arXiv:2611.29761v1 [math.OA] 22 Nov 2026

C^*代数的 Kaplansky–Aupetit 猜想

ILJA GOGIĆ 和 BOJAN KUZMA

摘要。我们解决了至少一个代数为 C^*代数时的 Kaplansky–Aupetit 猜想。更确切地说，若 A 是含单位元的 Banach代数，且 B 是含单位元的 C^*代数；或者若 A 是含单位元的 C^*代数，且 B 是含单位元的半单 Banach代数，那么每个含单位元且保持可逆性的线性满射 $\phi\colon A \to B$ 都是 Jordan 同态。事实上，只需假设 ϕ 保持两个指数元乘积的可逆性；若两个代数都是C^*代数，则只需假设其保持单个指数元的可逆性。

Claude Opus 5.5 通过改造 Colbrook 和 Stepaniants 最近一篇预印本中的预解式估计，找到了当 A 和 B 都是 C^*代数时的原始证明；OpenAI 的 GPT-6.1 则进一步将其推广到只有一个代数是 C^*代数的情形。

1. 引言

著名的 Gleason–Kahane–Żelazko 定理 [16, 20, 30]指出，若复含单位元 Banach代数上的线性泛函将单位元映为 1 且在可逆元上不为零，那么它就是乘法性的。这促使 Kaplansky [22, 第 9] 节于 1970 年提出疑问：类似的原理是否也适用于更一般代数之间保持可逆性的线性映射。

为更精确地表述这个问题，设 A 是一个非零含单位Banach代数，其单位元为 1_A，可逆元群为 $A^\times$。对于 $x \in A$，记

$$\sigma_A(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1_A - x \notin A^\times\} \qquad \text{and} \qquad r_A(x) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(x)\}$$

为其谱和谱半径。若 B 是另一个含单位Banach代数，则线性映射$\phi\colon A \to B$ 若满足 $\phi(1_A) = 1_B$，便称为含单位元的；若满足 $\phi(A^\times) \subseteq B^\times$，则称其保持可逆性。对于含单位元的映射，这等价于用谱表示为 $\sigma_B(\phi(x)) \subseteq \sigma_A(x)$，对所有 $x \in A$均成立。*Kaplansky–Aupetit* 猜想的强形式所问的是：任意一个在含单位半单 Banach 代数（即 Jacobson根为零的代数）之间的含单位、保持可逆性的线性满射 $\phi\colon A \to B$，是否都是约当 同态，也就是说，是否保持平方（对所有 $x \in A$，均有 $\phi(x^2) = \phi(x)^2$ ）；例如参见 [10，猜想 1.1]。值得注意的是，这里某种形式的半单性必不可少，因为分块上三角子代数 $M_4(\mathbb{C})$存在如下一个保持单位元及谱、但不是约当同态的双射：

$$\phi\colon \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c^t \end{pmatrix}, \qquad a, b, c \in M_2(\mathbb{C})$$

清楚地表明了这一点（另见 [3, 第 28]页）。然而，逆命题是显然的，即使不要求半单性也成立：每个含单位元的 Jordan 满射都保持 Jordan 三重积

xyx因此保持可逆性，因为 x 可逆当且仅当 xyx 取得 1（另见 [29,命题 1.3]）。

经过无伤大雅的归一化 $x \mapsto \phi(1)^{-1}\phi(x)$，我们可以将任意保持可逆性的满射$\phi\colon A \to B$ 转化为含单位元的保持可逆性满射。若 B 是半单的，那么根据 [5, 定理 5.5.2]，每个这样的线性满射都会自动有界。对于 von Neumann 代数之间的映射，Aupetit [6, 定理 1.3，另见注 2.7] 证明了含单位元的保持可逆性

日期：2026年11月24日。2020 数学主题分类。主要分类 47B48；次要分类 46L05、46L10、47A10、17C65。关键词和短语。Kaplansky–Aupetit 猜想、可逆性保持映射、Jordan同态、谱包、 C^*-代数。

双射是约当映射；他还证明，即使不假设单射性，只要可逆性在两个方向上都得到保持（即 $x \in A^\times \iff \phi(x) \in B^\times$ 对所有 $x \in A$均成立），也能得到相同的结果。Cui 和 Hou 将这一结果推广了：他们在 [14, 定理 2。3], 中证明，从 von Neumann 代数到含单位元的半单 Banach 代数的含单位元线性保持可逆性满射也满足相同结论。所有这些证明的一个关键步骤是保持幂等元；这一策略最早由 Brešar 和 Šemrl 发现 [9] ，随后被用于相关的线性保持映射研究（例如，参见 [2, 23, 27]）。该猜想的其他早期特例见 [4, 11, 29]。

Colbrook 和 Stepaniants 最近的预印本取得了重大突破 [12, 定理 1.1],，他们解决了 Mathieu 和 Schick 的谱等距猜想 [24, 猜想 4.6]。他们证明了保持谱半径的含单位元代数之间的含单位元线性满射都是约当同构。在本文中，我们证明 Kaplansky–Aupetit 猜想的强形式，条件是 A 和 B 中至少有一个是 C^*-代数。在这两种情况下，含单位元线性满射只需将两个指数元的乘积映为可逆元即可。我们的证明从两个C^*-代数的情形入手，在此情形下，我们改进 Colbrook 和 Stepaniants 的预解式论证，证明只需考察单个指数元即可。为了从指数元过渡到谱，回顾一下，非空紧集 $K \subseteq \mathbb{C}$ 的多项式凸包 是

$$\widehat{K} := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |p(\lambda)| \leq \max_{\zeta \in K} |p(\zeta)| \text{ for every } p \in \mathbb{C}[z] \right\}, \tag{1.1}$$

其中 $\mathbb{C}[z]$ 是单变量复多项式代数。对于 $x \in A$，我们将其谱包定义为 $\widehat{\sigma}_A(x) := \sigma_A(x)$。若 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \widehat{\sigma}_A(x)$，则 λ 位于 $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(x)$ 的无界连通分支中，因此该分支内存在一条以 λ 为起点并趋于无穷远的简单折线路径。它在 $\mathbb{C}$ 中的补集是 $\sigma_A(x)$ 的一个单连通邻域，在该邻域上 $z \mapsto \lambda - z$ 有一个全纯对数 f。于是，全纯函数演算给出 $e^{f(x)} = \lambda 1_A - x$ （参见定理 3.3.6] 的 [5, 证明）。因此，若含单位元线性映射 $\phi : A \to B$ 将指数元映为可逆元，则对任意 $x \in A$， $\phi(x)$ 的谱包包含于 x 的谱包中（引理 2.1）。我们的第一个主要结果表明，这一包含关系已足以迫使 C^*-代数之间的含单位元线性满射成为 Jordan 同态。

