arXiv:2611.29780v1 [math.RA] 22 Nov 2026

逗号范畴上的 Gorenstein 同调代数

RACHID EL MAAOUY*、J. R. GARC´IA ROZAS 和 LUIS OYONARTE

Abstract. 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是具有足够多投射对象的阿贝尔范畴。本文刻画了这样的函子 $F\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$：逗号范畴 $(F\downarrow\mathcal{B})$ 中的 Gorenstein 射影对象可以用 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$中的 Gorenstein 射影对象作出显式描述。作为主要应用，我们根据 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 以及函子 F的全局 Gorenstein 射影维数，估计 $(F\downarrow\mathcal{B})$ 的全局 Gorenstein 投射维数，并在若干重要情形下推导出正合公式。我们的范畴方法还给出了关于 Gorenstein 内射对象和维数的对偶结果。特别关注三角矩阵环 $\left(\begin{smallmatrix}A & 0\\ U & B\end{smallmatrix}\right)$上的模范畴、积范畴 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$，以及与阿贝尔范畴 $\mathcal{C}$ 和整数 $n\geq 2$相关的 n-态射范畴 $\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C})$。

1. Introduction

三角矩阵环自然地出现在数学的许多领域中。尤其是，它们在环论和代数表示论中发挥着重要作用。它们通常是非交换的，且缺乏左右对称性，因此常被用于构造例子和反例，以丰富环与模的一般理论；参见例如 [FGR75、ARS95]。本研究的动机源于一系列关于三角矩阵环以及更一般的逗号范畴的结果。在详细讨论本研究背后的主要动机之前，我们先介绍一些必要的记号。

设 A 和 B 是环，且 U 是一个 $(B,\ A)$-双模。则有一个环

$$T=\left(\begin{smallmatrix}A & 0\\ U & B\end{smallmatrix}\right)=\left\{\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ u & b\end{smallmatrix}\right)\mid a\in A, b\in B, u\in U\right\}$$

称为三角矩阵环，其加法和乘法取自然定义。还要回顾一下，T上的（左）模是一个三元组$M=\left(\begin{smallmatrix}M_1\\ M_2\end{smallmatrix}\right)_{\varphi^M}$，其中 M_1是一个A-模，M_2 是一个 B-模，而 $\varphi^M\colon U\otimes_A M_1\to M_2$ 是一个 B-态射。在研究 T上的对偶性质时，态射 φ^M 可以等价地替换为伴随态射 $\psi^M\colon M_1\to \mathrm{Hom}_B(U,\ M_2)$。一个基本且自然的问题是，确定 T-模 M 的同调性质与 M_1、M_2及连接态射 φ^M （等价地，ψ^M）的同调性质之间的精确关系。特别是，人们希望确定环 T 的同调性质与 A、B及双模 U的同调性质之间的关系。经典模（例如 T上的投射模和内射模）已有详尽描述：根据

2020 *Mathematics Subject Classification.* 18A25, 18G25.*Key words and phrases.* 完全相容函子，全无环复形，Gorenstein 投射维数，三角矩阵环，态射范畴。

* 通讯作者：elmaaouy.rachid@gmail.com。

Haghany 和 Varadarajan [HV99, HV00] 的研究， T上的投射模类和内射模类可分别描述为 $\mathcal{P}(T) = \Phi(\mathcal{P}(A)\ \mathcal{P}(B))$和 $\mathcal{I}(T) = \Psi(\mathcal{I}(A)\ \mathcal{I}(B))$。其中，对于 A-模的类 $\mathcal{X}_1$、$\mathcal{Y}_1$ 以及 B-模的类$\mathcal{X}_2$、$\mathcal{Y}_2$，类 $\Phi(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$定义为满足以下条件的所有 T-模$M = \left(\begin{smallmatrix} M_1 \\ M_2 \end{smallmatrix}\right)_{\varphi^M}$所成的类： $M_1 \in \mathcal{X}_1$、余核$\varphi^M \in \mathcal{X}_2$，且 φ^M 是单态射；而类 $\Psi(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2)$定义为满足以下条件的所有 T-模 $M = \left(\begin{smallmatrix} M_1 \\ M_2 \end{smallmatrix}\right)_{\psi^M}$所成的类：核$\psi^M \in \mathcal{Y}_1$、$M_2 \in \mathcal{Y}_2$，且 ψ^M 是满态射。

正如 Zhang 在 [Zha13 的例 1 和 2], 所示，这些刻画通常并不能推广到Gorenstein同调代数的范畴。许多作者在不同假设下研究了三角矩阵环和代数上的 Gorenstein 射影模与内射模的刻画（参见 [Zha13, ECT14, EHSL16, LZHZ20, PZH22, Mao22, HZ22, YHW24]）。然而，这些研究中所施加的假设都只是充分条件，而非必要条件。这引出了下面这个自然问题:

问题 1： 给定两个环 A 和 B，对（B, A）-双模 U 需要作何假设，才能得到以下刻画?

$$\mathcal{GP}(T) = \Phi(\mathcal{GP}(A), \mathcal{GP}(B)), \quad \mathcal{GI}(T) = \Psi(\mathcal{GI}(A), \mathcal{GI}(B)).$$

这里， $\mathcal{GP}(R)$ 和 $\mathcal{GI}(R)$ 分别表示环 R 上 Gorenstein 射影模和内射模的类。

关于这个问题， [Zha13] 针对 Artin 代数给出了部分答案T。Zhang 在 [Zha13] 中引入了相容双模，并证明若 U 相容，则 T 上的 Gorenstein 射影模可如上明确描述。此外，他还证明，当 A是 Gorenstein 代数时，相容性也是必要条件。本文的首要目标是进一步发展这一思路，对问题 1 给出肯定的回答。

设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个阿贝尔范畴， $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个右正合加性函子， $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 是一个左正合加性函子。根据 [FGR75]，有两个阿贝尔范畴（$F \downarrow \mathcal{B}$）和（$\mathcal{A} \uparrow G$），称为逗号范畴。当 F 是 G的左伴随时，（$F \downarrow \mathcal{B}$）与（$\mathcal{A} \uparrow G$）同构。在本引言中，我们假设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 有足够多的投射对象和内射对象、直和与积，并且它们是正合的（不过，这些假设并非我们的主要结果所必需，只是为了使引言表述清晰；详见设定 I 和 II）。若（F， G）是一个伴随对，则两个逗号范畴可以视为同一个范畴，记作 $\mathcal{T}$，并称为逗号范畴（更多详情见第 2.1 小节）。

本文引入了全相容函子和双模以及全余相容函子和双模的概念，并为逗号范畴中的问题 1（定理 3.6）给出了答案；作为直接推论，也为三角矩阵环中的问题给出了答案（推论 3.10）。

定理 A。 假设 (F， G) 是一个伴随对。那么

(1) $\mathcal{GP}(\mathcal{T}) = \Phi(\mathcal{GP}(\mathcal{A})\ \mathcal{GP}(\mathcal{B}))$ 当且仅当 F 是全相容的。(2) $\mathcal{GI}(\mathcal{T}) = \Psi(\mathcal{GI}(\mathcal{A})\ \mathcal{GI}(\mathcal{B}))$ 当且仅当 G 是全余相容的。

请注意，除了显而易见的普遍性优势之外，研究逗号范畴还有另一项好处。模范畴的对偶范畴并非模范畴，但逗号范畴的对偶范畴确实是

一个逗号范畴（见引理 2.3）。这一观察使得关于 Gorenstein 射影的结果很容易对偶化，并且在某种意义上，将工作量减半。

回顾一下，环 R 的整体维数定义为所有 R-模的投射维数（分别地，内射维数）的上确界。除此之外，它还衡量一个环距离具备某些同调性质“有多远”。例如，当且仅当一个环的整体维数为零时，该环是半单的；而交换诺特局部环是正则的，当且仅当其整体维数有限；参见例如 [Rot79，第 8.1 节和第 8.4] 节。

关于三角矩阵环的整体维数何时有限或有界，Palmer 和 Roos 已利用 [PR73，定理 5], 中的经典导出函子给出了刻画。最近，Minamoto 和 Yamaura 也对三角矩阵代数整体维数的一个公式给出了现代形式的表达（见[MY20，推论 6.2]）。在 Gorenstein 同调代数中寻找类似公式的问题仍未解决。这使我们面临另一个自然的开放问题：

问题 2： 是否存在一个精确公式，可以利用 A 和 B的全局 Gorenstein 维数来计算三角矩阵环 T 的全局 Gorenstein 维数?

回顾 [CR22，定理 A.6], ，具有足够多投射对象和内射对象的阿贝尔范畴 $\mathcal{C}$ 的全局 Gorenstein 维数定义为 $\mathcal{C}$中所有对象的 Gorenstein 射影（分别为内射）维数所组成集合的上确界：

$$\mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{C}) := \sup\{\mathrm{Gpd}_{\mathcal{C}}(M)|M \in \mathcal{C}\} = \sup\{\mathrm{Gid}_{\mathcal{C}}(M)|M \in \mathcal{C}\}$$

其中，$\mathrm{Gpd}_{\mathcal{C}}(M)$（分别地，$\mathrm{Gid}_{\mathcal{C}}(M)$）表示 $\mathcal{C}$中对象 M 的 Gorenstein 射影（分别为内射）维数。

本文的第二个目标是研究逗号范畴的全局 Gorenstein 维数的性质。我们的方法是利用定理 A，根据范畴 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的全局 Gorenstein 维数，以及函子 F：$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 和 G： $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 的全局 Gorenstein 维数，对逗号范畴$\mathcal{T}$的全局 Gorenstein 维数进行估计；这些维数分别定义为：

$$\mathrm{GPD}(F) := \sup\{\mathrm{Gpd}_{\mathcal{B}}(F(A)) \,|\, A \in \mathcal{GP}(\mathcal{A})\},$$
$$\mathrm{GID}(G) := \sup\{\mathrm{Gid}_{\mathcal{A}}(G(B)) \,|\, B \in \mathcal{GI}(\mathcal{B})\}.$$

见定理 4.9。

定理 B。 假设 (F, G) 是一个伴随对。

(1) 若 F 全相容，则

$$\max\{\mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{A}), \mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{B})\}$$
$$\leq \mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{T}) \leq$$
$$\max\{\mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{A}) + \mathrm{GPD}(F) + 1, \mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{B})\}$$

(2) 若 G 全余相容，则

$$\max\{\mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{A}), \mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{B})\} \leq \mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{T}) \leq \max\{\mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{A}), \mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{B}) + \mathrm{GID}(G) + 1\}.$$

因此，如果 F 全相容或 G 全余相容，那么逗号范畴 $\mathcal{T}$ 具有有限的全局 Gorenstein 维数，当且仅当 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$也具有有限的全局 Gorenstein 维数。

用于证明定理 B 的方法不仅适用于通过 Gorenstein 对象定义的（全局）维数，也适用于相对于任意形如 $\mathcal{X} = \Phi(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$（分别为 $\mathcal{Y} = \Psi(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2)$）的类所定义的（全局）维数；参见定理 4.3 和 4.5。

受问题 2 的启发，我们研究定理 B 中的估计何时会成为一个正合公式。这给出了若干种情形，在这些情形下，我们对这一开放问题得到了部分答案（参见命题 4.11、4.15 和 4.18）。

定理 C。假设 (F, G) 是一个伴随对。

(1) 若 $F = 0$ 或 $G = 0$，则 $\mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{T}) = \mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \max\{\mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{A}), \mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{B})\}$.(2) 若 $\mathcal{A}$ 是 Frobenius 且 $0 \neq F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是弱相容的，则 $\mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{T}) = \max\{$广义投射维数$(F) + 1, \mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{B})\}$.(3) 若 $\mathcal{B}$ 是 Frobenius 且 $0 \neq G: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 是弱余相容的，则 $\mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{T}) = \max\{\mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{A}), \mathrm{GID}(G) + 1\}$.(4) 若 (F, G) 是一个弗罗贝尼乌斯对，且 $0 \neq F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 忠实，则 $\mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{T}) = \max\{\mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{A}) + 1, \mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{B})\}$.(5) 若 (F, G) 是一个弗罗贝尼乌斯对，且 $0 \neq G: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 忠实，则 $\mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{T}) = \max\{\mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{A}), \mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{B}) + 1\}$.

关于弗罗贝尼乌斯范畴和函子的定义，请参阅第 4 节。

本文还讨论了另一个值得关注的范畴，即 n-态射范畴 $\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C})$，其中 $n \geq 2$ 是一个整数，$\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔范畴。该范畴自然出现在阿廷代数的表示论中。对于 $n = 2$，它就是众所周知的态射范畴。对于任意的 n，该范畴最早由 Zhang 在 [Zha11] 中针对模范畴引入，随后 Wang 和 Liu [WL22] 从三角范畴和 Gorenstein同调代数的角度，为阿贝尔范畴进一步定义并研究了它（关于该范畴的更多细节见例 2.5）。由于 n-态射范畴可视为一个逗号范畴（引理 2.6），直接应用定理 A，便可通过 Zhang 的单态范畴和满态范畴完整刻画 $\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C})$ 中的 Gorenstein投射/内射对象（推论 3.11）；而应用定理 B，则可通过 $\mathcal{C}$ 的全局 Gorenstein 维数，得到计算 $\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C})$ 的全局 Gorenstein 维数的精确公式（命题 4.19）。

2. Preliminaries

全文中，所有环均假定为含幺结合环， R-模表示环 R 上所有（左）模构成的范畴。我们约定， R-模始终指左 R-模。阿贝尔范畴 $\mathcal{C}$ 的子范畴均指对同构封闭的全子范畴。 $\mathcal{C}$ 中的任何对象类都视为一个（全）子范畴。最后，我们假定所有函子都是加性的。

2.1. 逗号范畴。 在全文中，我们假设 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$是阿贝尔范畴， $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个右正合函子，而 $G: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$是一个左正合函子。由 [FGR75] 可知，存在两个称为逗号范畴的阿贝尔范畴，记作（$F \downarrow \mathcal{B}$）和（$\mathcal{A} \uparrow \mathsf{G}$）。

逗号范畴（$F \downarrow \mathcal{B}$）定义如下：对象是三元组$\binom{M_1}{M_2}_{\varphi^M}$，其中 $M_1 \in \mathcal{A}$、 $M_2 \in \mathcal{B}$ 以及 φ^M: $F(M_1) \to M_2$是 $\mathcal{B}$中的一个态射。一个态射 $\binom{f_1}{f_2}: \binom{M_1}{M_2}_{\varphi^M} \to \binom{N_1}{N_2}_{\varphi^N}$ 由两个态射给出，即 $f_1: M_1 \to N_1$ 中的$\mathcal{A}$ 以及 $f_2: M_2 \to N_2$ 中的 $\mathcal{B}$，满足下图交换

$$\begin{array}{ccc} F(M_1) & \xrightarrow{F(f_1)} & F(N_1) \\ {\scriptstyle \varphi^M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^N} \\ M_2 & \xrightarrow{f_2} & N_2 \end{array}$$

对偶地，我们可以定义逗号范畴 $(\mathcal{A} \uparrow G)$。对象是三元组 $\binom{M_1}{M_2}_{\psi^M}$，其中 $M_1 \in \mathcal{A}$、 $M_2 \in \mathcal{B}$ 和 $\psi^M: M_1 \to G(M_2)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个态射，而态射则是使显然的方形交换的成对态射 (f_1, f_2)。如果不会引起混淆，我们有时会省略态射 φ^M 和 ψ^M。

在接下来的两个引理中，我们给出本文所需的逗号范畴 $(F \downarrow \mathcal{B})$ 与 $(\mathcal{A} \uparrow G)$ 之间的一些关系。

