arXiv:2611.29782v1 [math.CO] 22 Nov 2026

交换双洗牌代数与模式避免

ANTON KHOROSHKIN

Abstract. 本文的主要目的是引入交换双洗牌代数的概念，该代数将经典模式回避线性化。单生成元上的自由交换双洗牌代数以排列为基，单项式整除对应于模式包含，而避免给定模式的排列等价类则是其关于单项式理想取商所得商代数的单项式基。该自由代数不是诺特的，但我们证明，对于每个 k，其关于反对称化子 e_k 的商是诺特的；我们还猜想，对于其关于任意一个在对称群作用下稳定的非零理想的商，同样成立。我们为自由代数的理想构造 Gr¨obner 基，并证明，对于字典序及其逆序，元素 $e_k \oplus \tau$（其中 τ遍历任意排列集合）构成一个 Gr¨obner 基。这给出了 Backelin、West 和 Xin 定理的代数形式：避免所有 $k\cdots 21 \oplus \tau$的排列与避免所有 $12\cdots k \oplus \tau$的排列，是同一个商代数的两个单项式基。

Contents

0. 引言 2 0.1. 论文结构 4 1. 洗牌与双洗牌代数 4 1.1. 洗牌代数与连续模式回避 4 1.2. 双洗牌代数 5 1.3. Koszul 理论 5 1.4. 交换双洗牌代数 7 2. 对称交换双洗牌代数 11 2.1. $\mathbb{S}$-对称交换双洗牌代数 11 2.2. $\bigoplus_n \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ 作为交换双洗牌代数 13 3. 诺特性问题 15 3.1. 无限反链 15 3.2. 双洗牌代数 $\mathcal{B}_V$ 和 $\mathscr{S}/(e_k)$ 是诺特的 16 3.3. 关于 $\mathbb{S}$-对称理想的诺特性 17 4. 交换双洗牌代数的 Gr¨obner 基 18 4.1. 单项式序 18 4.2. Gr¨obner 基 19 4.3. Buchberger 判据 19 4.4. 由两种序得到的 Wilf 等价 20 4.5. 示例：商 $\mathscr{S}/(e_n)$ 和 $\mathscr{A}_{1,\ 1}$ 21 4.6. Gr¨obner 基与诺特性 23 5. 矩阵舒伯特簇与 $12\cdots k$和 $k\cdots 21$ 24的形状-Wilf 等价 5.1. 费雷尔棋盘与横截集 24 5.2. 阶梯行列式理想 26 5.3. 棋盘理想与形状-Wilf 等价 29 6. 由 Gr¨obner 基得到的 Backelin–West–Xin 定理 30 6.1. 概述 30 6.2. 见证与排列的棋盘 31 6.3. $\mathcal{W}$-等价类 32 6.4. 理想的分裂 34 6.5. Gr¨obner 基 36 参考文献 37

0. Introduction

本文的主要动机是介绍交换双洗牌代数这一概念，它将经典模式回避线性化。我们希望，下文讨论的诺特性论述与问题以及 Gr¨obner 基的思想，能够为模式回避领域中广为人知的结果带来新的认识。作者并非模式回避方面的专家，本文也无意在该领域提出令人瞩目的新定理。相反，我们希望指出，额外的代数结构或许能为现有定理提供一种新的视角。

回顾一下，若排列 $w \in \mathbb{S}_n$ 包含排列 $p \in \mathbb{S}_k$，则存在指标$1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$，使得对所有 $1 \le a,\ b \le k$，当且仅当 $p(a) < p(b)$ 时，我们有 $w(i_a) < w(i_b)$。换言之， p 的排列矩阵可由 w 的排列矩阵删去若干行以及相同行数的列得到。否则， w 避开 p。对于一个排列集合 P，$\mathrm{Av}_n(P)$ 是所有避开 P中每个元素的 $[n]$ 的排列所组成的集合。若对所有 n，$\#\mathrm{Av}_n(P) = \#\mathrm{Av}_n(P')$，则两个集合 P 和 P' 是 Wilf 等价的。

如果将包含视为某种代数结构中单项式的整除性，便会自然引出我们所称的交换双洗牌代数这一概念（详情见定义 1.1 和 1.3）。粗略地说，这是一列带有结合积的向量空间 $\mathscr{A}(n)$

$$\star_{\sigma,\tau} \colon \mathscr{A}(m) \otimes \mathscr{A}(n) \to \mathscr{A}(m+n)$$

由（σ， τ）洗牌对（即，将 $[m+n]$分解为大小为 m 的子集和大小为 n的子集的分解对）索引的代数称为双洗牌代数。当交换两个因子以及两个分解的两部分时，乘积保持不变，则称其为交换的：

$$u \star_{\sigma,\tau} v = v \star_{\sigma^{op},\tau^{op}} u.$$

由一个元数为一的生成元生成的自由交换双洗牌代数 $\mathscr{S}$ 非常具体。其分量 $\mathscr{S}(n) = \Bbbk\mathbb{S}_n$ 的基由大小为 n的置换矩阵组成，而 $u \star_{\sigma,\ \tau} v$ 则是将带有块 u和 v 的分块对角矩阵的行按照 σ 交错排列，并独立地将其列按照 τ 交错排列而得到的（图 1）。因此，排列 w 在$\mathscr{S}$ 中被 p 整除，当且仅当 w 包含 p。对于排列集合 P， $\mathscr{S}$ 关于单项式理想（P）的商的基由避免 P的排列组成。因此，模式避免问题转化为带有单项式关系的单生成元交换双洗牌代数问题，正如连续模式回避是自由洗牌代数[13]的单项式理想理论一样。

线性框架的优势在于，还可以考虑非单项式理想，而这也能为单项式理想提供信息。例如，如果代数 $\mathscr{I}$ 中的一个理想 $\mathscr{S}$ 有两种不同的单项式退化，那么相应的两组首项单项式就是 Wilf 等价的，因为避开其中任意一组排列的集合构成同一个商$\mathscr{S}/\mathscr{I}$ 的基（命题 4.10）。

本文的另一个主题是有限生成交换双洗牌代数的诺特性。如果一个交换双洗牌代数的所有理想都是有限生成的，我们就称其为诺特代数。代数 $\mathscr{S}$不是诺特的：排列上的包含序存在无限反链 [39, 2, 43], ，而这样的反链生成的单项式理想不是有限生成的（命题 3.2）。对反对称化子 $e_k = \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\sigma$取商后，情况便有所不同。

定理 A (定理 3.4)。 对于每个 $k \ge 1$ 交换双洗牌代数 $\mathscr{S}/(e_k)$ ，它都是诺特的。

这无法在单项式层面看出：对于 $k \ge 3$避开 $k\cdots21$ 的排列（它们构成 $\mathscr{S}/(e_k)$ 的基），其中包含一个无限反链。证明使用了另一个交换双洗牌代数，即 $\mathcal{B}_V = \bigoplus_n \mathrm{End}(V^{\otimes n})$，其维数为 $\dim V = k-1$。根据施尔-韦伊对偶， $\mathscr{S}/(e_k)$ 是 $GL(V)$-不变量在 $\mathcal{B}_V$ 中生成的子代数。 $\mathcal{B}_V$ 的单项式是有限字母表中的词对，

因此根据希格曼引理，它们构成良拟序，[19], 且 $\mathcal{B}_V$ 是诺特的。转向不变量所采用的是希尔伯特经典论证和雷诺算子，整个证明遵循 Sam 和 Snowden [34] 的策略。

代数 $\mathscr{S}/(e_k)$ 是一种 $\mathbb{S}$-对称交换双洗牌代数，也就是说，它是 $\mathscr{S}$ 对某个理想取商得到的代数，其中该理想的各个分量都是群代数 $\Bbbk\mathbb{S}_n$ 的双边理想。这些代数由杨氏格的上集分类（命题 2.3），并且它们是扭交换代数的双洗牌类比（备注 1.12）。

猜想 B（猜想 3.10）：除 $\mathscr{S}$ 本身之外，每个 $\mathbb{S}$-对称交换双洗牌代数都是诺特的。

每个这样的代数都是代数 $\mathscr{A}_{k,\,l}$ 中某一个的商。根据 Sergeev 以及 Berele 和 Regev 的超舒尔–韦伊对偶 [37, 6], $\mathscr{A}_{k,\,l}$ 是超向量空间 $V=\Bbbk^{k|l}$ 上的 $\mathfrak{gl}(k|l)$-不变量代数，其中作用通过 $\mathcal{B}_V$ 给出。定理 A 是 $l=0$ 的情形。第一个未解决情形是 $\mathscr{A}_{1,\,1}$，因为对于 $k,\ l\geq 1$，一般线性超群不是约化的，也不存在雷诺算子。这类有限性问题也出现在关于 T-理想 [38], 的施佩希特问题中，该问题由 Kemer [22, 23] 解决。

在第 4 节中，我们发展了 $\mathscr{S}$ 的理想的 Gr¨obner 基理论，其中包括 Buchberger 判据。例如，对于任意单项式序，e_k 都是 (e_k) 的 Gr¨obner 基，其首单项式为 $k\cdots 21$ 或 $12\cdots k$。这一陈述等价于对不含长单调子序列 [36] 的排列进行 Schensted 枚举（定理 4.12 和备注 4.13）。

作为双洗牌代数的 Gr¨obner 基理论的一个应用，我们考察通过添加尾部从 e_k 得到的元素。对于排列 σ 和 τ，令 $\sigma\oplus\tau$ 为它们的直和，即其矩阵为分块对角矩阵，块为 σ 和 τ。置 $e_k\oplus\tau=\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_k}\operatorname{sgn}(\sigma)\ \sigma\oplus\tau$，对于排列集合 $\mathcal{W}$，记 $g\oplus\mathcal{W}=\{g\oplus\tau\colon\ \tau\in\mathcal{W}\}$。

定理 C（定理 6.1）。对于每个 $k\geq 1$ 以及每个非空排列集合 $\mathcal{W}$，$e_k\oplus\mathcal{W}$都是其生成的理想的 *Gröbner* 基；这对于字典序 $<_{\mathrm{lex}}$ 和反序 $<^c_{\mathrm{lex}}$均成立。对于 $<_{\mathrm{lex}}$，首项单项式为 $k\cdots 21\oplus\mathcal{W}$；对于 $<^c_{\mathrm{lex}}$，则为 $12\cdots k\oplus\mathcal{W}$。

推论 D。对于每个 $k\geq 1$、每个非空排列集合 $\mathcal{W}$ 以及每个 N,

$$\#\mathrm{Av}_N\big(k\cdots 21\oplus\mathcal{W}\big)=\dim\big(\mathscr{S}/(e_k\oplus\mathcal{W})\big)(N)=\#\mathrm{Av}_N\big(12\cdots k\oplus\mathcal{W}\big).$$

对于单个尾部 $\mathcal{W}=\{\tau\}$，两类避形排列的数量相等，这就是 Backelin、West 和 Xin 定理 [4], ；而对于 $k=3$，这是 Babson 和 West 定理 [3]。Backelin、West 和 Xin 在其命题 2.3 之后立即指出了推广到多个尾部的情形，Burstein、Han、Kitaev 和 Zhang 将其表述为一个定理 [8, 定理 2]。因此，这一计数结论是已知的。定理 C 的要点在于其代数形式：两组避形排列是 $\mathscr{S}$的同一个商的两个单项式基。

定理 C 的证明遵循 [3, 4]的思路。从集合 $\mathcal{W}$出发，我们将 $\mathbb{S}_N$ 划分为若干等价类。若某个排列中的一个点的东南方不存在任何来自 $\mathcal{W}$ 的尾部副本，则该点是冻结点。具有相同冻结点的排列构成一个等价类 C，而它们其余的点遍历费雷尔棋盘 λ_C的所有横截集。商随后沿这些等价类分解，

$$\big(\mathscr{S}/(e_k\oplus\mathcal{W})\big)(N)\cong\bigoplus_C\big(R_{\lambda_C}/I_k(\lambda_C)\big)_{(1;1)},$$

其中 R_{λ_C} 是以 λ_C的单元格为变量的多项式环，$I_k(\lambda_C)$是由其 $k\times k$ 子式生成的阶梯行列式理想，而 $(1;1)$ 表示多线性部分。

因此，一切都归结为梯形行列式理想，而这正是我们的方法不同于 [4]之处。Backelin、West 和 Xin 的核心技术结果是 $12\cdots k$和 $k\cdots 21$的形状 Wilf 等价：对于每个费雷尔棋盘 λ，在 λ中避开 $12\cdots k$的 λ的横截集数量，等于在 λ中避开 $k\cdots 21$ 的横截集数量。在 [4] 中，这一点通过显式双射以组合方式得到证明。这里，这一步被一个更具几何性的陈述所取代，而该陈述源自

已知的矩阵舒伯特簇的 Gröbner 基。具体而言， λ的梯形行列式簇由 λ上的部分矩阵构成，这些矩阵在 λ 的外角处的西北方子矩阵的秩小于 k；它与某个弱旗置换的矩阵舒伯特簇相差一个仿射因子（引理 5.10）。根据 Knutson 和 Miller [25]以及 Knutson、Miller 和 Yong [26],的定理，对于反对角项序和对角项序，该簇分别具有两种 Gröbner 退化，其初始理想分别由 $k \times k$子式的反对角项和对角项生成。两个退化环的多线性部分的基，分别由 λ中不含递减 k-链和不含递增 k-链的横截集构成。由于 Gröbner 退化保持维数，这两类横截集的数量相等（定理 5.12）。因此，$12\cdots k$和 $k\cdots 21$ 的形状 Wilf 等价体现为同一个行列式簇的两种退化之间的比较。

0.1. 论文结构。 第 1 节回顾洗牌代数，并介绍双洗牌代数、它们的 Koszul 对偶，并以 Carlitz、Scoville 和 Vaughan 定理 [9] 为例加以说明，同时介绍交换双洗牌代数。第 2 节讨论主要例子，即 $\mathbb{S}$-对称代数和代数 $\mathcal{B}_V$，以及施尔-韦伊对偶。第 3 节专门探讨诺特性问题。第 4 节在 $\mathscr{S}$中发展 Gr¨obner 基，并以商 $\mathscr{S}/(e_k)$ 和 $\mathscr{A}_{1,1}$ 为例。第 5 节回顾费雷尔棋盘，并根据矩阵舒伯特簇的相关结果，推导出 $12\cdots k$和$k\cdots 21$ 的形状 Wilf 等价。第 6 节专门证明定理 C。

致谢。 作者谨向多伦·泽尔伯格致谢。2012年，作者在罗格斯实验数学研讨会上作报告后，他询问洗牌代数理论以及在 [13] 中确立的 Wilf 等价结果能否推广到经典模式避免问题。这一问题直接促成了本研究。

AI 使用声明。 本项目启动时，现有的 AI 工具还不够强大，无法提供实质性帮助。然而，若没有 Claude Opus 5.5 的帮助，本项目也不会问世；在后期阶段，我们广泛使用它进行校对、讨论、数值实验和文献研究。

1. Shuffle and bishuffle algebras

全文中， $\Bbbk$ 是一个特征为零的域，且 $[n] = \{1, \dots, n\}$。排列采用单行表示；对于由互不相同的数构成的序列 $a_1 \cdots a_k$，其标准化记作 $\mathrm{st}(a_1 \cdots a_k) \in \mathbb{S}_k$。

1.1. 洗牌代数与连续模式回避。 一个（m, n）-洗牌是一个排列$\sigma \in \mathbb{S}_{m+n}$，满足 $\sigma(1) < \cdots < \sigma(m)$以及 $\sigma(m+1) < \cdots < \sigma(m+n)$。洗牌是 $\mathbb{S}_{m+n}/(\mathbb{S}_m \times \mathbb{S}_n)$中陪集的最短代表元，而 σ 对应于分解$[m+n] = \sigma([m]) \sqcup \sigma([m+1, m+n])$。

设 Ord_+ 为有限全序集及保序双射所构成的范畴。集合族是一个反变函子 $\mathscr{M}\colon \mathrm{Ord}_+ \to$ ~~Vect; 它~~由空间 $\mathscr{M}(n) = \mathscr{M}([n])$ 决定。对于 $f \in \mathscr{M}(n)$ 以及满足 $|I| = n$ 的有序集 I，我们将 $f_I \in \mathscr{M}(I)$ 记作沿唯一的保序双射 $I \cong [n]$ 对f 的传输。集合族的洗牌张量积为

$$(\mathscr{P} \boxtimes \mathscr{Q})(I) = \bigoplus_{I=J\sqcup K} \mathscr{P}(J) \otimes \mathscr{Q}(K),$$

对 I 的所有分解求和，分解为两个互不相交、但不一定连续的子集，并带有诱导序。结合洗牌代数是关于 $\boxtimes$ 的幺半群，也就是说，它是一个集合族 $\mathscr{A}$，带有自然结合乘积 $\mathscr{A}(J) \otimes \mathscr{A}(K) \to \mathscr{A}(J \sqcup K)$；我们总是假设 $\mathscr{A}(\varnothing) = \Bbbk$。对于指数生成级数 $f_{\mathscr{M}}(t) = \sum_n \dim \mathscr{M}(n)\, t^n/n!$，有 $f_{\mathscr{P}\boxtimes\mathscr{Q}} = f_{\mathscr{P}} f_{\mathscr{Q}}$。

等价地，一个 结合洗牌代数是一个空间序列 $\mathscr{A}(n)$，带有结合积 s

$$\star_\sigma \colon \mathscr{A}(m) \otimes \mathscr{A}(n) \to \mathscr{A}(m+n)$$

由 (m,n)-洗牌 σ 索引：乘积 $u \star_\sigma v$ 是 $u_{\sigma([m])} \otimes v_{\sigma([m+1,m+n])}$ 在映射 $\mathscr{A}(\sigma([m])) \otimes \mathscr{A}(\sigma([m+1,m+n])) \to \mathscr{A}([m+n])$ 下的像。

由一个元数为一的生成元生成的自由洗牌代数是代数 $\mathscr{A}_{MR}$，其中 $\mathscr{A}_{MR}(I) = \Bbbk\mathrm{Sym}(I)$，其单项式是 I 的线性排列，乘积则是词 [32, 13] 的拼接。因此，$\mathscr{A}_{MR}(n) = \Bbbk\mathbb{S}_n$ 以排列为基；对于 $u \in \mathbb{S}_m$ 和 $v \in \mathbb{S}_n$，乘积 $u \star_\sigma v$ 是词 u（由字母 $\sigma([m])$ 写成）与词 v（由字母 $\sigma([m+1,m+n])$ 写成）的拼接。若某个 w 的连续因子标准化后得到 p，则单项式 p 整除单项式 w；因此，$\mathscr{A}_{MR}$ 中的整除性就是连续模式的包含关系。由此，对于一个排列集合 P，理想 (P) 由包含来自 P 的某个连续模式的排列张成，而单项式商 $\mathscr{A}_{MR}/(P)$ 以避免了来自 P 的所有连续模式的排列为基。洗牌代数的单项式序、Gr¨obner 基、S-多项式和 Buchberger 判据将在 [13], 中讨论，而 $\mathscr{A}_{MR}/(P)$ 的 Anick 型分解给出了 [13, §4] 中的簇反演公式。

1.2. **双洗牌代数**。令 $\mathrm{Ord}_+^{(2)}$ 为如下范畴：其对象是有限有序集的对 $(I,\ J)$，满足 $|I| = |J|$；其态射是保序双射对。双集合族是一个反变函子 $\mathscr{A} \colon \mathrm{Ord}_+^{(2)} \to \mathrm{Vect}$，由空间 $\mathscr{A}(n) = \mathscr{A}([n],\ [n])$ 确定。

定义 1.1。双集合族的双混洗张量积为

$$(\mathscr{P} \boxtimes \mathscr{Q})(I,J) = \bigoplus_{\substack{I=I_1\sqcup I_2,\ J=J_1\sqcup J_2 \\ |I_1|=|J_1|}} \mathscr{P}(I_1,J_1) \otimes \mathscr{Q}(I_2,J_2).$$

双洗牌代数是关于 $\boxtimes$ 的幺半群。我们总是假设 $\mathscr{A}(\varnothing,\ \varnothing) = \Bbbk$。

等价地，双洗牌代数是一个序列 $\mathscr{A}(n)$，带有结合的复合运算

$$\star_{\sigma,\tau} \colon \mathscr{A}(n) \otimes \mathscr{A}(m) \to \mathscr{A}(n+m) \text{ indexed by pairs of } (n,m)\text{-shuffles.}$$

自然的生成级数为 $f_{\mathscr{A}}(t) = \sum_n \dim \mathscr{A}(n)\ t^n/(n!)^2$；它是乘法的，因为有 $\binom{n}{k}^2$ 个满足 $|I_1| = |J_1| = k$ 的分解对。

由一个元数为一的生成元 F 生成的自由双洗牌代数，在（I、J）上的单项式是词（i_1、j_1）$\cdots$（i_n、j_n），其中 $I = \{i_1,\ldots,i_n\}$ 且 $J = \{j_1,\ldots,j_n\}$，也就是说，是排列对（α、β）$\in$ Sym（I）$\times$Sym（J）。乘法是词的拼接，因此 F（n）$= \Bbbk$（$\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n$），而 f_F（t）$= 1/$（$1-t$）。若单项式 p 整除单项式 w，则词 w 的某个连续因子在两个坐标上分别标准化为 p。