定理 1.1. </style}设 是含单位元的Banach代数，是含单位元的半单 Banach 代数，并且 : $A \to B$ 是含单位元线性满射。

(a) 若 A 和 B 中至少有一个是 C^*-代数，则 ϕ 是约当同态，当且仅当$\phi(e^x e^y) \in B^\times$ 对所有 $x, y \in A$成立。(b) 若 A 和 B 都是 C^*-代数，则以下条件等价。(i) ϕ是约当同态。(ii) $\phi(e^x) \in B^\times$ 对每个 $x \in A$ 成立。(iii) 谱包满足 $\widehat{\sigma}_B(\phi(x)) \subseteq \widehat{\sigma}_A(x)$ 对所有 $x \in A$ 成立。

Aupetit 和 Mouton [7, 第 92] 页提出，保持谱包的含单位元半单 Banach 代数之间的线性满射是否必定是约当同态。他们证明了每个这样的满射都是含单位元的 [7, 定理 3.1(2)] ，并且当 B 具有本质根基 [7, 时，它是约当同态3]推论 3.3]。由于谱包决定谱半径，Colbrook 和 Stepaniants 的谱等距定理在两个代数都是 C^*-代数时给出了肯定答案。在较弱的谱包包含假设下，Cui 和 Hou [15,定理 2.2]证明，含单位元半单 Banach 代数之间的线性满射是含单位元的，并且保持幂等元。当定义域是实秩零的 C^*-代数时，该映射还是约当同态 [15,定理 3.1]。

定理 1.1的证明见第 4节，分为两个阶段。对于第 (b)部分，包包含使得ϕ 有界（引理 2.1(b)）。我们转到二次伴随 ϕ^{**}： $A^{**} \to B^{**}$ 因为在冯·诺伊曼代数 A^{**} 上，只需证明投影的像是幂等元（引理 2.3(b)）。对于投影 $p \in A^{**}$，我们用两列酉元网在强 $1 - 2p^*$ 拓扑下逼近

在 A 中，其谱分别位于两个相对的半圆内。对于 $\{-1,\ 1\}$之外的每一点，都可以选取一条射线，使其与其中一个半圆保持一定距离。这样便可将 Colbrook 和 Stepaniants 改编自引理 3 证明的预解式估计 [12, 2] 应用于相应网的像（引理 4.1）。取极限后，可将 $\phi^{**}(1-2p)$ 的预解式范数估计为一个常数乘以它到 $\{-1,\ 1\}$的距离的倒数。全纯函数演算于是给出 $\phi^{**}(1-2p)^2=1$，因此 $\phi^{**}(p)$是幂等元（命题 4.2）。

对于 (a)，我们在 ϕ 的左右两侧分别乘以一个指数元，并使所得的每个映射都保单位元。双指数元假设确保两个映射都将每个 $x\in A$ 映射为与 $\phi(x)$ 具有相同谱包的元素。这表明 $\ker\phi$ 是一个闭双边理想（引理 3.1）。令 $C:=A/\ker\phi$，并令 $S:\ C\to B$ 为诱导双射。C 中两个指数元的乘积可提升为 A 中相应的乘积，因此 S 满足双指数元假设。于是，对于每个指数元 $g\in C$，映射 $U_g:\ B\to B$ 由 $U_g(S(x)):=S(g)^{-1}S(gx)$（对于 $x\in C$）给出，是一个保持谱包的保单位线性双射（引理 3.1）。当 B 是一个C^*-代数时，我们将 (b) 应用于 U_g。当 A 是一个 C^*-代数时，S 对谱包的保持性（引理 3.3）使我们能够将该部分应用于 C^*-代数 C 上的 $S^{-1}U_gS$。沿着经过 1_C 的指数路径对所得的平方恒等式求导，可得到有界 Jordan 导子；根据 Sinclair定理 [28,定理 3.3]，它们是导子。导子判据在第一种情形下适用于 S，在第二种情形下适用于 S^{-1}（引理 3.2）。因此，S，从而 ϕ，在两种情形下都保持平方。

本文结构安排如下。第2 节汇集预备知识，第3 节为将问题化归到两个 C^*-代数作准备。定理1.1的证明见第4节。

补记。本文初稿完成后，我们得知 Aznay 和 Chabbabi 在 arXiv 上发布了一篇预印本，其中他们借助 OpenAI 的 ChatGPT，宣布证明了陪域为半单代数的含单位 Banach 代数上的 Kaplansky–Aupetit 猜想强形式 [8, 命题 5。2]利用引理3.1中的谱半径恒等式，他们的论证也在这一一般性下给出了双指数判据。两种证明都利用这些恒等式说明核是双边理想。我们的判据证明适用范围较窄，因为我们假设至少一个代数 A 和 B 是 C^*-代数。然而，我们采用了不同的技巧；对于两个 C^*-代数之间的映射，我们利用预解式估计并转至二重对偶，以证明只需将各个指数元映射为可逆元，或者等价地，假设谱包包含（见定理1.1(b)）。

2. 预备知识

我们汇集证明中用到的谱包、强* 收敛和 Jordan 同态的相关事实。全文中，所有代数和线性映射均定义在 $\mathbb{C}$ 上，且假定含单位元代数非零。我们用 $\mathbb{N}$ 表示正整数，用 Λ 表示网的有向指标集；当代数由上下文明确时，用 1 表示单位元。

代数 A 中的幂等元是满足 $e^2=e$的元素 $e\in A$。C^*-代数中的自伴幂等元称为投影。

$\widehat{\ }$回顾一下，多项式凸包 K 非空紧集 $K\subseteq\mathbb{C}$，定义见（1.1），其构造方法是向 K 添加 $\mathbb{C}\setminus K$ [13, 命题 VII.5。3]中的所有有界连通分支。因此$\widehat{\ }\mathbb{C}\setminus K$ 是 $\mathbb{C}\setminus K$的无界连通分支。

引理 2.1。设 A和 B 是含单位 *Banach*代数。

(a) 若 $x\in A$ 且 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\widehat{\sigma}_A(x)$，则 $\lambda 1_A-x$ 是 A中的指数元。(b) 若含单位元线性映射 $\phi:\ A\to B$ 将指数元映射为可逆元，则对于所有 $x\in A$，有 $\widehat{\sigma}_B(\phi(x))\subseteq\widehat{\sigma}_A(x)$。对于含单位元线性满射 $\phi:\ A\to B$，若 B 半单，则仅由包包含即可推出 ϕ 有界。