引理 2.1。 假设 $(F、 G)$ 是一个伴随对。范畴之间存在一个同构

$$(F \downarrow \mathcal{B}) \cong (\mathcal{A} \uparrow G).$$

证明。 对于每个对象 $A \in \mathcal{A}$ 和 $B \in \mathcal{B}$，存在一个自然同构

$$\tau := \tau_{A,B}: \operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(FA, B) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, GB).$$

因此，范畴的同构 $(F \downarrow \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \uparrow G)$ 在对象和态射上分别由下式给出

$$\tbinom{M_1}{M_2}_{\varphi^M} \mapsto \tbinom{M_1}{M_2}_{\tau(\varphi^M)}, \quad \tbinom{f_1}{f_2} \mapsto \tbinom{f_1}{f_2}$$

其逆 $(\mathcal{A} \uparrow G) \to (F \downarrow \mathcal{B})$ 在对象和态射上分别定义为

$$\tbinom{M_1}{M_2}_{\psi^M} \mapsto \tbinom{M_1}{M_2}_{\tau^{-1}(\psi^M)}, \quad \tbinom{f_1}{f_2} \mapsto \tbinom{f_1}{f_2}$$

■

定义 2.2。 在引理 *2.1* 的同构下，这两个范畴均被视为同一个范畴，记作 $\mathcal{T}$，并称为逗号范畴。

全文中，我们将范畴 $\mathcal{C}$ 的对偶范畴记为 $\mathcal{C}^{op}$，将函子 $H: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 的对偶函子记为 $H^{op}: \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}^{op}$。

引理 2.3. 存在如下范畴同构

$$(\mathcal{A}\uparrow G)^{op}\cong(G^{op}\downarrow\mathcal{A}^{op})\ and\ (F\downarrow\mathcal{B})^{op}\cong(\mathcal{B}^{op}\uparrow F^{op})$$

证明。 第一个同构 $(\mathcal{A}\uparrow G)^{op}\to(G^{op}\downarrow\mathcal{A}^{op})$ 分别在对象和态射上定义为

$$\left(\begin{smallmatrix}M_1\\M_2\end{smallmatrix}\right)_{\psi^M}\mapsto\left(\begin{smallmatrix}M_2\\M_1\end{smallmatrix}\right)_{(\psi^M)^{op}},\quad\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}^{op}\mapsto\begin{pmatrix}f_2^{op}\\f_1^{op}\end{pmatrix}$$

其逆为

$$(G^{op}\downarrow\mathcal{A}^{op})\to(\mathcal{A}\uparrow G)^{op},\left(\begin{smallmatrix}N_1\\N_2\end{smallmatrix}\right)_{\varphi^N}\mapsto\left(\begin{smallmatrix}N_2\\N_1\end{smallmatrix}\right)_{(\varphi^N)^{op}},\quad\begin{pmatrix}g_1^{op}\\g_2^{op}\end{pmatrix}\mapsto\left(\begin{smallmatrix}g_2\\g_1\end{smallmatrix}\right)^{op}$$

第二个同构是对偶的。不过，利用上述同构，我们也可以得到:

$$(\mathcal{B}^{op}\uparrow F^{op})\cong((\mathcal{B}^{op}\uparrow F^{op})^{op})^{op}\cong((F^{op})^{op}\downarrow(\mathcal{B}^{op})^{op})^{op}\cong(F\downarrow\mathcal{B})^{op}.$$

■

给定两个对象类 $\mathcal{X}_1\subseteq\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{X}_2\subseteq\mathcal{B}$，我们定义

$$\Phi(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2):=\{M=\left(\begin{smallmatrix}M_1\\M_2\end{smallmatrix}\right)_{\varphi^M}\in(F\downarrow\mathcal{B})\mid M_1\in\mathcal{X}_1,\mathrm{Coker}\varphi^M\in\mathcal{X}_2,\ \varphi^M\text{ is monic}\},$$

$$\Psi(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2):=\{M=\left(\begin{smallmatrix}M_1\\M_2\end{smallmatrix}\right)_{\psi^M}\in(\mathcal{A}\uparrow G)\mid\mathrm{Ker}\psi^M\in\mathcal{X}_1,M_2\in\mathcal{X}_2,\ \psi^M\text{ is epic}\}.$$

现在我们给出几个逗号范畴的例子，它们通常很重要，且与本文的研究背景尤其相关。

例 2.4 (**三角矩阵环**)。 设 A 和 B 为两个环， U 为一个 (B,A)- 双模， $T=\left(\begin{smallmatrix}A&0\\U&B\end{smallmatrix}\right)$ 为三角矩阵环。若定义 $F=U\otimes_A-:A$- 模 $\to B$- 模以及 $G:=\mathrm{Hom}_B(U,-):$ B- 模 $\to A$-模，则由 [FGR75,Gre82] 可知，我们有如下范畴等价

$$T\text{-}Mod\simeq(F\downarrow B\text{-}Mod)\simeq(A\text{-}Mod\uparrow G).$$

在本文中， $T=\left(\begin{smallmatrix}A&0\\U&B\end{smallmatrix}\right)$ 始终表示一个三角矩阵环，而 T-模将与范畴 $(F\downarrow B$-模) 和 $(A$-模 $\uparrow G)$均视为相同。

例 2.5 (**n-态射范畴**)。 设 $\mathcal{C}$ 为一个阿贝尔范畴。记 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 为 $\mathcal{C}$中的态射范畴：其对象是 $\mathcal{C}$ 中的态射，而其态射由 $\mathcal{C}$中的交换方块给出。若$\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ 为恒等函子，则 $\mathcal{C}$ 的态射范畴 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 与逗号范畴 $(\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\downarrow\mathcal{C})$一致。

对于给定的整数 $n\geq1$，可以考虑一种更一般的情况。回顾 [Zha11,WL22] ，存在一个阿贝尔范畴 $\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C})$，称为$n$-态射范畴，其定义如下： n-态射范畴中的一个对象$\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C})$ 是由可复合态射构成的一个$(n-1)$元组，记作

$$(X_i,\varphi_i^X):=X_1\xrightarrow{\varphi_1^X}X_2\xrightarrow{\varphi_2^X}X_3\xrightarrow{\varphi_3^X}\cdots\xrightarrow{\varphi_{n-1}^X}X_n\ or\ (X_i,\varphi_i^X):=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_n\end{pmatrix}_{(\varphi_i^X)}$$

一个态射 $(X_i, \varphi_i^X) \to (Y_i, \varphi_i^Y)$ 是 $f = (f_i)$，其中对于每个 i， $f_i: X_i \to Y_i$ 都是一个态射，并且下图中的每个方块都可交换

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & \xrightarrow{\varphi_1^X} & X_2 & \xrightarrow{\varphi_2^X} & \cdots & \xrightarrow{\varphi_{n-1}^X} & X_n \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & & & \downarrow{\scriptstyle f_n} \\ Y_1 & \xrightarrow{\varphi_1^Y} & Y_2 & \xrightarrow{\varphi_2^Y} & \cdots & \xrightarrow{\varphi_{n-1}^Y} & Y_n \end{array}$$

1-态射范畴 $\mathrm{Mor}_1(\mathcal{C})$ 不过就是范畴 $\mathcal{C}$，而 2-态射范畴 $\mathrm{Mor}_2(\mathcal{C})$ 则与态射范畴 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 重合。更一般地，我们有：

引理 2.6。 对于任意整数 $n \geq 2$，存在范畴同构

$$\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C}) \cong (H_n \downarrow \mathrm{Mor}_{n-1}(\mathcal{C})) \cong (\mathrm{Mor}_{n-1}(\mathcal{C}) \uparrow H_n),$$

其中 $H_n: \mathcal{C} \to \mathrm{Mor}_{n-1}(\mathcal{C})$ 是一个函子，在对象上的定义为 $X \mapsto \begin{pmatrix} X & & \\ X & & \\ & \cdots & \\ & & X \end{pmatrix}_{(\mathrm{id}_X)_i}$

证明。 同构 $\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C}) \cong (H_n \downarrow \mathrm{Mor}_{n-1}(\mathcal{C}))$ 由如下在对象上定义的函子给出

$$\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C}) \to (H_n \downarrow \mathrm{Mor}_{n-1}(\mathcal{C})), \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}_{(\varphi_i^X)} \mapsto \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}_{(\varphi_i^X)} \end{pmatrix}_{\varphi^X}$$

其中 $\varphi^X := (\varphi_1^X, \ \varphi_2^X\varphi_1^X, \ \cdots, \ \varphi_{n-1}^X \cdots \varphi_2^X\varphi_1^X)$，其逆为

$$(H_n \downarrow \mathrm{Mor}_{n-1}(\mathcal{C})) \to \mathrm{Mor}_n(\mathcal{C}), \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}_{(\varphi_i^X)} \end{pmatrix}_{\varphi^X} \mapsto \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}_{(\varphi_i^X)}$$

其中 $\varphi_1^X: X_1 \to X_2$ 是态射 φ^X 的第一个分量。

容易验证，这两个对应在对象和态射上互为逆。第二个同构的证明是对偶的。 ■

设 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{C}$中的对象类。回顾一下，单态射范畴 $\Phi_n(\mathcal{X})$（也记作 $S_n(\mathcal{X})$）定义为 $\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C})$ 的全子范畴，它由所有满足以下条件的对象 $(X_i, \ \varphi_i^X)$ 组成：对于 $1 \leq i \leq n$, $\varphi_i^X: X_i \to X_{i+1}$ 是单态射，且 $\mathrm{Coker}\varphi_i^X \in \mathcal{X}$ 对于 $1 \leq i \leq n-1$。对偶地，满态射范畴 $\Psi_n(\mathcal{X})$（也记作 $\mathcal{F}_n(\mathcal{X})$）定义为 $\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C})$ 的全子范畴，它由所有满足以下条件的对象 $(X_i, \ \psi_i^X)$ 组成：对于每个 $1 \leq i \leq n$,$\psi_i^X: X_i \to X_{i+1}$ 是满态射，且 $\mathrm{Ker}\psi_i^X \in \mathcal{X}$ 对于 $1 \leq i \leq n-1$。下文中，我们将 $\Phi_1(\mathcal{X})$（分别地， $\Psi_1(\mathcal{X})$）与 $\mathcal{X}$ 认同。

引理 2.7。 假设 $\mathcal{X}$ 对扩张封闭。对于任意整数 $n \geq 2$，存在范畴同构

$$\Phi_n(\mathcal{X}) \cong \Phi(\mathcal{X}, \Phi_{n-1}(\mathcal{X})) \ and \ \Psi_n(\mathcal{X}) \cong \Psi(\Psi_{n-1}(\mathcal{X}), \mathcal{X}).$$

证明。 只需证明引理 2.6 中的第一个范畴同构限制为一个范畴同构

$$\Phi_n(\mathcal{X}) \cong \Phi(\mathcal{X}, \Phi_{n-1}(\mathcal{X})).$$

对于对象 $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{pmatrix}_{(\varphi_i^X)} \in \Phi_n(\mathcal{X})$，我们断言

$$\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}_{(\varphi_i^X)} \right)_{\varphi^X} \in \Phi(\mathcal{X}, \Phi_{n-1}(\mathcal{X})).$$

也就是说， $X_1 \in \mathcal{X}$ and φ^X 是一个单态射，其余核为 $\mathrm{Coker}\varphi^X \in \Phi_{n-1}(\mathcal{X})$。

由 $X \in \Phi_n(\mathcal{X})$，根据定义，对于 $X_i \in \mathcal{X}$ for $1 \leq i \leq n$， $\varphi_i^X{:}X_i \to X_{i+1}$ 是一个单态射，并且 $\mathrm{Coker}\varphi_i^X \in \mathcal{X}$ for $1 \leq i \leq n-1$。对于每个$i = 2, \cdots, n-1$，态射 φ^X 诱导出一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{\varphi_{i-1}^X \cdots \varphi_1^X} & X_i & \longrightarrow & \mathrm{Coker}(\varphi_{i-1}^X \cdots \varphi_1^X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_i^X} & & \vdots & & \\ 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{\varphi_i^X \cdots \varphi_1^X} & X_{i+1} & \longrightarrow & \mathrm{Coker}(\varphi_i^X \cdots \varphi_1^X) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由蛇引理可知，存在一个短正合序列

$$0 \to \mathrm{Coker}(\varphi_{i-1}^X \cdots \varphi_1^X) \to \mathrm{Coker}(\varphi_i^X \cdots \varphi_1^X) \to \mathrm{Coker}\varphi_i^X \to 0$$

对 i进行归纳法，我们得到 $\mathrm{Coker}(\varphi_i^X \cdots \varphi_1^X) \in \mathcal{X}$，从而得到 $\mathrm{Coker}\varphi^X \in \Phi_{n-1}(\mathcal{X})$。还要注意，由于每个 φ_i^X都是单态射，每个复合态射 $\varphi_i^X \cdots \varphi_1^X$都是单态射，因此 φ^X 是 $\mathrm{Mor}_{n-1}(\mathcal{C})$中的单态射。

Conversely, for an object $X = \left(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}_{(\varphi_i^X)} \right)_{\varphi^X} \in \Phi(\mathcal{X}, \Phi_{n-1}(\mathcal{X}))$, we claim 使得 $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{pmatrix}_{(\varphi_i^X)} \in \Phi_n(\mathcal{X})$。 也就是说，对于 $1 \leq i \leq n$, φ_i^X:

$X_i \to X_{i+1}$ 是单态射，并且对于 $1 \leq i \leq n-1$, $\mathrm{Coker}\varphi_i^X \in \mathcal{X}$。由于 $X \in \Phi(\mathcal{X}, \Phi_{n-1}(\mathcal{X}))$, $X_1 \in \mathcal{X}$ 且 φ^X 是单态射，并且 $\mathrm{Coker}\varphi^X \in \Phi_{n-1}(\mathcal{X})$。现在，我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{\varphi_1^X} & X_2 & \longrightarrow & \mathrm{Coker}\varphi_1^X & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2^X} & & \vdots{\scriptstyle \overline{\varphi_2^X}} & & \\ 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{\varphi_2^X \varphi_1^X} & X_3 & \longrightarrow & \mathrm{Coker}(\varphi_2^X \varphi_1^X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_3^X} & & \vdots{\scriptstyle \overline{\varphi_3^X}} & & \\ 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{\varphi_3^X \varphi_2^X \varphi_1^X} & X_4 & \longrightarrow & \mathrm{Coker}(\varphi_3^X \varphi_2^X \varphi_1^X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

which shows that $\mathrm{Coker}\varphi^X = \begin{pmatrix} \mathrm{Coker}\varphi_1^X \\ \mathrm{Coker}(\varphi_2^X\varphi_1^X) \\ \vdots \\ \mathrm{Coker}(\varphi_{n-1}^X\cdots\varphi_2^X\varphi_1^X) \end{pmatrix}_{(\overline{\varphi_i^X})_i}$. Therefore, we get that $\mathrm{Coker}(\varphi_i^X\cdots\varphi_1^X) \in \mathcal{X}$，每个 $\overline{\varphi_i^X}$都是单态射，并且每个 $\mathrm{Coker}\varphi_i^X \in \mathcal{X}$。由于$X_1 \in \mathcal{X}$ 且每个 $\mathrm{Coker}(\varphi_i^X\cdots\varphi_1^X) \in \mathcal{X}$，事实表明 $\mathcal{X}$在扩张下封闭，因此对所有 $1 \le i \le n-1$, 都有 $X_{i+1} \in \mathcal{X}$。此外，将蛇引理应用于上面的图表可知，$\mathrm{Coker}\varphi_i^X \cong \mathrm{Coker}\varphi_i^X \in \mathcal{X}$，并且对于所有 $2 \le i \le n-1$， $\varphi_i^X\colon X_i \to X_{i+1}$是单态射。■