在 F 上的单项式序是单项式集合上的一族良序，关于保序双射对具有自然性，并且每个乘积映射关于各个自变量都严格递增。例子包括词的字典序：字母先按第一个坐标、再按第二个坐标排序；以及 β-优先序：若 $\beta < \beta'$ 按字典序，则（α、β）$<$（α'、β'），或若 $\beta = \beta'$ 且 $\alpha < \alpha'$ 按字典序。二者都是单项式序，因为词的连接在每个坐标上对于字典序都是序嵌入。

1.3. **Koszul 理论**。双洗牌代数是带有双混洗张量积的双集合族范畴中的幺半群。该范畴是 $\Bbbk$-线性且阿贝尔的，并且 $\boxtimes$ 在每个变量上都是正合的。因此，二次代数理论和 Koszul 对偶 [31, 30, 27]适用于双洗牌代数，正如它们适用于洗牌代数 [13]一样。我们只需要考虑具有一个元数为一的生成元的代数。

若双洗牌代数是自由双洗牌代数 F（第 1.2 节）的商 $A = F/(R)$，且其商理想由子空间 $R \subset F(2)$ 生成，则称它为二次的。回忆一下，$F(2)$ 的基由四个单项式 $(12,12)$、$(12,21)$、$(21,12)$ 和 $(21,21)$ 构成。A 的 Koszul 对偶是

$$A^! = F/(R^\perp),$$

其中，$R^\perp \subset F(2)$ 是 R 关于使这四个单项式正交归一的标量积的正交补；因此 $(A^!)^! = A$。若对每个 i，$\mathrm{Tor}_i^A(\Bbbk, \Bbbk)$ 都集中在元数 i，则代数 A 是 Koszul 的。单项式序的反序仍是单项式序。我们将使用以下事实：这些事实对于结合代数 [31, 30, 27] 的证明可原样照搬，对于混洗代数 [13] 也是如此。

(1) 若 A 是 Koszul 的，则 $A^!$ 也是，而且 $f_A(t)\, f_{A^!}(-t) = 1$。(2) 假设 R 是 (R) 的 Gröbner 基（相对于 F 的某个单项式序），也就是说，F 中不能被 R 的任何首项单项式整除的单项式构成 A 的一组基。那么 A 是 Koszul 的。此外，$R^\perp$ 是 $(R^\perp)$ 在反序下的 Gröbner 基，其首项单项式是那些不是 R 首项单项式的二次单项式。

(1)中的等式是 $\Bbbk$的Koszul分解的欧拉特征，因为 f 对 $\boxtimes$是乘法的。(2)是PBW判据。

1.3.1. 无公共上升的排列对。 排列对(α, β)的一个公共上升是一个位置 $i \in [n-1]$，满足 $\alpha(i) < \alpha(i+1)$且 $\beta(i) < \beta(i+1)$。令 ω_n 为无公共上升的排列对数；当 $n = 0, 1, \ldots, 6$时，这些数分别为$1, 1, 3, 19, 211, 3651, 90921$。

命题1.2。 设 $A = F/(R)$，其中 $R \subset F(2)$ 由$(12, 12)$、$(21, 21)$和$(12, 21)$ $-(21, 12)$张成。

(1) 对于所有 n，维数 $A(n) = 1$，A 都是 *Koszul* 的。(2) *Koszul* 对偶 $A^! = F/\big((12,21) + (21,12)\big)$ 的基由满足以下条件的对组成：$(\alpha, \beta) \in \mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n$ 不存在位置 i 使得 α 下降而 β 上升。因此，维数 $A^!(n) = \omega_n$。(3) 因此

$$\sum_{n\geq 0} \omega_n \frac{t^n}{(n!)^2} = \Big(\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{t^n}{(n!)^2}\Big)^{-1},$$

这就是 *Carlitz*、*Scoville* 和 *Vaughan* 定理 [9]。

证明。首先，我们证明 R 是第 1.2 节中 β-优先序下的 Gröbner 基。三个关系的首项单项式分别是 $(12,12)$、$(21,21)$ 和 $(12,21)$，因为 $(12,21)$ 的第二个坐标更大。因此，单项式是标准单项式，当且仅当每两个相邻字母构成模式 $(21,12)$，也就是说，当且仅当其第一个坐标递减、第二个坐标递增。元数为 n 的唯一标准单项式是 $(n\cdots 21, 12\cdots n)$，接下来只需证明它在 A 中非零。令 $\varphi\colon F(n) \to \Bbbk$，若一个词的所有字母 (a, b) 都满足 $a+b = n+1$，则将其映为 1，否则映为 0。将其传输到由两个元素集合组成的对 $(\{i_1 < i_2\}, \{j_1 < j_2\})$ 上后，单项式关系变为因子 $(i_1, j_1)(i_2, j_2)$ 和 $(i_2, j_2)(i_1, j_1)$，其中两个字母的和不同 $a + b$；因此，φ 在包含这些因子的词上取值为零。二项式关系变为 $(i_1, j_2)(i_2, j_1) - (i_2, j_1)(i_1, j_2)$，即交换两个相邻字母，而 φ 只取决于字母集合。因此，φ 在理想 (R) 上为零，而 $\varphi(n\cdots 21, 12\cdots n) = 1$。所以 $\dim A(n) = 1$，R 是 Gröbner 基，并且根据事实 (2)，A 是 Koszul 的。

其次，$R^\perp$ 由 $(12,21) + (21,12)$ 张成。对于 β-优先排序的逆序，其首单项式为 $(21,12)$，这是 R 的首单项式之外的那个二次单项式；根据事实 (2)，它构成一个 Gröbner 基。因此，$A^!(n)$ 有一个由不含模式 $(21,12)$ 的连续因子的单项式构成的基，也就是说，该基由这样的数对 (α, β) 构成：不存在某个位置 i 使得 $\alpha(i) > \alpha(i+1)$ 并且$\beta(i) < \beta(i+1)$。将 α 替换为它的补 $i \mapsto n+1-\alpha(i)$，会把 α 的下降转变为上升，因此这些数对与不含公共上升的数对构成双射。

Fin根据事实 (1)，$f_{A^!}(t) = 1/f_A(-t)$，并且根据第一部分，$f_A(t) = \sum_n t^n/(n!)^2$ □

1.4. **交换双洗牌代数。** 一个 $(m,\ n)$-洗牌的逆序$\sigma = (\sigma(1) < \cdots < \sigma(m);\ \sigma(m+1) < \cdots < \sigma(m+n))$

$$\text{is the } (n,m)\text{-shuffle } \sigma^{op} = \big(\sigma(m+1) < \cdots < \sigma(m+n);\ \sigma(1) < \cdots < \sigma(m)\big),$$

也就是说，对于 $i \le n$，$\sigma^{op}(i) = \sigma(m+i)$；对于 $j \le m$，$\sigma^{op}(n+j) = \sigma(j)$。这对应于 $[m+n]$ 的同一分解，只是两部分交换了。

定义 1.3. 若双洗牌代数 $\mathscr{A}$ 满足

$$u \star_{\sigma,\tau} v = v \star_{\sigma^{op},\tau^{op}} u$$

对于所有的 $u \in \mathscr{A}(m)$、$v \in \mathscr{A}(n)$，以及所有的 (m,n)-洗牌对 σ, τ，

乘积 $\star_{\sigma,\tau}$是乘积 $\mathscr{A} \boxtimes \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ 的分量，而对 (σ^{op}, τ^{op}) 的索引，与 (σ,τ) 一样，对值和位置作相同的分解，只是两个因子交换了。因此，$\mathscr{A}$ 是交换的，当且仅当其乘积在交换 $\boxtimes$ 的两个因子后保持不变；也就是说，当且仅当 $\boxtimes$ 上的 $\mathscr{A}$ 是交换幺半群。

考虑二元数中的关系

$$r_1 = (21,21) - (12,12), \qquad r_2 = (12,21) - (21,12),$$

并令 $\mathscr{S} = F/(r_1,\ r_2)$。传输到 $(\{i_1 < i_2\},\ \{j_1 < j_2\})$ 后，关系写作 $(i_2,\ j_2)(i_1,\ j_1) = (i_1,\ j_1)(i_2,\ j_2)$ 以及 $(i_1,\ j_2)(i_2,\ j_1) = (i_2,\ j_1)(i_1,\ j_2)$，因此它们结合起来就允许我们交换任意两个相邻的字母。

命题 1.4。 (1) 将一个词映射到其字母集合，从而将 $\mathscr{S}(I,J)$ 与 $\Bbbk\mathrm{Bij}(J,I)$对应起来；在此对应下，两个双射的乘积就是它们的不交并。(2) 特别地，$\mathscr{S}(n) \cong \Bbbk\mathbb{S}_n$，其中 $\alpha,\beta)$ 的类对应于排列 $\alpha\beta^{-1}$，并且 $f_{\mathscr{S}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} {}^{n!}\ {}^{n!}\ {}_{2}t^n = e^t$。(3) $\{r_1, r_2\}$ 是 $r_1, r_2)$ 的 ***Gr¨obner*** 基，对于 F的每一种单项式序都成立。

证明。 *</style}*两个词在 中相等，当且仅当它们可以通过交换相邻字母相互得到；也就是说，当且仅当它们的字母集合相同；而 $(,\beta)$ 的字母集合是双射 $\beta(k) \mapsto \alpha(k)$ 的图。这就得到 (1) 和 (2)。对于 (3)，单项式序在每个 r_i 中选出一个首单项式。在四种可能的情形中，两个首单项式在一个坐标上具有相同的模式（12 或 21），而在另一个坐标上则涵盖两种模式。因此，标准单项式是那些指定坐标分别为 id 和 w_0 的数对。它们共有 $n! = \dim \mathscr{S}(n)$ 个，而标准单项式总是张成该商。□

1.4.1. 排列的双洗牌积。 从现在起，我们将 $\mathscr{S}(n)$ 与 $\Bbbk\mathbb{S}_n$ 等同，并直接处理排列。

下面我们用几种不同的方式来描述 $\mathscr{S}$ 在排列上的乘积。排列是从位置到值的映射，并按映射的方式相乘：$(uv)(i) = u(v(i))$。对于 $u \in \mathbb{S}_n$ 和 $v \in \mathbb{S}_m$，我们用 $u \oplus v = u(1) \cdots u(n)\ (v(1) + n) \cdots (v(m) + n) \in \mathbb{S}_{n+m}$ 表示它们的直和。对于满足 $|L| = k$ 的 $L \subset [N]$，我们用 π_L 表示具有 $\pi_L([k]) = L$ 的 $(k,\ N-k)$-洗牌。由命题 1.4(1) 可知，在双集合 $\mathscr{S}$的指标 $(I,\ J)$ 中，集合 I由值构成，集合 J由位置构成。因此，$\mathscr{S}$ 的乘积$\star_{\sigma,\ \tau}$ 由一个对值进行的洗牌 σ 和一个对位置进行的洗牌 τ 作为指标。

Prop命题 1.5。 设 $u \in \mathbb{S}_n$ 和 $v \in \mathbb{S}_m$，并设 σ 和 τ 为 (n,m)-洗牌。那么

$$u \star_{\sigma,\tau} v = \sigma\,(u \oplus v)\,\tau^{-1}.$$

因此，$w = u \star_{\sigma,\ \tau} v$是 $[n+m]$ 的排列，其位置 τ（$[n]$）承载着模式 u 中的值 σ（$[n]$），而其位置 τ（$[n+1, n+m]$）承载着模式 v 中的值 σ（$[n+1, n+m]$）。反过来，对于 $w \in \mathbb{S}_{n+m}$ 和一个由 n 个位置组成的集合 L，$w = u \star_{\sigma,\ \pi_L} v$ 当且仅当 $\sigma = \pi_{w(L)}$，并且 u 和 v 分别是在 L 和 $[n+m] \setminus L$ 上由 w 形成的模式。

证明。根据命题 1.4(1)， $\mathscr{S}$ 的乘积是不交的从位置到值的双射之并。由于 σ 和 τ 在 $[n]$ 上递增，将 u 传输到值 $\sigma([n])$ 和位置 $\tau([n])$，就是将 $\sigma u\tau^{-1}$ 限制在 $\tau([n])$ 上；类似地， v 的传输是将 $\sigma(u\oplus v)\tau^{-1}$ 限制在 $\tau([n+1,n+m])$ 上。它们的并是 $\sigma(u\oplus v)\tau^{-1}$。等价地，在 F 中，沿着 (σ,τ) 将字 (α,β) 和 (α',β') 相乘所得的是字 $\big(\sigma(\alpha\oplus\alpha')\ \tau(\beta\oplus\beta')\big)$，而命题 1.4(2) 的映射 $(\alpha,\beta)\mapsto\alpha\beta^{-1}$ 将其送到 $\sigma(\alpha\beta^{-1}\oplus\alpha'\beta'^{-1})\tau^{-1}$。反过来，位置 $L=\tau([n])$ 确定 $\tau=\pi_L$，值 $w(L)=\sigma([n])$ 确定 σ，于是 u 和 v 分别是在 L 上和其补集上由 w 形成的模式。□

注 1.6. 因子 $\sigma(u\oplus v)$ 是洗牌代数 $\mathscr{A}_{MR}$（第 1.1 节）的乘积 $u\star_\sigma v$：它是由词 u 与词 v 连接而成，前者以值 $\sigma([n])$ 表示，后者以值 $\sigma([n+1,n+m])$ 表示。将其与 τ^{-1} 从右侧复合，会把这个词的前 n 个字移至位置 $\tau([n])$，并把最后 m 个字移至位置 $\tau([n+1,n+m])$，同时保持它们的顺序。因此

$$u\star_{\sigma,\tau}v=(u\star_\sigma v)\,\tau^{-1},$$

先对值取洗牌代数的乘积，再对位置进行洗牌。对称地，$(u\oplus v)\tau^{-1}$ 将词 u 与平移了 n 的词 v 交错排列，而 $u\star_{\sigma,\ \tau}v$ 则由它通过将值重新标记为 σ 得到。

例 1.7。(1) 对于 $n=m=1$，两种洗牌结果都是 12 或 21，且 $1\star_{\sigma,\ \tau}1=\sigma\tau^{-1}$。在自由代数 F 中，生成元与自身的四种乘积是四个字（σ，τ）。在 $\mathscr{S}$ 中，(σ，τ) = 的乘积中，(12，12) 和 (21，21) 都等于 12，而 (12，21) 和 (21，12) 的乘积都等于 21。这两处相等关系就是关系 r_1 和 r_2。

(2) 设 $u=21$ 和 $v=1$。(2,1)-洗牌为 123、132 和 231，并且 $u\oplus v=213$。这九个乘积 $21\star_{\sigma,\ \tau}1$ 为

$\sigma\setminus\tau$	123	132	231
123	213	231	321
132	312	321	231
231	321	312	132

例如，对于 $\sigma=132$ 和 $\tau=231$，洗牌积为 $21\star_{132}1=312$，即将词 21 写在值 $\{1,3\}$ 后，再接上值 2；把它的前两个字母移到位置 $\{2,3\}$，便得到 231。每个 $w\in\mathbb{S}_3$ 出现的次数都等于它的逆序数：根据命题 1.5 的最后一部分，满足 $21\star_{\sigma,\tau}1=w$ 的数对 (σ,τ)，等同于 w中 21 的一次出现。

(3) 对于 $u=132$、$v=21$、$\sigma=\pi_{\{1,3,5\}}=13524$ 和 $\tau=\pi_{\{2,3,5\}}=23514$，可得 $u\star_{\sigma,\ \tau}v=41523$：位置 2,3,5 上的值 1,5,3 构成模式 132，而位置 1,4 上的值 4,2 构成模式 21。

推论 1.8. 双洗牌代数 $\mathscr{S}$ 按照定义 *1.3* 的意义是交换的。此外，它是由一个元数为一的生成元生成的自由交换双洗牌代数：F 的每个交换商代数都是 $\mathscr{S}$的商代数。

证明。首先，设 $u\in\mathbb{S}_m$ 和 $v\in\mathbb{S}_n$，并设 $c\in\mathbb{S}_{m+n}$ 由 $c(i)=m+i$ 给出，其中 $i\le n$，而$c(n+j)=j$，其中 $j\le m$。那么，对于所有的 (m,n)-洗牌 σ和 τ，都有 $\sigma^{op}=\sigma c$和 $\tau^{op}=\tau c$。此外，$c(v\oplus u)c^{-1}=u\oplus v$。事实上，对于 $j\le m$，我们有 $c^{-1}(j)=n+j$且 $c\big((v\oplus u)(n+j)\big)=c(n+u(j))=u(j)$；对于 $i\le n$，我们有 $c^{-1}(m+i)=i$ 且 $c\big((v\oplus u)(i)\big)=c(v(i))=m+v(i)$。因此，由命题 1.5，

$$v\star_{\sigma^{op},\tau^{op}}u=\sigma c\,(v\oplus u)\,c^{-1}\tau^{-1}=\sigma\,(u\oplus v)\,\tau^{-1}=u\star_{\sigma,\tau}v.$$

其次，根据例 1.7(1)，生成元 x 与自身的四种乘积是词 $(\sigma,\ \tau)$，其中 $\sigma,\ \tau\in\{12,21\}$，而 (1，1)-洗牌 12 的逆序是 21。因此，关系为 $x\star_{\sigma,\ \tau}x=$

$x \star_{\sigma^{op},\ \tau^{op}} x$ 除了符号差异外，分别是 r_1 和 r_2。它们在 F 的每个交换商代数中都成立，因此每个这样的商都是 $\mathscr{S}$ 的商；根据第一部分，$\mathscr{S}$ 是交换的。□

1.4.2. *Koszul* 性与 *Koszul* 对偶。根据构造，$\mathscr{S} = F/(r_1,\ r_2)$ 是一个二次双洗牌代数，而根据命题 1.4(3)，$\{r_1, r_2\}$ 是一个 Gr¨obner 基。因此，根据第 1.3 节的事实（2），$\mathscr{S}$ 是 Koszul 的。其 Koszul 对偶由反交换关系定义为，

$$\mathscr{S}^! = F\big/\big((12,12)+(21,21),\ (12,21)+(21,12)\big).$$

我们称双洗牌代数 $\mathscr{A}$ 为斜交换的，如果

$$u \star_{\sigma,\tau} v = (-1)^{mn}\, v \star_{\sigma^{op},\tau^{op}} u$$

对于所有 $u \in \mathscr{A}(m)$、$v \in \mathscr{A}(n)$ 以及所有 $(m,\ n)$-洗牌对 $\sigma,\ \tau$。

命题 1.9。(1) 将一个词 (α, β) 映射为 $\mathrm{sgn}(\beta)\,\alpha\beta^{-1}$，可将 $\mathscr{S}^!(n)$ 与 $\Bbbk\mathbb{S}_n$ 对应起来。特别地，$\mathscr{S}^!$ 具有一个由排列构成的基，维数 $\mathscr{S}^!(n) = n!$ 以及 $f_{\mathscr{S}^!}(t) = e^t$。

(2) 在这个基下，$u \in \mathbb{S}_m$ 和 $v \in \mathbb{S}_n$ 的乘积为

$$u \star_{\sigma,\tau} v = \mathrm{sgn}(\tau)\,\sigma\,(u \oplus v)\,\tau^{-1}.$$

(3) $\mathscr{S}^!$ 是由一个元数为一的生成元生成的自由斜交换双洗牌代数：它是斜交换的，并且 F 的每个斜交换商都是 $\mathscr{S}^!$的商。

证明。首先，令 $\psi\colon F(n) \to \Bbbk\mathbb{S}_n$ 为线性映射，满足 $\psi(\alpha,\beta) = \mathrm{sgn}(\beta)\ \alpha\beta^{-1}$。传输到$(\{i_1 < i_2\}, \{j_1 < j_2\})$后，$\mathscr{S}^!$的定义关系变为$(i_1,j_1)(i_2,j_2) + (i_2,j_2)(i_1,j_1)$以及$(i_1,j_2)(i_2,j_1) + (i_2,j_1)(i_1,j_2)$。因此，它们生成的理想由各项之和张成，其中词 x' 是由词 x 交换两个相邻字母得到的。这样的交换不会改变 $\alpha\beta^{-1}$，并使$\mathrm{sgn}(\beta)$乘以 -1，所以 ψ 在这个理想上为零，并诱导出满射$\mathscr{S}^!(n) \to \Bbbk\mathbb{S}_n$。另一方面，模去这些关系后，每个词都等于一个至多相差符号的词，其字母按第二坐标递增排列，因此$\dim \mathscr{S}^!(n) \le n!$。这就证明了(1)。该级数为 $\sum_n n!\ t^n/(n!)^2 = e^t$，与 $f_{\mathscr{S}}(t) f_{\mathscr{S}^!}(-t) = 1$相符。

其次，词 $(\alpha,\ \beta)$ 和 $(\alpha',\ \beta')$ 沿着 $(\sigma,\ \tau)$ 的乘积是词 $\big(\sigma(\alpha\oplus\alpha')\ \tau(\beta\oplus\beta')\big)$，并且 ψ 将其映射到

$$\mathrm{sgn}(\tau)\mathrm{sgn}(\beta)\mathrm{sgn}(\beta')\,\sigma\big(\alpha\beta^{-1}\oplus\alpha'\beta'^{-1}\big)\tau^{-1}.$$