证明。令 $x \in A$ 且 $\lambda \in \mathbb{C}\setminus \widehat{\sigma}_A(x)$，并令 $b := \lambda 1_A - x \in A$。由于 $\sigma_A(b) = \{\lambda - \zeta : \zeta \in \sigma_A(x)\}$，映射 $z \mapsto \lambda - z$，$z \in \mathbb{C}$将 $\mathbb{C}\setminus \sigma_A(x)$ 的无界连通分支映射到 $\mathbb{C}\setminus \sigma_A(b)$ 的无界连通分支上。特别地，0 属于后一个连通分支。因此，根据 [5, 定理 3.3，b 在 A 中有对数。6]

假设 ϕ 将指数元映射为可逆元。根据 (a)，对于每个 $x \in A$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\widehat{\sigma}_A(x)$，我们有 $\phi(\lambda 1_A - x) = \lambda 1_B - \phi(x) \in B^\times$。因此 $\sigma_B(\phi(x)) \subseteq \widehat{\sigma}_A(x)$，取多项式凸包即可得到所需的包包含关系。

现在假设 ϕ 是满射的，B 是半单的，并且对于每个 $x \in A$都成立包包含关系。取包不会改变最大模，因此对于每个 $x \in A$，有 $r_B(\phi(x)) \leq r_A(x)$。Aupetit自动连续性定理 [5,定理 5.5。2] 随后给出有界性。□

A^{**} 的二重对偶 C^*-代数 A 是一个冯·诺伊曼代数。我们将其与 A 在其泛表示 [19, 第 10 节。1]中像的强算子闭包相等同。典范嵌入 $A \to A^{**}$ 是一个等距的 $*$-同态，并且当 A 是含单位元的时，它也是含单位元的。根据 Kaplansky稠密性定理 [18, 定理 5.3。5]，，A^{**} 中的每个自伴收缩元都是 A中自伴收缩元的强算子极限。

设 M 是在希尔伯特空间 H 上忠实且正规表示的冯·诺伊曼代数。范数有界网 $(x_j)_{j\in\Lambda}$ 在 M 中按强 * 拓扑收敛到 $x \in M$，当且仅当对每个 $\xi \in H$ 都有 $x_j\xi \to x\xi$ 与 $x_j^*\xi \to x^*\xi$。对于自伴元素，强算子收敛蕴含强* 收敛。在范数有界集上，强* 拓扑与 σ-强*拓扑 [1, 注 I.2]，一致，后者由半范数 $x \mapsto \omega(x^*x + xx^*)^{1/2}$, $x \in M$ 生成，其中 ω 遍历 M 上的正正规线性泛函。特别地，在有界集上，强* 拓扑与忠实正规表示无关。在此类集合上，乘法是联合强*连续的。

引理 2.2. 设 $(x_j)_{j\in\Lambda}$ 是冯·诺伊曼代数 M 中的自伴元素网，按强* 收敛到自伴元素 $x \in M$。设紧区间 $I \subseteq \mathbb{R}$ 包含 x 的谱，并且对每个 $j \in \Lambda$ 都包含 x_j 的谱。对每个连续函数 $f : I \to \mathbb{C}$,

$$f(x_j) \longrightarrow f(x) \qquad \textit{in the strong}^* \textit{ topology.}$$

证明。取紧支撑连续函数 $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得 $f = g + ih$ 在 I上成立。在 M的忠实正规表示中，Kaplansky引理 [21, 引理 5] 给出$g(x_j)$ 强收敛到 $g(x)$，且 $h(x_j)$ 强收敛到 $h(x)$。由于这些算子都是自伴的，两个极限都是强*。取相应的线性组合，得到 $f(x_j) \to f(x)$ 强*。□

Banach空间之间的有界线性映射 $\phi : A \to B$ 可延拓为其二次伴随 $\phi^{**} : A^{**} \to B^{**}$，后者有界且弱*-连续。若 A 和 B 是 C^*代数，Akemann定理 [1, 推论 III.10] 表明，ϕ^{**} 在范数有界集上强*-连续（另见 [12,引理 2.1]）。

我们记录关于 Jordan 同态的两个标准事实。第一个结论由 Sourour [29,命题 1.3], 推出，第二个是 Mathieu 和 Schick 的 [25, 引理 2.1]中的投影判据。

引理 2.3。 (a) 含单位元的 *Banach* 代数之间的单位 *Jordan* 同态保持可逆性。(b) 从冯·诺伊曼代数到 *Banach* 代数的有界线性映射，若将投影映射为幂等元，则是 *Jordan* 同态。

3. 归一化平移与谱包

设 A 和 B 是含单位元的 Banach 代数，且 B 是半单的，并设 $\phi : A \to B$ 是一个含单位元线性满射，满足 $\phi(e^x e^y) \in B^\times$ 对所有 x，$y \in A$。为证明定理 1.1(a)，我们将证明核 ϕ 是一个闭双边理想，给出保持平方的导子判据，并证明诱导双射 $A/$核 $\phi \to B$ 在 A 是一个 C^*-代数时保持谱包。

3.1. **归一化平移与核。** 对于指数元 $g \in A$，我们通过将其自变量乘以 来得到 的 ϕ 归一化平移，并将所得像乘以 g， $\phi(g)^{-1}$，两者均在左侧或均在右侧。Mathieu 和 Schulz [26, 第 4] 节指出，当陪域是具有忠实迹态的 C^*-代数时，两个指数元的乘积足以得出约当结论。这里我们运用谱Liouville定理证明，在 $x \in A$ 下，每个 ϕ 及其两个平移的像具有相同的谱包。

引理 3.1。 映射 ϕ 有界，且$\ker\phi$ 是 A 的闭双边理想。对于 a、 $x \in A$ 和$g := e^a \in A$,

$$\widehat{\sigma}_B\left(\phi(g)^{-1}\phi(gx)\right) = \widehat{\sigma}_B(\phi(x)) = \widehat{\sigma}_B\left(\phi(xg)\phi(g)^{-1}\right). \tag{3.1}$$

证明。 令其中一个指数元为 1_A，可知 ϕ 将指数元映为可逆元。因此 ϕ 由引理 2.1(b)可知是有界的。

固定 $a \in A$。对于 $\zeta \in \mathbb{C}$，令 $g_\zeta := e^{\zeta a} \in A$ 并定义 F_ζ， G_ζ: $A \to B$ 如下:

$$F_\zeta(x) := \phi(g_\zeta)^{-1}\phi(g_\zeta x), \qquad G_\zeta(x) := \phi(xg_\zeta)\phi(g_\zeta)^{-1}, \qquad x \in A.$$