例 *2.8*（平凡扩张）。设 $\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔范畴，且 $H\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是一个右正合函子。回顾 [*FGR*75]， $\mathcal{C}$ 关于 H 的（右）平凡扩张记作 $\mathcal{C} \ltimes H$，它是如下定义的范畴：对象是满足 $X \in \mathcal{C}$ 的对 (X, f)，其中 $f\colon H(X) \to X$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射，且复合 $f \circ H(f) = 0$。一个态射 $\gamma\colon (X, f) \to (Y, g)$ 是满足以下图表

$$\begin{array}{ccc} H(X) & \xrightarrow{H(\alpha)} & H(Y) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow{\alpha} & Y \end{array}$$

交换。

若取 $\mathcal{C} = \mathcal{A}\times\mathcal{B}$，函子 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 诱导出一个函子 $F\colon \mathcal{A}\times\mathcal{B} \to \mathcal{A}\times\mathcal{B}$，定义如下

$$\widetilde{F}(A,B) = (0, F(A)) \qquad \widetilde{F}(\alpha,\beta) = (0, F(\alpha))$$

由 [*FGR*75] 可知，逗号范畴 $(F \downarrow \mathcal{B})$ 与平凡扩张 $(\mathcal{A}\times\mathcal{B}) \ltimes \widetilde{F}$同构。在此情形下，$\binom{A}{B}_f$中的一个对象 $(F \downarrow \mathcal{B})$ 诱导出一个态射$\widetilde{(0, f)}$: $F(A, B) \to (A, B)$ 在 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$中，从而得到 $((A, B), (0, f))$ 这一对象，属于 $(\mathcal{A}\times\mathcal{B}) \ltimes \widetilde{F}$。另一方面，由于 $\widetilde{F}^2 = 0$, (A, B) 以及 (f, g) 在 $(\mathcal{A}\times\mathcal{B}) \ltimes \widetilde{F}$中的任意对象都会诱导出一个态射 $g\colon F(A) \to B$在 $\mathcal{B}$中，因而得到一个对象 $\binom{A}{B}_g$，属于 $(F \downarrow \mathcal{B})$。

给定一个左正合函子 $H\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，可以对偶地定义（左）逗号范畴 $H \rtimes \mathcal{C}$。同样地，我们看到，在 $\mathcal{C} = \mathcal{A}\times\mathcal{B}$的情形下，函子 $\widetilde{G}$诱导出一个函子 $G\colon \mathcal{A}\times\mathcal{B} \to \mathcal{A}\times\mathcal{B}$，使得逗号范畴 $(\mathcal{A} \uparrow G)$ $\widetilde{}$同构于平凡扩张 $G \rtimes (\mathcal{A}\times\mathcal{B})$。

典范伴随函子。 逗号范畴具有若干将其与积范畴

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (\mathbf{q}, \mathbf{h}), \quad (\mathbf{c}, \mathbf{z}), \quad (\mathbf{z}, \mathbf{k})$$

$\mathcal{A}\times\mathcal{B}$联系起来的典范伴随函子。这些函子将在研究投射对象、内射对象和 Gorenstein 对象时发挥核心作用。

(1) （**张量函子**）$\mathbf{p}$： $\mathcal{A}\times\mathcal{B} \to (F \downarrow \mathcal{B})$

$$\mathbf{p}(M_1, M_2) = \begin{pmatrix} M_1 \\ F(M_1)\oplus M_2 \end{pmatrix}_{(1,0)} \text{ and } \mathbf{p}(f_1, f_2) = \begin{pmatrix} f_1 \\ F(f_1)\oplus f_2 \end{pmatrix}$$

对于 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 中的每个对象 (M_1, M_2) 和态射 (f_1, f_2)。

(2) （**Hom 函子**）$\mathbf{h}$： $\mathcal{A}\times\mathcal{B} \to (\mathcal{A} \uparrow \mathrm{G})$：

$$\mathbf{h}(M_1, M_2) = \begin{pmatrix} M_1\oplus G(M_2) \\ M_2 \end{pmatrix}_{(0,1)} \text{ and } \mathbf{h}(f_1, f_2) = \begin{pmatrix} f_1\oplus G(f_2) \\ f_2 \end{pmatrix}$$

对于 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 中的每个对象 (M_1, M_2) 和态射 (f_1, f_2)。

（3）（**底层函子**）$\mathbf{q}$： $\mathcal{T} \to \mathcal{A} \times \mathcal{B}$:

$$\mathbf{q}(M) = (M_1, M_2) \text{ and } \mathbf{q}(f) = (f_1, f_2)$$

对于每个对象 $M = \binom{M_1}{M_2}$ 和态射 $f = \binom{f_1}{f_2}$（其中 $\mathcal{T}$，且 $\mathcal{T} = (F \downarrow \mathcal{B})$ 或 $\mathcal{T} = (\mathcal{A} \uparrow \mathrm{G})$）。

(4) (**余核函子**) $\mathbf{c} : (F \downarrow \mathcal{B}) \to \mathcal{A} \times \mathcal{B}$:

$$\mathbf{c}(M) = (M_1, \mathrm{Coker}\varphi^M) \text{ and } \mathbf{c}(f) = (f_1, \overline{f}_2)$$

对于每个对象 $M = \binom{M_1}{M_2}_{\varphi^M}$ 和态射 $f = \binom{f_1}{f_2} : M \to N$ 属于 $(F \downarrow \mathcal{B})$，其中 $\overline{f_2} : \mathrm{Coker}\varphi^M \to \mathrm{Coker}\varphi^N$ 是诱导态射。

(5) (**核函子**) $\mathbf{k} : (\mathcal{A} \uparrow \mathrm{G}) \to \mathcal{A} \times \mathcal{B}$:

$$\mathbf{k}(M) = (\mathrm{Ker}\psi^M, M_2) \text{ and } \mathbf{k}(f) = (f_1, f_2)$$

对每个对象 $M = \binom{M_1}{M_2}_{\psi^M}$ 和态射 $f = \binom{f_1}{f_2} : M \to N$（属于 $(\mathcal{A} \uparrow \mathrm{G})$），其中 f_1 :核$\psi^M \to$核ψ^N 是诱导映射。

(6) (**零函子**) $\mathbf{z} : \mathcal{A} \times \overline{\mathcal{B}} \to \mathcal{T}$

$$\mathbf{z}(M_1, M_2) = \binom{M_1}{M_2}_0 \text{ and } \mathbf{z}(f_1, f_2) = \binom{f_1}{f_2}$$

对于 $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ 中的任意对象 (M_1, M_2) 和态射 (f_1, f_2)，其中 $\mathcal{T} = (F \downarrow \mathcal{B})$ 或 $\mathcal{T} = (\mathcal{A} \uparrow \mathrm{G})$。

注 2.9.

(1) 注意，我们用函子 $\boldsymbol{q}$ 表示两个不同的函子：$\boldsymbol{q}$:$(F \downarrow \mathcal{B}) \to \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ 以及 $\boldsymbol{q}$: $(\mathcal{A} \uparrow \mathrm{G}) \to \mathcal{A} \times \mathcal{B}$。这不会造成任何问题，因为从上下文中可以清楚地看出我们指的是哪个函子。对函子$\boldsymbol{z}$也有同样的说明。(2) 由于 $\boldsymbol{q}$ 是正合的，且 $\boldsymbol{p}$（分别地，$\boldsymbol{h}$）是$\boldsymbol{q}$的左（分别地，右）伴随，因此$\boldsymbol{p}$（分别地，$\boldsymbol{h}$）保持投射（分别地，内射）对象。

记 L_iF（分别地，R^iG）为 F（分别地，G）的左（分别地，右）导出函子。

引理 2.10. 设 $n \geq 1$ 为一个整数。则有以下自然同构：

(1) *Let* $N = \binom{N_1}{N_2}_{\varphi^N} \in (F \downarrow \mathcal{B})$ *and* $(M_1, M_2) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.
   (a) *If* $\mathrm{L}_iF(M_1) = 0$ *for all* $1 \leq i \leq n$, *then*
   $$\mathrm{Ext}^n_{(F\downarrow\mathcal{B})}(\binom{M_1}{F(M_1)}, N) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M_1, N_1).$$
   (b) $\mathrm{Ext}^n_{(F\downarrow\mathcal{B})}(\binom{0}{M_2}, N) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{B}}(M_2, N_2)$.
(2) *Let* $M = \binom{M_1}{M_2}_{\psi^M} \in (\mathcal{A} \uparrow \mathrm{G})$ *and* $(N_1, N_2) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.
   (a) $\mathrm{Ext}^n_{(\mathcal{A}\uparrow\mathrm{G})}(M, \binom{N_1}{0}) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M_1, N_1)$.
   (b) *If* $\mathrm{R}^iG(N_2) = 0$ *for all* $1 \leq i \leq n$, *then*
   $$\mathrm{Ext}^n_{(\mathcal{A}\uparrow\mathrm{G})}(M, \binom{G(N_2)}{N_2}) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{B}}(M_2, N_2).$$

证明。 其证明与三角矩阵环的情形类似；参见 [Mao20, 引理 3.2] 或 [BEGO21,引理 3]。

■

以下引理是本文的基础。对于三角矩阵环，该结论可由 [HV00, 定理 3.1] 和 [HV99, 命题 5.1]推出。

引理 2.11。 以下两个等式成立：

(1) $\mathcal{P}(F\downarrow\mathcal{B}) = \Phi(\mathcal{P}(\mathcal{A})\ \mathcal{P}(\mathcal{B}))$

(2) $\mathcal{I}(\mathcal{A}\uparrow G) = \Psi(\mathcal{I}(\mathcal{A})\ \mathcal{I}(\mathcal{B}))$

证明。 记住例 2.8，由 [FGR75，推论1.6(c)] 可知，对象 $P = \binom{P_1}{P_2}_{\varphi^P}$在 $(F\downarrow\mathcal{B})$ 中是投射的，当且仅当$\mathbf{c}(P) = (P_1,$ 余核$\varphi^P)$ 在 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$中是投射的，且 P与 $\mathbf{pc}(P) = \left(\begin{smallmatrix} & P_1 \\ F\ P_1 & \oplus \end{smallmatrix}\ (\,)\ \text{余核}\varphi^P\right)$同构。这等价于说， P 是投射的，当且仅当 P_1 在 $\mathcal{A}$中是投射的，余核φ^P 在 $\mathcal{B}$ 中是投射的，并且 φ^P： $F(P_1) \to P_2$ 是一个（分裂）单态射。根据[FGR75，推论1.6(d)], ，$(\mathcal{A}\uparrow G)$ 中内射对象的对偶描述成立。

■

引理 2.12. 以下断言成立：

(1) 若 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 有足够多的投射对象，则$(F\downarrow\mathcal{B})$也有足够多的投射对象。(2) 若 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 有足够多的内射对象，则$(\mathcal{A}\uparrow \mathrm{G})$也有足够多的内射对象。(3) 设$(F, G)$ 是一对伴随对。若 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 有足够多的投射对象和内射对象，则 $\mathcal{T}$也如此。

证明。 设 M 是$(F\downarrow\mathcal{B})$中的一个对象。由于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 有足够多的投射对象，存在两个满态射 $f_1 : P_1 \to M_1$ 和 $g_2 : P_2 \to M_2$ ，分别属于 $\mathcal{A}$ 和$\mathcal{B}$，其中 P_1 和 P_2 是投射对象。由于 F 是右正合的，我们可以在 $\mathcal{B}$中构造一个交换图表

$$\begin{tikzcd}
F(P_1) \arrow[r, "F(f_1)"] \arrow[d, "\lambda_1"] & F(M_1) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^M"] & 0 \\
F(P_1)\oplus P_2 \arrow[r, dashed, "f_2"] \arrow[d, "\pi_2"] & M_2 \arrow[d] & \\
P_2 \arrow[u, bend left, "\lambda_2"] \arrow[r, dashed] \arrow[ur, "g_2"] & \mathrm{Coker}\varphi^M &
\end{tikzcd}$$

其中 λ_i 和 π_i 分别是典范单射和投影，并且

$$f_2 : F(P_1)\oplus P_2 \to M_2$$

这是由 $\varphi^M F(f_1)$和 g_2诱导的唯一态射。由于 $g_2 = f_2\circ\lambda_2$是一个满态射，因此 f_2 也是。于是，由于$\mathbf{p}$ 保持投射对象，且 f_1 和f_2 都是满态射，我们得到一个满态射 $\mathbf{p}(P_1, P_2) \to M$ ，其中$\mathbf{p}(P_1, P_2)$是投射对象。

内射对象的情形由对偶性可得。 ■

推论 2.13。 对任意整数 $n\geq 1$，我们有如下断言：

(1) $\mathcal{P}(\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C})) = \Phi_n(\mathcal{P}(\mathcal{C}))$。

(2) $\mathcal{I}(\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C})) = \Psi_n(\mathcal{I}(\mathcal{C}))$。

证明。 由引理 2.6 和 2.7，我们得到范畴同构

$$\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C}) \cong (H_n\downarrow \mathrm{Mor}_{n-1}(\mathcal{C})) \text{ and } \Phi_n(\mathcal{P}(\mathcal{C})) \cong \Phi(\mathcal{P}(\mathcal{C}), \Phi_{n-1}(\mathcal{P}(\mathcal{C}))) \quad \forall n\geq 2,$$

其中 $\mathrm{Mor}_1(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ 且 $\Phi_1(\mathcal{P}(\mathcal{C})) = \mathcal{P}(\mathcal{C})$。因此，利用引理 2.11 和归纳法，我们得到了 $\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C})$ 中投射对象的所需描述。

关于内射对象的陈述可对偶地得到。 ■

2.2. $\mathcal{X}$-（余）分解维数。给定 $\mathcal{X}$ 的一个对象类 $\mathcal{C}$，回顾一下，对象 $A \in \mathcal{C}$ 的一个 $\mathcal{X}$-分解是一个正合列 $\cdots \to X_1 \to X_0 \to A \to 0$，其中每个 $X_i \in \mathcal{X}$。如果 $A \in \mathcal{C}$ 具有有限的 $\mathcal{X}$-分解：则称对象 $A \in \mathcal{C}$ 的 $\mathcal{X}$-分解维数至多为某个整数 $n \geq 0$，即 $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(A) \leq n$，若 A：

$$0 \to X_n \to \cdots \to X_1 \to X_0 \to A \to 0.$$

如果 n 是使得存在此类序列的最小非负整数，那么其$\mathcal{X}$-分解维数恰好为 n；如果不存在这样的 n ，则将其$\mathcal{X}$-分解维数定义为 ∞。

给定 $\mathcal{C}$中的一类 $\mathcal{Z}$ ， $\mathcal{Z}$ 的 $\mathcal{X}$-分解维数定义为：

$$\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z}) = \sup\{\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(Z) \mid Z \in \mathcal{Z}\}.$$

特别地，我们将 $\mathcal{C}$的全局 $\mathcal{X}$-分解维数定义为 $\mathcal{C}$的 $\mathcal{X}$-分解维数，即

$$\operatorname{gl.resdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{C}) := \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{C}) = \sup\{\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(Z) \mid Z \in \mathcal{C}\}.$$

对偶地，可以定义 $\mathcal{X}$-余分解以及（整体） $\mathcal{X}$-余分解维数。

回顾一下， $\mathcal{C}$ 中的对象类如果对扩张和满态射的核封闭，并且包含 $\mathcal{C}$中的所有投射对象，则称其为投射可解的。内射余可解类作对偶定义。