这就证明了 (2)。

最后，令 $c \in \mathbb{S}_{m+n}$ 为推论 1.8 的证明中所用的排列，使得 $\sigma^{op} = \sigma c$、$\tau^{op} = \tau c$ 和 $c(v \oplus u)\ c^{-1} = u \oplus v$。它有 mn 个逆序数，因此由 (2) 得

$$v \star_{\sigma^{op},\tau^{op}} u = (-1)^{mn}\mathrm{sgn}(\tau)\,\sigma c\,(v\oplus u)\,c^{-1}\tau^{-1} = (-1)^{mn}\,u \star_{\sigma,\tau} v.$$

对于 $m = n = 1$，生成元 x 的斜交换关系 $x \star_{\sigma,\ \tau} x + x \star_{\sigma^{op},\ \tau^{op}} x$ 是 F 的定义关系，因此 F 的每个斜交换商都是 $\mathscr{S}^!$的商。□

1.4.3. 置换矩阵。对于 $u \in \mathbb{S}_m$，令 $P_u \in \mathrm{Mat}_m$ 为其排列矩阵，其在行 $u(j)$ 和列 j 上的元素对每个 $j \in [m]$ 都是 1，其余元素均为 0。因此 $P_u e_j = e_{u(j)}$ 且 $P_{uv} = P_u P_v$；P_u 的行由值索引，列由位置索引。令 $v \in \mathbb{S}_n$，并令 $\sigma,\ \tau$ 为 $(m,\ n)$-洗牌。由命题 1.5，

$$P_{u\star_{\sigma,\tau}v} = P_\sigma \begin{pmatrix} P_u & 0 \\ 0 & P_v \end{pmatrix} P_\tau^{-1}.$$

换言之，$u \star_{\mathrm{id},\ \mathrm{id}} v = u \oplus v$是由块 P_u和 P_v组成的分块对角矩阵，而 $u \star_{\sigma,\ \tau} v$则是将其第 i 行移至行 $\sigma(i)$，并将其第 j 列移至列 $\tau(j)$ 所得到的矩阵，对所有 $i,\ j \in [m+n]$均如此。由于 σ 和 τ 是洗牌，每个块的行保持其相对顺序，其列也保持相对顺序：块 P_u 分布在行 $\sigma([m])$和列 $\tau([m])$上，而块 P_v 分布在行 $\sigma([m+1, m+n])$和列 $\tau([m+1, m+n])$上。图 1 展示了例 1.7(3)的乘积。

因此，推论 1.8 中的自由交换双洗牌代数 $\mathscr{S}$ 由置换矩阵张成，其生成元是 1×1 矩阵 (1)，而其乘积则分别交错两个对角块的行和列。交换性表明，如果以逆序列出两个块，并将两个洗牌都替换为其逆序，矩阵不会发生变化。本文中我们始终使用这些图示：置换 u 表示为线性映射 $e_j \mapsto e_{u(j)}$的矩阵，其中列按位置编号，行按值编号。

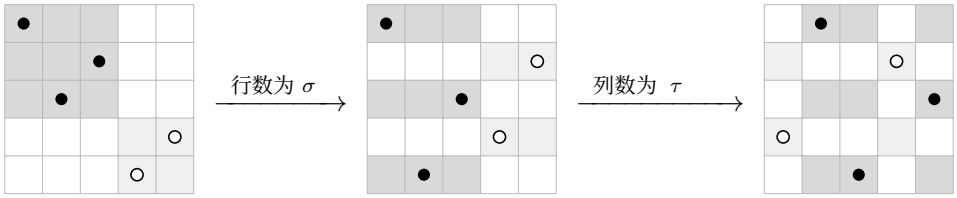


FIGURE 1. 例 1.7(3) 中的乘积$132 \star_{\sigma,\ \tau} 21 = 41523$ 用排列矩阵表示，其中 $\sigma = 13524$和 $\tau = 23514$。左：分块对角矩阵$P_{132\oplus 21} = P_{13254}$；块 P_{132} 中的元素为黑色，块 P_{21}中的元素为白色。中：行 i移动到行 $\sigma(i)$。右：列 j 移动到列 $\tau(j)$，从而得到 P_{41523}。阴影单元格是两个对角块的像。

1.4.4. 模式与替换。</style>对于 $w \in \mathbb{S}_n$ 以及位置的一个 k-子集 $L = \{l_1 < \cdots < l_k\} \subset [n]$，记 $w|_L = \mathrm{st}(w(l_1)\cdots w(l_k)) \in \mathbb{S}_k$。我们称 L 是 w 中 $p \in \mathbb{S}_k$ 的一次出现，当且仅当 $w|_L = p$; 因此，w 包含 p 作为经典模式，当且仅当 p 在 w中出现。对于 $\sigma \in \mathbb{S}_k$，令$w_{L\leftarrow\sigma} \in \mathbb{S}_n$ 为这样一个排列：它在 L 之外与 w 一致，并且在 L 上取值 $w(L)$，这些值按照模式 σ排列。对于 $g = \sum_\sigma c_\sigma \sigma \in \Bbbk\mathbb{S}_k$，置

$$g[w, L] = \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_k} c_\sigma\, w_{L\leftarrow\sigma} \in \Bbbk\mathbb{S}_n.$$

根据命题 1.5，$w_{L\leftarrow\sigma} = \sigma \star_{\pi_{w(L)},\ \pi_L} w|_{[n]\setminus L}$，因此

$$g[w, L] = g \star_{\pi_{w(L)},\pi_L} w|_{[n]\setminus L}:$$

将 g 代入 w 的位置 L，就是用 w 在L的补上的模式乘以 g。因此，由一组元素 G 生成的 $\mathscr{S}$ 的理想为

$$(G)(n) = \mathrm{span}\big\{\, g[w, L] \ :\ g \in G,\ w \in \mathbb{S}_n,\ L \subset [n],\ |L| = \text{arity of } g \,\big\}.$$

推论 1.10. 对于一个排列集合 P，单项式商 $\mathscr{S}/(P)$ 以避免所有来自 P的模式的排列为基，并且

$$f_{\mathscr{S}/(P)}(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{\#\mathrm{Av}_n(P)}{(n!)^2}\, t^n.$$

证明. 根据上面的公式，$(P)(n)$由排列 $p[w, L] = w$张成，其中 L是 w中某个 $p \in P$的一次出现。□

备注 1.11。因此，经典模式回避理论就是单生成元自由交换双洗牌代数 $\mathscr{S}$ 的单项式理想理论，正如连续模式回避理论就是 $\mathscr{A}_{MR}$ [13]的单项式理想理论一样。类 $\mathrm{Av}(P)$ 是商 $\mathscr{S}/(P)$ 的单项式基，数目 $\#\mathrm{Av}_n(P)$ 是其希尔伯特级数 $f_{\mathscr{S}/(P)}(t)$ 的系数，并且两组模式 Wilf 等价，当且仅当相应的单项式商具有相同的希尔伯特级数。最简单的例子是命题1.2中的代数 A，它是商 $\mathscr{S}/(12)$。事实上，r_1和 r_2属于 (R)，而模 r_1 后，单项式 (12，12) 和 (21，21) 都表示排列

12。因此，命题1.2证明的第一部分就是推论 1.10 中的等式 $\dim(\mathscr{S}/(12))(n) = \#\mathrm{Av}_n(12) = 1$，而命题1.2则将最简单的模式避免代数的 Koszul 对偶与一个计数排列对的代数联系起来。

注 1.12。如果一个集合族 $\mathscr{M}$ 是对称的，就意味着函子 $\mathscr{M}$ 能够从有序集扩展到有限集及其所有双射所构成的范畴；也就是说，每个 $\mathscr{M}(n)$ 都是 $\mathbb{S}_n$的一个表示。对称集合族是 Joyal [21, 1], 的线性物种，在其上，第 1.1 节的洗牌张量积就是柯西积。对称集合族上的洗牌代数，如果其乘法对所有双射都是自然的，则称为扭曲结合代数 [12], ；若其乘法还是交换的，则称为扭曲交换代数。扭曲李代数可追溯至 Barratt [5], ，而扭曲交换代数则由 Sam 和 Snowden [35, 33, 34]系统地研究。在特征零下，施尔-韦伊对偶将扭曲交换代数与带有 GL_∞ [35]多项式作用的交换代数对应起来。例如，具有 $\mathscr{M}(n) = \Bbbk$ 对所有 n 成立的扭曲交换代数上的模，就是 Church、Ellenberg 和 Farb [10, 35], 所研究的 FI-模，而诺特性是该领域的核心问题之一 [35, 28]。

我们将这一语言扩展到双洗牌代数，以便为模式避免提供一个代数框架。第 2.1 节中的 $\mathbb{S}$-对称交换双洗牌代数是关于两组变量的扭曲交换代数，也就是说，是带有 $GL_\infty \times GL_\infty$ [35] 多项式作用的交换代数。自由代数 $\mathscr{S}$ 对应于以无限矩阵各项为变量的多项式环，而命题 2.3 中通过杨氏格的上集描述对称理想，对应于 De Concini、Eisenbud 和 Procesi [11] 对矩阵上的多项式环中 $GL \times GL$-稳定理想的分类；关于其他扭曲代数的此类分类，参见近期文献 [14]。然而，描述模式避免的理想是 $\mathscr{S}$ 的单项式理想，它们通常不在排列作用下保持稳定。扭曲代数的语言无法体现这些理想，因此我们只保留保序双射。

2. Symmetric commutative bishuffle algebras

本节介绍交换双洗牌代数的主要例子。第 2.1 节讨论 $\mathscr{S}$ 中关于对所有位置和所有值的排列均稳定的理想所得到的商。在每个元数中，这样的商都是群代数关于某个双边理想的商，因此其维数由表示论给出。第 2.2 节讨论代数 $\mathcal{B}_V$，其分量为 $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$，并通过施尔-韦伊对偶将其不变量与 $\mathbb{S}$-对称代数对应起来。第 3 节讨论这些代数的诺特性。

2.1. **$\mathbb{S}$-对称交换双洗牌代数**。回顾第 1.4 节，排列是从位置到值的映射，并按照映射的方式相乘。因此，左乘 $\mathbb{S}_N$ 会置换值，而右乘则会置换位置。于是，自由代数的每个分量 $\mathscr{S}(N) = \Bbbk\mathbb{S}_N$ 都是一个 $\mathbb{S}_N \times \mathbb{S}_N$-模；根据命题 1.5，乘积 $u \star_{\sigma,\,\tau} v = \sigma(u \oplus v)\,\tau^{-1}$ 是 $u \oplus v$ 在左乘 σ 和右乘 τ^{-1} 作用下的像。

定义 2.1. 如果理想 $\mathscr{J} \subset \mathscr{S}$的每个分量 $\mathscr{J}(N)$ 都是群代数 $\Bbbk\mathbb{S}_N$ 的双边理想，也就是说，在位置排列和值排列的作用下保持不变，则称该理想为对称理想。由对称理想取商得到的代数 $\mathscr{S}/\mathscr{J}$ 称为 $\mathbb{S}$-对称交换双洗牌代数。其元数为 N 的分量是 $\Bbbk\mathbb{S}_N$ 对双边理想 $\mathscr{J}(N)$ 取商所得的代数。

对于分拆 λ of N，令 V_λ为 $\mathbb{S}_N$的不可约表示，令 $f^\lambda = \dim V_\lambda$为形状为 λ的标准杨表数量，并令 $\mathrm{End}(V_\lambda)$ 为 Wedderburn 分解 $\Bbbk\mathbb{S}_N = \bigoplus_{\lambda \vdash N} \mathrm{End}(V_\lambda)$ 中对应的块。作为 $\mathbb{S}_N \times \mathbb{S}_N$-模，每个块 $\mathrm{End}(V_\lambda) \cong V_\lambda \otimes V_\lambda^*$都是不可约的。我们用 λ' 表示共轭分拆，用 $\ell(\lambda)$表示 λ的行数；回顾一下，$f^{\lambda'} = f^\lambda$。

引理 2.2. 令 $g \in \Bbbk\mathbb{S}_k$, $w \in \mathbb{S}_N$和 $L \subset [N]$满足 $|L| = k$。那么对于某些$u, v \in \mathbb{S}_N$，有 $g[w, L] = u\, g\, v$，其中 $\Bbbk\mathbb{S}_k \subset \Bbbk\mathbb{S}_N$经由前 k个字母。如果 $J \subset \Bbbk\mathbb{S}_k$是一个双边理想，那么对于 $h \in J$以及所有 w和 L，元素 $h[w, L]$张成由 J生成的 $\Bbbk\mathbb{S}_N$的双边理想。

证明。令 $M = w(L)$，并令 $\rho \in \mathbb{S}_{N-k}$为 w在 $[N] \setminus L$上的模式。根据命题 1.5，$w_{L\leftarrow\sigma} = \sigma \star_{\pi_M, \pi_L} \rho = \pi_M(\sigma \oplus \rho)$对每个 $\sigma \in \mathbb{S}_k$都成立，因此 $g[w, L] = \pi_M\, g(\mathrm{id}_k \oplus \rho)\, \pi_L^{-1}$。反过来，每个 $u \in \mathbb{S}_N$都可写成 $u = \pi_M(\alpha\oplus\beta)$，其中 $M = u([k])$；每个 $v \in \mathbb{S}_N$也可写成 $v = (\gamma\oplus\delta)\pi_L^{-1}$，其中 $L = v^{-1}([k])$，这里 $\alpha, \gamma \in \mathbb{S}_k$且 $\beta, \delta \in \mathbb{S}_{N-k}$。对于 $h \in J$，这给出

$$u\, h\, v = \pi_M\, (\alpha h \gamma)\, (\mathrm{id}_k \oplus \beta\delta)\, \pi_L^{-1} = (\alpha h \gamma)[w', L],$$

其中 $w' = \pi_M(\mathrm{id}_k \oplus \beta\delta)\pi_L^{-1}$，且 $\alpha h \gamma \in J$。 □

命题 2.3。对于对称理想 $\mathscr{J} \subset \mathscr{S}$，令 $\Lambda(\mathscr{J})$表示满足$\mathrm{End}(V_\lambda) \subset \mathscr{J}(|\lambda|)$的分拆 λ。那么 $\Lambda(\mathscr{J})$是杨氏格的一个上集，并且 $\mathscr{J} \mapsto \Lambda(\mathscr{J})$是从对称理想到上集的一个双射，其逆映射将 Λ 映到满足以下条件的理想 $\mathscr{J}_\Lambda$：

$$\mathscr{J}_\Lambda(N) = \bigoplus_{\lambda\vdash N,\ \lambda\in\Lambda} \mathrm{End}(V_\lambda), \qquad \dim(\mathscr{S}/\mathscr{J}_\Lambda)(N) = \sum_{\lambda\vdash N,\ \lambda\notin\Lambda} (f^\lambda)^2.$$

由块 $\mathrm{End}(V_\mu)$ 生成的对称理想对应于 $\{\lambda : \lambda \supseteq \mu\}$.

证明。由于 $\Bbbk$ 是特征零，$\Bbbk\mathbb{S}_N$ 是半单的，其双边理想是若干块之和。根据引理 2.2，由 $\mathrm{End}(V_\mu) \subset \Bbbk\mathbb{S}_k$ 生成的 $\mathscr{S}$的理想，在元数 N时，是由 $\mathrm{End}(V_\mu)$生成的 $\Bbbk\mathbb{S}_N$ 的双边理想。该理想是那些 $\mathrm{End}(V_\mu)$在其上作用非平凡的块 $\mathrm{End}(V_\lambda)$之和；也就是说，V_λ 到 $\mathbb{S}_k$ 的限制包含 V_μ。根据分支法则，当且仅当 $\mu \subseteq \lambda$时，这种情况才会发生。因此 $\Lambda(\mathscr{J})$ 是一个上集，并且对于每个上集Λ，$\mathscr{J}_\Lambda$ 都是一个理想。□

例如，反对称化子 $e_n = \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\sigma$ 和对称化子 $s_n = \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} \sigma$ 是 $e_n = n!\ \epsilon_{(1^n)}$和 $s_n = n!\ \epsilon_{(n)}$，其中 ϵ_λ 是 λ的块的中心幂等元。因此，(e_n)、(s_m)和 (e_n, s_m)是对称理想，分别对应于上集 $\{\lambda :\ \ell(\lambda) \geq n\}$、$\{\lambda :\ \lambda_1 \geq m\}$及其并集。另一方面，并非每个理想都是对称的；例如，由 $123 - 213$ 生成的理想的三元性分量仅由该元素自身张成。

2.1.1. 符号扭曲与正方形的对称。令 θ: $\Bbbk\mathbb{S}_N \to \Bbbk\mathbb{S}_N$ 为线性映射$u \mapsto \mathrm{sgn}(u)\, u$，即符号扭曲。由于 $w_{L\leftarrow\sigma}$ 与 $w_{L\leftarrow\mathrm{id}}$ 在 L 中的位置之间相差一个符号为 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ 的排列，我们对每个 $g \in \Bbbk\mathbb{S}_k$ 都有 $\theta(g[w, L]) = \pm(\theta g)[w, L]$。因此，$\theta$ 将由集合 G 生成的理想映射到由 $\theta(G)$生成的理想。此外，θ 是代数 $\Bbbk\mathbb{S}_N$ 的自同构，其定义为与符号表示作张量积。因此，它将 $\mathrm{End}(V_\lambda)$ 映射到 $\mathrm{End}(V_{\lambda'})$，并将 $\mathscr{J}_\Lambda$ 映射到 $\mathscr{J}_{\Lambda'}$，其中 Λ' 由共轭分拆组成。例如，$\theta(e_n) = s_n$，而 θ 将 (e_n) 映射到 (s_n)。

八阶二面体群 D_4（正方形的对称群）作用于 $\bigsqcup_n \mathbb{S}_n$；它由反转 $w \mapsto w^r$、补 $w \mapsto w^c$ 和取逆 $w \mapsto w^{-1}$生成。它保持模式包含，且其中每个元素都会将代换映射映到代换映射，例如 $(w_{L\leftarrow\sigma})^{-1} = (w^{-1})_{w(L)\leftarrow\sigma^{-1}}$。在 $\Bbbk\mathbb{S}_N$ 上，反转和补分别是关于 $w_0 = N\cdots 21$的右乘法和左乘法，而取逆是反自同构 $u \mapsto u^{-1}$；由于表示 V_λ 是自对偶的，它将每个块映到自身。因此，每个对称理想在 D_4作用下都保持不变。

2.1.2. 商。

命题 2.4。 对于 $n \geq 1$ 和 $N \geq 0$，存在一个代数同构，同时也是 $\mathbb{S}_N \times \mathbb{S}_N$-模的同构

$$\big(\mathscr{S}/(e_n)\big)(N) \cong \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash N \\ \ell(\lambda)<n}} \mathrm{End}(V_\lambda), \qquad \textit{so that} \qquad \dim\big(\mathscr{S}/(e_n)\big)(N) = \sum_{\substack{\lambda \vdash N \\ \ell(\lambda)<n}} (f^\lambda)^2.$$

证明。 元素 e_n 张成符号表示$V_{(1^n)}$对应的块，而一个分拆包含 (1^n) 当且仅当它至少有 n 行。现在应用命题 2.3。 □

例如，对于所有 N，$\dim(\mathscr{S}/(e_2))(N) = 1$，因为只有 $\lambda = (N)$ 的行数少于两行；事实上，模 $e_2 = 12 - 21$ 下，$[N]$ 的所有排列都相等。

类似地，元素 s_m 张成平凡表示 $V_{(m)}$对应的块，而一个分拆包含 (m) 当且仅当 $\lambda_1 \geq m$。因此，由命题 2.3，对于 $m \geq 1$ 和 $N \geq 0$,

$$\big(\mathscr{S}/(s_m)\big)(N) \cong \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash N \\ \lambda_1<m}} \mathrm{End}(V_\lambda), \qquad \dim\big(\mathscr{S}/(s_m)\big)(N) = \sum_{\substack{\lambda \vdash N \\ \lambda_1<m}} (f^\lambda)^2. \tag{1}$$

命题 2.5. 对于 $n, m \geq 1$ 和 $N \geq 0$,

$$\big(\mathscr{S}/(e_n, s_m)\big)(N) \cong \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash N \\ \ell(\lambda)<n,\ \lambda_1<m}} \mathrm{End}(V_\lambda), \qquad \dim\big(\mathscr{S}/(e_n, s_m)\big)(N) = \sum_{\substack{\lambda \vdash N \\ \ell(\lambda)<n,\ \lambda_1<m}} (f^\lambda)^2.$$

特别地，$(\mathscr{S}/(e_n, s_m))(N) = 0$ 对于 $N > (n-1)(m-1)$，因此代数 $\mathscr{S}/(e_n, s_m)$ 是有限维的。

证明。 根据命题 2.3，$(e_n,\ s_m)$ 是由 (1^n) 和 (m) 的上集之并构成的对称理想。其余分拆都包含于一个有 $n-1$ 行和 $m-1$ 列的矩形中，其中至多有 $(n-1)(m-1)$ 个单元格。□

根据 Robinson–Schensted对应，$[36]$, $\dim(\mathscr{S}/(e_n,\ s_m))(N)$ 是同时避开 $n \cdots 21$ 和 $12 \cdots m$ 的 $[N]$ 个排列的数量。因此，命题 2.5 中的消失是 Erd˝os–Szekeres 定理 $[15]$ 的代数对应。