根据双指数元假设，这两个映射均为含单位元的，并将指数元映为可逆元。固定 $x \in A$。由引理 2.1(b)，对于所有 $\zeta \in \mathbb{C}$， $F_\zeta(x)$ 和 $G_\zeta(x)$ 的谱都包含在固定的紧集 $\widehat{\sigma}_A(x)$ 中。映射 $\zeta \mapsto F_\zeta(x)$ 和 $\zeta \mapsto G_\zeta(x)$ 是整函数，因为 ϕ有界，且求逆在 $B^\times$上是解析的。根据 Aupetit谱Liouville定理 [5, 定理 3.4, 14], $F_\zeta(x)$ 和 $G_\zeta(x)$ 的谱包与 ζ 无关。在 $\zeta = 0$和 $\zeta = 1$处取值，得到 (3.1)。

固定 $\zeta \in \mathbb{C}$，并设 T: $A \to B$ 为 F_ζ 或 G_ζ。每个平移都是 ϕ 与相应一侧的可逆乘法算子的复合，因此 T 是满射。对于 $k \in$ 核 ϕ 和$x \in A$，在（3.1）中取模的最大值可得

$$r_B(T(x) + T(k)) \overset{(3.1)}{=} r_B(\phi(x + k)) = r_B(\phi(x)) \overset{(3.1)}{=} r_B(T(x)).$$

由于 T 是满射，对于每个拟幂零 $b \in B$，都有 $r_B(b + T(k)) = 0$。根据 Zemánek 的刻画 [5, 定理 5.3.1(iii)] 以及 B的半单性，可得 $T(k) = 0$。将此应用于两个平移，可得对于每个 $\zeta \in \mathbb{C}$，都有 $\phi(e^{\zeta a}k) = \phi(ke^{\zeta a}) = 0$。在 $\zeta = 0$ 处求导，得到$\phi(ak) = \phi(ka) = 0$。因此，ker ϕ 是一个双边理想，并且由于 ϕ有界，它是闭的。□

3.2. **导子判据。** 在定理 1.1(a)的证明中，当 S 是 A/核 $\phi \to B$ 时，我们将以下判据应用于诱导双射 B 是一个 C^*-代数。当 A 是一个 C^*-代数时，A/ 核 ϕ也是如此，而我们将该判据应用于 S^{-1}。

引理 3.2。 设 C 是一个结合复代数， D 是一个 C^*-代数，且 T: $C \to D$ 是一个线性双射。对于 $c \in C$ 和 $b \in D$，令 L_c: $C \to C$ 和 L_b: $D \to D$ 分别表示由 c 和 b 给出的左乘法。若算子 δ_c: $D \to D$ 定义为

$$\delta_c := TL_cT^{-1} - L_{T(c)}$$

对每个 $c \in C$ 都是一个导子，则 T 是一个 *Jordan* 同态。

证明。 固定 $c \in C$，并令 $b := T(c) \in D$ 和 $\delta := \delta_c$。令 $d := \delta(b) = T(c^2) - b^2 \in D$。只需证明 $d = 0$。Leibniz 法则给出 $\delta L_b = L_d + L_b\delta$。利用 $L_{c^2} = L_c^2$ 和 $T(c^2) = b^2 + d$，我们得到

$$\delta_{c^2} = (L_b + \delta)^2 - L_{b^2+d} = 2L_b\delta + \delta^2.$$

对于 $y \in D$，Leibniz 法则给出 $b\delta(by) = b\delta(b)y + b^2\delta(y)$。因此，在 (b, y) 处的 δ_{c^2} 的 Leibniz 恒等式中，来自 $2L_b\delta$ 的项相互抵消。用同一法则展开 $\delta^2(by)$，得到

$$0 = \delta^2(by) - \delta^2(b)y - b\delta^2(y) = 2d\delta(y). \tag{3.2}$$

在此等式中取 $y = d^*b$ 和 $y = d^*$，并利用 δ 的 Leibniz 法则，得到

$$0 \overset{(3.2)}{=} d\delta(d^*b) = d\delta(d^*)b + dd^*d \overset{(3.2)}{=} dd^*d.$$

在左侧乘以 d^*，得到 $(d^*d)^2 = 0$。根据 C^*-单位元，$\|d\|^4 = \|(d^*d)^2\| = 0$，因此$d = 0$。 □

3.3. **某一 C^*-代数域上的谱包**。设 A 是一个 C^*-代数，则以下引理表明，诱导双射 $A/\ker\phi \to B$ 保谱包。关键步骤是证明，每个元素的谱包边界都包含在其像的谱中，从而得到引理2.1(b)中包含关系的反向。

引理 3.3。设 C 为一个含单位元的 C^*-代数，设 D 为一个含单位元的半单 *Banach*代数，并设$S\colon C \to D$ 为一个保单位线性双射，满足对所有 $x, y \in C$，都有 $S(e^x e^y) \in D^\times$。对每个 $x \in C$，

$$\partial\widehat{\sigma}_C(x) \subseteq \sigma_D(S(x)) \qquad \text{and} \qquad \widehat{\sigma}_D(S(x)) = \widehat{\sigma}_C(x).$$

证明。由引理 3.1，S 有界。设 $v \in C$ 是一个序列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$中指数元的范数极限，且 $S(v) \in D^\times$。对每个 $y \in C$ 和 $n \in \mathbb{N}$，左平移给出

$$r_D(S(y)) \overset{(3.1)}{=} r_D\left(S(v_n)^{-1}S(v_n y)\right) \leq \|S(v_n)^{-1}\|\|S\|\|v_n y\|.$$

由求逆和乘法的连续性，取极限可得

$$r_D(S(y)) \leq \|S(v)^{-1}\|\|S\|\|vy\|, \qquad y \in C. \tag{3.3}$$

在关于 v 的相同假设下，设 $vh = 0$，其中 $h \in C$。根据开映射定理，逆 S^{-1} 是有界的。对于 $b \in D$，令 $y := S^{-1}(b)$。由于 $vh = 0$，我们有 $vy = vS^{-1}(b - S(h))$，因此

$$\begin{aligned} r_D(b) &\overset{(3.3)}{\leq} \|S(v)^{-1}\|\|S\|\|vS^{-1}(b - S(h))\| \\ &\leq \|S(v)^{-1}\|\|S\|\|v\|\|S^{-1}\|\|b - S(h)\|. \end{aligned}$$