引理 2.14 ([Hua22], 定理 3.2)。 设 $0 \to N \to M \to L \to 0$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{C}$中的一个短正合序列。假设 $\mathcal{C}$ 具有足够多的投射对象，且 $\mathcal{X}$是一个对直和项封闭的投射可解类。

(1) $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M) \leq$不超过$\{\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(N), \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(L)\}$。当 $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(N) + 1 \neq \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(L)$时等号成立。(2) $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(N) \leq$ 不超过$\{\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M), \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(L) - 1\}$。当 $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M) \neq \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(L)$时等号成立。(3) $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(L) \leq$不超过$\{\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(N) + 1, \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M)\}$。当 $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(N) \neq \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M)$ 时等号成立。

设 $\mathcal{C}$ 为一个具有直和且直和保持正合的阿贝尔范畴。根据 Eilenberg 把戏（例如参见 [Hol04，命题 1.4] 或 [P´er16，命题 9.2.2]），标准结论是： $\mathcal{C}$ 中一个对直和以及满态射的核封闭的对象类，也对直和项封闭。下面的引理由 [Elm26，引理 5.1(1)], 推出，其中未假设 $\mathcal{X}$ 为投射可解。

引理 2.15 ([Elm26],引理 5.1(1))。 设 $\mathcal{C}$ 为一个具有足够多投射对象和直和且直和保持正合的阿贝尔范畴，并设 $\mathcal{X}$ 为 $\mathcal{C}$ 的一个投射可解且对直和封闭的子范畴。对于 $\mathcal{C}$中对象的任意族$(M_i)_{i \in I}$ ，有

$$\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) = \sup\{\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M_i) \mid i \in I\}.$$

注意到，引理 2.14 和 2.15 有其对偶对应（见 [Hua22, 定理 3.9] 和 [Elm26, 引理 5.1(2)]）。

2.3. **Gorenstein 射影对象、内射对象与维数**。 阿贝尔范畴中的投射对象复形**P** $\mathcal{C}$ 称为全无环（或完备射影分解），如果它是无环的，并且对每个投射对象 $Q \in \mathcal{C}$，诱导复形 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{P}\ Q)$ 都是无环的。若存在一个由射影对象构成的全无环复形**P** 使得 $M \cong \mathrm{Ker}(P_0 \to P_{-1})$，则称对象 $M \in \mathcal{C}$ 为 Gorenstein 射影对象。我们将 $\mathcal{C}$ 中 Gorenstein 投射对象的类记为$\mathcal{GP}(\mathcal{C})$。

对偶地，若内射对象的复形**E** 在 $\mathcal{C}$ 中是无环的，并且对每个内射对象 $E \in \mathcal{C}$，诱导复形 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E,\mathbf{E})$都是无环的，则称其为全无环复形（或完备内射分解）。若存在一个内射对象构成的全无环复形**E** 使得 $N \cong \mathrm{Ker}(E_0 \to E_{-1})$，则称对象 $N \in \mathcal{C}$ 为 Gorenstein 内射对象。我们将 $\mathcal{C}$ 中 Gorenstein内射对象的类记为 $\mathcal{GI}(\mathcal{C})$。

设 M是 $\mathcal{C}$中的一个对象。 M的 Gorenstein 射影维数 $\mathrm{Gpd}_{\mathcal{C}}(M)$，定义为 M的 $\mathcal{GP}(\mathcal{C})$-分解维数。对偶地， M的 Gorenstein 内射维数 $\mathrm{Gid}_{\mathcal{C}}(M)$，定义为 M的 $\mathcal{GI}(\mathcal{C})$-余分解维数。

还要回顾一下， $\mathcal{C}$的全局Gorenstein投射维数 $\mathrm{GPD}(\mathcal{C})$，定义为 $\mathcal{C}$的全局 $\mathcal{GP}(\mathcal{C})$-分解维数，即:

$$\mathrm{GPD}(\mathcal{C}) := \mathrm{gl.resdim}_{\mathcal{GP}(\mathcal{C})}(\mathcal{C}) = \sup\{\mathrm{Gpd}_{\mathcal{C}}(M) |\, M \in \mathcal{C}\}.$$

对偶地， $\mathcal{C}$ 的全局 Gorenstein 内射维数定义为

$$\mathrm{GID}(\mathcal{C}) := \mathrm{gl.coresdim}_{\mathcal{GI}(\mathcal{C})}(\mathcal{C}) = \sup\{\mathrm{Gid}_{\mathcal{C}}(M) |\, M \in \mathcal{C}\}.$$

Gorenstein同调代数中的一个基本结果表明，对于具有足够多投射对象和内射对象的阿贝尔范畴$\mathcal{C}$ ，其全局 Gorenstein 射影维数等于其全局 Gorenstein 内射维数: $\mathrm{GPD}(\mathcal{C})$ $=\mathrm{GID}(\mathcal{C})$。这个共同值称为 $\mathcal{C}$的全局 Gorenstein 维数，记作 $\mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{C})$。Enochs 和 Jenda [首次在 Gorenstein 环的情形下证明了这一事实，见 EJ00，第 12 节。3]随后， [将其推广到任意环，见 BM10，定理 1。1] 最近， [CR22] 将其推广到了阿贝尔范畴。

以下结论由 [CR22，定理 A.6] 推出。

引理 2.16. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有足够多射影对象和内射对象的阿贝尔范畴。那么

$$\mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{C}) = \sup\{\mathrm{pd}_{\mathcal{C}}(\mathcal{I}(\mathcal{C})), \mathrm{id}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}(\mathcal{C}))\}.$$

引理 2.17. 设 $\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔范畴。

(1) 若 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}(\mathcal{C})) < \infty$，则 $\mathcal{C}$ 中任意由投射对象构成的无环复形都是全正合的。(2) 若 $\mathrm{pd}_{\mathcal{C}}(\mathcal{I}(\mathcal{C})) < \infty$，则 $\mathcal{C}$ 中任意由内射对象构成的无环复形都是全正合的。

证明。 这可由使用归纳法的标准论证得到。 ■

3. Gorenstein projective and injective objects in comma categories

本节将证明引言中的定理 A，并给出一些应用。

设定 I. 在本文其余部分，每当我们处理逗号范畴 $(F \downarrow \mathcal{B})$ 时，我们假设 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 有足够多的投射（相应地，内射）对象

（相应地，$(\mathcal{A}\uparrow G)$）。由引理 2.12 可知，$(F\downarrow\mathcal{B})$（相应地，$(\mathcal{A}\uparrow G)$）有足够多的投射（相应地，内射）对象。

在 [Zha13 中，Zhang 在定义 1.1]，中引入了相容双模，以刻画三角矩阵代数 $T=\left(\begin{smallmatrix}A & 0\\ U & B\end{smallmatrix}\right)$ 上的 Gorenstein 射影模。最近，Hu 和 Zhu [HZ22],以及 Peng、Zhu 和 Huang [PZH22]分别将这一结果推广到了逗号范畴。Zhang 对相容双模的定义中的第一个假设是，所有投射 A-模的无环复形都必须是 $(U\otimes_A -)$-正合的。然而，这一条件似乎过强。我们的思路是用全无环复形取代投射对象的无环复形。由此得到的较弱条件，最终证明足以刻画逗号范畴中的 Gorenstein 对象。

定义 3.1。一个右正合函子 $F:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 若满足以下条件，则称为全相容：

(P1) 对于 $\mathcal{A}$中的任意全无环投射对象复形$(\boldsymbol{P})$，复形 F是无环复形。(P2) 对于 $\mathcal{B}$ 中的任意全无环射影对象复形$\boldsymbol{Q}$以及 $\mathcal{A}$中的任意投射对象 P，复形 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{Q}\ F(P))$ 是无环复形。(P3) 对于$(F\downarrow\mathcal{B})$中任意全无环投射对象复形 $F(\boldsymbol{P})\ \left(\begin{smallmatrix}\\ \boldsymbol{PQ}\end{smallmatrix}\right)$，复形是无环复形。

回顾 [HZ22，定义 4.1]，右正合函子 $F:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 若满足条件 **(P1)** 和 **(P2)**，则称为弱相容；若满足 **(P2)** 以及以下条件，则称为相容（或按 [PZH22]的意义称为完美）：

(P4) 对于 $\mathcal{A}$中的任意正合投射对象复形，F**(P)** 是正合的。

注 3.2。我们注意到，本文给出的结果和定义总有其对偶对应，因为它们只需通过转到对立范畴即可得到（见引理 *2.3*）。因此，在本文中，我们只证明关于逗号范畴$(F\downarrow\mathcal{B})$的陈述。

定义 3.3。左正合函子 G:$\ \mathcal{B}\to\mathcal{A}$ 若满足以下条件，则称为全余相容：

（E1）G（$\boldsymbol{E}_2$）对于任意由 $_2$ 中的内射对象构成的全无环复形$\boldsymbol{E}$，均为正合。（E2）$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}$（$G$（$E$），$\boldsymbol{E}_1$）对于 $_1$ 中的任意由内射对象构成的全无环复形$\boldsymbol{E}$以及 E 中的任意内射对象，均为正合。（E3）G（$\boldsymbol{E}_2$）对于任意由$\boldsymbol{E}_2\ \big)$中的内射对象构成的全无环复形$\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{E}_1\\ \\ \end{smallmatrix}\right.$，在（$\mathcal{A}\uparrow G$）中均为正合。

Following [YHW24, 定义 5.1], 若函子 G满足（E1）和（E2），则称其为弱余相容；若其满足（E2）及以下断言，则称其为余相容：

（E4）G（$\mathbf{E}_2$）对于任意由 $\mathcal{B}$ 中的内射对象构成的无环复形$\mathbf{E}_2$，均为正合。

注 3.4。根据 [HZ22, Example4.3], ，弱相容函子不一定相容。一般而言，我们有以下包含关系：

(i) {相容} $\subseteq$ {全相容} $\subseteq$ {弱相容}；当每个投射对象 $A\in\mathcal{A}$ 都具有有限内射维数时，以上关系均为等式。

(ii) {余相容} ⊆ {全余相容} ⊆ {弱余相容}；当每个内射对象 $B \in \mathcal{B}$ 都具有有限投射维数时，以上关系均为等式。

例如，当 $\mathcal{A}$ （分别地， $\mathcal{B}$）具有足够多的投射对象和内射对象，且具有有限全局 *Gorenstein* 维数时，*(i)*（分别地，*(ii)*）中的等式成立（见引理 *2.16* 和 *2.17*）。

注意到，条件 *(P1)* 和 *(P3)* 似乎密切相关。然而，我们不知道有任何函子满足 *(P1)* 但不满足 *(P3)*，或反之。

不同于投射对象（分别地，内射对象），Gorenstein 射影对象（分别地，Gorenstein 内射对象）在函子 $\mathbf{p}$ （分别地，$\mathbf{h}$）作用下并不保持不变。下面的引理准确刻画了这一情形发生的条件。

引理 3.5。 以下断言成立。

(1) $\boldsymbol{p}$ 保持 *Gorenstein* 射影对象，当且仅当 F 弱相容。(2) $\boldsymbol{h}$ 保持 *Gorenstein* 内射对象，当且仅当 G弱余相容。

证明。 第一个结论由 [HZ22, 引理 4.6], 得出，因为$\mathbf{p} \cong \mathbf{p}(0, -) \oplus \mathbf{p}(-, 0)$，且Gorenstein投射对象构成的类在有限直和下封闭。第二个断言是对偶的。 ■

现在我们可以证明引言中的定理 A。

定理 3.6。 以下断言成立。

(1) $\mathcal{GP}(F \downarrow \mathcal{B}) = \Phi(\mathcal{GP}(\mathcal{A})\ \mathcal{GP}(\mathcal{B}))$ 当且仅当 F 全相容。(2) $\mathcal{GI}(\mathcal{A} \uparrow G) = \Psi(\mathcal{GI}(\mathcal{A})\ \mathcal{GI}(\mathcal{B}))$ 当且仅当 G 全余相容。

证明。 在整个证明中，我们令 $\mathcal{T} = (F \downarrow \mathcal{B})$。

(⇐) 令 $M = \binom{M_1}{M_2}_{\varphi^M}$ 为 $\mathcal{T}$中的一个对象。

(⊆) 假设 $M \in \mathcal{GP}(\mathcal{T})$。根据定义，存在一个由 $\mathcal{T}$中的投射对象组成的全无环复形

$$\mathbf{P} = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P_{-1} \to P_{-2} \to \cdots$$

其中 $P_i = \binom{P_{i,1}}{P_{i,2}}_{\varphi^{P_i}}$，且满足 $M \cong \mathrm{Ker}(P_0 \to P_{-1})$。于是，我们得到 $\mathcal{A}$中的一个无环复形

$$\mathbf{P}_1 = \cdots \to P_{11} \to P_{01} \to P_{-11} \to P_{-21} \to \cdots$$

其中每个 P_{i1} 由引理 2.11 可知是投射的，且满足 $M_1 \cong \mathrm{Ker}(P_{01} \to P_{-11})$。

- φ^M 是一个单态射：由 (P3)，复形 $F(\mathbf{P}_1)$ 是正合的。特别地，短正合序列

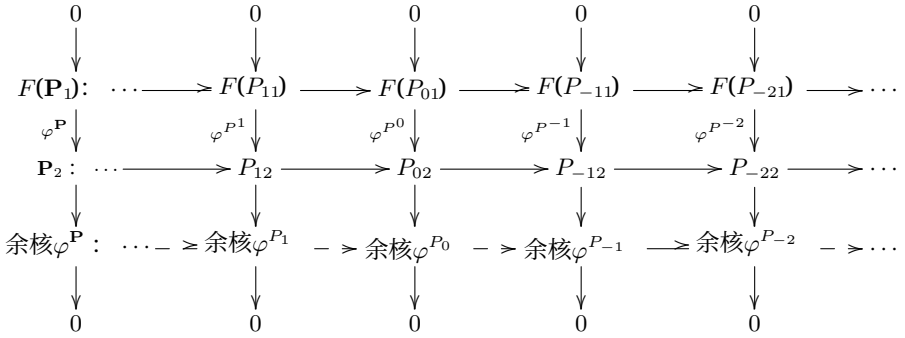
$$F(\mathcal{E}_1) : 0 \to F(M_1) \to F(P_{01}) \to F(K_{-11}) \to 0$$

是正合的，其中 $K_{-11} := Z_{-1}(\mathbf{P}_1)$。若 $\iota_1 : M_1 \to P_{01}$ 和 $\iota_2 : M_2 \to P_{02}$ 是典范单态射，则 $F(\iota_1)$ 是单态射，并由下列交换图可知:

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow F(M_1) & \xrightarrow{F(\iota_1)} & F(P_{01}) \\ & {\scriptstyle \varphi^M}\downarrow & \quad {\scriptstyle \varphi^{P_0}}\downarrow \\ & M_2 & \xrightarrow{\iota_2} P_{02}, \end{array}$$

我们得到， φ^M 也是一个单态射。

• Cokerφ^M 是 Gorenstein 射影：再次利用复形$F(\mathbf{P}_1)$正合且每个 φ^{P^i} 都是单态射这一事实，我们得到一个列正合的交换图表



由于第一个和第二个复形正合，我们在 $\mathcal{B}$中得到一个无环复形

$$\mathrm{Coker}\varphi^{\mathbf{P}}: \cdots \to \mathrm{Coker}\varphi^{P_1} \to \mathrm{Coker}\varphi^{P_0} \to \mathrm{Coker}\varphi^{P_{-1}} \to \mathrm{Coker}\varphi^{P_{-2}} \to \cdots,$$