若一个分拆的形式为 $(a,\ 1^b)$，则称它为钩子；等价地说，它的图不包含正方形 $(2,\ 2)$。更一般地，对于 $k,\ l \geq 0$，令 $H(k,\ l)$ 表示满足 $\lambda_{k+1} \leq l$ 的分拆 λ 的集合，也就是说，这些分拆的图位于前 k 行与前 l 列的并集之中。当且仅当一个分拆包含以下矩形时，它才位于 $H(k,\ l)$ 之外

$$\rho_{k,l} = \big((l+1)^{k+1}\big)$$

有 $k+1$ 行和 $l+1$ 列。特别地，$\lambda \in H(k,l)$ 当且仅当 $\lambda' \in H(l,k)$。令 $\mathscr{J}_{k,l}$为由块 $\mathrm{End}(V_{\rho_{k,l}})$ $\subset \Bbbk\mathbb{S}_{(k+1)(l+1)}$生成的对称理想，并令 $\mathscr{A}_{k,l} = \mathscr{S}/\mathscr{J}_{k,l}$。根据命题 2.3,

$$\mathscr{A}_{k,l}(N) \cong \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash N \\ \lambda \in H(k,l)}} \mathrm{End}(V_\lambda), \qquad \dim \mathscr{A}_{k,l}(N) = \sum_{\substack{\lambda \vdash N \\ \lambda \in H(k,l)}} (f^\lambda)^2. \tag{2}$$

对于 $l = 0$，矩形是列 (1^{k+1})，且 $\mathscr{J}_{k,0} = (e_{k+1})$；对于 $k = 0$，它是行 $(l+1)$，且$\mathscr{J}_{0,l} = (s_{l+1})$。对于 $k = l = 1$，矩形是正方形 $(2,2)$，因此 $H(1,1)$ 是钩子的集合，而$\mathscr{A}_{1,1}$ 是这些钩子对应的块之和。符号扭曲 θ 将 $\mathscr{J}_{k,l}$ 映射到$\mathscr{J}_{l,k}$。

2.2. $\bigoplus_n \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ **作为交换双洗牌代数**。设 V是一个有限维向量空间，其维数为 d。对于 $\pi \in \mathbb{S}_N$，令 $\Pi_\pi \in \mathrm{End}(V^{\otimes N})$ 为将第 i 个张量因子移至位置 $\pi(i)$ 的算子,

$$\Pi_\pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) = v_{\pi^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\pi^{-1}(N)},$$

使得 $\Pi_\pi \quad _\rho = \Pi_\pi \Pi_\rho$。令 $\mathcal{B}_V$为由空间 $\mathcal{B}_V(N) = \mathrm{End}(V^{\otimes N})$ 组成的空间序列，其乘积为

$$X \star_{\sigma,\tau} Y = \Pi_\sigma \circ (X \otimes Y) \circ \Pi_\tau^{-1}, \qquad X \in \mathcal{B}_V(m), \quad Y \in \mathcal{B}_V(n), \tag{3}$$

对于所有的 (m, n)-洗牌 σ, τ。作为双集合，$\mathcal{B}_V(I, J) = \mathrm{Hom}(V^{\otimes J}, V^{\otimes I})$，而乘积$\mathcal{B}_V(I_1, J_1) \otimes \mathcal{B}_V(I_2, J_2) \to \mathcal{B}_V(I_1 \sqcup I_2, J_1 \sqcup J_2)$ 是算子的张量积，其中 $V^{\otimes I_1} \otimes V^{\otimes I_2}$通过将每个张量因子置于其索引所指定的位置而与 $V^{\otimes(I_1 \sqcup I_2)}$ 对应。

设 $e_1, \ldots, e_d$ 是 V 的一组基。那么，$\mathcal{B}_V(N)$ 具有由矩阵单位 $E_{\alpha,\beta}$ 构成的基，其由词对 $\alpha, \beta \in [d]^N$ 索引：算子 $E_{\alpha,\beta}$ 将 $e_{\beta_1} \otimes \cdots \otimes e_{\beta_N}$ 映射到 $e_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_N}$，并将其他基向量映射为零。由 (3) 可得，

$$E_{\alpha,\beta} \star_{\sigma,\tau} E_{\gamma,\delta} = E_{\alpha',\beta'}, \qquad \alpha'_{\sigma(i)} = (\alpha\gamma)_i, \quad \beta'_{\tau(i)} = (\beta\delta)_i, \tag{4}$$

其中 $\alpha\gamma$ 和 $\beta\delta$ 是连接。

命题 2.6。（1）乘积（3）使 $\mathcal{B}_V$ 成为交换双洗牌代数 $a.$

（2）群 $GL(V)$ 通过与 $g^{\otimes N}$的共轭作用于每个 $\mathcal{B}_V(N)$，乘积是 $GL(V)$-等变的，且不变量空间构成一个交换双洗牌子代数

$$\mathcal{B}_V^{GL(V)} = \bigoplus_{N \geq 0} \mathrm{End}_{GL(V)}(V^{\otimes N}) \subset \mathcal{B}_V.$$

（3）映射 $\varphi_V\colon \quad \mathscr{S} \to \mathcal{B}_V, u \mapsto \Pi_u$ 是双洗牌代数的同态，其像包含于$\mathcal{B}^{GL(V)\ V}$中。用矩阵单位表示，对于 $u \in \mathbb{S}_N$，

$$\varphi_V(u) = \sum_{c \in [d]^N} E_{c \circ u^{-1}, c}.$$

证明。首先，根据将 $\mathcal{B}_V$ 描述为双集合的方式，其乘积是算子的张量积，因此是结合的。对于交换性，设 $X \in \mathcal{B}_V(m)$ 和 $Y \in \mathcal{B}_V(n)$，并设 $c \in \mathbb{S}_{m+n}$为推论 1.8 的证明中所述的排列，使得 $\sigma^{op} = \sigma c$和 $\tau^{op} = \tau c$。算子Π_c 将前 n 个张量因子按原有顺序移到最后 n个位置，并将最后的 m 个因子移到最前面的 m 个位置，因此 $\Pi_c(Y \otimes X)\Pi_c^{-1} = X \otimes Y$。于是

$$Y \star_{\sigma^{op},\tau^{op}} X = \Pi_\sigma \Pi_c (Y \otimes X) \Pi_c^{-1} \Pi_\tau^{-1} = \Pi_\sigma (X \otimes Y) \Pi_\tau^{-1} = X \star_{\sigma,\tau} Y.$$

其次，$g^{\otimes(m+n)} = g^{\otimes m} \otimes g^{\otimes n}$ 与算子 Π_π可交换。因此，通过 $g^{\otimes(m+n)}$进行共轭作用会将 $X \star_{\sigma,\ \tau} Y$映射为沿着 (σ, τ) 的乘积：X 分别被 $g^{\otimes m}$ 共轭作用以及 Y被 $g^{\otimes n}$共轭作用所得的结果。由此，乘积是等变的，而不变算子的乘积也是不变的。

最后，$\Pi_{u \oplus v} = \Pi_u \otimes \Pi_v$，因此根据命题 1.5

$$\Pi_{u \star_{\sigma,\tau} v} = \Pi_\sigma \, \Pi_{u \oplus v} \, \Pi_\tau^{-1} = \Pi_\sigma (\Pi_u \otimes \Pi_v) \Pi_\tau^{-1} = \Pi_u \star_{\sigma,\tau} \Pi_v,$$

并且 Π_u与 $g^{\otimes N}$可交换。使用矩阵单位的公式就是恒等式 $\Pi_u(e_{c_1} \otimes \cdots \otimes e_{c_N}) = e_{c_{u^{-1}(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{c_{u^{-1}(N)}}$。□

换句话说，为了计算 $\varphi_V(u)$，我们用 d 种颜色以所有可能的方式给 u 的点着色，并记录值和位置的颜色。对于 $d = 1$，所有排列具有相同的像。

定理 2.7. 设 维数$V = d$。φ_V的核是理想(e_{d+1})，其像为 $\mathcal{B}^{GL(V}{}_{)V}$。因此存在一个双洗牌代数同构

$$\mathscr{S}/(e_{d+1}) \cong \mathcal{B}_V^{GL(V)} = \bigoplus_{N \geq 0} \mathrm{End}_{GL(V)}(V^{\otimes N}).$$

特别地 特别地，不变量代数是一个 $\mathbb{S}$-对称交换双洗牌代数 .

证明。在 $\Bbbk\mathbb{S}_N$ 上，映射 φ_V 是 $\mathbb{S}_N$ 通过置换张量因子对 $V^{\otimes N}$ 的作用。根据施尔-韦伊对偶，其像是交换子 $\mathrm{End}_{GL(V)}(V^{\otimes N})$，其核是满足 $\ell(\lambda) > d$的各块 $\mathrm{End}(V_\lambda)$之和。根据命题 2.4，这个和是 $(e_{d+1})(N)$。□

2.2.1. 超向量空间。现在设 $V = V_0 \oplus V_1$ 为一个超向量空间，其维数为 $V_0 = k$，且 $V_1 = l$。群 $\mathbb{S}_N$ 通过算子 Π_π 作用于 $V^{\otimes N}$，按照 Koszul 符号规则置换张量因子；公式 (3) 在 $\mathcal{B}_V(N) = \mathrm{End}(V^{\otimes N})$ 上定义乘积，其中算子的张量积也遵循 Koszul 规则，即 $(X\otimes Y)(a\otimes b) = (-1)^{|Y||a|}Xa\otimes Yb$。命题 2.6 的论证给出

$$X \star_{\sigma,\tau} Y = (-1)^{|X||Y|}\, Y \star_{\sigma^{op},\tau^{op}} X$$

对于齐次的 X 和 Y。因此，$\mathcal{B}_V$ 是超向量空间范畴中的交换双洗牌代数，其偶部是符合定义 1.3 意义下的交换双洗牌代数。算子 Π_u 是偶的，而 $\varphi_V\colon u \mapsto \Pi_u$ 再次是双洗牌代数的同态。$\mathbb{S}_N$ 在 $V^{\otimes N}$ 上的作用与一般线性李超代数 $\mathfrak{gl}(V) = \mathfrak{gl}(k|l)$ 的作用交换。我们将 $\mathrm{End}_{\mathfrak{gl}(V)}(V^{\otimes N})$ 记作与 $\mathfrak{gl}(V)$ 超交换的算子空间。

定理 2.8. 设 V 是一个维数为 $k|l$的超向量空间。φ_V 在元数 N 中的像为$\mathrm{End}_{\mathfrak{gl}(V)}(V^{\otimes N})$，而 φ_V 的核是理想 $\mathscr{J}_{k,l}$。因此，$\mathfrak{gl}(V)$-不变量空间构成 $\mathcal{B}_V$的一个交换双洗牌子代数，并且

$$\mathscr{A}_{k,l} = \mathscr{S}/\mathscr{J}_{k,l} \cong \bigoplus_{N\geq 0} \mathrm{End}_{\mathfrak{gl}(V)}(V^{\otimes N}) \cong \bigoplus_{\lambda\in H(k,l)} \mathrm{End}(V_\lambda),$$

最后一个求和遍历所有不包含矩形 $\rho_{k,l} = ((l+1)^{k+1})$的分拆。

证明. 根据 Sergeev 以及 Berele 和 Regev 的定理，[37, 6]，$\Bbbk\mathbb{S}_N$ 在 $\mathrm{End}(V^{\otimes N})$中的像是 $\mathfrak{gl}(V)$的交换子，而 $\mathbb{S}_N$ 中出现在 $V^{\otimes N}$ 里的不可约表示为满足 $\lambda \in H(k,l)$的 V_λ。因此，φ_V在元数 N中的核是所有满足 $\lambda \notin H(k,l)$的块 $\mathrm{End}(V_\lambda)$之和；根据 (2)，这就是 $\mathscr{J}_{k,l}(N)$。□

对于 $l = 0$，这就是定理 2.7。特别地，$\dim \mathscr{A}_{k,\,l}(N) \leq (k+l)^{2N}$。

3. Noetherianity questions

如果交换双洗牌代数 $\mathscr{A}$ 的每个理想都是有限生成的，我们就称其为诺特代数；等价地，$\mathscr{A}$ 的每个理想升链最终都会稳定。商代数$\mathscr{S}/\mathscr{I}$的理想是 $\mathscr{S}$中包含 $\mathscr{I}$的理想的像，因此诺特代数的商仍是诺特代数。在本小节中，我们证明 $\mathscr{S}$ 的对称理想总是有限生成的，证明 $\mathscr{S}$ 本身不是诺特代数，证明 $\mathcal{B}_V$ 及其商 $\mathscr{S}/(e_k)$ 是诺特代数，并猜想除了 $\mathscr{S}$ 本身以外，所有 $\mathbb{S}$-对称商都是诺特代数。

3.1. **无限反链**。在取模式后封闭的排列集合称为一个类。如果一个类在模式包含关系下不含无限反链，则称其为部分良序；由于包含关系是良基的，这等价于该类是良拟序的。众所周知，所有排列构成的集合并非部分良序 [39, 2, 43]。下面这个明确给出的反链对我们很有用。

例 3.1。对于 $j \geq 2$ 令

$$a_j = 2,\,3,\,5,\,1,\;7,\,4,\;9,\,6,\;\ldots,\;2j+1,\,2j-2,\;\;2j+2,\,2j+3,\,2j\;\in \mathbb{S}_{2j+3},$$

其中，数对 $2i+1,\;\;2i-2$ 出现在 $i = 3,\,\ldots\ldots,\;\;j$ 中。例如 $a_2 = 2351674$、$a_3 = 235174896$ 和 $a_4 = 2\,3\,5\,1\,7\,4\,9\,6\,10\,11\,8$。排列 a_j 构成一个无限反链，并且它们都避开 321。

事实上，设 $G(u)$ 为排列 u 的逆序图：其顶点是 u 的值，且两个值若构成一个逆序则相邻。若 u 是 v 的一个模式，则 $G(u)$ 同构于

$G(v)$ 的一个导出子图。图 $G(a_j)$ 是路径 $1,5,4,7,6,9,8,\dots,2j+1,2j$，连同与 1 相连的两个顶点 2,3，以及与 $2j$ 相连的两个顶点 $2j+2,2j+3$。其仅有的度数为三的顶点是 1 和 $2j$。假设 a_i 是 a_j 的一个带有 $i<j$ 的模式，并设 H 为 $G(a_j)$ 的相应导出子图。它有两个度数为三的顶点，它们必定是 1 和 $2j$，连同它们的全部邻格。由于 H 是连通的，它包含从 1 到$2j$ 的路径，因此 $H=G(a_j)$，这与 $2i+3<2j+3$ 矛盾。最后，321 的一次出现是逆序图中的一个三角形，而 $G(a_j)$ 没有三角形。

命题 3.2. 如果 A 是一个由排列构成的无限反链，那么由A 生成的 $\mathscr{S}$ 理想不是有限生成的。特别地，$\mathscr{S}$ 不是诺特的。

证明。设 $A=\{a_1,a_2,\dots\}$。根据推论 1.10，一个排列属于单项式理想，当且仅当它包含某个生成元。(A) 中的每个元素都是包含 A中元素的排列的线性组合，因此，(A) 中有限多个元素属于 $(a_1,\dots,a_M)$，其中 M。但是$a_{M+1}\notin(a_1,\dots,a_M)$，因为它不包含 $a_1,\dots,a_M$中的任何元素。因此，(A) 不是有限生成的，并且链 $(a_1)\subset(a_1,a_2)\subset\cdots$不会稳定。□

3.2. **双洗牌代数 $\mathcal{B}_V$和 $\mathscr{S}/(e_k)$ 是诺特的**。另一方面，商$\mathscr{S}/(e_k)$是诺特的。其思路是用一个更大且有更好序结构的单项式集合来替代排列：第 2.2 节代数 $\mathcal{B}_V$ 的矩阵单位，也就是有限字母表中的词对。

引理 3.3。对于每个有限维向量空间 V，双洗牌代数 $\mathcal{B}_V$ 是诺特的。

证明。首先，我们将矩阵单位 $E_{\alpha,\beta}$ 称为单项式；根据（4），单项式的乘积仍是单项式。若 $E_{\alpha,\beta}$ 整除 $E_{\alpha'',\beta''}$，则称 $E_{\alpha'',\beta''}=E_{\alpha,\beta}\star_{\sigma,\tau}E_{\gamma,\delta}$ 对某个单项式 $E_{\gamma,\delta}$ 以及洗牌σ，τ成立。由于 σ和 τ可以独立选取，这当且仅当 α是 α''的子词，并且β 是 β''的子词，两个嵌入可以任意选择。根据希格曼引理 [19], ，有限字母表 $[d]$ 中的词按子词序构成良拟序，因此词对按分量排序也构成良拟序。所以，每个在取倍数运算下封闭的单项式集合都有有限个极小元。

其次，先按词 α，再按词β，对 $\mathcal{B}_V(N)$ 的单项式进行字典序排序，并令 $\operatorname{lm}(f)$ 为元素 f 的最大单项式。若 $E_{\alpha,\beta}<E_{\alpha_1,\beta_1}$，则 $E_{\alpha,\beta}\star_{\sigma,\tau}E_{\gamma,\delta}<E_{\alpha_1,\beta_1}\star_{\sigma,\tau}E_{\gamma,\delta}$：新词 α' 的第一个差异，或者在 $\alpha=\alpha_1$ 时，新词 β' 的第一个差异，出现在第一个差异的像处，因为 σ 和 τ 在 $[n]$上是递增的。对第二个自变量同样成立。因此，对于任意元素 f 和单项式 E，都有 $\operatorname{lm}(f\star_{\sigma,\tau}E)=\operatorname{lm}(f)\star_{\sigma,\tau}E$。

最后，令 $\mathscr{J}$ 为 $\mathcal{B}_V$ 的一个理想。根据第二部分，$\mathscr{J}$ 中元素的首项单项式构成一个对取倍数封闭的集合，因此根据第一部分，它有有限个极小元 $\operatorname{lm}(f_1)\dots,\operatorname{lm}(f_r)$，其中 $f_i\in\mathscr{J}$。每个 $0\neq f\in\mathscr{J}(N)$ 都有形如 $\operatorname{lm}(f_i)\star_{\sigma,\tau}E$ 的首项单项式，而减去 $f_i\star_{\sigma,\tau}E$ 的一个倍数会降低首项单项式。根据 $\mathcal{B}_V(N)$ 的单项式有限集上的归纳法，$\mathscr{J}=(f_1,\dots,f_r)$。□

定理 3.4。对于每个 $k\geq1$ 双洗牌代数 $\mathscr{S}/(e_k)$ 和 $\mathscr{S}/(s_k)$ 都是诺特的。

证明。首先，对于 $k=1$ 理想 (e_1) 包含每个正长度的排列，因此无需证明任何内容。令 $k=d+1\geq2$，令 $V=\Bbbk^d$，并令 $\mathscr{A}=\mathcal{B}_V^{GL(V)}\cong\mathscr{S}/(e_k)$（定理 2.7）。由于 $GL(V)$ 是约化的，且 $\Bbbk$ 具有特征零，因此每个 $\mathcal{B}_V(N)$ 都是半单的 $GL(V)$-模，并且投影 $R\colon\mathcal{B}_V(N)\to\mathscr{A}(N)$ 到不变量的投影与所有 $GL(V)$-等变线性映射可交换。对于 $a\in\mathscr{A}(n)$，从 $\mathcal{B}_V(m)$ 到 $\mathcal{B}_V(n+m)$ 的映射$Y\mapsto a\star_{\sigma,\tau}Y$是等变的，因此

$$R(a\star_{\sigma,\tau}Y)=a\star_{\sigma,\tau}R(Y).$$

其次，令 $\mathscr{J}$ 为 $\mathscr{A}$ 的一个理想，并令 $\mathscr{J}\mathcal{B}_V$ 为由 $\mathscr{J}$ 生成的 $\mathcal{B}_V$ 的理想；由于 $\mathcal{B}_V$ 是交换的，它由乘积 $a\star_{\sigma,\tau}Y$ 张成，其中 $a\in\mathscr{J}$ 且 $Y\in\mathcal{B}_V$。由引理 3.3，$\mathscr{J}\mathcal{B}_V$ 是有限生成的，并且由于有限多个生成元中的每一个都是这类乘积的有限和，它

由有限多个元素 $a_1, \ldots, a_r \in \mathscr{J}$ 生成。令 $x \in \mathscr{J}$。则 $x = \sum_\nu a_{i_\nu} \star_{\sigma_\nu,\ \tau_\nu} Y_\nu$，其中 $Y_\nu \in \mathcal{B}_V$，应用 R 得到

$$x = R(x) = \sum_\nu a_{i_\nu} \star_{\sigma_\nu,\tau_\nu} R(Y_\nu)$$

带有 $R(Y_\nu) \in \mathscr{A}$。因此，$\mathscr{J}$ 由 $a_1, \ldots\ldots, a_r$ 生成，而 $\mathscr{S}/(e_k)$ 是诺特的。

最后，第 2.1 节的符号扭曲 θ 将由集合 G 生成的理想映射到由 $\theta(G)$ 生成的理想上，并且 $\theta(e_k) = s_k$。因此，它在包含 (e_k) 的理想与包含 (s_k) 的理想之间诱导出一个保持有限生成性的双射。□