根据 Zemánek 刻画 [5, 定理 5.3.1(v)]，$S(h)$ 属于 D 的 Jacobson根。由于 D 是半单的且 S 是单射，$h = 0$。

现在固定 $x \in C$ 和 $\lambda \in \partial\widehat{\sigma}_C(x)$。由于包络只添加开补分支，包络的边界包含于 $\sigma_C(x)$ 中。因此 $v := \lambda 1_C - x$ 是奇异的。选取序列 $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中各项属于 $\mathbb{C} \setminus \widehat{\sigma}_C(x)$，并收敛于 λ。由引理 2.1(a)，元素 $v_n := \lambda_n 1_C - x \in C$、$n \in \mathbb{N}$ 都是指数元。如果 v^*v 可逆，则由求逆的连续性可得

$$v_n^{-1} = (v_n^* v_n)^{-1} v_n^* \longrightarrow (v^*v)^{-1}v^* \qquad \text{in norm.}$$

由于 $v_n \to v$ 在范数下，若在两个逆元恒等式中取极限，就会得到 v的双侧逆元。因此 $0 \in \sigma_C(v^*v)$。

对每个 $n \in \mathbb{N}$，选取一个连续函数 $f_n\colon [0,\infty) \to [0,1]$，使其在 $[0, 1/(2n)]$ 上等于 1，并在 $[1/n, \infty)$ 上为零。在 C 中，令

$$k_n := f_n(v^*v) \qquad \text{and} \qquad h_n := f_{2n}(v^*v).$$

元素 k_n 是一个正压缩，并且 $h_n \neq 0$，因为 $0 \in \sigma_C(v^*v)$ 且 $f_{2n}(0) = 1$。此外，$(1_C - k_n)h_n = 0$，因为 $(1 - f_n)f_{2n} = 0$ 在 $[0,\infty)$ 上。由于 $1_C - k_n$ 是正可逆元的范数极限，因而也是指数元的范数极限，证明的第一部分表明 $1_D - S(k_n) \notin D^\times$。因此$1 \in \sigma_D(S(k_n))$。另一方面，连续函数演算给出

$$\|vk_n\|^2 = \|k_n v^* v k_n\| = \max_{t\in\sigma_C(v^*v)} t f_n(t)^2 \leq \frac{1}{n}.$$

如果 $S(v)$ 可逆，则（3.3）结合 $y = k_n$ 将推出 $r_D(S(k_n)) \to 0$，矛盾。因此$\lambda \in \sigma_D(S(x))$。

无界连通分支 $\mathbb{C} \setminus \sigma_D(S(x))$ 与 $\partial\widehat{\sigma}_C(x)$不相交。由于它是连通的，且包含所有充分大的标量，因此位于 $\widehat{\sigma}_C(x)$之外。这就得到 $\widehat{\sigma}_C(x) \subseteq \widehat{\sigma}_D(S(x))$。反向包含关系由引理2.1(b)得出。 □

4. 定理1.1的证明

我们首先通过从谱包包含推导出预解式估计，并利用该估计证明满射的二次伴随将投影映为幂等元，从而证明 (b) 部分适用于两个 C^*-代数。然后，我们利用第 3 节的结果，将 (a)部分归约为 (b)部分。

4.1. **预解式估计**。 设 A 和 B 是含单位元的 C^*-代数，并设 $\phi: A \to B$ 是满足定理 1.1(b)中的包包含条件的含单位元线性满射。直到命题 4.2的证明结束，我们都沿用这些假设。由引理2.1(b)， ϕ 是有界的，因此由开映射定理可得常数 $\kappa > 0$ ，使得每个 $y \in B$ 都有一个原像 $x \in A$ 满足 $\|x\| \le \kappa\|y\|$。

对于正规元 $x_0 \in A$，我们利用这一提升估计和谱包包含，来估计 $\phi(x_0)$ 在任意满足以下条件的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 处的预解式：从 λ 出发的射线与 $\sigma_A(x_0)$ 始终保持正距离。

对于 $\lambda, \eta \in \mathbb{C}$ 且 $|\eta| = 1$，令

$$L(\lambda, \eta) := \{\lambda + \alpha\eta : \alpha \in [0, \infty)\}.$$

若 $x \in A$ 且 $L(\lambda, \eta) \cap \sigma_A(x) = \emptyset$，则该射线是 $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(x)$ 的一个无界连通子集。由此可得 $\lambda \notin \hat{\sigma}_A(x)$，而包包含给出 $\lambda 1_B - \phi(x) \in B^\times$。

对于非空子集 $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{C}$ 与 $\lambda \in \mathbb{C}$，我们记

$$\operatorname{dist}(K_1, K_2) := \inf_{\mu \in K_1, \zeta \in K_2} |\mu - \zeta| \qquad \text{and} \qquad \operatorname{dist}(\lambda, K_2) := \operatorname{dist}(\{\lambda\}, K_2).$$

引理 4.1. 设 $x_0 \in A$ 为正规元，并设 λ、$\eta \in \mathbb{C}$ 满足 $|\eta| = 1$。若 $\delta \in (0, \infty)$ 满足

$$\operatorname{dist}(L(\lambda, \eta), \sigma_A(x_0)) \ge \delta,$$

则 $\lambda 1 - \phi(x_0) \in B^\times$ 且

$$\|(\lambda 1 - \phi(x_0))^{-1}\| \le \frac{\kappa}{\delta}. \tag{4.1}$$

证明. 我们采用 Colbrook 与 Stepaniants [12, 引理 3 的证明2]中的扰动论证。设 $y \in B$ 满足 $\|y\| < \delta/\kappa$ ，并选取 $x \in A$ 使得 $\phi(x) = y$ 且 $\|x\| \le \kappa\|y\| < \delta$。固定 $\mu \in L(\lambda, \eta)$。则 $\mu 1 - x_0$ 可逆。由于 x_0 是正规的，连续函数演算给出

$$\|(\mu 1 - x_0)^{-1}\| = \operatorname{dist}(\mu, \sigma_A(x_0))^{-1} \le \delta^{-1}.$$

因此 $\|(\mu 1 - x_0)^{-1} x\| < 1$。其中两个因子

$$\mu 1 - (x_0 + x) = (\mu 1 - x_0)\left(1 - (\mu 1 - x_0)^{-1} x\right)$$

都是可逆的，后者由 Neumann级数得到。由于 $\mu \in L(\lambda, \eta)$ 是任意的，该射线与 $\sigma_A(x_0 + x)$ 不相交。前面的观察给出 $\lambda 1 - \phi(x_0) - y \in B^\times$。

因此，以 δ/κ 为中心、半径为 c 的开球：$= \lambda 1 - \phi(x_0) \in B$ 包含于 $B^\times$ 中。在特别地， c 是可逆的，并且它到 $B \setminus B^\times$ 的距离至少为 δ/κ。在 C^*-代数中，根据 [12,引理 2 $\|c^{-1}\|^{-1}$，该距离等于 2]。这证明了（4.1）。 □