其中每个余核φ^{P_i} 根据引理 2.11 都是投射的。现在，设 Q_2 是 $\mathcal{B}$中的一个投射对象。由于（$\mathbf{c}$,$\mathbf{z}$）是一个伴随对，对于每个 i，我们得到一个自然同构

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Coker}\varphi^{P_i}, Q_2) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(\mathbf{c}(P^i), (0, Q_2)\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(P_i, \mathbf{z}(0, Q_2)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(P_i, \left(\begin{smallmatrix}0\\ Q_2\end{smallmatrix}\right)),\end{aligned}$$

它诱导出一个复形同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Coker}\varphi^{\mathbf{P}}, Q_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{P}, \left(\begin{smallmatrix}0\\ Q_2\end{smallmatrix}\right)).$$

根据引理 2.11，对象 $\left(\begin{smallmatrix}0\\ Q_2\end{smallmatrix}\right)$ 是投射的。因此，复形 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{P}\ \left(\begin{smallmatrix}0\\ Q_2\end{smallmatrix}\right))$ 是正合的，复形 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}$(余核$\varphi^P, Q_2$) 也是如此。因此，余核$\varphi^M$ 是 Gorenstein 射影的。

• M_1 是 Gorenstein 射影的：我们只需证明，对于任意投射对象 Q_1 in $\mathcal{A}$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{P}_1, Q_1)$ 是无环复形。

将函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{P}\ -)$ 作用于 $\mathcal{T}$ 中的下列短正合序列

$$0 \to \left(\begin{smallmatrix}0\\ F(Q_1)\end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix}Q_1\\ F(Q_1)\end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix}Q_1\\ 0\end{smallmatrix}\right) \to 0,$$

我们得到一个复形的短正合序列

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{P}, \left(\begin{smallmatrix}0\\ F(Q_1)\end{smallmatrix}\right)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{P}, \left(\begin{smallmatrix}Q_1\\ F(Q_1)\end{smallmatrix}\right)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{P}, \left(\begin{smallmatrix}Q_1\\ 0\end{smallmatrix}\right)) \to 0.$$

对于每个 i，都存在一个阿贝尔群的自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P_{i1}, Q_1) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(P_i, \left(\begin{smallmatrix}Q_1\\ 0\end{smallmatrix}\right)),$$

它诱导出一个复形同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{P}_1, Q_1) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{P}, \left(\begin{smallmatrix}Q_1\\ 0\end{smallmatrix}\right)).$$

因此，如果这些复形是无环的，那么复形 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{P}_1, Q_1)$ 也是无环的。

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{P}, \left(\begin{smallmatrix}0\\ F(Q_1)\end{smallmatrix}\right)) \text{ and } \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{P}, \left(\begin{smallmatrix}Q_1\\ F(Q_1)\end{smallmatrix}\right))$$

也正合。

复形 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{P}\ \left(\begin{smallmatrix}Q_1\\ F\ Q_1()\end{smallmatrix}\right))$ 是正合的，因为根据引理 2.11，$\left(\begin{smallmatrix}Q_1\\ F\ Q_1()\end{smallmatrix}\right)$ 是投射的。

再次利用伴随性（$\mathbf{c}$,$\mathbf{z}$），我们得到复形的自然同构

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{P},\left(\begin{smallmatrix}0\\F(Q_1)\end{smallmatrix}\right)) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{P},\mathbf{z}(0,F(Q_1))\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(\mathbf{c}(\mathbf{P}),(0,F(Q_1)))\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Coker}\varphi^{\mathbf{P}},F(Q_1)).\end{aligned}$$

因此，由 (P2) 可知 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathbf{P}\left(\begin{smallmatrix}0\\F(Q_1)\end{smallmatrix}\right))$ 是正合的，因为 $\mathrm{Coker}\varphi^{\mathbf{P}}$ 是全正合的。因此，复形 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{P}_1,Q_1)$ 是无环的，从而 M_1 是 Gorenstein 射影的。

($\supseteq$) 假设 $M\in\Phi(\mathcal{GP}(\mathcal{A})\ \mathcal{GP}(\mathcal{B}))$。由引理 3.5，对象 $\mathbf{p}(M_1,0)$ 和 $\mathbf{p}(0,\mathrm{Coker}\varphi^M)$ 是 Gorenstein 射影的。由于 Gorenstein 投射对象类对扩张封闭，由短正合序列可得

$$0\to\mathbf{p}(M_1,0)\to M\to\mathbf{p}(0,\mathrm{Coker}\varphi^M)\to 0$$

that M 是 Gorenstein 射影的。

($\Rightarrow$) 包含 $\Phi(\mathcal{GP}(\mathcal{A})\ \mathcal{GP}(\mathcal{B}))\subseteq\mathcal{GP}(\mathcal{T})$ 表明 $\mathbf{p}$ 保留 Gorenstein 射影对象，因此，根据引理 3.5，F 弱相容。

剩下要证明定义 3.1 中的 (P3)，即，若 $\mathbf{P}=\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{P}_1\\\mathbf{P}_2\end{smallmatrix}\right)$ 是 $\mathcal{T}$ 中由投射对象构成的全无环复形，则 $F(\mathbf{P}_1)$ 是正合的。等价地，我们可以证明对每个短正合序列

$$0\to K_{k1}\overset{\iota_{k1}}{\to}P_{k1}\to K_{k-1,1}\to 0,$$

其中 $K_k=Z_k(\mathbf{P})=\left(\begin{smallmatrix}K_{k1}\\K_{k2}\end{smallmatrix}\right)_{\varphi^{K_k}}$，短正合序列

$$0\to F(K_{k1})\overset{F(\iota_{k1})}{\to}F(P_{k1})\to F(K_{k-1,1})\to 0$$

由于 F 是右正合的，只需证明 $F(\iota_{k1})$ 是单态射。

根据定义，每个 K_k 都是 Gorenstein 射影的。因此，每个 φ^{K_k} 都是单态射。由下图的交换性可知

$$\begin{array}{ccccccc} & & F(K_{k1}) & \xrightarrow{F(\iota_{k1})} & F(P_{k1}) & \longrightarrow & F(K_{k-1,1})\longrightarrow 0\\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi^{K_k}} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi^{P_k}} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi^{K_{k-1}}}\\ 0 & \longrightarrow & K_{k2} & \xrightarrow{\iota_2} & P_{k2} & \longrightarrow & K_{k-1,2}\longrightarrow 0\end{array}$$

$F(\iota_{k1})$是一个单态射，正如所需。 ■

假设 $F:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是零函子。那么 F 是全相容的，并且逗号范畴（$F\downarrow\mathcal{B}$）与积范畴 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$一致。由定理 3.6 可得，对于一个对象 $M\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$，$M\in\mathcal{GP}(\mathcal{A}\times\mathcal{B})$当且仅当$M_1\in\mathcal{GP}(\mathcal{A})$且$M_2\cong$余核$\varphi^M\in\mathcal{GP}(\mathcal{B})$。我们将这一事实及其对偶记录为一个推论。

推论 3.7。

(1) 若 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 有足够多的射影对象，则 $\mathcal{GP}(\mathcal{A}\times\mathcal{B})=\mathcal{GP}(\mathcal{A})\times\mathcal{GP}(\mathcal{B})$。(2) 若 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 有足够多的内射对象，则 $\mathcal{GI}(\mathcal{A}\times\mathcal{B})=\mathcal{GI}(\mathcal{A})\times\mathcal{GI}(\mathcal{B})$。

现在，我们将讨论范围限定于三角矩阵环。

定义 3.8。 称一个(B,A)-双模 U 为:

(1) 当函子 $U\otimes_A-:$ A-模 $\to B$-模是完全/弱相容的时，称其为左完全/弱相容 。

(2) 当函子 $\mathrm{Hom}_B(U,-)$ ： B-模$\to$ A-模是完全/弱余相容的时，称其为左完全/弱余相容 。

下面给出这类模的一些例子。

命题 3.9。 设 U 是一个（B， A）-双模。

（1） U 是左全相容的，当且仅当 U_A 具有有限平坦维数，并且以下断言之一成立：（a） ${}_BU$ 具有有限射影维数。（b） ${}_BU$ 具有有限 *FP*-内射维数，且 B 是左凝聚的。（2） U 是左全余相容的，当且仅当 ${}_BU$ 具有有限内射维数，并且以下断言之一成立：（a） U_A 具有有限平坦维数。（b） U_A 具有有限 *FP*-内射维数，且 A 是右凝聚的。

证明。 (1) 假设 U_A 具有有限平坦维数。

由 [ECT14，引理 2.3]，定义 3.1 中的条件 (P1) 和 (P3) 成立。注意，任意由投射 T-模构成的全无环复形 $\left(\mathbf{P}_2^1\right)\mathbf{P}$都会诱导一个由投射 A-模构成的正合复形 $\mathbf{P}_1$。

为验证条件 (P2)，设 $\mathbf{Q}$ 是由投射 B-模构成的全无环复形，且 P是一个投射 A-模。我们断言 $\mathrm{Hom}_B(\mathbf{Q}\ U\otimes_A P)$ 是正合的。

由于 P 是一个投射 A-模，它是某个指标集 I对应的 $A^{(I)}$ 的直和项，因此 $U\otimes_A P$ 是 $U\otimes_A A^{(I)}\cong U^{(I)}$ 这个 B- 模的直和项。

情形 (a) 若 ${}_BU$ 的射影维数至多为 n，则 $U\otimes_A P$的射影维数也至多为 n，因为射影维数至多为 n 的模构成的类在直和和直和项下封闭（引理 2.15）。因此，$\mathrm{Hom}_B(\mathbf{Q}\ U\otimes_A P)$ 是正合的，故 (P2) 成立。

情形（b）现在假设 ${}_BU$ 的 FP-内射维数至多为 n，且 B是左凝聚的。由此可知， $U\otimes_A P$ 具有有限 FP-内射维数，因为具有有限 FP-内射维数的模类 $\leq n$ 在直和（因为 FP-内射模类具有此性质）和直和项（由引理 2.15 的对偶）下封闭。另一方面，由 [Gil17, 定理 3] 可知，任意 FP-内射模都属于 $\mathcal{GP}(B)^\perp$。由于类 $\mathcal{GP}(B)^\perp$ 是厚的，它包含所有具有有限 FP-内射维数的模。特别地，它包含 $U\otimes_A P$。由于$\mathbf{Q}$ 是由投射 B-模构成的全无环复形，这意味着 $\mathrm{Hom}_B(\mathbf{Q}\ U\otimes_A P)$是正合的，如所求。

(2) 证明是对偶的。不过，由于对偶论证还需要一些额外的解释和参考文献，我们为完整起见将其列出。

定义 3.3 的条件 (E1) 和 (E3) 由 [ECT14，引理 2.4] 得到满足。注意，任意注入 T-模的全无环复形 $\left(\mathbf{E}_2^1\right)\mathbf{E}$ 都诱导出一个注入 B-模的正合复形$\mathbf{E}_2$ 。

为验证 (E2)，设$\mathbf{E}_1$ 是一个注入 A-模的全无环复形，且 E 是一个注入 B-模。我们断言，复形 $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_B(U,E),\mathbf{E}_1)$ 是正合的。

由于 ${}_BE$ 是注入的，它是某个指标集 I 对应的 $(B^+)^I$ 的直和项，因此 $\mathrm{Hom}_B(U,E)$ 是左 A-模的直和项

$$\mathrm{Hom}_B(U,(B^+)^I)\cong\mathrm{Hom}_B(U,(B^+))^I\cong((B\otimes_B U)^+)^I\cong(U^+)^I.$$

情形 (a) 假设 U_A 的平坦维数至多为 n。根据 [Fie72，定理 2.1]， U^+ 的内射维数 $\leq n$ 有限。因此，$\mathrm{Hom}_B(U,E)$ 的内射维数也有限

且至多为 n，因为内射维数至多为 n的模构成的类在直积和直和项下封闭（由引理 2.15 的对偶命题可得）。

情形 (b) 现在假设 U_A 的 FP-内射维数至多为 n，且 A 是右相干环。根据 [Fie72，定理 2.2]，，左 A-模 U^+ 的平坦维数至多为 n。由于在右相干环上，平坦左模类对任意直积封闭，$(U^+)^I$ 的平坦维数至多为 n；根据有限平坦维数至多为 n的模类对直和项封闭，同样地，$\mathrm{Hom}_B(U, E)$的平坦维数也至多为 n。现在由 [˘Sto14，推论 5.9] 可知，${}^{\perp}\mathcal{GI}(A)$包含所有具有有限平坦维数的模。特别地，它包含 $\mathrm{Hom}_B(U, E)$。由于 $\mathbf{E}_1$ 是由内射 A-模组成的全无环复形，这意味着 $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_B(U, E), \mathbf{E}_1)$ 是正合的，正如所需。 ■

以下结果是定理 3.6 的直接推论。它对引言中提出的问题 1 给出了肯定的回答。

推论 3.10。 以下断言成立。

(1) $\mathcal{GP}(T) = \Phi(\mathcal{GP}(A)\ \mathcal{GP}(B))$ 当且仅当 U是全相容的。（2）$\mathcal{GI}(T) = \Psi(\mathcal{GI}(A)\ \mathcal{GI}(B))$ 当且仅当 U是全余相容的。

我们以另一个应用结束本节：刻画 n-态射范畴 $\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C})$ 中的 Gorenstein投射/内射对象。

推论 3.11。 设 $\mathcal{C}$ 为阿贝尔范畴， $n \geq 1$ 为一个整数。

（1）如果 $\mathcal{C}$ 具有足够多的投射对象，则 $\mathcal{GP}(\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C})) = \Phi_n(\mathcal{GP}(\mathcal{C}))$。

（2）如果 $\mathcal{C}$ 具有足够多的内射对象，则 $\mathcal{GI}(\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C})) = \Psi_n(\mathcal{GI}(\mathcal{C}))$。

证明。 (1) 根据引理 2.6 和 2.7，我们得到范畴同构 $\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C}) \cong (H_n \downarrow \mathrm{Mor}_{n-1}(\mathcal{C}))$ 以及 $\Phi_n(\mathcal{GP}(\mathcal{C})) \cong \Phi(\mathcal{GP}(\mathcal{C})\ \Phi_{n-1}(\mathcal{GP}(\mathcal{C})))\quad \forall n \geq 2$与 $\mathrm{Mor}_1(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ 以及 $\Phi_1(\mathcal{GP}(\mathcal{C})) = \mathcal{GP}(\mathcal{C})$。函子 H_n 是正合的，并保持投射对象不变，因此它是全相容的。于是，利用定理 3.6 和归纳法，我们得到 $\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C})$ 中 Gorenstein 射影对象的所需描述。 ■

注记 3.12。 **</style}设 为一个整数，并令 (**R) 表示环 R上的 $n \times n$ 三角矩阵环：

$$T_n(R) = \begin{pmatrix} R & 0 & \cdots & 0 \\ R & R & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ R & R & \cdots & R \end{pmatrix}$$

根据 [Zha11，引理 1.3.(i)]，，范畴 $T_n(R)$-模范畴 $T_n(R)$-模等价于 n-态射范畴 $\mathrm{Mor}_n(R$-模)。因此，推论 *3.11* 给出了 $T_n(R)$ 上的 ***Gorenstein*** 射影模和 ***Gorenstein*** 内射模的描述（参见 [Zha11，推论 4.1 和 4.2]）。