推论 3.5。设 Λ 是杨氏格的一个上集，且包含一列 (1^k) 或一行 (k)。那么 $\mathscr{S}/\mathscr{J}_\Lambda$ 是诺特的。

证明。理想 $\mathscr{J}_\Lambda$ 分别包含 (e_k)、(s_k)，因此 $\mathscr{S}/\mathscr{J}_\Lambda$ 是一个诺特代数的商。□

注 3.6。(1) 在 $\mathscr{S}/(e_3)$ 中，例 3.1 中排列 a_j 的像所生成的理想是有限生成的。因此，存在一个 M，使得对所有 j，都有 $a_j \in (e_3, a_2, \ldots\ldots, a_M)$，尽管这些 a_j 两两不可比且避免 321。该证明没有给出 M 的界。

(2) 证明沿用了 Sam 和 Snowden [34]的策略：双洗牌代数 $\mathcal{B}_V$的单项式由希格曼引理可知是良拟序的，它起到格罗布纳覆盖的作用；而转向不变量则运用了带雷诺算子的希尔伯特经典论证。用对称性下的诺特性 [20]语言来说，$\mathcal{B}_V(N)$是关于两族变量 y_{ia}、z_{ja}的多项式环的多线性部分，其中 $i,\ j \in [N]$ 和 $a \in [d]$，矩阵单位 $E_{\alpha,\ \beta}$ 对应于 $\prod_i y_{i\alpha_i} \prod_j z_{j\beta_j}$，而递增映射构成的幺半群分别作用于指标 i 和 j。对于 $d = \infty$，希格曼引理不成立，这与命题 3.2 一致。
(3) 同样的论证表明，$\mathscr{S}/(e_k)$上的有限生成模是诺特的：由元数为 n 的生成元生成的自由 $\mathcal{B}_V$-模的单项式，是字母表 $[d] \sqcup \{*\}$ 中恰好各含 $*$ 个 n 字母的词对；根据希格曼引理，这些词对同样是良拟序的。本文不进一步讨论双洗牌代数上的模。

3.3. $\mathbb{S}$-对称理想的诺特性。

引理 3.7. 杨氏格是良拟序：在任意无限序列 $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots$ 的分拆中，都存在 $i < j$ 使得 $\lambda^{(i)} \subseteq \lambda^{(j)}$。特别地，杨氏格的每个上集都只有有限多个极小元。

证明. 将分拆视为由其各部分组成的词 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_\ell$，其中字母表为 $\mathbb{N}$，并按通常顺序排列。由希格曼引理 [19], ，在任意由此类词构成的无限序列中，都存在 $i < j$ 以及一个严格递增的映射 φ，使得对所有 s，$\lambda_s^{(i)} \le \lambda_{\varphi\ s()}^{(j)}$。由于 $\varphi(s) \ge s$，且 $\lambda^{(j)}$ 的各部分弱递减，故 $\lambda_s^{(i)} \le \lambda_{\varphi\ s()}^{(j)} \le \lambda_s^{(j)}$ 对所有 s成立，即 $\lambda^{(i)} \subseteq \lambda^{(j)}$。上集的极小元构成一个反链，由第一条可知该反链是有限的。□

命题 3.8。$\mathscr{S}$ 的每个对称理想都是有限生成的。更确切地说，若 Λ是杨氏格的一个上集，其极小元为 $\mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(r)}$，则 $\mathscr{J}_\Lambda$ 由这些块生成：$\mathrm{End}(V_{\mu^{(1)}}) \ldots, \mathrm{End}(V_{\mu^{(r)}})$。因此，$\mathscr{S}$的每个对称理想升链都会稳定；并且在每个 $\mathbb{S}$-对称交换双洗牌代数中，每个对称理想都是有限生成的。

证明。首先，根据引理 3.7，上集 Λ 有有限多个极小元，而 Λ 是上集 $\{\lambda$ 的并：$\lambda \supseteq \mu^{(i)}\}$。根据命题 2.3，由 $\mathrm{End}(V_{\mu^{(i)}})$ 生成的理想是这个上集的对称理想，因此 $\mathscr{J}_\Lambda$ 由 r 个块生成，而这些块是有限维的。

其次，根据命题 2.3，对称理想的升链对应于上集 $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2 \subseteq \cdots$ 的升链。并集 Λ 是一个上集；它有限多个极小元都属于某个Λ_m，于是 $\Lambda_m = \Lambda$。

最后， $\mathscr{S}/\mathscr{J}$ 的对称理想是包含$\mathscr{J}$的 $\mathscr{S}$ 的对称理想的像。□

因此， $\mathscr{S}$ 的对称商满足对称理想的升链条件。问题在于，对于任意理想，情况会如何；这些理想不必在位置和值的排列下保持稳定。

引理 3.9。 每个非零对称理想 $\mathscr{J} \subset \mathscr{S}$ 都包含理想$\mathscr{J}_{k,\,l}$ 第 *2.1* 节中的理想。因此，每个带有 $\mathscr{J} \neq 0$ 的 $\mathbb{S}$-对称交换双洗牌代数 $\mathscr{S}/\mathscr{J}$ 都是代数$\mathscr{A}_{k,\,l}$之一的商。

证明。 根据命题 2.3， $\mathscr{J} = \mathscr{J}_\Lambda$ 对于一个非空上集 Λ。设 $\mu \in \Lambda$为一个非空分拆，并设 $k+1 = \ell(\mu)$ 和 $l+1 = \mu_1$。那么， μ 包含于矩形 $\rho_{k,\,l} = ((l+1)^{k+1})$ 中，因此 $\rho_{k,\,l} \in \Lambda$ 且 $\mathscr{J}_{k,\,l} \subseteq \mathscr{J}$。□

猜想 3.10。 对于所有 k、$l \geq 0$，代数 $\mathscr{A}_{k,\,l} = \mathscr{S}/\mathscr{J}_{k,\,l}$ 都是诺特的。等价地，根据引理 *3.9*，除 $\mathscr{S}$ 自身外，每个 $\mathbb{S}$-对称交换双洗牌代数都是诺特的。

对于 $l = 0$ 以及 $k = 0$，该猜想就是定理 3.4，因为 $\mathscr{J}_{k,\,0} = (e_{k+1})$ 和 $\mathscr{J}_{0,\,l} = (s_{l+1})$。第一个未解决情形是代数 $\mathscr{A}_{1,\,1}$，其分量是钩子的各个块之和。定理 3.4 的证明不能直接适用。根据定理 2.8， $\mathscr{A}_{k,\,l}$ 嵌入到超向量空间 V（维数为 $k|l$）上的双洗牌代数 $\mathcal{B}_V$ 中。引理 3.3 的证明适用于该代数；其中的单项式（差一个符号）是字母表 $[k+l]$中的词对，并由此表明该代数是诺特的。但一般线性超群并非约化的，也不存在雷诺算子可用于转到不变量。

注记 3.11. 这类有限生成问题也出现在多项式恒等式理论中。施佩希特问题询问：自由结合代数的每个 T-理想，也就是说，每个在所有自同态下稳定的理想，是否都能作为 T-理想有限生成 [38]。在特征零的情形下，Kemer 的一个定理给出了肯定答案 [22, 23]。

4. Gröbner bases for commutative bishuffle algebras

4.1. 单项式序。

定义 4.1. $\mathscr{S}$ 上的单项式序是指在每个 $\mathbb{S}_n$ 上选取一个全序，使得对于所有 $w \in \mathbb{S}_n$ 以及所有 k-子集 $L \subset [n]$，代换映射

$$\mathbb{S}_k \to \mathbb{S}_n, \qquad \sigma \mapsto w_{L \leftarrow \sigma},$$

严格递增。

注记 4.2. 单项式序等同于相容序，也就是说，对 $\mathscr{S}$的单项式进行排序，且该排序与双混洗乘法相容：对于所有 (n,m)-洗牌 σ, τ、所有排列 $u, u' \in \mathbb{S}_n$ 以及 $v, v' \in \mathbb{S}_m$，

$$u < u' \implies u \star_{\sigma,\tau} v < u' \star_{\sigma,\tau} v, \qquad v < v' \implies u \star_{\sigma,\tau} v < u \star_{\sigma,\tau} v'.$$

事实上，根据命题 1.5，映射 $u \mapsto u \star_{\sigma,\,\tau} v$ 是关于 $L = \tau([n])$ 和 $w = \mathrm{id}_n \star_{\sigma,\,\tau} v$ 的代换映射 $u \mapsto w_{L \leftarrow u}$，而映射 $v \mapsto u \star_{\sigma,\,\tau} v$ 是到 $w = u \star_{\sigma,\,\tau} \mathrm{id}_m$ 的位置 $\tau([n+1, n+m])$ 中的代换映射。反过来，每个代换映射都是乘积映射，因为 $w_{L \leftarrow u} = u \star_{\pi_{w(L)},\,\pi_L} w|_{[n]\setminus L}$。这类似于多项式环上的单项式序与乘法的相容性，以及洗牌代数的单项式序与其乘积 [13] 的相容性。由于每个 $\mathbb{S}_n$ 都是有限的，因此不需要良序条件。

自然性同样是内在的： $\mathbb{S}_n$ 的一个序沿着保序双射被传输到 $\mathscr{S}(I,\ J)$ 的单项式上，$|I| = |J| = n$; 而对于自由代数 F，则必须要求自然性（第 1.2 节）。

第 2.1 节的二面体群 D_4 将代换映射映射为代换映射。因此，如果 $<$是一个单项式序，且 $\gamma \in D_4$, 那么 $u <^{\gamma} v \iff \gamma(u) < \gamma(v)$ 仍然是一个单项式序。

命题 4.3。 单行表示的字典序 $<_{\mathrm{lex}}$ 是$\mathscr{S}$上的一个单项式序。因此，其八种变换 $<^{\gamma}$ 字典序、$\gamma \in D_4$也都是单项式序。特别地，字典序的逆序 $<^{c}_{\mathrm{lex}}$也是一个单项式序；对于该序，一个元素的首单项式是其字典序最小的排列。

证明。 如果 $\sigma <_{\mathrm{lex}} \sigma'$，那么 $w_{L\leftarrow\sigma}$ 和 $w_{L\leftarrow\sigma'}$ 首次不同的位置为 l_k，其中 k 是 σ 和 σ' 首次不同的位置，并且该处的值满足 $\sigma(k) < \sigma'(k)$的比较关系。□

注记 4.4. 在任意单项式序中，要么 $21 > 12$ or $12 > 21$。在第一种情形下，每个排列 $u \neq w_0$ 都满足 $u < u_{L\leftarrow 21}$，其中 L 是 u中 12 的一次出现，因此对于所有 k， $w_0 = k\cdots 21$ 都是 $\mathbb{S}_k$ 的最大元素；在第二种情形下，id 是最大元素。因此，支撑集为 $\mathbb{S}_k$ 的 $\Bbbk\mathbb{S}_k$ 中的元素具有单调首单项式，且单调方向不依赖于 k。

4.2. **格罗¨布纳基**。 固定一个单项式序。对于 $0 \neq f \in \Bbbk\mathbb{S}_n$ ， 令 lm(f) 为其最大的排列，令 lc(f) 为 lm(f) 的系数。根据单项式序的定义，

$$\mathrm{lm}\big(g[w, L]\big) = w \qquad \text{whenever } L \text{ is an occurrence of } \mathrm{lm}(g) \text{ in } w. \tag{5}$$

定义 4.5。 设 $\mathscr{I} \subset \mathscr{S}$ 是一个理想。若对于每个$0 \neq f \in \mathscr{I}$，排列 lm(f) 都包含某个 $g \in G$ 的 lm(g), 则子集 $G \subset \mathscr{I}$ 是 $\mathscr{I}$ 的格罗布纳基。若一个排列避开所有 lm(g)， $g \in G$，则称其为正规排列。

如果 L 是排列 w 中出现的 lm(g) 的一个出现，且该排列在 f 中以系数 c出现，则约化 $f \mapsto f - \frac{c}{\mathrm{lc}(g)}\, g[w, L]$ 根据（5）将 w 替换为更小的排列。因此，正规排列张成$\mathscr{S}/(G)$，于是照常可得：

命题 4.6。 设 G 生成 $\mathscr{I}$。以下各项等价： G 是 $\mathscr{I}$的 *Gr¨obner* 基；正规排列构成 $\mathscr{S}/\mathscr{I}$的一个基；对于所有 n， $\dim(\mathscr{S}/\mathscr{I})(n) = \#\mathrm{Av}_n(\mathrm{lm}(G))$。在此情况下

$$f_{\mathscr{S}/\mathscr{I}}(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{\#\mathrm{Av}_n(\mathrm{lm}(G))}{(n!)^2}\, t^n.$$

4.3. **Buchberger 判据**。

定义 4.7。 设 $g_1, g_2 \in G$ 满足 lm(g_i) $\in \mathbb{S}_{k_i}$。 p_1 和 p_2 的一个小公倍数是三元组（w, L_1, L_2），其中 $w \in \mathbb{S}_n$, L_i 是 w, $L_1 \cup L_2 = [n]$ 中 p_i的一个出现，且 $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$；如果$g_1 = g_2$，则要求 $L_1 \neq L_2$。其 S-多项式为

$$S(w; L_1, L_2) = \frac{1}{\mathrm{lc}(g_1)}\, g_1[w, L_1] - \frac{1}{\mathrm{lc}(g_2)}\, g_2[w, L_2].$$

根据 (5)， $S(w; L_1,\ L_2)$ 的所有排列都小于 w。由于这两个出现共享一个位置， $n \leq k_1 + k_2 - 1$; 特别地，有限集 G 只有有限多个小公倍数。

定理 4.8。 集合 G 是 (G) 的 *Gr¨obner* 基，当且仅当每个 *S*-多项式模 G 都可约化为零。

证明。 S-多项式属于 (G)，因此该条件是必要的。反过来，根据标准论证（Bergman 钻石引理），只需证明以下内容。设 L_1 和 L_2 是排列 L_2 中 lm() 和 Glm(L_1) 的出现

，并设 $h = {}^{1}\!/_{\mathrm{lc}(g_1)}\, g_1[w, L_1] - {}^{1}\!/_{\mathrm{lc}(g_2)}\, g_2[w, L_2]$。则 $h = \sum_j c_j\, g_j[u_j, K_j]$，其中 $g_j \in G$，K_j 是 u_j 中 $\mathrm{lm}(g_j)$ 的一个出现，并且 $u_j < w$。

首先，设 $L_1 \cap L_2 = \varnothing$。位于互不相交位置集上的代换彼此可交换。写作 $g_1 = \sum c_\sigma \sigma$ 和 $g_2 = \sum d_\rho \rho$，得到

$$\sum_\sigma c_\sigma\, g_2\big[w_{L_1\leftarrow\sigma}, L_2\big] = \sum_{\sigma,\rho} c_\sigma d_\rho\, w_{L_1\leftarrow\sigma,\, L_2\leftarrow\rho} = \sum_\rho d_\rho\, g_1\big[w_{L_2\leftarrow\rho}, L_1\big].$$

将项 $\sigma = p_1$ 和 $\rho = p_2$ 分开，得到

$$\mathrm{lc}(g_1)\mathrm{lc}(g_2)\, h = \sum_{\sigma\neq p_1} c_\sigma\, g_2\big[w_{L_1\leftarrow\sigma}, L_2\big] - \sum_{\rho\neq p_2} d_\rho\, g_1\big[w_{L_2\leftarrow\rho}, L_1\big],$$

根据单项式序的定义，且 $w_{L_2\leftarrow\rho} < w$, $w_{L_1\leftarrow\sigma} < w$。

其次，设 $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$。令 $U = L_1 \cup L_2$ 和 $u = w|_U$。出现 L_1, L_2 对应于 u中的出现 L_1', L_2'，并且 (u, L_1', L_2') 是一个小公倍数。根据假设，$S(u; L_1', L_2') = \sum_j c_j\, g_j[u_j, K_j]$，其中 $u_j < u$。映射 $x \mapsto w_{U\leftarrow x}$ 是线性的、严格递增的，并将 $g[x, K]$ 变为 $g[w_{U\leftarrow x}, K'']$，其中 $K'' \subset U$ 对应于 K。将其应用于最后一个恒等式，即可按所需形式表示 h。□

推论 4.9. 设 G 是一个由元数至多为 d 的元素构成的有限集，它生成理想 $\mathscr{I}$。那么，G 是 $\mathscr{I}$ 的 ***Gr¨obner*** 基，当且仅当对所有 $n \le 2d-1$，都有 $\dim(\mathscr{S}/\mathscr{I})(n) = \#\mathrm{Av}_n(\mathrm{lm}(G))$。

证明. 所有 S-多项式都属于 $\mathscr{I}(n)$，且 $n \le 2d-1$。如果 $\dim(\mathscr{S}/\mathscr{I})(n) = \#\mathrm{Av}_n(\mathrm{lm}(G))$，那么 $\mathscr{I}(n)$ 的每个非零元素的首置换都包含某个 $\mathrm{lm}(g)$，因此 $\mathscr{I}(n)$ 的每个元素都可约化为零。由定理 4.8 即得证。□

因此，对于一个固定的有限 G，Gr¨obner 性质可通过有限计算判定。另一方面，经典包含关系不是良拟序，因此布赫伯格完备化过程不一定终止。

4.4. 由两种排序得到的 Wilf 等价。

命题 4.10. 如果 G 是理想 $\mathscr{I} \subset \mathscr{S}$ 关于两个单项式序 $<$ 和 $<'$ 的 ***Gr¨obner*** 基，那么

$$\#\mathrm{Av}_n\big(\mathrm{lm}_<(G)\big) = \dim(\mathscr{S}/\mathscr{I})(n) = \#\mathrm{Av}_n\big(\mathrm{lm}_{<'}(G)\big) \qquad \textit{for all } n.$$

证明. 这是将命题 4.6 应用两次所得。□

对于二项式理想，还能得到更多结果。设 $p, q \in \mathbb{S}_k$ 和 $f = p - q$。设 $\sim$ 是 $\mathbb{S}_n$ 上由 $w \sim w_{L\leftarrow q}$ 生成的等价关系，其中 L 是 w 中 p 的所有出现。

命题 4.11. (1) $\dim(\mathscr{S}/(f))(n)$ 等于 $\mathbb{S}_n$ 中 $\sim$-等价类的数量。
(2) 如果 $\mathrm{lm}_<(f) = p$ 且 $\{f\}$ 是 $<$ 的 ***Gr¨obner*** 基，那么每个 $\sim$-等价类恰好包含一个避开 p 的排列。(3) 此外，如果 $\mathrm{lm}_{<'}(f) = q$ 且 $\{f\}$ 是 $<'$ 的 ***Gr¨obner*** 基，那么将一个 p- 避开排列映射到其所属等价类中唯一的 q-避开排列，便得到一个双射 $\mathrm{Av}_n(p) \to \mathrm{Av}_n(q)$。

证明。理想 $(f)(n)$ 由差 $f[w, L] = w_{L\leftarrow p} - w_{L\leftarrow q}$ 张成，从而得到 (1)。在 (2) 中，将 p 的一次出现替换为 q 会使一个排列变小，因此每个等价类都包含一个 p-避免排列；由命题 4.6，等价类的数量等于 $\#\mathrm{Av}_n(p)$，所以每个等价类恰好包含一个。第 (3) 部分由将 (2) 应用于两种序得到。□

4.5. 示例：商 $\mathscr{S}/(e_n)$ 和 $\mathscr{A}_{1、1}$。 我们首先记录第 2.1 节中的对称性如何与 Gröbner 基相互作用。符号扭曲 θ 将每个排列乘以一个符号，因此它保持首项单项式不变； G 是 Gröbner 基，当且仅当 $\theta(G)$ 是。设 $\mathscr{J}$ 是一个对称理想， $\gamma \in D_4$，且 $<$ 是一个单项式序。我们有 $\mathrm{lm}_{<^\gamma}(f) = \gamma^{-1}(\mathrm{lm}_<(\gamma f))$，并且 $\mathscr{J}$ 在 γ 下稳定。因此，对于 $<^\gamma$， $\mathscr{J}$ 的首置换是其在 $<$ 下的首置换经 γ^{-1} 作用后的像。由于 γ 保持模式包含， $\mathscr{J}$ 对于 $<$ 存在一个集中于元数 k 的 Gröbner 基，当且仅当对于 $<^\gamma$ 存在这样的基。

4.5.1. 商 $\mathscr{S}/(e_n)$ 与 *Schensted*定理。 我们使用 Robinson–Schensted 对应，它是 $\mathbb{S}_N$ 与形状相同的标准杨氏表对之间的双射 $\lambda \vdash N$。根据 Schensted定理 [36], ，如果 u 对应于形状为 λ的一对杨氏表，那么 λ_1 是 u的最长递增子序列的长度，而 $\ell(\lambda)$ 是最长递减子序列的长度。因此

$$\#\mathrm{Av}_N(n\cdots 21) = \sum_{\substack{\lambda\vdash N\\ \ell(\lambda)<n}} (f^\lambda)^2, \qquad \#\mathrm{Av}_N(12\cdots n) = \sum_{\substack{\lambda\vdash N\\ \lambda_1<n}} (f^\lambda)^2, \tag{6}$$

这两个数相等，因为 $\lambda \mapsto \lambda'$ 保持 f^λ。

定理 4.12。 *对于每个 $n \geq 1$，反对称化子 e_n 是理想 (e_n) 关于 $\mathscr{S}$的任意单项式序的 Gröbner 基。若 $21 > 12$，其首单项式为 $n\cdots 21$；若 $12 > 21$，则为 $12\cdots n$。特别地， e_n 是关于 $<_{\mathrm{lex}}$的 Gröbner 基，其首单项式为 $n\cdots 21$；它也是关于 $<^c_{\mathrm{lex}}$的 Gröbner 基，其首单项式为 $12\cdots n$。*

证明。 首先， e_n 的支撑集是 $\mathbb{S}_n$的全部。根据注 4.4，其首单项式是 $\mathbb{S}_n$的最大元素；当 $21 > 12$时为 $n\cdots 21$，否则为 $n\cdots 21$。

其次，在两种情况下，根据 Schensted 枚举 (6)，对于所有 N，$\#\mathrm{Av}_N(\mathrm{lm}(e_n)) = \sum_{\ell(\lambda)<n}(f^\lambda)^2$。

最后，根据命题 2.4，这个数是$(\mathscr{S}/(e_n))(N)$的维数。因此，对于所有 N，$\dim(\mathscr{S}/(e_n))(N) = \#\mathrm{Av}_N(\mathrm{lm}(e_n))$，并且根据命题 4.6， e_n是一个 Gröbner 基。□

注 4.13。 根据命题 4.6， e_n 对于 $<_{\mathrm{lex}}$ 的 Gröbner 性质等价于避免 $n\cdots 21$的排列的计数 (6)。因此可以反向进行论证，而 Gröbner 性质给出了 Schensted 枚举的一个证明。事实上，根据引理 5.4，$(e_n)(N)$是 $n\times n$ 阶子式理想的权空间，其中 $N\times N$ 为一般矩阵。这些子式对于反对角线项序和对角项序构成一个 Gröbner 基（完整棋盘上的定理 5.12），根据引理 5.6，这给出了 e_n 对于 $<_{\mathrm{lex}}$ 和 $<^c_{\mathrm{lex}}$ 的 Gröbner 性质。Sturmfels 对行列式理想的 Gröbner 性质的证明 [42]使用了 Knuth 对应 [24], ，而 Knutson、Miller 和 Yong [25, 26]的证明是几何性的（定理 5.8 和 5.9）。通过后者，计数 (6) 得到了一个不使用 Robinson–Schensted对应的证明。这个行列式论证是定理 6.1 的 $\mathcal{W} = \{\varnothing\}$ 情形。

例 4.14. 对于 $<_{\mathrm{lex}}$ $\mathscr{S}/(e_3)$ 的正规排列来说，它们就是避 321 排列。包含 321 的排列可以通过将一个 321 的出现替换为其值的其他五种排列的交错和来约化；例如

$$321 \equiv 123 - 132 - 213 + 231 + 312 \pmod{(e_3)}.$$

避 321 排列的等价类构成了 $(\mathscr{S}/(e_3))(N)$ 的一个基，其维数 $\sum_{\ell(\lambda)\leq 2}(f^\lambda)^2$是卡塔兰数：1，1，2，5，14，42，… .