4.2. **二重对偶中的投影像**。对于每个投影 $p \in A^{**}$，我们将引理 4.1 中的预解式估计与全纯函数演算结合起来，以证明二次伴随ϕ^{**}： $A^{**} \to B^{**}$ 将 $1 - 2p$ 映射为一个平方等于 1的元素。

命题 4.2。 二次伴随 ϕ^{**}： $A^{**} \to B^{**}$ 将投影映射为幂等元。

证明。 设 $p \in A^{**}$ 为一个投影，并令 $w := \phi^{**}(1 - 2p) \in B^{**}$。由于 ϕ^{**} 是含单位元的， $\phi^{**}(p) = (1 - w)/2$，因此只需证明 $w^2 = 1$。

由 Kaplansky稠密性定理，存在一个由 A 中的自伴收缩元组成的网 $(k_j)_{j \in \Lambda}$ ，强收敛* 到 $2p - 1$。因此，正压缩元 $h_j := (1 + k_j)/2 \in A$, $j \in \Lambda$ 强收敛* 到 p。令

$$E := \{-1, 1\} \qquad \text{and} \qquad \Gamma_\varepsilon := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1,\ \varepsilon \operatorname{Im} \zeta \ge 0\}, \qquad \varepsilon \in E.$$

对于 $j \in \Lambda$ 和 $\varepsilon \in E$，令 $u_{j,\,\varepsilon} := e^{i\varepsilon\pi h_j} \in A$。由于 $\sigma_A(h_j) \subseteq [0,1]$，连续函数演算表明 $u_{j,\,\varepsilon}$ 是酉元，且其谱包含于 Γ_ε。对于每个 $\varepsilon \in E$，应用引理 2.2，取$I := [0,1]$和 $f(t) := e^{i\varepsilon\pi t}$，对 $t \in I$可得

$$u_{j,\varepsilon} \longrightarrow e^{i\varepsilon\pi p} = (1-p) + e^{i\varepsilon\pi}p = 1 - 2p \qquad \text{in the strong}^* \text{ topology.}$$

固定 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus E$并选择 $\varepsilon \in E$使得 $\varepsilon\operatorname{Im}\lambda \leq 0$。令 $\mu \in L(\lambda, -i\varepsilon)$ 且 $\zeta \in \Gamma_\varepsilon$。于是 $\operatorname{Re}\mu = \operatorname{Re}\lambda$ 且 $|\operatorname{Im}\mu| \geq |\operatorname{Im}\lambda|$，因此 $|\mu| \geq |\lambda|$。由于 $\operatorname{Im}\mu \operatorname{Im}\zeta \leq 0$ 且 $|\operatorname{Re}\zeta| \leq 1$，我们得到

$$|\mu - \zeta|^2 = |\mu|^2 + 1 - 2\operatorname{Re}(\mu\bar{\zeta}) \geq |\lambda|^2 + 1 - 2|\operatorname{Re}\lambda| = \operatorname{dist}(\lambda, E)^2.$$

设 $\delta := \operatorname{dist}(\lambda, E) > 0$。射线 $L(\lambda, -i\varepsilon)$ 与 Γ_ε 的距离至少为 δ，因此对于每个 $j \in \Lambda$，它与 $\sigma_A(u_{j,\varepsilon})$ 的距离也至少为 δ。于是引理 4.1 表明，对于每个 $j \in \Lambda$，$c_j := \lambda 1 - \phi(u_{j,\varepsilon}) \in B$ 是可逆的。我们按照引理 3.2] 的证明将该界传递到二重对偶。C^*-单位元和连续函数演算给出

$$(\delta/\kappa)^2 1 \overset{(4.1)}{\leq} c_j^* c_j \qquad \text{and} \qquad (\delta/\kappa)^2 1 \overset{(4.1)}{\leq} c_j c_j^*, \qquad j \in \Lambda.$$

事实上，$c_j^* c_j$ 和 $c_j c_j^*$ 的逆元范数均为 $\|c_j^{-1}\|^2$。

网$(c_j)_{j\in\Lambda}$ 是有界的，因为$u_{j,\varepsilon}$ 是酉元，且 ϕ 有界。由 ϕ^{**} 在有界集上的强* 连续性，该网强收敛* 到 $c := \lambda 1 - w \in B^{**}$。因此，这两个乘积分别强收敛到 c^*c 和 cc^*。在 B^{**} 的忠实正规表示中对向量进行检验，可得两个极限乘积均满足下界$(\delta/\kappa)^2 1$，故由连续函数演算可知它们可逆。因此，c 有左逆$(c^*c)^{-1}c^*$ 和右逆 $c^*(cc^*)^{-1}$，故其可逆。C^*-单位元恒等式以及 c^*c的下界给出

$$\|(\lambda 1 - w)^{-1}\| = \|(c^*c)^{-1}\|^{1/2} \leq \frac{\kappa}{\operatorname{dist}(\lambda, E)}, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus E. \tag{4.2}$$

如同 [12, 引理 3.3], 的证明中一样，我们使用全纯函数演算。由于 $\sigma_{B^{**}}(w) \subseteq E$，对于$\rho \in (0,\ 1)$，我们有

$$w^2 - 1 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\varepsilon \in E} \oint_{|\lambda - \varepsilon| = \rho} (\lambda^2 - 1)(\lambda 1 - w)^{-1}\, d\lambda,$$

其中圆周均取正向。对于满足 $|\lambda - \varepsilon| = \rho$ 的 $\varepsilon \in E$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$，我们有 $\operatorname{dist}(\lambda,\ E) = \rho$，因此

$$\|(\lambda^2 - 1)(\lambda 1 - w)^{-1}\| \overset{(4.2)}{\leq} \kappa|\lambda + \varepsilon| \leq \kappa(2 + \rho).$$

由此可得 $\|w^2 - 1\| \leq 2\kappa\rho(2 + \rho)$。令 ρ 趋于零，得到 $w^2 = 1$。 □

定理 *1.1*(b) 的证明。设 A 和 B 是含单位元的 C^*-代数，并设 $\phi\colon\ A \to B$ 是含单位元线性满射。首先假设 ϕ 满足包包含，因此 ϕ 根据引理 2.1(b) 有界。命题 4.2 和引理 2.3(b) 表明 ϕ^{**} 是 Jordan 同态。将其限制到 A上可得 ϕ的平方恒等式。根据引理 2.3(a)，单位 Jordan 同态将指数元映射为可逆元。最后，根据引理2.1(b)，将指数元映射为可逆元的映射满足包包含。 □