4. Global Gorenstein dimensions of comma categories

本节将证明引言中的定理 B 和 C。定理 B 将是一个更一般结果的特例，我们将先证明这个更一般的结果。

设定 II. 除了第 3 节中的设定 I 外，我们还作如下假设：

(1) $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 有直和，并且在处理逗号范畴（$F \downarrow \mathcal{B}$）时它们是正合的。(2) $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{A}$ 和 $\mathcal{X}_2 \subseteq \mathcal{B}$ 是投射可解且对直和封闭的对象类，并且 $\mathcal{X} := \Phi(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ 中相应的对象类对满同态的核封闭。(1)^{op} $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 有积，并且在处理逗号范畴（$\mathcal{A} \uparrow G$）时它们是正合的。(2)^{op} $\mathcal{Y}_1 \subseteq \mathcal{A}$和 $\mathcal{Y}_2 \subseteq \mathcal{B}$ 是内射余可解且对直积封闭的对象类，并且 $\mathcal{Y} := \Psi(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2)$ 中相应的对象类对单态射的余核封闭。

请注意，假设 (2)（分别地，(2)^{op}），结合 [HZ22，命题 2.5]（分别地，其对偶）和引理 2.11 表明，$\mathcal{X}$（分别地，$\mathcal{Y}$）是投射可分解的（分别地，内射余可解的）。另请注意，利用 Eilenberg 把戏，可以标准地证明，类 $\mathcal{X}_1$、$\mathcal{X}_2$、$\mathcal{Y}_1$ 和 $\mathcal{Y}_2$ 对直和项封闭。

引理 *4.1. </style}*令 $M_1 \in \mathcal{A}$ 和 $M_2 \in \mathcal{B}$ 为两个对象。那么
(1) $\mathcal{X}_2(M_2)$ 的相对分辨维数 $= \mathcal{X}\begin{pmatrix}0\\M_2\end{pmatrix}$的相对分辨维数。(2) $\mathcal{X}_1(M_1)$ 的相对分辨维数 $\leq \mathcal{X}\begin{pmatrix}M_1\\F\end{pmatrix}$的相对分辨维数$_{(M_1)}$。

证明。 (1) 设 $n \geq 0$ 为一个整数，并考虑M_2的部分投射分解

$$0 \to K_2^n \to P_2^{n-1} \to \cdots \to P_2^0 \to M_2 \to 0$$

因此，存在一个 $\begin{pmatrix}0\\M_2\end{pmatrix}$的部分投射分解:

$$0 \to \begin{pmatrix}0\\K_2^n\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\P_2^{n-1}\end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix}0\\P_2^0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\M_2\end{pmatrix} \to 0$$

因此我们有以下等价关系:

$$\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}\begin{pmatrix}0\\M_2\end{pmatrix} \leq n \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\K_2^n\end{pmatrix} \in \mathcal{X} \Leftrightarrow K_2^n \in \mathcal{X}_2 \Leftrightarrow \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}_2}(M_2) \leq n,$$

这表明 $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}\begin{pmatrix}0\\M_2\end{pmatrix} = \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}_2}(M_2)$。

(2) 若 $\begin{pmatrix}M_1\\F\end{pmatrix}_{(M_1)}$ 有一个长度为 n的 $\mathcal{X}$-分解，则 M_1 有一个长度为 n的 $\mathcal{X}_1$-分解。这意味着 $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}_1}(M_1) \leq \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}\begin{pmatrix}M_1\\F\end{pmatrix}_{(M_1)}$。 ■

命题 4.2. 假设 相对分辨维数$\mathcal{X}_2(F(\mathcal{X}_1)) < \infty$。对于任意对象 $M \in (F \downarrow \mathcal{B})$，我们有

$$\begin{gathered}\max\{\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}_1}(M_1), \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}_2}(M_2) - \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}_2}(F(\mathcal{X}_1))\} \\ \leq \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M) \leq \\ \max\{\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}_1}(M_1) + \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}_2}(F(\mathcal{X}_1)) + 1, \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}_2}(M_2)\}\end{gathered}$$

因此， M 具有有限的 $\mathcal{X}$分解维数，当且仅当 M_1 和 M_2分别具有有限的 $\mathcal{X}_1$分解维数和 $\mathcal{X}_2$分解维数。

证明。 我们首先证明，若令 $k :=$ 相对分辨维数$\mathcal{X}_2(F(\mathcal{X}_1)) < \infty$，则

$$\max\{\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}_1}(M_1), \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}_2}(M_2) - k\} \leq \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M).$$

我们可以假设 $n :=$相对分辨维数$_{\mathcal{X}}(M)$。 于是，存在一个正合列

$$0 \to X^n \to X^{n-1} \to \cdots \to X^0 \to M \to 0$$

在 $(F\downarrow\mathcal{B})$ 中，其中每个 $X^i=\begin{pmatrix}X_1^i\\X_2^i\end{pmatrix}_{\varphi^{X^i}}\in\mathcal{X}$。因此，存在一个正合列

$$0\to X_1^n\to X_1^{n-1}\to\cdots\to X_1^0\to M_1\to 0$$

在 $\mathcal{A}$ 中，其中每个 $X_1^i\in\mathcal{X}_1$。因此，$\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}_1}(M_1)\leq n$。

对于每个 i，在 $\mathcal{B}$ 中存在一个正合列

$$0\to F(X_1^i)\xrightarrow{\varphi^{X^i}}X_2^i\to\mathrm{Coker}\varphi^{X^i}\to 0$$

其中 $\mathrm{Coker}\varphi^{X^i}\in\mathcal{X}_2$。于是，根据引理 2.14(1)，$\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}_2}(X_2^i)=\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}_2}(F(X_1^i))\leq k$。因此，利用正合列

$$0\to X_2^n\to X_2^{n-1}\to\cdots\to X_2^0\to M_2\to 0$$

由引理 2.14(3)，我们得到 $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}_2}(M_2)\leq n+k$.

现在，我们来证明另一个不等式:

$$\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(M)\leq\max\{\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}_1}(M_1)+k+1,\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}_2}(M_2)\}.$$

我们不妨假设

$$m:=\max\{\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}_1}(M_1)+k+1,\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}_2}(M_2)\}<\infty,$$

因此，若记 $n_1:=\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}_1}(M_1)$ 和 $n_2:=\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}_2}(M_2)$，则有 $n_1,\ n_2<\infty$。由于 $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}_1}(M_1)=n_1\leq m-k-1$，在 $\mathcal{A}$ 中存在一个正合列

$$0\to X_1^{m-k-1}\to\cdots\to X_1^1\xrightarrow{f_1^1}X_1^0\xrightarrow{f_1^0}M_1\to 0$$

其中每个 $X_1^i\in\mathcal{X}_1$。由于 $\mathcal{B}$ 有足够多的投射对象，因此存在一个满态射 $X_2^0\xrightarrow{g_2^0}M_2$，使得 $X_2^0\in\mathcal{P}(\mathcal{B})\subseteq\mathcal{X}_2$。令 $K_1^i=$核f_1^{i-1}，并考虑唯一的态射

$$f_2^0:F(X_1^0)\oplus X_2^0\to M_2,$$

由 $\varphi^M F(f_1^0)$ 和 g_2^0 诱导。与引理 2.12 的证明类似，我们得到 $(F\downarrow\mathcal{B})$ 中的一个短正合序列

$$0\to K^1\to\mathbf{p}(X_1^0,X_2^0)\xrightarrow{f^0}M\to 0$$

其中 $K^1=\begin{pmatrix}K_1^1\\K_2^1\end{pmatrix}_{\varphi^{K^1}}$ 和 $f^0=\begin{pmatrix}f_1^0\\f_2^0\end{pmatrix}$。类似地，在 $\mathcal{B}$ 中存在一个满态射 $X_2^1\xrightarrow{g_2^1}K_2^1\to 0$，其中 $X_2^1\in\mathcal{P}(\mathcal{B})\subseteq\mathcal{X}_2$，于是我们得到一个正合列

$$0\to K^2\to\mathbf{p}(X_1^1,X_2^1)\to K^1\to 0.$$

重复这一过程，我们可以在 $(F\downarrow\mathcal{B})$ 中构造一个正合列

$$0\to\mathbf{p}(0,K_2^{m-k})\to\mathbf{p}(X_1^{m-k-1},X_2^{m-k-1})\xrightarrow{f^{m-k-1}}\cdots\xrightarrow{f^1}\mathbf{p}(X_1^0,X_2^0)\xrightarrow{f^0}M\to 0.$$

由于每个 $X_2^i\in\mathcal{X}_2$，由引理 2.15 可知

$$\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}_2}(F(X_1^i)\oplus X_2^i)=\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}_2}(F(X_1^i))\leq k.$$

因此，将引理 2.14(2) 应用于正合列

$$0\to K_2^{m-k}\to F(X_1^{m-k-1})\oplus X_2^{m-k-1}\xrightarrow{f_2^{m-k-1}}\cdots\to F(X_1^0)\oplus X_2^0\xrightarrow{f_2^0}M_2\to 0,$$

我们得到 $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}_2}(K_2^{m-k})\leq\max\{k,n_2-m+k\}\leq k$，因为 $n_2\leq m$。这意味着存在一个正合列

$$0\to X_2^m\to\cdots\to X_2^{m-k+1}\to X_2^{m-k}\to K_2^{m-k}\to 0$$

在 $\mathcal{B}$ 中，其中每个 $X_2^i \in \mathcal{X}_2$. 。因此，在 $(F \downarrow \mathcal{B})$ 中存在一个正合列

$$0 \to \mathbf{p}(0, X_2^m) \xrightarrow{f^m} \cdots \longrightarrow \mathbf{p}(0, X_2^{m-k+1}) \xrightarrow{f^{m-k+1}} \mathbf{p}(0, X_2^{m-k})$$

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{p}(X_1^1, X_2^1) \xrightarrow{f^1} \mathbf{p}(X_1^0, X_2^0) \xrightarrow{f^0} M \longrightarrow 0.$$

显然，所有 $\mathbf{p}(X_1^i,\ X_2^i)$、$\mathbf{p}(0,\ X_2^j) \in \mathcal{X}$。因此，$\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M) \leq m$。 ■

定理 4.3。

$$\max\{\operatorname{gl.resdim}_{\mathcal{X}_1}(\mathcal{A}), \operatorname{gl.resdim}_{\mathcal{X}_2}(\mathcal{B})\}$$
$$\leq \operatorname{gl.resdim}_{\mathcal{X}}(F \downarrow \mathcal{B}) \leq$$
$$\max\{\operatorname{gl.resdim}_{\mathcal{X}_1}(\mathcal{A}) + \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}_2}(F(\mathcal{X}_1)) + 1, \operatorname{gl.resdim}_{\mathcal{X}_2}(\mathcal{B})\}$$

证明。 我们仅证明不等式

$$\max\{\operatorname{gl.resdim}_{\mathcal{X}_1}(\mathcal{A}), \operatorname{gl.resdim}_{\mathcal{X}_2}(\mathcal{B})\} \leq \operatorname{gl.resdim}_{\mathcal{X}}(F \downarrow \mathcal{B}),$$

因为另一个不等式可由命题 4.2 得出。

我们可以假设 $n := \operatorname{gl.resdim}_{\mathcal{X}}(F \downarrow \mathcal{B}) < \infty$. 对于任意对象 $M_1 \in \mathcal{A}$ 和$M_2 \in \mathcal{B}$，由引理 4.1 可得

$$\text{相对分辨维数}_{\mathcal{X}_2}(M_2) = \text{相对分辨维数}_{\mathcal{X}}\left(\begin{smallmatrix}0\\M_2\end{smallmatrix}\right) \leq n \text{ 且相对分辨维数}_{\mathcal{X}_1}(M_1) \leq \text{相对分辨维数}_{\mathcal{X}}\left(\begin{smallmatrix}M_1(M_1)\\F\end{smallmatrix}\right) \leq n$$

因此，gl.相对分辨维数$_{\mathcal{X}_1}(\mathcal{A}) \leq n$ 且 gl.相对分辨维数$_{\mathcal{X}_2}(\mathcal{B}) \leq n$。 ■

对偶地，我们有命题 4.2 和定理 4.3 的相应对偶结果。

命题 4.4。 假设 $\operatorname{coresdim}_{\mathcal{Y}_1}(G(\mathcal{Y}_2)) < \infty$。对于 $(\mathcal{A} \uparrow \mathrm{G})$ 中的任意对象 M，有

$$\max\{\operatorname{coresdim}_{\mathcal{Y}_1}(M_1) - \operatorname{coresdim}_{\mathcal{Y}_1}(G(\mathcal{Y}_2)), \operatorname{coresdim}_{\mathcal{Y}_2}(M_2)\}$$
$$\leq \operatorname{coresdim}_{\mathcal{Y}}(M) \leq$$
$$\max\{\operatorname{coresdim}_{\mathcal{Y}_1}(M_1), \operatorname{coresdim}_{\mathcal{Y}_2}(M_2) + \operatorname{coresdim}_{\mathcal{Y}_1}(G(\mathcal{Y}_2)) + 1\}.$$

定理 4.5。

$$\max\{\text{gl。coresdim}_{\mathcal{Y}_1}(\mathcal{A}),\ \text{格.核心相对分辨维数}\ \mathcal{Y}_2(\mathcal{B})\}$$
$$\leq \text{gl.核相对分辨维数}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{A} \uparrow \mathrm{G}) \leq$$
$$\max\{\text{gl。coresdim}_{\mathcal{Y}_1}(\mathcal{A}),\ \text{gl.核心相对分辨维数}\ \mathcal{Y}_2(\mathcal{B}) + \text{余分辨维数}_{\mathcal{Y}_1}(G(\mathcal{Y}_2)) + 1\}$$

同调维数 $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}_2}(F(\mathcal{X}_1))$ 和 $\operatorname{coresdim}_{\mathcal{Y}_1}(G(\mathcal{Y}_2))$ 在命题 4.2 和命题 4.4 以及定理 4.3 和定理 4.5 所建立的估计中发挥着核心作用。在 Gorenstein 情形下，这些量值得特别关注，因为它们具有自然的解释：它们衡量一个函子距离保持 Gorenstein 对象还有多远。

定义 4.6。 设 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 和 $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 为函子， A 和 B 为两个环，且 U 为一个 (B, A)-双模。

(1) F 的全局*Gorenstein*投射维数定义为:

$$\mathrm{GPD}(F) := \sup\{\mathrm{Gpd}_{\mathcal{B}}(F(A)) \mid A \in \mathcal{GP}(\mathcal{A})\}.$$

特别地，左全局***Gorenstein***投射维数的 U 定义如下:

$$\mathrm{lGPD}(U) := \mathrm{GPD}(U \otimes_A -).$$

(2) 该全局***Gorenstein***内射维数 的 G定义如下:

$$\mathrm{GID}(G) := \sup\{\mathrm{Gid}_{\mathcal{A}}(G(B)) \mid B \in \mathcal{GI}(\mathcal{B})\}.$$

特别地，左全局***Gorenstein***内射维数 的 U 定义如下:

$$\mathrm{lGID}(U) := \mathrm{GID}(\mathrm{Hom}_B(U, -)).$$

阿贝尔范畴的全局 Gorenstein 投射（分别地，内射）维数衡量该范畴距离每个对象都是 Gorenstein 投射（分别地，内射）这一性质有多远。类似地，函子的全局 Gorenstein 投射（分别地，内射）维数衡量该函子距离保留 Gorenstein 投射（分别地，内射）对象有多远:

(1) F 保留 Gorenstein投射对象，当且仅当 GPD(F) $= 0$。**(2)** G 保留 Gorenstein内射对象，当且仅当 GID(G) $= 0$。