注记 4.15。 双洗牌代数中内置的 $(n!)^2$ 归一化正是 Gessel 定理 [17] 所采用的形式： $\mathscr{S}/(e_n)$ 的希尔伯特级数是贝塞尔行列式

$$f_{\mathscr{S}/(e_n)}(t) = \det\big[I_{|i-j|}(2\sqrt{t})\big]_{1\leq i,j\leq n-1}, \qquad I_j(2\sqrt{t}) = \sum_{m\geq 0} \frac{t^{m+j/2}}{m!\,(m+j)!}.$$

问题 4.16。 利用 $\mathscr{S}$ 中的 Buchberger 判据，直接证明对于所有 n， e_n 是一个 Gr¨obner 基。

对称化子 s_m也同样如此。

命题 4.17. 对于每个 $m \geq 1$，对称化子 s_m 都是 (s_m) 的 ***Gr¨obner*** 基，适用于任意单项式序，且首单项式与 e_m相同。

证明. 符号扭曲映射 e_m 到 s_m 并保持首项单项式，因此结论由定理 4.12 得出。另一种证明是， s_m 的支撑集是整个 $\mathbb{S}_m$，因此由注 4.4 可知 $\mathrm{lm}(s_m) = \mathrm{lm}(e_m)$；而由 Schensted 枚举（6），$\#\mathrm{Av}_N(\mathrm{lm}(s_m)) = \sum_{\lambda_1<m}(f^\lambda)^2$，这正是商的维数 (1)。□

注 4.18. 设 $n, m \geq 2$。对于任意单项式序， e_n 和 s_m的首单项式按注 4.4 所述沿同一方向单调变化：当 $21 > 12$ 时，它们分别为 $n\cdots 21$和 $m\cdots 21$；当 $12 > 21$时，它们分别为$12\cdots n$和 $12\cdots m$。在第一种情况下，恒等置换会避开这两个首单项式；在第二种情况下，递减置换会避开这两个首单项式，且这两种情况对每个元数都成立，而商在较大的元数下为零。因此，对于任何单项式序， $\{e_n, s_m\}$ 都不是 (e_n, s_m) 的 Gr¨obner 基。

4.5.2. 代数 $\mathscr{A}_{1,\ 1}$。 回顾第 2.1 节，$\mathscr{A}_{1,\ 1} = \mathscr{S}/\mathscr{J}_{1,\ 1}$，其中 $\mathscr{J}_{1,\ 1}$ 是由块 $\mathrm{End}(V_{(2,2)})$ 生成的对称理想，而$\mathscr{A}_{1,\ 1}$ 是钩子块的和。

定理 4.19。 设 $K = \{1234, 2143, 3412, 4321\} \subset \mathbb{S}_4$ 为克莱因四元群，对于 $u \in \mathbb{S}_4$，令 $[u] = \sum_{\kappa\in K} u\kappa$ 为陪集 uK中元素之和。

(1) 块 $\mathrm{End}(V_{(2,2)})$ 的基为

$g_1 = [4213] - [4132]$, $g_2 = [4231] - [4123]$, $g_3 = [4312] - [4123]$, $g_4 = [4321] - [4132]$; 例如 $g_1 = 4213 + 2431 + 1342 + 3124 - 4132 - 1423 - 3241 - 2314$。因此 $\mathscr{J}_{1,\ 1}$ 由 g_1, g_2, g_3, g_4 生成。

(2) 对于 $N \geq 1$,

$$\mathscr{A}_{1,1}(N) \cong \bigoplus_{\substack{\lambda\vdash N \\ \lambda\ a\ hook}} \mathrm{End}(V_\lambda), \qquad \dim \mathscr{A}_{1,1}(N) = \binom{2N-2}{N-1}.$$

(3) 元素 g_1、 g_2、 g_3、 g_4 构成 $\mathscr{J}_{1,\ 1}$ 关于 $<_{\mathrm{lex}}$ 的 ***Gröbner*** 基，其首项单项式为4213、4231、4312 和4321。因此，正规排列是避免以下排列的排列：

以及对所有 $N \geq 1$, $= \binom{2N-2}{N-1}$ 中的$\#\mathrm{Av}_N(P_{1,\ 1})$。

证明。首先，我们描述这个块。群 K 是 $\mathbb{S}_4$ 的正规子群，商为 $\mathbb{S}_3$；在 $\mathbb{S}_4$ 的不可约表示中，K 平凡作用的表示为从 $\mathbb{S}_3$的平凡表示、符号表示和二维表示拉回得到的 $V_{(4)}$、 $V_{(1^4)}$ 和 $V_{(2,2)}$。因此，这三个块之和由 $\Bbbk\mathbb{S}_4$ 中在陪集 uK上为常数的元素组成，而 $\mathrm{End}(V_{(2,2)})$则由其中还满足 $\sum_u f_u = 0 = \sum_u \mathrm{sgn}(u) f_u$的元素 f组成，其中 f_u是 u的系数。由于 K 由偶排列组成，符号在每个陪集上都是常数，并且在每个 g_i 中两个陪集具有相同的符号。因此， $g_i \in \mathrm{End}(V_{(2,2)})$。通过 K 的右乘法，位置被简单传递地置换，所以每个陪集恰好包含一个以 4 开头的排列，并且对于 $<_{\mathrm{lex}}$ 而言，这个排列是其最大元素。由于当 $\sigma > \tau$ 时 $4\sigma > 4\tau$， g_1、 ..... 、 g_4 的首项单项式为 4213、4231、4312 和 4321。它们彼此不同，因此 g_1、.....、g_4 线性无关，并且构成四维块 $\mathrm{End}(V_{(2,2)})$ 的一个基。这就证明了 (1)，因为由一个块生成的理想可由其任意一个基生成。

其次，根据命题 2.3，商 $\mathscr{A}_{1,\ 1}(N)$ 等于不包含 (2，2) 的 N 的各个分拆的块之和，这些分拆是钩子 $(N-b,\ 1^b)$ 、 $0 \leq b \leq N-1$。一个标准杨表的

钩形由其第一列中除 1 以外的元素集合确定，因此 $f^{(N-b,1^b)} = \binom{N-1}{b}$，并且根据范德蒙德恒等式，$\sum_b \binom{N-1}{b}^2 = \binom{2N-2}{N-1}$。这就证明了 (2)。

最后，生成元 g_1，……，g_4 的元数为四。根据推论 4.9，当且仅当对所有 $N \le 7$ 均有 $\dim \mathscr{A}_{1,\,1}(N) = \#\mathrm{Av}_N(P_{1,\,1})$ 时，它们构成一个 Gröbner 基。对于 $N \le 3$，这两个数都等于 $N!$：长度至多为三的排列不包含长度为四的模式，而 $N \le 3$ 的所有分拆都是钩子。对于 $N = 4$，5，6，7，我们通过计算机枚举来统计正规排列：

N	1	2	3	4	5	6	7
$\#\mathrm{Av}_N(P_{1,1})$	1	2	6	20	70	252	924
$\dim \mathscr{A}_{1,1}(N) = \binom{2N-2}{N-1}$	1	2	6	20	70	252	924

因此，g_1，……，g_4 构成一个 Gröbner 基，而（3）的其余部分由命题 4.6 得出。 □

注 4.20。由于 $\mathscr{J}_{1,\,1}$ 在正方形的对称下保持不变（第 2.1 节），定理 4.19 对八种序 $<^{\gamma}{}_{\mathrm{lex}}$，$\gamma \in D_4$ 中的每一种都成立：$\mathrm{End}(V_{(2,2)})$ 的一个基，其四个首单项式为 $\gamma^{-1}(p)$、$p \in P_{1,\,1}$，是 $\mathscr{J}_{1,\,1}$ 的 Gröbner 基，其中 $<^{\gamma}{}_{\mathrm{lex}}$。例如，对于 $<^{c}_{\mathrm{lex}}$，首单项式为 1234、1243、1324 和 1342。

注记 4.21. 补映射将$P_{1,1}$ 映到模式1234、1243、1324和1342的集合上。避免这四个模式的排列所构成的类，是Bruner列出的十二个以四个长度为四的模式为基、并可能由中央二项式系数 [7], 计数的等价类之一，其生成函数记录在排列模式避免库 [29], 中，并由自动化方法得到。我们在文献中尚未找到等式$\#\mathrm{Av}_N(P_{1,1}) = \binom{2N-2}{N-1}$ 的书面证明。定理 4.19证明了该等式并解释了这一计数：避免$P_{1,1}$ 的排列构成$\mathscr{A}_{1,1}(N) \cong \bigoplus \mathrm{End}(V_\lambda)$的一个基，即对钩子 $\lambda \vdash N$的求和，而 $\binom{2N-2}{N-1}$ 也是 $[N]$ 中罗宾逊–申斯特德形状为钩子的排列个数。这两组排列并不相同，且后者甚至不是一个置换类：排列25314的形状为$(3,1,1)$，而其模式2413的形状为$(2,2)$。

4.6. **格¨勒布纳基与诺特性**。我们回到第 3 节的诺特性问题。若一个格¨勒布纳基的正规排列是良拟序的，就能直接证明诺特性。

命题 4.22。(1) 设 $\mathscr{I} \subset \mathscr{S}$ 是某个理想，它对于某个单项式序有一个格¨勒布纳基，并且其正规排列构成一个部分良序类。那么 $\mathscr{S}/\mathscr{I}$ 是诺特的。(2) 对于一个排列集合 P，单项式商 $\mathscr{S}/(P)$ 是诺特的，当且仅当 $\mathrm{Av}(P)$ 是部分良序的。

证明。首先，设 C 是 $\mathscr{I}$ 的正规排列类，且 $\mathscr{J} \supseteq \mathscr{I}$ 是一个理想。设 L 是 $\mathscr{J}$ 中属于 C 的元素的首置换集合。若 $v = \mathrm{lm}(f) \in L$，其中 $f \in \mathscr{J}$，且 $w \in C$ 在位置 K 包含 v，那么根据 (5)，$f[w, K] \in \mathscr{J}$ 的首置换是 w，因此 $w \in L$。于是 L 在 C 中向上封闭；又由于 C 是部分良序的，L 有有限多个极小元 $\mathrm{lm}(f_1), \ldots, \mathrm{lm}(f_r)$，其中 $f_i \in \mathscr{J}$。我们断言 $\mathscr{J} = \mathscr{I} + (f_1, \ldots, f_r)$。设 $f \in \mathscr{J}(N)$。将 f 对 $\mathscr{I}$ 的格¨勒布纳基取模化简后，可假设 f 是正规排列的线性组合。若 $f \neq 0$，则 $\mathrm{lm}(f) \in L$ 在位置 K 包含某个 $\mathrm{lm}(f_i)$；减去 $f_i[\mathrm{lm}(f)\ K]$ 的一个倍数，就能用 $\mathscr{J}$ 中首置换更小的元素替换 f。由于 $\mathbb{S}_N$ 是有限的，归纳可得该断言。因此，$\mathscr{J}/\mathscr{I}$ 由 $f_1, \ldots, f_r$ 的像生成。

最后，P 是单项式理想（P）的 Gröbner 基，其正规排列为 Av（P），因此（1）给出了（2）的一个方向。反之，若 Av（P）包含一个无限反链 A，则将命题 3.2 的论证应用于单项式理想（$P \cup A$），可知由 A 生成的$\mathscr{S}/$（P）理想不是有限生成的。□

根据 Atkinson、Murphy 和 Ruˇskuc [2]，的定理，单个排列p 的类 Av（p）是部分良序的，当且仅当 p 是 1、12、21、132、213、231 和 312 中的一个。因此，对于这些 p， $\mathscr{S}/$（p）恰为诺特的；特别地， $\mathscr{S}/$（321）和 $\mathscr{S}/$（123）不是诺特的，正如例 3.1 直接表明的那样。

命题 4.22(1) 不适用于商 $\mathscr{S}/(e_k)$、 $k \geq 3$。对于任意单项式序， e_k 的首单项式是 $k\cdots 21$ 或 $12\cdots k$（注 4.4），而根据定理 4.12，正规排列构成类 Av($k\cdots 21$) 或 Av($12\cdots k$)。这两个类都包含一个无限反链：例 3.1 及其逆序。不过，根据定理 3.4，这些商是诺特的。猜想 3.10 中的代数 $\mathscr{A}_{1,\ 1}$ 也存在同样的障碍。$P_{1,\ 1} = \{4213, 4231, 4312, 4321\}$ 的每个元素都包含 321，因此 $\mathscr{A}_{1,\ 1}$ 的正规排列类 Av($P_{1,\ 1}$) 包含例 3.1 中的反链，命题 4.22(1) 不适用；对 $<_{\mathrm{lex}}$ 在正方形的对称下的变换也同样如此（注 4.20）。

5. MatrixSchubert varieties and shape-Wilf equivalence of $12\cdots k$ and $k\cdots 21$

空间 $\mathscr{S}(n) = \Bbbk\mathbb{S}_n$ 是 $n\times n$ 矩阵坐标环中多重次数为 (1,. . . , 1; 1,. . . , 1) 的权空间，一个排列 u 对应于单项式 $x_u = \prod_j x_{u(j),j}$。在第 2 节中，相关理想是全矩阵的行列式簇的理想，它们在 $GL_n \times GL_n$ 作用下保持不变。本节中，我们在费雷尔棋盘上施加行列式条件。对于费雷尔棋盘 λ，由所有元素均在 λ 中的 $k \times k$ 子式生成的理想 $I_k(\lambda)$ 是一个阶梯行列式理想，其权空间由 λ 的横截集张成。它不是 $\mathscr{S}$ 的理想，但阶梯行列式理想是第 6 节所讨论理想的构建基块。

第 5.1 节回顾费雷尔棋盘以及棋盘中的模式包含。第 5.2 节说明，生成 $I_k(\lambda)$ 的子式对于对角项序和反对角项序均构成 Gr¨obner 基。这是唯一用到的交换代数知识；它可由 Knutson、Miller 和 Yong 关于矩阵舒伯特簇的结果推出。第 5.3 节用反对称化子 e_k 重述该结果，它在每个费雷尔棋盘上都是 Gr¨obner 基，并由此推出 $12\cdots k$ 与 $k\cdots 21$ 的形状-Wilf 等价。

5.1. 费雷尔棋盘与横截集。

5.1.1. 网格与费雷尔棋盘。我们像矩阵那样绘制网格：单元格 (i, j) 位于从上往下数的第 i 行，以及从左往右数的第 j 列。排列 $u \in \mathbb{S}_N$ 绘制为其第 1.4 节中的排列矩阵 P_u，即线性映射 $e_j \mapsto e_{u(j)}$的矩阵；我们将 u视为其点集 $(u(j)\ j)$， $j \in [N]$。因此，列对应位置，行对应值，而由一组点形成的模式按从左到右的顺序读取。对于单元格 $c = (a, b)$ 和 $c' = (a', b')$，若 $a' \leq a$ 且 $b' \leq b$，我们称 c' 位于 c的西北方（允许边界重合），并记作 $c' \leq c$；若 $a' > a$ 且 $b' > b$，我们称 c' 严格位于 c 的东南方。有限单元格集的角是单元格 (a, b)，其中 a 是该集合中出现的最大行号， b 是出现的最大列号。它是该集合包围盒的东南角。排列 u 中模式的一次出现 L 的角，是点 $(u(l)\ l)$， $l \in L$的角。

定义 5.1. 设 ρ 和 κ 为有限有序集，分别视为行集和列集。若子集 $\lambda \subset \rho \times \kappa$ 对向北和向西移动封闭，则称其为费雷尔棋盘：若 $(x, c) \in \lambda$, $r' \leq r$和 $c' \leq c$，则 $(r', c') \in \lambda$。若某单元格正下方和正右方紧邻的单元格都不属于 λ，则称该单元格为 λ 的外角。

设 μ_r 为 λ 在第 r行中的单元格数。那么， λ 的第 r 行由最前面的 μ_r 列组成，并且 μ_r 从上到下弱递减。因此，将 ρ 和 κ 视为区间后， λ 就是由非零行长度 [41]构成的分拆的费雷尔图（英语记法）。外角是非空行 r 中紧接着较短行或为最后一行的那些行里的单元格 (r, μ_r)，而 λ 是其外角 (r, c) 所对应矩形 $\{r' \leq r\} \times \{c' \leq c\}$ 的并。费雷尔棋盘是车理论的经典背景 [18]。费雷尔棋盘上的模式避免是

Babson 和 West、Stankova 和 West，以及 Backelin、West 和 Xin [3, 40, 4]证明 Wilf 等价的主要工具。

定义 5.2. 设 $\lambda \subset \rho \times \kappa$ 是一个费雷尔棋盘，且具有 $|\rho| = |\kappa|$。

(1) λ的横截集是一个双射 $T\colon \kappa \to \rho$，其图 $\{(T(j),\ j) : j \in \kappa\}$ 包含于 λ，也就是说，在 λ上放置 $|\rho|$ 个互不攻击的车。(2) 设 $p \in \mathbb{S}_k$。若某些 k 点构成模式 p，且其角位于 λ [4]中，则横截集 T 在 λ 中包含 p。对于~~$p = k\cdots21$~~和 $p = 12\cdots k$，我们称 T在 λ中有一个递减（分别为递增）的 k链。(3) 如果对每个费雷尔棋盘 λ，两个模式在 λ中都被相同数量的 λ [3, 4]横截集避免，则称它们形状 Wilf 等价。

由于 λ 在向北和向西移动时保持不变，一个点集的角位于 λ中，当且仅当其整个包围盒也位于其中。对于完整棋盘 $\lambda = \rho \times \kappa$，包含于 λ 中就是通常的模式包含。递增链的角是其最后一个点，因此，横截集在 λ 中具有递增k-链，当且仅当它以通常意义包含 $12\cdots k$。对于递减链，情况并非如此。

例 5.3。 图 2 展示了费雷尔棋盘 $\lambda \subset [5] \times [5]$，其行长度为 5、 5、3、 3、2，外角为 (2、5)、(4、3) 和 (5、 2)，以及其横截集 $T = 53421$，其中的点为 (5、 1)、 (3、2)、 (4、3)、 (2、 4)、(1、 5)。点 (2、 4)、(1、 5) 在 λ中构成一个递减 2-链，(5、 1)、 (3、2) 也构成一个递减 2-链。点 (3、 2)、 (2、4) 同样构成模式 21，但它们的角 (3、 4) 不在 λ中，因此它们在 λ中不构成链。点 (3、 2)、 (4、3) 在 λ中构成一个递增 2-链。