备注 4.3。设 A 是一个实秩零的含单位元 C^*-代数，设 B 是一个含幺半单巴拿赫代数，并设 $\phi\colon\ A \to B$ 是一个将指数元映射为可逆元的含单位元线性满射。引理 2.1(b)以及 Cui 和 Hou 的定理 [15, 定理 3。1] 表明 ϕ 是一个 Jordan 同态。

4.3。 双指数断言的证明。 我们将 (b) 部分应用于由归一化平移得到的双射，这些双射或者定义在陪域上，或者经过共轭后定义在商上。对所得的平方恒等式进行微分，并应用 Sinclair定理 [28, 定理 3。3]即可得到引理 3.2中所需的导子。

定理 1.1(a) 的证明。设 A、 B 和 $\phi : A \to B$ 如定理 1.1(a) 中所述，并假设 ϕ 满足双指数条件。由引理 3.1， $K := \ker \phi$ 是 A 的闭双边理想。由于 ϕ 含单位元，该理想是适当的。令 $C := A/K$ ，并设 $\pi : A \to C$ 为商映射。定义 $S : C \to B$ ，使得对 $x \in A$，有 $S(x + K) := \phi(x)$。于是 S 是保单位线性双射，且由商范数可得 $\|S\| \le \|\phi\|$。根据开映射定理，其逆映射有界。

由于 π 与指数化可交换， C 中每个两个指数元的乘积都可提升为 A中的此类乘积。因此 S 满足引理 3.1的假设。若 A 是一个 C^*-代数，那么它的闭双边理想 K 是自伴的，而 C 在商范数下是一个 C^*-代数。

固定 $a \in C$。对于 $x \in C$ 和 $b \in B$，令 $L_x : C \to C$ 和 $L_b : B \to B$ 表示左乘法。双指数条件给出 $S(e^{\zeta a}) \in B^\times$ ，对每个 $\zeta \in \mathbb{C}$均成立。定义 $U_\zeta : B \to B$ 为

$$U_\zeta := L_{S(e^{\zeta a})^{-1}} S L_{e^{\zeta a}} S^{-1}, \qquad \zeta \in \mathbb{C}.$$

两个乘法算子都是可逆的，并且 $U_\zeta(1_B) = 1_B$，因此 U_ζ 是一个保单位线性双射。由于 $U_\zeta S$ 是 S 经 $e^{\zeta a}$归一化的左平移，(3.1) 表明 U_ζ 保持谱包。逆运算的解析性以及左乘法对其乘子有界线性依赖这一性质表明，该算子族关于算子范数是整函数。由于 S 是含单位元的，我们有 $U_0 = \mathrm{id}_B$，而 $\zeta \mapsto S(e^{\zeta a})^{-1}$ 在零点处的导数为 $-S(a)$。由乘积法则可得

$$U_0' = S L_a S^{-1} - L_{S(a)}. \tag{4.3}$$

假设 B 是一个 C^*-代数。由第 (b)部分可知，每个 U_ζ 都是约当自同构。对$U_\zeta(y^2) = U_\zeta(y)^2$在 $\zeta = 0$ 处求导，得

$$U_0'(y^2) = U_0'(y)y + yU_0'(y), \qquad y \in B.$$

因此， U_0' 是一个有界的约当导子。由于 B 是半单的，根据 Sinclair定理 [28, 定理 33]，它是一个导子。由于 $a \in C$ 是任意的，式（4.3）和引理3.2 表明 S 是一个约当同态。

现在假设 A 是一个 C^*-代数。根据引理3.3， S 和 S^{-1} 保持谱包。对于$\zeta \in \mathbb{C}$，映射 $V_\zeta := S^{-1} U_\zeta S : C \to C$ 因此是一个保持谱包的保单位线性双射。部分（b）表明，每个 V_ζ 都是约当自同构。由于 $V_0 = \mathrm{id}_C$，在 $\zeta = 0$ 处对平方恒等式求导可知， V_0' 是半单代数 C上的有界约当导子，因此根据 Sinclair定理，它是一个导子。由 V_ζ 的定义可得

$$-V_0' = -S^{-1} U_0' S \overset{(4.3)}{=} S^{-1} L_{S(a)} S - L_a.$$

当 a 遍历 C时， $S(a)$ 遍历 B，因此导子 $-V_0'$ 满足引理 3.2关于 S^{-1}的假设。因此 S^{-1}，从而 S是一个 Jordan 同构。

无论哪种情况， $S\pi = \phi$ 都是一个 Jordan 同态。反过来，根据引理2.3(a)，单位 Jordan 同态保持可逆性，而指数元乘积是可逆的。 □

注 4.4. 设 A 和 B 如定理 1.1(a)中所述，并设 $\phi : A \to B$ 是满足双指数条件的线性满射。则 $c := \phi(1_A) \in B^\times$，将定理应用于$J := c^{-1}\phi$ 可得 $\phi = cJ$，其中 $J : A \to B$ 是一个单位 Jordan 同态。当两个代数都是 C^*-代数时，如果对每个 $x \in A$都有 $\phi(e^x) \in B^\times$ ，则同样的结论成立。

若 A 和 B 是 C^*-代数，且 ϕ 是双射，则 J 是 Jordan 同构。因此，单指数条件足以推出 Harris 和 Kadison 所猜想的因子分解 [17,猜想 3.1]。在他们的假设 $\phi(A^\times) = B^\times$ 下，含单位元的双射 J 保谱，因为

$J(A^{\times}) = c^{-1}B^{\times} = B^{\times}$。因此，Colbrook 和 Stepaniants 的谱等距定理 定理 1。1]。

资助。 第一作者获得欧盟通过 2021–2026年国家复苏与韧性计划及萨格勒布大学理学院机构拨款（IK IA 1.1.3. Impact4Math，PMF-CROFUND）提供的 NextGenerationEU 资助。

第二作者部分获得斯洛文尼亚研究署的资助（研究计划 P1-0285 以及研究项目 J1-50000、N1-0296、N1-0428、J1-70047 和 J1-70046）。

人工智能使用声明。 Anthropic 的 Claude Opus 5.5 找到了关于两个单个指数元 C^*代数的原始证明。该证明改编自 Colbrook 和 Stepaniants 的预解式估计 [12]。OpenAI 的 GPT-6.1 运用归一化平移得到了混合代数扩展，并协助进行了文献检索、校对和文字编辑。Claude Opus 5.5 还协助进行了后续修订，并核查了参考文献和部分恒等式。最初的混合代数证明采用了 Colbrook 和 Stepaniants 的谱等距定理，而当前的证明则采用了第 4 节中确立的谱包准则。作者对稿件的最终内容承担全部责任。