注4.7。 类似地，也可以定义函子的全局投射维数/内射维数:

$$\mathrm{PD}(F) := \sup\{\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(F(A)) \,|\, A \in \mathcal{P}(\mathcal{A})\},$$
$$\mathrm{ID}(G) := \sup\{\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(G(B)) \,|\, B \in \mathcal{I}(\mathcal{B})\}.$$

在某些假设下，函子的全局投射维数/内射维数不过是某些对象的投射维数/内射维数:

(1) 如果 $\mathcal{A}$ 有一个投射生成元 P，且 F 保留直和，那么我们有 $\mathrm{PD}(F) = \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(F(P))$。(2) 如果 $\mathcal{B}$ 有一个内射余生成元 E，且 G 保留直积，那么 $\mathrm{ID}(G) = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(G(E))$。

断言 *(2)* 是对偶的。为证明 *(1)*，我们只需证明不等式 $\mathrm{PD}(F) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(F(P))$，因为 P是投射的。

设 Q 是 $\mathcal{A}$中的一个投射对象。由于 P 是一个投射生成元，存在一个指标集 I，使得 Q 是 $P^{(I)}$的一个直和项。由于 F 保持余积， $F(P^{(I)}) \cong F(P)^{(I)}$. 因此，$F(Q)$是 $F(P)^{(I)}$的一个直和项，故 $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(F(Q)) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(F(P)^{(I)}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(F(P))$。由于这对每个投射对象 Q都成立，取上确界可得 $\mathrm{PD}(F) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(F(P))$，证明至此完成。

具有足够投射对象（分别地，内射对象）的阿贝尔范畴中，Gorenstein 射影对象构成的类是投射可解的（分别地，内射余可解的），并且对直和（分别地，积）及直和项封闭；例如，见[Hol04，定理 2.5]（针对模范畴）或 [P´er16，定理 11.2.4] （针对阿贝尔范畴）。利用定理 3.6，逗号范畴中对象的 Gorenstein 维数的以下估计，可直接由命题 4.2 和命题 4.4 分别应用于 Gorenstein 射影对象类和内射对象类得到。

命题4.8。 设 $M \in (F \downarrow \mathcal{B})$ 和 $N \in (\mathcal{A} \uparrow \mathrm{G})$ 是两个对象。

(1) 假设 F： $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 与有限全局*Gorenstein*投射维数全相容。那么

$$\begin{gathered}\max\{\mathrm{Gpd}_{\mathcal{A}}(M_1), \mathrm{Gpd}_{\mathcal{B}}(M_2) - \mathrm{GPD}(F)\} \\ \leq \mathrm{Gpd}_{(F\downarrow\mathcal{B})}(M) \leq \\ \max\{\mathrm{Gpd}_{\mathcal{A}}(M_1) + \mathrm{GPD}(F) + 1, \mathrm{Gpd}_{\mathcal{B}}(M_2)\}\end{gathered}$$

因此， M 具有有限 *Gorenstein* 射影维数，当且仅当 M_1 和 M_2也具有有限 *Gorenstein* 射影维数。

(2) 假设 G： $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 是全余相容的，且具有有限的整体 *Gorenstein* 内射维数。那么

$$\begin{gathered}\max\{\mathrm{Gid}_{\mathcal{A}}(N_1) - \mathrm{GID}(G), \mathrm{Gid}_{\mathcal{B}}(N_2)\} \\ \leq \mathrm{Gid}_{(\mathcal{A}\uparrow\mathrm{G})}(N) \leq \\ \max\{\mathrm{Gid}_{\mathcal{A}}(N_1), \mathrm{Gid}_{\mathcal{B}}(N_2) + \mathrm{GID}(G) + 1\}\end{gathered}$$

因此， N 具有有限 *Gorenstein* 内射维数，当且仅当 N_1 和 N_2也具有有限 *Gorenstein* 内射维数。

现在我们准备证明引言中的定理 B。再次使用定理 3.6，分别将定理 4.3 和 4.5 应用于 Gorenstein 射影对象类和 Gorenstein 内射对象类，即可立即得到证明。

定理 4.9。

(1) 假设 F： $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是全相容的。那么 *max*{广义投射维数*(*$\mathcal{A}$*)*，广义投射维数*(*$\mathcal{B}$*)*} $\leq$广义投射维数*(*$F \downarrow \mathcal{B}$*)* $\leq$*max*{广义投射维数*(*$\mathcal{A}$*)*+广义投射维数*(*F*)*+1，广义投射维数*(*$\mathcal{B}$*)*}因此，逗号范畴 *(*$F \downarrow \mathcal{B}$*)* 具有有限的全局*Gorenstein*投射维数，当且仅当 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$也具有有限的全局*Gorenstein*投射维数。*(2)* 假设 G: $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 是全余相容的。那么 *max*{*Gorenstein* 内射维数*(*$\mathcal{A}$*)*，*Gorenstein* 内射维数*(*$\mathcal{B}$*)*} $\leq$ *Gorenstein* 内射维数 *(*$\mathcal{A} \uparrow G$*)* $\leq$*max*{*Gorenstein* 内射维数*(*$\mathcal{A}$*)*，*Gorenstein* 内射维数*(*$\mathcal{B}$*)* + *Gorenstein* 内射维数*(*G*)* + 1}因此，逗号范畴 *(*$\mathcal{A} \uparrow G$*)* 具有有限的全局*Gorenstein*内射维数，当且仅当 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$也具有有限的全局*Gorenstein*内射维数。

注4.10。 谨记引理 *2.11*，定理 *4.3* 和 *4.5* 也分别可应用于投射对象类和内射对象类:

$$\begin{gathered}\max\{\mathrm{PD}(\mathcal{A}), \mathrm{PD}(\mathcal{B})\} \leq \mathrm{PD}(F \downarrow \mathcal{B}) \leq \max\{\mathrm{PD}(\mathcal{A}) + \mathrm{PD}(F) + 1, \mathrm{PD}(\mathcal{B})\} \\ \max\{\mathrm{ID}(\mathcal{A}), \mathrm{ID}(\mathcal{B})\} \leq \mathrm{ID}(\mathcal{A} \uparrow \mathrm{G}) \leq \max\{\mathrm{ID}(\mathcal{A}), \mathrm{ID}(\mathcal{B}) + \mathrm{ID}(G) + 1\}\end{gathered}$$

其中，对于阿贝尔范畴 $\mathcal{C}$，$\mathrm{PD}(\mathcal{C}) := \sup\{\mathrm{pd}_{\mathcal{C}}(M) \mid M \in \mathcal{C}\}$ 以及 $\mathrm{ID}(\mathcal{C}) := \sup\{\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(M) \mid M \in \mathcal{C}\}$ 分别表示 $\mathcal{C}$的整体投射维数和整体内射维数。

因此，逗号范畴 $(F \downarrow \mathcal{B})$ （相应地，$(\mathcal{A} \uparrow \mathrm{G})$）具有有限整体投射维数（相应地，有限整体内射维数），当且仅当 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$也具有有限整体投射维数（相应地，有限整体内射维数）。

现在我们证明引言中的定理 C，也就是说，我们给出若干情形，使得定理 4.9 中的估计成为精确公式，从而部分回答引言中提出的问题 2。

命题 4.11。

(1) 若 $F = 0$，则 GPD($F \downarrow \mathcal{B}$) = GPD($\mathcal{A} \times \mathcal{B}$) = max{GPD($\mathcal{A}$)，GPD($\mathcal{B}$)}.(2) 若 $G = 0$，则 GID($\mathcal{A} \uparrow$ G) = GID($\mathcal{A} \times \mathcal{B}$) = max{GID($\mathcal{A}$)，GID($\mathcal{B}$)}.

证明。 设 $F=0$。在这种情况下，$(F\downarrow\mathcal{B})$ 不过是积范畴$\mathcal{A}\times\mathcal{B}$。根据推论 3.7，对于对象 $(M_1,\ M_2)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$，$(M_1,\ M_2)\in\mathcal{GP}(\mathcal{A}\times\mathcal{B})$ 当且仅当 $M_1\in\mathcal{GP}(\mathcal{A})$ 且 $M_2\in\mathcal{GP}(\mathcal{B})$。由此立即得到

$$\mathrm{Gpd}_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(M_1,M_2)=\sup\{\mathrm{Gpd}_{\mathcal{A}}(M_1),\mathrm{Gpd}_{\mathcal{B}}(M_2)\}.$$

对于任意整数 $n\geq 0$，我们都有以下等价关系：

$$\begin{aligned}\mathrm{GPD}(\mathcal{A}\times\mathcal{B})\leq n &\Leftrightarrow \forall(M_1,M_2)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B},\ \mathrm{Gpd}_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(M_1,M_2)\leq n\\ &\Leftrightarrow \forall M_1\in\mathcal{A},\ M_2\in\mathcal{B},\mathrm{Gpd}_{\mathcal{A}}(M_1)\leq n \text{ and } \mathrm{Gpd}_{\mathcal{B}}(M_2)\leq n\\ &\Leftrightarrow \mathrm{GPD}(\mathcal{A})\leq n \text{ and } \mathrm{GPD}(\mathcal{B})\leq n.\end{aligned}$$

这就证明了我们所要的等式。 ■

回顾一下，如果一个阿贝尔范畴具有足够多的投射对象和足够多的内射对象，并且投射对象类与内射对象类重合，则称其为 Frobenius。下面的引理是引理 2.16 的直接推论。

引理 4.12。 假设 $\mathcal{C}$ 是一个具有足够多投射对象和内射对象的阿贝尔范畴。那么，当且仅当$\mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{C})=0$时， $\mathcal{C}$ 是 *Frobenius* 范畴。

推论 4.13。 假设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 都具有足够多的投射对象和内射对象。

(1) 如果 F 满足 *(P3)*，那么$(F\downarrow\mathcal{B})$ 是 *Frobenius* 范畴，当且仅当 $\mathcal{A}$ 、 $\mathcal{B}$和 $F=0$也是 *Frobenius* 范畴。(2) 如果 G 满足 *(E3)*，那么$(\mathcal{A}\uparrow\mathrm{G})$ 是 *Frobenius* 范畴，当且仅当 $\mathcal{A}$ 、$\mathcal{B}$ 和 $G=0$也是 *Frobenius* 范畴。

证明。 根据引理 4.12，我们只需证明：当且仅当 GPD$(F\downarrow\mathcal{B})=0$ 时，GPD$(\mathcal{A})=$ GPD$(\mathcal{B})=0$ 以及 $F=0$。然而，只要证明当 GPD$(F\downarrow\mathcal{B})=0$时有 $F=0$ ，这就可由命题 4.11推出。

假设 GPD$(F\downarrow\mathcal{B})\ =0$。根据引理 4.12，$(F\downarrow\mathcal{B})$ 中的每个对象都是 Gorenstein 射影对象。特别地，这意味着$\mathbf{p}$保 Gorenstein 射影对象，因此根据引理 3.5， F 弱相容。由于它满足 (P3)，故它是全相容的。

现在假设 $F\neq 0$。于是我们得到一个对象 $M_1\in\mathcal{A}$ ，使得 $F(M_1)\neq 0$。由定理 3.6 可知，对象 $M:=\left(\begin{smallmatrix}M_1\\0\end{smallmatrix}\right)$ 不是 Gorenstein 射影对象，因为 Ker$\varphi^M=F(M_1)\neq 0$，这与 $(F\downarrow\mathcal{B})$ 中的每个对象都是 Gorenstein 射影对象这一事实矛盾。因此 $F=0$。 ■

回顾一下，若环 R 的左（分别为右） R-模的内射对象与左（分别为右） R-模的投射对象相同，则称 R 为拟 Frobenius 环。等价地，当且仅当 R-模是弗罗贝尼乌斯范畴时，R 才是拟 Frobenius 环。

推论 4.14. 假设 $U\otimes_A-$ 满足 *(P3)*，或者 $\mathrm{Hom}_B(U,-)$ 满足 *(E3)*。那么 T 是拟 *Frobenius* 当且仅当 A 、 B 和 $U=0$也是拟 *Frobenius*。

命题 4.15.

(1) 若 $\mathcal{A}$ 是 *Frobenius*，且 $0\neq F\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 弱相容，则$\mathrm{GPD}(F\downarrow\mathcal{B})=\max\{\mathrm{GPD}(F)+1,\mathrm{GPD}(\mathcal{B})\}$.(2) 若 $\mathcal{B}$ 是 *Frobenius*，且 $0\neq G$: $\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ 弱余相容，则

$$\mathrm{GID}(\mathcal{A}\uparrow G)=\max\{\mathrm{GID}(\mathcal{A}),\mathrm{GID}(G)+1\}.$$

证明。令 $\mathcal{T}=(F\downarrow\mathcal{B})$，并假设 $\mathcal{A}$是 Frobenius。首先注意到 $F\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$是全相容的（见注 3.4）。由引理 4.12，我们得到 GPD($\mathcal{A}$) $=0$，因此由定理 4.9 可知

$$\mathrm{GPD}(\mathcal{B})\leq\mathrm{GPD}(F\downarrow\mathcal{B})\leq\max\{\mathrm{GPD}(F)+1,\mathrm{GPD}(\mathcal{B})\}.$$

如果 GPD(F) $+1\leq$ GPD($\mathcal{B}$)，那么 GPD($F\downarrow\mathcal{B}$) $=$ GPD($\mathcal{B}$)，结论得证。因此，不妨设 GPD($\mathcal{B}$) $<$ GPD(F) $+1$。由于 GPD(F) $\leq$ GPD($\mathcal{B}$)，我们得到$n=$ GPD(F) $=$ GPD($\mathcal{B}$)。

设 $M_1\in\mathcal{GP}(\mathcal{A})=\mathcal{A}$ 是一个满足 $n=$ Gpd$_{\mathcal{B}}$(F(M_1)) 的对象。若 $n=0$，我们可以选取 M_1，使得 $F(M_1)\neq0$；该对象之所以存在，是因为 $F\neq0$。于是，$M:=\left(\begin{smallmatrix}M_1\\0\end{smallmatrix}\right)$不是 Gorenstein 射影的，因为 φ^M 不是单态射，所以 Gpd$_{\mathcal{T}}M=1=n+1$。

假设 $n\geq1$，并考虑 $(F\downarrow\mathcal{B})$ 中的短正合序列

$$0\to\left(\begin{smallmatrix}0\\F(M_1)\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}M_1\\F(M_1)\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}M_1\\0\end{smallmatrix}\right)\to0.$$

根据定理 3.6，$\left(\begin{smallmatrix}M_1\\F^{(M_1)}\end{smallmatrix}\right)$是 Gorenstein 射影。由引理 2.14(3) 和 4.1(1) 可得

$$\mathrm{Gpd}_{(F\downarrow\mathcal{B})}\left(\begin{smallmatrix}M_1\\0\end{smallmatrix}\right)=\mathrm{Gpd}_{(F\downarrow\mathcal{B})}\left(\begin{smallmatrix}0\\F(M_1)\end{smallmatrix}\right)+1=\mathrm{Gpd}_{\mathcal{B}}(F(M_1))+1=n+1.$$