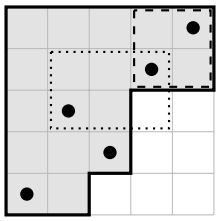


FIGURE 2. 行长度为 5，5，3，3，2 的费雷尔棋盘（阴影部分）及其横截集 53421。虚线框是递减 2 链 (2，4)，(1，5) 的包围盒。由 (3，2) 和 (2，4) 张成的点线框不包含在棋盘内。

5.1.2. 多项式环。 设 $\lambda \subset \rho \times \kappa$ 是一个费雷尔棋盘，并设 $R_\lambda = \Bbbk[x_c : c \in \lambda]$，按 $\mathbb{Z}^\rho \times \mathbb{Z}^\kappa$ 分级，其中 x_{rc} 的次数为 $(\varepsilon_r; \varepsilon_c)$。对于完整棋盘 $[n] \times [n]$，记作 R_n；对于一般矩阵，记 $Z = (x_{ij})$。对于满足 $|A| = |B|$ 的 $A \subset \rho$ 和 $B \subset \kappa$，令 $\Delta_{A,\ B}$ 表示 Z 中行号为 A、列号为 B 的子式。其角为 $(\max A,\ \max B)$，并且 $\Delta_{A,\ B} \in R_\lambda$ 当且仅当其角属于 λ。子式是齐次的。对于一个从列集到行集的双射 T，若其图包含在 λ 中，则记作 $x_T = \prod_j x_{T(j),\ j}$；对于单元格集合 X，记作 $x_X = \prod_{c \in X} x_c$。若 $|\rho| = |\kappa|$，横截单项式 x_T 构成权空间的一个基

$$\Bbbk\lambda = (R_\lambda)_{(1;1)}$$

多重次数为 $(1,\ldots,1; 1,\ldots,1)$。对于 $\lambda = [n] \times [n]$，我们通过 $x_u \leftrightarrow u$ 将 $\Bbbk\lambda = (R_n)^{(1;1)}$ 与 $\Bbbk\mathbb{S}_n = \mathscr{S}(n)$ 视为相同。

第 1.4 节中的替换对横截集是有意义的。对于 λ的横截集 T、k 的一组 L 列以及 $\sigma \in \mathbb{S}_k$，令 $T_{L \leftarrow \sigma}$ 为与 T 在 L 之外重合，并将 L 映射到模式 σ中的$T(L)$的双射；对于 $g = \sum_\sigma c_\sigma \sigma \in \Bbbk\mathbb{S}_k$，令 $g[T, L] = \sum_\sigma c_\sigma T_{L \leftarrow \sigma}$。 如果 T 的点在 L 列中的角位于 λ中，那么每个 $T_{L \leftarrow \sigma}$ 都是 λ的横截集，因为它们在 L 列中的点位于各自的包围盒内。

引理 5.4。设 T 是费雷尔棋盘 λ的一个横截集，L 是一组 k 列，且 T 的点在 L 列中的角位于 λ 中；令 T' 为 T 在其他列上的限制。那么

$$e_k[T,L] = \Delta_{T(L),L}\, x_{T'}.$$

反过来，任何由一个角在 λ 中的 $k\times k$ 子式与一个双射 $T'\colon\ \kappa\backslash B \to \rho\backslash A$ 构成的乘积，其图在 λ 中，都具有这种形式。

证明。设 $L = \{l_1 < \cdots < l_k\}$ 且 $T(L) = \{a_1 < \cdots < a_k\}$。双射 $T_{L\leftarrow\sigma}$ 将 l_i 映射到$a_{\sigma(i)}$，因此 $e_k[T,L] = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_i x_{a_{\sigma(i)},\, l_i}\, x_{T'} = \Delta_{T(L)\ L}\, x_{T'}$。反过来，令 T 由 T' 和递增双射 $B \to A$ 构成。其图包含在 λ中，因为 $\Delta_{A,\,B}$ 的角也如此，且 $e_k[T,B] = \Delta_{A,\,B}\, x_{T'}$。□

齐次理想的权空间由其生成元与补权单项式的乘积张成。因此，对于 $\lambda = [n]\times[n]$，由 e_k 生成的 $\mathscr{S}$ 的理想的分量 $(e_k)\ (n)$，是泛型 $n\times n$ 矩阵的 $k\times k$ 子式理想的权空间。

5.2. **梯形行列式理想**。

定义 5.5。设 λ 为一个费雷尔棋盘，且 $k \geq 1$。梯形行列式理想 $I_k(\lambda) \subset R_\lambda$是由角位于 λ中的 $k\times k$ 子式生成的理想。梯形行列式簇 $Y_k(\lambda)$是其在以 λ为索引的矩阵空间 Mat_λ 中的零点集。

对于 $\lambda = [a]\times[b]$，$I_k(\lambda)$是泛型 $a\times b$ 矩阵的 $k\times k$ 子式所生成的理想，而 $Y_k(\lambda)$是秩小于 k 的 $a\times b$矩阵所构成的簇。一般而言，一个 $k\times k$子式的角位于 λ中，当且仅当它是西北子矩阵 $Z_{[p]\times[q]}$ 的子式，其中该子矩阵对应于 λ的一个外角 (p,q)。因此，$Y_k(\lambda)$由部分矩阵 M 构成，这些矩阵在 λ的外角 (p,q)所对应的西北子矩阵 $M_{[p]\times[q]}$的秩均小于 k。这类理想称为单侧梯形行列式理想，参见第 2 节 [25,，以及其中的参考文献 4] [26] 。

5.2.1. 项序。矩阵元素所构成的多项式环上的项序称为反对角线项序，如果每个子式的首项都是其反对角线元素的乘积；如果首项是其对角线元素的乘积，则称为对角线项序。设 $\lambda \subset \rho\times\kappa$为一个费雷尔棋盘。设 $<_{\mathrm{ad}}$为 R_λ 上的字典序项序，其中变量按列排序，并且同一列内按行号递减排序；设 $<_{\mathrm{d}}$ 为按列排序且同一列内按行号递增排序所得到的字典序项序。对于 $\lambda = [n]\times[n]$，变量的排序分别为 $x_{n1} > x_{n-1,\,1} > \cdots > x_{11} > x_{n2} > \cdots > x_{1n}$，以及 $x_{11} > x_{21} > \cdots > x_{n1} > x_{12} > \cdots > x_{nn}$。

引理 *5.6*。项序 $<_{\mathrm{ad}}$ 是反对角线项序，而 $<_{\mathrm{d}}$ 是对角线项序。若 T 和 T' 是 λ的横截集，且 j是满足 $T(j) \neq T'(j)$ 的第一列，则 $x_T >_{\mathrm{ad}} x_{T'}$ 当且仅当 $T(j) > T'(j)$，并且 $x_T >_{\mathrm{d}} x_{T'}$ 当且仅当 $T(j) < T'(j)$。特别地，在 $(R_n)_{(1;1)} = \Bbbk\mathbb{S}_n$上，项序 $<_{\mathrm{ad}}$和$<_{\mathrm{d}}$ 分别限制为命题 *4.3*中的排序 $<_{\mathrm{lex}}$ 和 $<^c_{\mathrm{lex}}$。

证明。考虑一个行集为 $a_1 < \cdots < a_k$、列集为 $b_1 < \cdots < b_k$ 的子式。其每一项恰好包含一个来自列 b_1 的变量，而对于 $<_{\mathrm{ad}}$，其中最大的变量是 $x_{a_k b_1}$。在包含 $x_{a_k b_1}$ 的各项中，来自列 b_2 的最大变量是 $x_{a_{k-1} b_2}$，依此类推；因此首项是反对角线项。两个横截单项式 x_T 和 $x_{T'}$ 在 j 之前的各列中具有相同的变量，而它们在列 j 中较大的变量是 $x_{\max(T(j)\,T'(j))\,j}$；它整除两个单项式中较大的那个。对于 $<_{\mathrm{d}}$，各行顺序反转。□

5.2.2. 矩阵舒伯特簇。我们仅使用矩阵舒伯特簇来引用阶梯行列式理想的 Gröbner 基。对于 $w\in\mathbb{S}_n$和 $p, q\in[n]$令 $r_w(p,\ q) = \#\{j \leq q\colon\ w(j) \leq p\}$表示 w 在矩形 $[p]\times[q]$中的点数。w 的矩阵舒伯特簇是

$$X_w = \big\{M \in \mathrm{Mat}_n : \operatorname{rank} M_{[p]\times[q]} \leq r_w(p,q) \text{ for all } p,q\big\},$$

而 $I_w \subset R_n$ 是由 $Z_{[p]\times[q]}$的大小为 $r_w(p,q)+1$ 的子式生成的理想，其中 p,q [16]取遍所有值。 w 的 Rothe 图为 $D(w) = \{(p,q)$：从 w 的每个点向右画一条射线并向下画一条射线，则 $D(w)$ 由未被任何射线经过的单元组成。其本质集 Ess(w) 由满足以下条件的单元 $(p,q) \in D(w)$ 组成：$(\overline{p}+1, q)$ 和 $(p, q+1)$ 均不属于 $D(w)$。若排列 w 避开 2143，则称其为 vexillary。

定理 5.7 (Fulton [16])。理想 I_w 由大小为 $r_w(p,q)+1$ 的 $Z_{[p]\times[q]}$的子式生成，其中 $(p,q) \in \mathrm{Ess}(w)$，即本质子式。

定理 5.8 (Knutson–Miller [25, 定理 B])。对于每个 $w \in \mathbb{S}_n$， $Z_{[p]\times[q]}$中对所有 p、q取大小为 $r_w(p,q)+1$的子式，构成 I_w 关于每个反对角项序的 *Gröbner* 基。

定理 5.9 (Knutson–Miller–Yong [26, 定理 3.8])。若 w 是弱旗置换，则本质子式构成 I_w 关于每个对角项序的 *Gröbner* 基。

根据置换矩阵所采用的约定， X_w 是 [25, 26]中 w或 w^{-1} 的矩阵 Schubert 簇。转置将其中一个映射到另一个，并保持对角项序和反对角项序的类不变，因此在此处选择哪一种并不重要。Fulton 将单侧梯形行列式理想与弱旗置换 [25, 的理想 I_w 联系起来，见《第 2 节》。对于理想 I_k（λ），下述引理对此作出了明确说明。

引理 *5.10.* 设 $\lambda \subset [a]\times[b]$ 是一个行长度为 $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_a$ 的费雷尔棋盘，且 $k \geq 1$。设 ν 为一个分拆，其部分为对于那些 $i \geq 1$ 而言为正的数 $\nu_i = \mu_{i+k-1} - (k-1)$。选取 M，使得 $M \geq a$、$M \geq b$，并且对所有 i 都有 $M \geq k-1+\nu_i+i$。递归定义 $v \in \mathbb{S}_{M-k+1}$：令 $v(i)$ 为大于 ν_i 且不同于 $v(1), \ldots, v(i-1)$ 的最小数，其中 $\nu_i = 0$ 对于 $i > \ell(\nu)$。置 $u = v^{-1}$ 和 $w = id_{k-1} \oplus u \in \mathbb{S}_M$，使得 u 在第 i 行中的点为 $(i, v(i))$。则：

(1) $D(u)$ 是 ν 的 *Ferrers*图，且 $D(w)$ 是 λ 中位于行号和列号至少为 k 的单元格集合；
(2) $\mathrm{Ess}(w)$ 是 λ 的外角 (p,q)，其中 p、$q \geq k$，且对于所有 $c \in D(w)$ 都有 $r_w(c)$；(3) w 是 *vexillary*，且 $I_w = I_k(\lambda) R_M$ 由角位于 λ 的 $k\times k$ 子式生成。

证明。首先， M 的选择保证 $v(i)$存在。令 $j \leq \nu_i$。于是 $v(i) > \nu_i \geq j$，并且对于 $i' < i$，$v(i')$ $> \nu_{i'} \geq \nu_i \geq j$，所以 $u(j) > i$ 且$(i,j) \in D(u)$。令 $j > \nu_i$。如果 $v(i) > j$，那么 j 小于 $v(i)$且大于 ν_i，因此根据 $v(i)$的选择，它等于某个满足 $i' < i$的 $v(i')$；于是$u(j) < i$。在两种情况下，$(i,j) \notin D(u)$，所以 $D(u)$是 ν的图。从点(i,i)、$i < k$发出的 w 的射线覆盖前 $k-1$ 行和列中的所有单元，因此 $D(w)$是 u 平移$(k-1, k-1)$后的图。当 $p,q \geq k$时，单元(p,q)位于 λ中，当且仅当 $q-(k-1) \leq \nu_{p-k+1}$，这就证明了(1)。

其次，单元格（p，q）与 p，$q \geq k$ 在 D（w）中右下方具有与 λ中相同的邻格，因此 w 的本质单元格是 λ 中行和列至少为 k处的外角。对于$c =$（p，q）而言，$\in D$（w）等于 $k-1$ 加上 u 在 $[p-k+1]\times[q-k+1]$中的点数。该矩形位于费雷尔棋盘 D（u）中，而该棋盘不包含 u的任何点，因此 r_w（c）$= k-1$。

最后， u 避免 132。事实上，如果 $i < j < l$ 且 $u(i) < u(l) < u(j)$，那么 $(u(l)\ j) \in D(u)$，而点 $(u(i)$ $i)$ 弱西北方于该点，因此位于费雷尔棋盘 $D(u)$ 中；但 u的 $D(u)$ 中没有点。在 w 中出现 2143 时，第一个位置后面跟着一个较小的值，因此它不在前 $k-1$ 个位置之中，而该出现位于 u 中。由于每个 2143 的出现都包含一个 132， w 是 vexillary 的。根据定理 5.7 和 (2)， I_w 由子矩阵 $Z_{[p]\times[q]}$的 $k\times k$ 子式生成，其中这些子矩阵对应于 λ的外角 (p,q)，满足 $p,q \geq k$；这些正是角位于 λ中的 $k\times k$子式。□

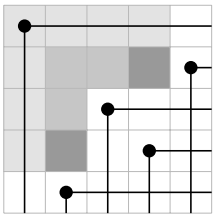


FIGURE 3. 该棋盘的行长度为 4，4、2、2（浅色阴影），$k=2$，以及引理 5.10 中的弱旗置换 $w=15342$。其 Rothe 图由 λ 中行号和列号至少为 2 的单元组成，其本质单元格（深色）是 λ 的外角 (2，4) 和 (4、2)，二者的秩均为 1。

例 5.11。对于行长度为 4、4、2、2 的棋盘 λ 以及 $k=2$，有 $\nu=$(3、1、1)，$v=u=4231$ 和 $w=15342$ (图 3)。因此，由该棋盘的 2×2 子式生成的理想就是 X_{15342}的理想，它由秩 $M_{[2]\times[4]}\leq 1$ 和秩 $M_{[4]\times[2]}\leq 1$定义。

5.2.3. *Gr¨obner* 基。

定理 5.12。**</style}设 为一个费雷尔棋盘，且 。角位于 中的 子式构成 (**λ) 的 *Gr¨obner* 基；对于 R_λ 上的每个对角项序，以及反对角项序 $<_{\mathrm{ad}}$，结论均成立。因此，如果 $|\rho|=|\kappa|$，则二者

$\{x_T\colon\ T$ 在 $\lambda\}$ 中没有递减的 k 链，并且 $\{x_T\colon\ T$ 在其中没有递增的 k 链 $\lambda\}$ 是 $\big(R_\lambda/I_k(\lambda)\big)^{(1;1)}$ 的基。特别地，$12\cdots k$ 和 $k\cdots 21$ 是形状 *Wilf* 等价的。

证明。将 ρ 和 κ 分别视为 $[a]$ 和 $[b]$，令 $w\in\mathbb{S}_M$ 为引理 5.10 中的弱旗置换，并令 $\mathcal{G}$ 为角位于 λ 中的 $k\times k$ 子式集合。由引理 5.10(3)，$I_w=I_k(\lambda)\,R_M$ 和 $\mathcal{G}\subset I_w$。只需证明 $\mathcal{G}$ 是 I_w 的 Gr¨obner 基，且存在一个定义在 R_M 上、限制到 R_λ 时与给定项序一致的项序。事实上，此时对于 $f\in I_k(\lambda)\subset I_w$，$f$ 的首项可被 $\mathcal{G}$ 中某个元素的首项整除。

首先，令 $<$ 为 R_λ 上的对角项序。我们按如下方式将其扩展到 R_M：比较两个单项式时，先比较它们在变量 x_c、$c\notin\lambda$ 中的部分，对这些变量按照字典序排列，且变量顺序满足：若 $c'\leq c$ 且 $c'\neq c$，则 $x_{c'}<x_c$；然后再按 $<$比较。这是一个项序，并且是对角的。事实上，考虑一个行指标为 $a_1<\cdots<a_s$、列指标为 $b_1<\cdots<b_s$ 的子式。如果它的角位于 λ 中，则该子式属于 R_λ，且其首项是对角项，因为$<$ 是对角的。否则，$x_{a_sb_s}$ 是其在 λ 之外的变量中最大的一个，因此其首项等于 $x_{a_sb_s}$ 乘以行指标为 $a_1,\dots,a_{s-1}$、列指标为 $b_1,\dots,b_{s-1}$ 的子式的首项，由对 s 的归纳法可得结论。由定理 5.9，本质子式构成关于此项序的 I_w 的 Gr¨obner 基。由引理 5.10(2)，它们属于 $\mathcal{G}$，而后者包含于 I_w。因此，$\mathcal{G}$ 是 I_w 的 Gr¨obner 基。

其次，考虑 $<_{\mathrm{ad}}$ 在 R_M上；它限制在 $<_{\mathrm{ad}}$ 上 R_λ。根据定理 5.8，I_w的初始理想由子式 $\Delta\in I_w$ 的反对角项生成。设 Δ 是这样的一个子式，C 是其反对角线上的单元所构成的集合，它们形成一条递减链。我们断言，C 包含一条递减的 k-链，其角位于 λ中。否则，令 P 为一个矩阵，其在 C 中的单元处取值为 1，其余处取值为 0。于是 $\Delta(P)=\pm 1$。一个角位于 λ 中的 $k\times k$ 子式在 P处不为零，当且仅当其行和列分别是 k 中 C的单元所对应的行和列；而这些单元将构成一条角位于λ中的递减 k-链。因此，$\mathcal{G}$中的所有元素在 P处都为零，所以 $I_w=I_k(\lambda)R_M$中的所有元素在 P处也都为零，这与$\Delta(P)\neq 0$矛盾。因此，Δ 的反对角项可被$\mathcal{G}$中某个元素的反对角项整除，并且 $\mathcal{G}$ 是 I_w的 Gr¨obner 基。

最后，$I_k(\lambda)$关于行与列分次是齐次的，因此其初始理想也是齐次的，而 $I_k(\lambda)^{(1;1)}$ 中各元素的首项单项式正是初始理想中的横截单项式。横截单项式 x_T 可被某个子式的反对角线项整除，该子式的角位于

λ 当且仅当 T 在 λ 中含有一个递减的 k-链；同样， T 恰当含有一个递增的 k-链于 λ 时，可被其对角线项整除。将此应用于 $<_{\mathrm{ad}}$ 和 $<_{\mathrm{d}}$，便得到这两个基。□

定理 5.12 的最后一个结论是 Backelin、West 和 Xin 定理的核心，他们通过显式双射证明了这一点 [4]；对于 $k=3$ ，该结论归功于 Babson 和 West [3]。对于完整棋盘$\lambda=[a]\times[b]$，定理 5.12 就是关于行列式理想的经典 Gr¨obner 基定理 [42]。

备注 5.13。 设 $k=2$。根据定义 5.2 后的备注，横截集在 λ 中没有递增 2-链，当且仅当它是递减的。递减双射 $\kappa\to\rho$ 将第 i 列映射到自底向上的第i 行。当且仅当对所有 i，自底向上的第 i 行至少有 i 个单元时，它才是 λ 的横截集；根据霍尔条件，这当且仅当 λ 至少有一个横截集。因此，只要 λ 有横截集，就有 $\dim\big(R_\lambda/I_2(\lambda)\big)_{(1;1)}=1$ 。根据定理 5.12，这样的棋盘在 λ中也恰有一个不含递减 2-链的横截集。