参考文献

[1] C. A. Akemann，《算子代数的对偶空间》，《美国数学会汇刊》126（1967），第2期，286–302，doi：10.1090/S0002-9947-1967-0206732-8。[2] J. Alaminos、M. Brešar、P. Šemrl 和 A. R. Villena，《关于谱保持映射的一则注记》，《数学分析与应用杂志》387（2012），第2期，595–603，doi：10.1016/j.jmaa.2011.09.024。[3] B. Aupetit，《巴拿赫代数的谱性质》，《数学讲义》735，Springer，柏林，1979，doi：10.1007/BFb0064204。[4] B. Aupetit，《Gleason–Kahane–Żelazko 定理在巴拿赫代数中的推广》，《太平洋数学杂志》85（1979），第1期，11–17，doi：10.2140/pjm.1979.85.11。[5] B. Aupetit，《谱理论入门》，Universitext，Springer-Verlag，纽约，1991，doi：10.1007/978-1-4612- 3048-9。[6] B. Aupetit，《巴拿赫代数或 Jordan–Banach 代数之间的谱保持线性映射》，《伦敦数学会杂志》（第2辑）62（2000），第3期，917–924，doi：10.1112/S0024610700001514。[7] B. Aupetit 和 H. du T. Mouton，《巴拿赫代数中的谱保持线性映射》，《数学研究》109（1994），第1期，91–100，doi：10.4064/sm-109-1-91-100。[8] Z. Aznay 和 F. Chabbabi，《巴拿赫代数上的谱等距映射与可逆性保持映射》，预印本（2026），arXiv:2611.26462v1，doi：10.48550/arXiv.2611.26462。[9] M. Brešar 和 P. Šemrl，《保持可逆性的映射保持幂等元》，《密歇根数学杂志》45 3, 483 1998 488, 10 1307 1030132294 ( ), no. – doi: . /mmj/ .[10] M. Brešar 和 P. Šemrl，《Gleason–Kahane–Żelazko 定理的推广：一种研究 Kaplansky 问题的可能途径》，《数学展望》26（2008），第3期，269–277，doi：10.1016/j.exmath.2007.11.004。[11] M.-D. Choi、D. Hadwin、E. Nordgren、H. Radjavi 和 P. Rosenthal，《关于保持可逆性的正线性映射》，《泛函分析杂志》59（1984），第3期，462–469，doi：10.1016/0022-1236(84)90060-0。[12] M. J. Colbrook 和 G. Stepaniants，《含单位元的 C^*代数的谱等距映射》，预印本（2026），arXiv:2610.40470v1，doi：10.48550/arXiv.2610.40470。[13] J. B. Conway，《泛函分析教程》，第二版，《数学研究生教材》96，Springer-Verlag，纽约，1990，doi：10.1007/978-1-4757-4383-8。[14] J. L. Cui 和 J. C. Hou，《巴拿赫代数之间同态的刻画》，《数学学报》（英文版） 20 （ 2004 ），第 4 期，761–768，doi：10.1007/s10114-004-0312-8。[15] J. L. Cui 和 J. C. Hou，《压缩某些谱函数的巴拿赫代数之间的线性映射》，《落基山数学杂志》34（2004），第2期，565–584，doi：10.1216/rmjm/1181069868。[16] A. M. Gleason，《极大理想的一个刻画》，《数学分析杂志》19（1967），171–172，doi：10.1007/BF02788714。[17] L. A. Harris 和 R. V. Kadison，《可逆算子的仿射映射》，《美国数学会会刊》124（1996），第8期，2415–2422，doi：10.1090/S0002-9939-96-03445-4。[18] R. V. Kadison 和 J. R. Ringrose，《算子代数理论基础》。第一卷：初等理论，《数学研究生学习丛书》第15卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1997，doi：10.1090/gsm/015。

[19] R. V. Kadison 和 J. R. Ringrose，《算子代数理论基础》。第二卷：高级理论，《数学研究生学习丛书》第16卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1997，doi：10.1090/gsm/016。[20] J.-P. Kahane 和 W. Żelazko，《交换巴拿赫代数中极大理想的一个刻画》，《数学研究》29（1968），第3期，339–343，doi：10.4064/sm-29-3-339-343。[21] I. Kaplansky，《关于算子环的一个定理》，《太平洋数学杂志》1（1951），第2期，227–232，doi：10.2140/pjm.1951.1.227。[22] I. Kaplansky，《算子代数的代数与解析方面》，CBMS 数学区域会议系列第1卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1970，doi：10.1090/cbms/001。[23] I. Kovács，《实秩零的 C^* 2005 2005 6, 代数 685 689, 10 1155 2005 685 上的可逆性保持映射》，Abstr. Appl. Anal. ( ), no. – doi: . /AAA. . . [24] M. Mathieu 和 G. J. Schick，《谱有界算子的初步结果》，《数学研究》152 2, 187 2002 199, 10 4064 152 2 6 ( ), no. – doi: . /sm - - . [25] M. Mathieu 和 G. J. Schick，《冯·诺伊曼代数上的谱有界算子》，J. Operator Theory 49（2003），第2期，285–293，期刊档案。[26] M. Mathieu 和 F. Schulz，《映到有限 C^*代数上的可逆性保持映射》，《数学研究》272（2023），第1期，113–120，doi：10.4064/sm230101-27-3。[27] M. Mathieu 和 F. Schulz，《来自冯·诺伊曼代数的加性谱保持映射》，Indag. Math.（新系列）36（2025），第4期，1112–1123，doi：10.1016/j.indag.2024.12.005。[28] A. M. Sinclair，《半单 Banach 代数上的 Jordan 同态与导子》，《美国数学会会刊》24（1970），第1期，209–214，doi：10.1090/S0002-9939-1970-0250069-3。[29] A. R. Sourour，《L(X)上的可逆性保持线性映射》，《美国数学会汇刊》348（1996），第1期，13–30，doi：10.1090/S0002-9947-96-01428-6。[30] W. Żelazko，《复巴拿赫代数中乘法线性泛函的一个刻画》，《数学研究》30（1968），第1期，83–85，doi：10.4064/sm-30-1-83-85。I. Gogić，萨格勒布大学理学院数学系，Bijenička 30，10000 萨格勒布，克罗地亚。电子邮箱：ilja@math.hr, ilja.gogic@math.pmf.unizg.hrB. Kuzma，滨海大学，Glagoljaška 8，SI-6000 科佩尔，斯洛文尼亚；以及数学、物理与力学研究所，Jadranska 19，SI-1000 卢布尔雅那，斯洛文尼亚。电子邮箱：bojan.kuzma@upr.si