这表明 GPD($F\downarrow\mathcal{B}$) $=n+1=$ GPD(F) $+1$。 ■

推论 4.16。假设 $U\neq0$。

（1）如果 A 是拟 *Frobenius* 且 U 是弱相容的，则

$$\mathrm{gl.Gdim}(T)=\max\{\mathrm{lGPD}(U)+1,\mathrm{gl.Gdim}(B)\}.$$

（2）如果 B 是拟 *Frobenius* 且 U 是弱余相容的，则

$$\mathrm{gl.Gdim}(T)=\max\{\mathrm{gl.Gdim}(A),\mathrm{lGID}(U)+1\}.$$

弗罗贝尼乌斯对和函子在代数中是非常经典的。设 $\alpha\colon\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ and$\beta\colon\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ 为两个自等价。回顾一下，伴随对 (F,G) 按照 [Mor65] 的说法称为 (α, β^{-1})-强弗罗贝尼乌斯对；按照 [CR22] 的说法，如果 (F,G) 和 $(G,\beta F\alpha)$ 都是伴随对，则称其为类型为 (α,β) 的弗罗贝尼乌斯对。这里我们简称这样的对为弗罗贝尼乌斯对。Chen 和 Ren 在 [CR22] 中的主要结果之一指出，阿贝尔范畴之间的忠实弗罗贝尼乌斯函子会保持并反映具有有界 Gorenstein 射影维数的对象。具体而言，若 $F\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是忠实弗罗贝尼乌斯函子，则对每个对象 $X\in\mathcal{A}$，都有 Gpd$_{\mathcal{A}}$(X) $=$ Gpd$_{\mathcal{B}}$(F(X))；参见 [CR22, 定理 3.2]。由此立即可得 gl.Gdim($\mathcal{A}$) $\leq$ gl.Gdim($\mathcal{B}$)。这一结果将是推导下一个公式的关键。

引理 4.17。假设(F,G) 是一个弗罗贝尼乌斯对。则

(1) F 是全相容的，并且广义投射维数(F) $=0$。

(2) G 是全余相容的，并且$\mathrm{GID}(G)=0$。

证明。(1) 函子 F是全相容的，因为根据 [CR22，推论 2.2]，它是正合的并保持投射对象。由于 F也根据 [CR22，引理 3.6], 保持 Gorenstein投射对象，因此 F的广义投射维数为 $=0$。

(2) 是对偶的。 ■

回想一下，如果 (F, G) 是一个伴随对，那么 $(F \downarrow \mathcal{B})$ 和 $(\mathcal{A} \uparrow G)$ 同构，且二者都记作 $\mathcal{T}$。

命题 4.18。 假设$(F、 G)$ 是一个弗罗贝尼乌斯对，且 F 和 G 是非零函子。

(1) 如果 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是忠实的，则 广义投射维数$(\mathcal{T}) = \max\{$广义投射维数$(\mathcal{A}) + 1$，广义投射维数$(\mathcal{B})\}$.
(2) 如果 $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 是忠实的，则 广义内射维数$(\mathcal{T}) = \max\{$广义内射维数$(\mathcal{A})$，广义内射维数$(\mathcal{B}) + 1\}$.

证明。 根据引理 4.17， F 是全相容的，并且广义投射维数$(F) = 0$。因此，由定理 4.9可得

$$\max\{\mathrm{GPD}(\mathcal{A}), \mathrm{GPD}(\mathcal{B})\} \leq \mathrm{GPD}(\mathcal{T}) \leq \max\{\mathrm{GPD}(\mathcal{A}) + 1, \mathrm{GPD}(\mathcal{B})\}.$$

再次利用 [CR22, 定理 3.2]，我们得到 GPD$(\mathcal{A}) \leq$ GPD$(\mathcal{B})$。显然，当 GPD$(\mathcal{A}) <$ GPD$(\mathcal{B})$ 时，GPD$(\mathcal{T}) =$ GPD$(\mathcal{B})$。因此，我们可以假设 $n :=$GPD$(\mathcal{A}) =$ GPD$(\mathcal{B}) < \infty$。于是 $n \leq$ GPD$(\mathcal{T}) \leq n + 1$.

设 $M_1 \in \mathcal{A}$是一个满足 $n =$ Gpd$_{\mathcal{A}}(M_1)$ 的对象。若 $n = 0$，我们可以选取 M_1，使得 $F(M_1) \neq 0$，这确实存在，因为 $F \neq 0$。那么 $M := \binom{M_1}{0}$ 不是 Gorenstein 射影的，因为 φ^M 不是单态射，所以 $\mathrm{Gpd}_{\mathcal{T}} M = 1 = n + 1$。

假设 $n \geq 1$。利用 [CR22, 定理 3.2], ，我们得到 Gpd$_{\mathcal{B}}(F(M_1)) =$Gpd$_{\mathcal{A}}(M_1) = n$。于是，对某个投射对象 $Q \in \mathcal{B}$，有 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{B}}(F(M_1), Q) \neq 0$ （例如参见 [Hol04, 定理 2.20]）。将函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, \binom{0}{Q})$ 应用于短正合序列

$$0 \to \binom{0}{F(M_1)} \to \binom{M_1}{F(M_1)} \to \binom{M_1}{0} \to 0,$$

我们得到一个阿贝尔群的正合列

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{T}}(\binom{M_1}{F(M_1)}, \binom{0}{Q}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{T}}(\binom{0}{F(M_1)}, \binom{0}{Q})$$

$$\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{T}}(\binom{M_1}{0}, \binom{0}{Q}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{T}}(\binom{M_1}{F(M_1)}, \binom{0}{Q}) \to \cdots$$

由引理 2.10，对每个 $i \geq 1$，我们得到 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{T}}(\binom{M_1}{F^{(M_1)}}, \binom{0}{Q}) = 0$。因此，再次应用引理 2.10 以及上述长正合列，我们得到这些同构

$$\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{T}}(\binom{M_1}{0}, \binom{0}{Q}) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{T}}(\binom{0}{F(M_1)}, \binom{0}{Q}) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{B}}(F(M_1), Q) \neq 0.$$

由于 $\binom{0}{Q} \in \mathcal{T}$是投射的，$\mathrm{Gpd}_{\mathcal{T}} \binom{M_1}{0} \geq n + 1$。但 $\mathrm{Gpd}_{\mathcal{T}} \binom{M_1}{0} \leq$ GPD$(\mathcal{T}) \leq n + 1$，因此可知 $n <$ Gpd$_{\mathcal{T}} \binom{M_1}{0}$。于是 $\mathrm{Gpd}_{\mathcal{T}} \binom{M_1}{0} = n + 1$。这表明 GPD$(\mathcal{T}) = n + 1 =$ GPD$(\mathcal{A}) + 1$. ■

本文最后以一个关于全局 Gorenstein 维数的结果作结， n
该结果将 n-态射范畴的全局 Gorenstein 维数与基范畴的全局 Gorenstein 维数联系起来。

命题 4.19。 设 $\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔范畴， $n \geq 2$ 是一个整数。

(1) 若 $\mathcal{C}$ 有足够多的射影对象，且直和存在并且是正合的，则

$$\mathrm{GPD}(\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C})) = \mathrm{GPD}(\mathcal{C}) + 1.$$

(2) 如果 $\mathcal{C}$ 有足够的内射对象，且直积存在并且它们是正合的，那么

$$\mathrm{GID}(\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C})) = \mathrm{GID}(\mathcal{C}) + 1.$$

特别地，如果 $\mathcal{C}$ 满足假设（*1*）和（*2*），那么

$$\mathrm{gl.Gdim}(\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C})) = \mathrm{gl.Gdim}(\mathcal{C}) + 1.$$

证明。我们对 n进行归纳法。为此，我们使用引理 2.6 中的范畴同构

$$\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C}) \cong (H_n \downarrow \mathrm{Mor}_{n-1}(\mathcal{C})).$$

设 $n = 2$，并证明 $\mathrm{GPD}(\mathrm{Mor}_2(\mathcal{C})) = \mathrm{GPD}(\mathcal{C}) + 1$.（注意 $\mathrm{Mor}_1(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$）。在此情形下，函子 H_2 就是恒等函子 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$: $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$，因此它是一个忠实弗罗贝尼乌斯函子。由命题 4.18，我们有

$$\mathrm{GPD}(\mathrm{Mor}_2(\mathcal{C})) = \max\{\mathrm{GPD}(\mathcal{C}) + 1, \mathrm{GPD}(\mathcal{C})\} = \mathrm{GPD}(\mathcal{C}) + 1.$$

现在假设 $n \geq 3$。由于函子 H_n 保持 Gorenstein投射对象，根据推论 3.11，由定理 4.9(1)可知

$$\max\{\mathrm{GPD}(\mathcal{C}), \mathrm{GPD}(\mathrm{Mor}_{n-1}(\mathcal{C}))\}$$
$$\leq \mathrm{GPD}(\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C})) \leq$$
$$\max\{\mathrm{GPD}(\mathcal{C}) + 1, \mathrm{GPD}(\mathrm{Mor}_{n-1}(\mathcal{C}))\}$$

由归纳假设可得 $\mathrm{GPD}(\mathrm{Mor}_{n-1}(\mathcal{C})) = \mathrm{GPD}(\mathcal{C}) + 1$。因此，

$$\mathrm{GPD}(\mathrm{Mor}_n(\mathcal{C})) = \mathrm{GPD}(\mathrm{Mor}_{n-1}(\mathcal{C})) = \mathrm{GPD}(\mathcal{C}) + 1.$$

■

注记 4.20。结合注记 *3.12*，由命题 *4.19* 可得以下公式：

$$\mathrm{gl.Gdim}(T_n(R)) = \mathrm{gl.Gdim}(R) + 1.$$

最后，我们以一个读者可能会提出的自然问题作为本文的结尾：关于Gorenstein平坦模和维数，我们能说些什么？这个问题将在另一篇目前正在准备的论文中探讨 [EGO26], 在该论文中，我们研究满足兰贝克定理的戈伦斯坦类比的环：模 M 是 Gorenstein平坦的，当且仅当其特征模 $M^+ := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 是 Gorenstein 内射的。在这项研究过程中，我们开始研究三角矩阵环上的 Gorenstein 平坦模和维数。因此，本文为那项工作奠定了基础，而两篇论文则相辅相成。

致谢。作者得到西班牙科学、创新与大学部通过其国家研究局提供的项目部分资助，项目编号/AEI/PID2024- 158993NB-I00。

References

[ARS95] M. Auslander、I. Reiten 和 S.O. Smalø, *Representation theory of Artin algebras*, 《剑桥高等数学研究丛书》**36**，剑桥大学出版社，1995。[BEGO 21] *Relative Gorenstein dimensions over triangular matrix rings* D. Bennis、R. El Maaouy、J. R. Garcıa Rozas 和 L. Oyonarte, , 《数学》 **9** 2021 2676 （），。[BM10] D. Bennis 和 N. Mahdou, *Global Gorenstein dimensions*, 《美国数学会会刊》**138** （2010），461–465。[CR22] X.W. Chen 和 W. Ren, *Frobenius functors and Gorenstein homological properties*, 《代数杂志》**610** （2022），18–37。

[Elm26] R. El Maaouy, *Homological algebra in categories of representations of quivers via duality pairs* **708** 2026 91 137 ，《代数杂志》（），–。[EGO26] ´ *Rings over which a module is Gorenstein flat if and only if its character module is Gorenstein injective* R. El Maaouy、J. R. Garcıa Rozas 和 L. Oyonarte，，准备中。[ECT 14] ´ *Gorenstein conditions over triangular matrix rings* **218** 2014 1544 1554 E. Enochs、M. Cortes-Izurdiaga 和 B. Torrecillas，，《纯粹与应用代数杂志》（），–。[EJ00] E. E. Enochs 和 O. M. G. Jenda，*Relative Homological Algebra*，de Gruyter数学论丛，第30卷，Walter de Gruyter（2000）。[EHSL16] *Gorenstein projective modules over triangular matrix rings* **23** 2016 97 104 H. Eshraghi、R. Hafezi、Sh. Salarian 和 Z.W. Li，，《代数汇刊》（），–。[Fie72] D. J. Fieldhouse，*Character modules，dimension and purity*，《格拉斯哥数学杂志》13（1972），144–146。[FGR75] R.M. Fossum、P. Griffith 和 I. Reiten，*Trivial extensions of abelian categories. Homological algebra of trivial extensions of abelian categories with applications to ring theory*，《数学讲义》456，施普林格出版社，1975。[Gil17] J. Gillespie，*On Ding injective，Ding projective and Ding flat modules and complexes*，《落基山数学杂志》47（2017），2641–2673。[Gre82] E.L. Green，*On the representation theory of rings in matrix form*，《太平洋数学杂志》100（1982），123–138。[HV99] A. Haghany 和 K. Varadarajan，*Study of formal triangular matrix rings*，《代数通讯》27（1999），5507–5525。[HV00] A. Haghany 和 K. Varadarajan，*Study of modules over formal triangular matrix rings*，《纯粹与应用代数杂志》147（2000），41–58。[Hol04] H. Holm，*Gorenstein homological dimensions*，《纯粹与应用代数杂志》189（2004），167–193。[HZ22] J. Hu 和 H. Zhu，*Special precovering classes in comma categories*，《中国科学：数学》65（2022），933–950。[Hua22] Z. Huang，*Homological dimensions relative to preresolving subcategories II*，《数学论坛》34（2022），507–530。[LZHZ 20] *Gorenstein projective modules and recollements over triangular matrix rings* **48** 11 2020 4932 4947 H. H. Li、Y. F. Zheng、J. S. Hu 和 H. Y. Zhu，，《代数通讯》（）（），–。[Mao20] L. Mao，*Cotorsion pairs and approximation classes over formal triangular matrix rings*，《纯粹与应用代数杂志》224（2020），106271。[Mao22] L. Mao，*Ding modules and dimensions over formal triangular matrix rings*，《帕多瓦大学数学研讨会报告》148（2022），1–22。[MY20] H. Minamoto 和 K. Yamaura，*Homological dimension formulas for trivial extension algebras* **224** 2020 106344 ，《纯粹与应用代数杂志》（），。[Mor65] K. Morita，*Adjoint pairs of functors and Frobenius extensions*，《东京教育大学科学报告，A辑》9（1965），40–71。[PR73] L. Palmer 和 J.-E. Roos，*Explicit formulae for the global homological dimensions of trivial extensions of rings* **27** 1973 380 413 ，《代数杂志》（），–。[PZH22] Y. Y. Peng、R. M. Zhu 和 Z. Y. Huang，*Gorenstein projective objects in comma categories* **84** 2022 186 202 ，《匈牙利数学期刊》（），–。[P´er16] M. A. P´erez，。《数学专著与研究札记》。CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州。（2016）[Rot79] J. J. Rotman，*Introduction to Abelian Model Structures and Gorenstein Homological Dimensions*，*An Introduction to Homological Algebra*（学术出版社，纽约，1979）。[ˇSto14] J. ˇSˇtovˊıˇcek，*On purity and applications to coderived and singularity categories*，arXiv:1412.1615。[WL22] Z. P. Wang 和 Z.K. Liu，*Recollements induced by monomorphism categories*，《代数杂志》594（2022），614–635。[YHW24] Y. Yuan、J. He 和 D. Wu，*Cotorsion pairs in comma categories*，《捷克斯洛伐克数学杂志》74（149）（2024），715–734。[Zha11] P. Zhang，*Monomorphism categories，cotilting theory，and Gorenstein-projective modules*，《代数杂志》339（2011），181–202。[Zha13] P. Zhang，*Gorenstein-projective modules and symmetric recollements*，《代数杂志》388（2013），65–80。

SMARTiLab Laboratory, Moroccan School of Engineering Sciences, EMSI Rab at, Morocco*Email address*, Rachid El Maaouy: elmaaouy.rachid@gmail.com

Departamento de Matemáticas Universidad de Almería 04071 Almería Spain , , , , J. R.Garcıa Rozas: *Email address* jrgrozas@ual.es

Departamento de Matemáticas, Universidad de Almería, 04071 Almería, Spain *Email address*, LUIS OYONARTE: oyonarte@ual.es