{diag}(-1,\ -1,\ 1,\ 1)$。其不变外代数给出

$$P_L(q)=(1+q)^2(1+q^2)=1+2q+2q^2+2q^3+q^4. \tag{B.12}$$

最后一个替换的根局部系统是平凡的。其全局例外类在每个例外球面上的限制为 -2，因此 Leray–Hirsch 定理和沿着 $\mathbb{RP}^3$ 边界的 Mayer–Vietoris 定理给出

$$H^k(M;\mathbb{Q})\cong H^k(V/\bar{F};\mathbb{Q})\oplus H^{k-2}(L;\mathbb{Q}). \tag{B.13}$$

B.7. **剩余作用与最终数值**。 根据引理 B.1，每个例外扇区都成对出现，因此其对剩余迹的贡献为零。事实上，在半小分解中，各个直和项按其支撑作规范分组。剩余对合将一个支撑对应的分组映射到其像所对应的分组，同时作用于纤维的顶维同调。在一对互换的支撑上，其作用为非对角，迹为零。在四个非扭曲的二次面积形式上， F 将前两个互换为

负号，并将后两个分别取负。因此其迹为 -2。它在 $H^3(V)$ 上的迹为零。由于 $\chi(\mathrm{Fix}(F)) = \chi(L) = 0$，Lefschetz 公式给出

$$0 = 2 + 2(-2) - 2(0) + \operatorname{tr}(\bar{F}|H^4(V)), \qquad \operatorname{tr}(\bar{F}|H^4(V)) = 2.$$

庞加莱对偶性给出了其余的迹。取不变量后，再应用（B.13）可得

$$b(V/\bar{F}) = (1, 0, 21, 8, 116, 8, 21, 0, 1),$$
$$b(M) = (1, 0, 22, 10, 118, 10, 22, 0, 1). \tag{B.14}$$

交错和给出 $\chi(M) = 144$。完整的 Spin(7) 整体单值化意味着 $A(M) = 1$ [11,定理 10.6。1]在具有 Spin(7) 结构的八维流形上，

$$48\widehat{A} = 3\,\mathrm{sign} - \chi. \tag{B.15}$$

事实上，将 $p_1^2 - 4p_2 + 8e = 0$ 代入关于 $\widehat{A}$和 L亏格的八次公式即可得到这一结论。因此

$$\mathrm{sign}(M) = \frac{144 + 48}{3} = 64, \qquad b_4^+ = \frac{118 + 64}{2} = 91, \qquad b_4^- = 27.$$

这证明了推论 1.2。

致谢

我谨向 AlexanderZuevsky 致以谢意，他的来信促使我重新思考具有特殊全纯群的流形的形式性问题。

参考文献

[1] M. Amann and V. Kapovitch, 关于具有形式椭圆纤维的纤维化, 《数学进展》231 (2012), no. 3–4, 2048–2068. doi:10.1016/j.aim.2012.07.022. [2] M. Amann and I. A. Taimanov, 关于近凯勒流形及 Joyce 的例子的形式性, 《莫斯科数学杂志》24 (2024), no. 4, 495–512. doi:10.17323/1609-4514-2024-24- 4-495-512.[3] M. A. Armstrong, 不连续群的轨道空间的基本群, 《剑桥哲学学会会刊》64 (1968), 299–301. doi:10.1017/S0305004100042845. [4] Ya. V. Bazaikin, 复线丛上的特殊凯勒度量及 $K3$-曲面的几何, 《西伯利亚数学杂志》46 (2005), no. 6, 995–1004. doi:10.1007/s11202-005-0095-x. [5] G. E. Bredon, 《紧变换群导论》, 纯粹与应用数学, Vol. 46, 学术出版社, 纽约–伦敦, 1972. Chapter III: doi:10.1016/S0079-8169(08)60134-8. [6] G. R. Cavalcanti, k-连通空间在 $4k+3$ 维和 $4k+4$ 维中的形式性, Mathematical Proceed- ings of the Cambridge Philosophical Society 141 (2006), no. 1, 101–112. doi:10.1017/S0305004106009340. [7] M. A. A. de Cataldo and L. Migliorini, 硬 Lefschetz 定理与半小映射的拓扑, 《高等师范学校科学年刊》(4) 35 (2002), no. 5, 759–772. doi:10.1016/S0012- 9593(02)01108-4. [8] P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan and D. Sullivan, 凯勒流形的实同伦论, 《数学创新》29 (1975), 245–274. doi:10.1007/BF01389853. [9] D. Fiorenza, K. Kawai, H. V. Lê and L. Schwachhöfer, 低维流形的几乎形式性, 《比萨高等师范学校年刊》, Classe di Scienze (5) 22 (2021), no. 1, 79–107. doi:10.2422/2036-2145.201905_002. [10] S. Illman, 有限群作用下 G-流形的光滑等变三角剖分, 《数学年刊》233 (1978), no. 3, 199–220. doi:10.1007/BF01405351. [11] D. D. Joyce, 《具有特殊全纯群的紧流形》, 牛津数学专著, 牛津大学出版社, 2000. doi:10.1093/oso/9780198506010.001.0001. [12] D. D. Joyce, 具有 SU(m) 和 Sp(m) 整体单值化的准 ALE 度量, 《全球分析与几何年刊》19 (2001), no. 2, 103–132. doi:10.1023/A:1010778214851. [13] L. Martín-Merchán, 紧致整体单值化 G_2 流形未必具有形式性, 《几何与拓扑》30 (2026), no. 3, 1109–1127. doi:10.2140/gt.2026.30.1109. [14] D. Sullivan, 《拓扑学中的无穷小计算》, 《IHÉS 数学出版物》47 (1977), 269–331. doi:10.1007/BF02684341.

捷克共和国拉贝河畔乌斯季扬·埃万杰利斯塔·普尔基涅大学理学院数学系