注记 5.14。 梯形行列式簇是投影，而不是交集。令 $\lambda\subset[a]\times[b]$，并令 $I_k\subset R_{a\times b}$ 为一般 $a\times b$ 矩阵的 $k\times k$ 子式理想。那么

$$I_k\cap R_\lambda=I_k(\lambda),$$

因此，在代数闭域上， $Y_k(\lambda)$ 是秩小于 k 的 $a\times b$矩阵簇在投影 $\mathrm{Mat}_{a\times b}\to\mathrm{Mat}_\lambda$ 下的像的闭包；该投影会忘掉 λ 之外的元素。事实上，对变量作如下排序：λ 之外的每个变量都大于 λ 中的每个变量，并且当 $c'\le c$ 和 $c'\neq c$ 位于同一侧时， $x_{c'}<x_c$ ，则相应的字典序项序是对角的，证明见定理 5.12 的证明。因此，根据定理 5.12（完整棋盘的情形）， $k\times k$ 子式构成 I_k 关于该项序的 Gr¨obner 基。它是关于 λ 之外变量的消去序，因此，属于 R_λ 的子式——也就是角在 λ 中的那些子式——构成 $I_k\cap R_\lambda$ 的 Gr¨obner 基。另一方面，秩簇与矩阵在 λ 之外元素均为零的子空间的交，一般比 $Y_k(\lambda)$ 小。对于棋盘 $\lambda=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ ，有 $I_2(\lambda)=0$，而秩小于二的矩阵 $\left(\begin{smallmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&0\end{smallmatrix}\right)$ 满足 $x_{12}x_{21}=0$。这个方程消去了 λ 的唯一横截单项式 $x_{12}x_{21}$ ，该单项式张成 $\big(R_\lambda/I_2(\lambda)\big)(1;1)$。与 Babson 和 West 的组合学相吻合的是投影，参见例 6.13。

5.3. 棋盘理想与形状-Wilf 等价。 设 G 是 $\mathscr{S}$的一个元素集合，每个元素都有某个元数。对于一个费雷尔棋盘 $\lambda\subset\rho\times\kappa$ ，其中 $|\rho|=|\kappa|$ ，令

$$(G)_\lambda\subset\Bbbk\lambda$$

为元素 $g[T,L]$所张成的空间，其中 $g\in G$ 的元数为 k， T 是 λ的一个横截集，而 L 是一个由 k 列组成的集合，使得 T 在列 L 中的点的角位于 λ中。对于完整棋盘，$(G)_{[n]\times[n]}=(G)_{(n)}$是由 G生成的理想的分量。我们按照字典序排列 λ的横截集，如引理 5.6 中所述：对于第一个满足 $T(j)\neq T'(j)$ 的列 j，若 $T>_{\mathrm{lex}}T'$，则 $T(j)>T'(j)$；而 $<^c_{\mathrm{lex}}$表示反序。与式 (5) 中一样，只要 T 在列 L中的点构成了一个出现，其模式为 $\mathrm{lm}(g)$，且角位于 λ中，就有 $\mathrm{lm}(g[T,L])=T$。

定义 5.15。 如果对于每个费雷尔棋盘 λ，元素 $(G)_\lambda$ 的首横截集恰好是 λ 中包含某个 g 在 λ 中的 $\mathrm{lm}(g)$（其中 $g\in G$）的横截集；类似地，对于 $<^c_{\mathrm{lex}}$，则称集合 G 是一个棋盘 Gr¨obner 基。

根据定义之前的备注，总有一个包含关系成立，因此 G 是棋盘 Gr¨obner 基，当且仅当对于每个 λ， $\Bbbk\lambda/(G)_\lambda$ 的维数等于 λ 中避开 λ 内所有 $\mathrm{lm}(g)$ 的横截集数量。应用于完整棋盘时，棋盘 Gr¨obner 基是理想 (G)（其中 $\mathscr{S}$）的 Gr¨obner 基。如果 G 是 $<_{\mathrm{lex}}$ 和 $<^c_{\mathrm{lex}}$的棋盘 Gr¨obner 基，则这两组首单项式是形状 Wilf 等价的。

推论 5.16。 对于每个 $k\ge1$，反对称化子 e_k 是 $<_{\mathrm{lex}}$的棋盘 *Gr¨obner* 基，其首单项式为 $k\cdots21$；同时也是 $<^c_{\mathrm{lex}}$的棋盘 *Gr¨obner* 基，其首单项式为 $12\cdots k$。因此，对于每个

费雷尔棋盘 λ，避开 $k\cdots 21$ 的 λ 的横截集与避开 $12\cdots k$ 的 λ 的横截集分别是商 $\Bbbk\lambda/(e_k)_\lambda$ 的两个基；对于 $\lambda=[n]\times[n]$，该商是分量 $(\mathscr{S}/(e_k))\,n)$。特别地，$12\cdots k$ 与 $k\cdots 21$ 是形状 ***Wilf*** 等价的。

证明。由引理 5.4，$(e_k)_\lambda = I_k(\lambda)^{(1;1)}$ 是阶梯行列式理想的权空间。因此，该结论由定理 5.12 和引理 5.6 得出。□

6. Backelin–West–Xin theorems from Gröbner bases

设 $\mathcal{W}$ 是一个非空排列集合，其元素长度可以不同，可以是无限集，也可以包含空排列 $\varnothing$。我们称其元素为尾。对于 $g=\sum_\sigma c_\sigma\sigma\in\Bbbk\mathbb{S}_k$ 和一个尾 τ，令 $g\oplus\tau=\sum_\sigma c_\sigma\,\sigma\oplus\tau$，并记为

$$g\oplus\mathcal{W}=\{g\oplus\tau:\tau\in\mathcal{W}\}.$$

特别地，对于反对称化子和对称化子，

$$e_k\oplus\tau=\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_k}\operatorname{sgn}(\sigma)\,\sigma\oplus\tau,\qquad s_k\oplus\tau=\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_k}\sigma\oplus\tau;$$

例如，$e_2\oplus 1=123-213$ 和 $e_k\oplus\varnothing=e_k$。本节比较避开模式集合 $k\cdots 21\oplus\mathcal{W}$ 的排列与避开模式集合 $12\cdots k\oplus\mathcal{W}$ 的排列。集合 $\mathcal{W}$ 在本节中固定不变，以下所有构造都依赖于它。令

$$\mathscr{I}_{k,\mathcal{W}}=\big(e_k\oplus\mathcal{W}\big)\subset\mathscr{S}$$

是由元素 $e_k\oplus\tau$、$\tau\in\mathcal{W}$ 生成的理想。它们的首项单项式为 $\mathrm{lm}_{\mathrm{lex}}(e_k\oplus\tau)=k\cdots 21\oplus\tau$ 和 $\mathrm{lm}_{\mathrm{lex}^c}(e_k\oplus\tau)=12\cdots k\oplus\tau$。

6.1. 概述。 我们遵循 Babson 和 West [3] 以及 Backelin、West 和 Xin [4]的思想。排列中的 $k\cdots 21\oplus\tau$ 出现由一条包含 k 个点的递减链，以及严格位于该链东南方的尾部 τ 的一个副本组成（图 4）。因此，关键在于网格中的哪些单元含有一个位于 $\mathcal{W}$ 东南方的尾部副本。从集合 $\mathcal{W}$ 出发，并独立于 k，我们引入以下对象。

(1) 对于 $u\in\mathbb{S}_N$，严格位于一个单元格东南方的、来自 $\mathcal{W}$ 的尾部副本称为该单元格的 $\mathcal{W}$ 见证。具有 $\mathcal{W}$ 见证的单元构成费雷尔棋盘 $\lambda_{\mathcal{W}}(u)$，即 u 的 $\mathcal{W}$-棋盘（第 6.2 节）。（2）u 中位于其 $\mathcal{W}$-棋盘之外的点称为其 $\mathcal{W}$ 外点。具有相同 ~~$\mathcal{W}$~~ 外点的排列构成一个 $\mathcal{W}$-类 C，而它们其余的点遍历费雷尔棋盘 λ_C 的所有横截集（第 6.3 节）。

数值 k 只会在下一步中出现。理想 $\mathscr{I}_{k,\,\mathcal{W}}$ 沿着 $\mathcal{W}$-等价类分解，而在一个等价类 C 上，它成为第 5.2 节中阶梯行列式理想 $I_k(\lambda_C)$ 的权空间。因此，若 $\mathrm{Cl}_{\mathcal{W}}(N)$ 表示 $\mathbb{S}_N$ 中 $\mathcal{W}$-等价类的集合，则由定理 6.11

$$\big(\mathscr{S}/\mathscr{I}_{k,\mathcal{W}}\big)(N)\cong\bigoplus_{C\in\mathrm{Cl}_{\mathcal{W}}(N)}\big(R_{\lambda_C}/I_k(\lambda_C)\big)_{(1;1)}.\tag{7}$$

由推论 5.16，每个直和项都有两组基，分别由 λ_C 中避开 $k\cdots 21$ 的 λ_C 的横截集，以及 λ_C 中避开 $12\cdots k$ 的 λ_C 的横截集构成。再补上各自等价类的 $\mathcal{W}$-外点后，这些横截集恰好就是分别避开 $k\cdots 21\oplus\mathcal{W}$ 和 $12\cdots k\oplus\mathcal{W}$ 的排列（第 6.5 节）。由此得到本节的主要结果。

定理 6.1。 令 $k\geq 1$，且令 $\mathcal{W}$ 为排列的非空集合。则 $e_k\oplus\mathcal{W}$ 是 $\mathscr{I}_{k,\,\mathcal{W}}$ 关于 $<_{\mathrm{lex}}$ 和 $<^c_{\mathrm{lex}}$ 都是 ***Gröbner*** 基，因此 $s_k\oplus\mathcal{W}$ 也是它所生成理想的基。***consequently***，对于所有 N，

$$\#\mathrm{Av}_N\big(k\cdots 21\oplus\mathcal{W}\big)=\dim\big(\mathscr{S}/\mathscr{I}_{k,\mathcal{W}}\big)(N)=\#\mathrm{Av}_N\big(12\cdots k\oplus\mathcal{W}\big).$$

对于 $\mathcal{W}=\{\tau\}$，避形排列数量相等是 Backelin、West 和 Xin 定理[4]，；而对于 $k=3$，这是 Babson 和 West 定理 [3]。对多个尾部的推广在 [4] 中紧接着命题 2.3 处有所提及，并在 [8,定理 2]中作为定理陈述。

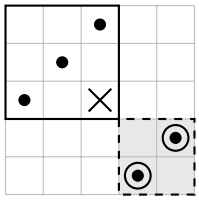


FIGURE 4.排列 $32154 = 321 \oplus 21$。递减链 $(3,1)$,$(2,2)$, $(1,3)$ 的包围盒以粗线绘出，角 $(3,3)$（叉号）也在其中。尾部 21（圆圈标出）位于角的严格东南方区域（虚线），因此对于所有包含 21 的 $\mathcal{W}$ 而言，它都是该角的一个 $\mathcal{W}$-见证。

6.2. **排列的见证与棋盘**。我们使用第 5.1 节中的图示：排列 $u\in\mathbb{S}_N$是其点的集合（$u(j)$ j），位于网格 $[N]\times[N]$ 中。

定义 6.2。设 $u\in\mathbb{S}_N$。单元格 $c\in[N]\times[N]$在 u中的一个 $\mathcal{W}$-见证，是 u中一组点，这些点都严格位于 c的东南方，且其模式属于 $\mathcal{W}$。 u的 $\mathcal{W}$-棋盘是指在 u中具有$\mathcal{W}$-见证的单元格集合，

$$\lambda_{\mathcal{W}}(u)=\big\{c\in[N]\times[N]:c \text{ has a } \mathcal{W}\text{-witness in } u\big\}.$$

u中的点若位于 $\lambda_{\mathcal{W}}(u)$ 中，则称为 $\mathcal{W}$-内点，否则称为 $\mathcal{W}$-外点。我们用 $O_{\mathcal{W}}(u)$ 表示 u的$\mathcal{W}$-外点集合。

对于 $\mathcal{W}=\{\tau\}$，棋盘 $\lambda_{\mathcal{W}}(u)$ 是 Babson 和 West [3]的棋盘。如果 $\varnothing\in\mathcal{W}$，则空集是每个单元格的 $\mathcal{W}$-见证，因此 $\lambda_{\mathcal{W}}(u)=[N]\times[N]$，且 u的所有点都是 $\mathcal{W}$-内点。

例 6.3。设 $\mathcal{W}=\{21\}$ 和 $u=426153$ （图 5）。单元格 c 的 $\mathcal{W}$-见证是 u 的一个逆序，即一对构成模式 21、严格位于 c 东南方的点。

- 单元格 $(2,\ 4)$ 的 $\mathcal{W}$-见证为 $\{(3,\ 6),\ (5,\ 5)\}$，因此 $(2,\ 4)\in\lambda_{\mathcal{W}}(u)$。更一般地说，该集合是 $[2]\times[4]$ 中每个单元格的 $\mathcal{W}$-见证，而 $\{(5,\ 5),\ (6,\ 3)\}$ 是 $[4]\times[2]$ 中每个单元格的 $\mathcal{W}$-见证。
- 单元格 $(4,\ 3)$ 的正东南方严格位于点 $(5,\ 5)$。因此，它没有 $\mathcal{W}$-见证，且 $(4,\ 3)\notin\lambda_{\mathcal{W}}(u)$。

因此，$\lambda_{\mathcal{W}}(u)=[2]\times[4]\cup[4]\times[2]$，行长度为 4，4，2，2，0，0。 $\mathcal{W}$-内点为 $(1,\ 4)$、$(2,\ 2)$ 和 $(4,\ 1)$，而 $\mathcal{W}$-外点为 $(3,\ 6)$、$(5,\ 5)$ 和 $(6,\ 3)$。

引理 6.4。令 $u\in\mathbb{S}_N$。

(1) $\lambda_{\mathcal{W}}(u)$是 $[N]\times[N]$ 中的费雷尔棋盘。(2) $\lambda_{\mathcal{W}}(u)$ 的每个单元格都有一个 $\mathcal{W}$-见证，该见证由 u 的 $\mathcal{W}$-外点组成。特别地，$\lambda_{\mathcal{W}}(u)$ 由集合 $O_{\mathcal{W}}(u)$ 确定。(3) 如果 u 的一组点的角位于 $\lambda_{\mathcal{W}}(u)$ 中，那么这些点全都是 $\mathcal{W}$-内点。

证明 · 首先，若 $c\in\lambda_{\mathcal{W}}(u)$ 且 $c'\le c$，那么 c 的每个 $\mathcal{W}$-见证都是 c' 的一个 $\mathcal{W}$-见证 ，因此 $c'\in\lambda_{\mathcal{W}}(u)$。其次，设 $c\in\lambda_{\mathcal{W}}(u)$。若 $\varnothing\in\mathcal{W}$，则空集是 c 的一个 $\mathcal{W}$-见证。否则，选择一个 c 的 $\mathcal{W}$-见证 X，使其最上方的行尽可能靠下，并假设 X 含有一个 $\mathcal{W}$-内点 x。那么 x 有一个 $\mathcal{W}$-见证 X'。其点严格位于 x 的东南方，因此也位于 c 的东南方，所以 X' 是 c 的一个 $\mathcal{W}$-见证，其最上方的行低于 x 所在的行，从而低于 X 的最上方的行。这与 X 的选取矛盾，因此 X 由 $\mathcal{W}$-外点组成。因此，$\lambda_{\mathcal{W}}(u)$ 是由 $O_{\mathcal{W}}(u)$ 中的点构成的 $\mathcal{W}$-见证所对应的单元格集合。

最后，集合中的每个点都位于其角的西北方（允许在同一水平线或竖直线上），因此（3）由（1）推出 . □

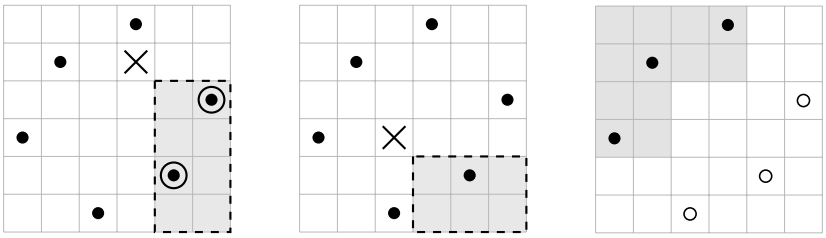


FIGURE 5. $\mathcal{W}$、 $\mathcal{W}=\{21\}$ 和 $u=426153$的见证。左：单元格 (2，4)（十字），其严格位于东南方的区域（虚线），以及其 $\mathcal{W}$-见证 {(3，6)，(5，5)}（圆圈）。中：单元格 (4，3) 的严格东南方只有一个点，因此没有$\mathcal{W}$-见证。右： $\mathcal{W}$-棋盘 $\lambda_{\mathcal{W}}(u)$（阴影部分），其中 $\mathcal{W}$-内点为黑色， $\mathcal{W}$-外点为白色。

6.3. **$\mathcal{W}$-等价类**。

定义 6.5。 如果两个排列 u， $u'\in\mathbb{S}_N$ 具有相同的 $\mathcal{W}$-外点，也就是说，如果 $O_{\mathcal{W}}(u)=O_{\mathcal{W}}(u')$，则称它们是 $\mathcal{W}$-等价的。等价类称为 $\mathcal{W}$-类，而 $\mathrm{Cl}_{\mathcal{W}}(N)$ 是 $\mathbb{S}_N$ 中的 $\mathcal{W}$-类的集合。

设 $C\in\mathrm{Cl}_{\mathcal{W}}(N)$，并设 O_C为其元素的 $\mathcal{W}$-外点的公共集合。根据引理 6.4(2)， C 的所有元素具有相同的 $\mathcal{W}$-棋盘，我们将其记为 $\lambda_{\mathcal{W}}(C)$。设 ρ_C和 κ_C 分别为未被 O_C 的点占据的行集和列集。该类 C 的棋盘为

$$\lambda_C=\lambda_{\mathcal{W}}(C)\cap(\rho_C\times\kappa_C),$$

根据引理 6.4(1)， $\rho_C\times\kappa_C$ 中的一个费雷尔棋盘。对于 $u\in C$，令 $T(u)$ 表示 $\mathcal{W}$-内点的集合。这些点位于 $\lambda_{\mathcal{W}}(C)$ 中，并占据行 ρ_C 和列 κ_C，因此 $T(u)$ 是 λ_C 的一个横截集。

命题 6.6。令 $C\in\mathrm{Cl}_{\mathcal{W}}(N)$。

(1) 映射 $u\mapsto T(u)$ 是从 C 到 λ_C 的横截集集合的一个双射。其逆映射将一个横截集 T 发送到由点 $O_C\sqcup T$ 构成的排列。(2) 对于 u、$u'\in C$，在第 *5.3* 节的横截集排序中，当且仅当 $T(u)>_{\mathrm{lex}}T(u')$ 时，有 $u>_{\mathrm{lex}}u'$。

因此，对于每个 N，都有一个向量空间分解

$$\Bbbk\mathbb{S}_N=\bigoplus_{C\in\mathrm{Cl}_{\mathcal{W}}(N)}\Bbbk C,\qquad \Bbbk C\cong\Bbbk\lambda_C,\quad u\mapsto T(u), \tag{8}$$

这将 C 上的排序 $<_{\mathrm{lex}}$ 和 $<^c_{\mathrm{lex}}$ 与 λ_C的横截集上的排序对应起来。

证明。首先，该映射是单射，因为 u 由点 O_C 和 T（u）组成。设 T 是 λ_C的一个横截集，设 u'是点为 $O_C\sqcup T$的排列，并设 $u\in C$。由引理 6.4(2)， $\lambda_{\mathcal{W}}$（u）的每个单元格都有一个由 O_C中的点构成的 $\mathcal{W}$-见证，而这些点也是 u'中的点；因此 $\lambda_{\mathcal{W}}$（u）$\subset\lambda_{\mathcal{W}}$（$u'$）。反过来，设 $c\notin\lambda_{\mathcal{W}}$（$u$），并假设 c 在 u'中有一个 $\mathcal{W}$-见证 X。若 X 包含 T中的一个点，则 c会位于 $\lambda_{\mathcal{W}}$（u）的某个单元格的西北方，因而由引理 6.4(1)可知，它属于 $\lambda_{\mathcal{W}}$（u）。于是 $X\subset O_C$，且 X 是 u中 c 的一个 $\mathcal{W}$-见证，矛盾。因此 $\lambda_{\mathcal{W}}$（u'）$=\lambda_{\mathcal{W}}$（u）。 T 中的点位于此棋盘内，而 O_C中的点不在其中，所以 $O_{\mathcal{W}}$（u'）$=O_C$，且 T（u'）$=T$。这就证明了 (1)。

其次， C 中的两个元素在 O_C的点的列中重合，因此它们不同的第一列属于 κ_C。这证明了（2）。□

例6.7。 设 $\mathcal{W}=\{1\}$。当且仅当 u 中的某个点严格位于该单元格的东南方时，一个单元格才位于$\lambda_{\mathcal{W}}(u)$中；当且仅当 u中的一个点是从右至左最大值时，该点才是 $\mathcal{W}$-外点。因此， $\mathcal{W}$类的 u 由具有相同从右至左最大值且位置也相同的排列组成。

(1) 对于 $N = 3$，共有五个等价类，如图6所示：等价类 $\{123, 213\}$的棋盘 λ_C是行和列 $\{1, 2\}$上的完整正方形，另有四个大小为一的等价类。在321中，所有点都是外点，尽管单元格(1，1)位于 $\lambda_{\mathcal{W}}$(321)中。

(2) 对于 $N = 4$，共有十四个等价类。其中八个的大小为一，包括 $\{3412\}$，其棋盘 $\lambda_C \subset \{1, 3\} \times \{1, 3\}$ 是阶梯形 {(1，1)，(1，3)，(3，1)}。其余六个列于表1；它们的 λ_C 都是一个完整的正方形。

(3) 对于 $N = 5$，共有 42 个等价类，非正方形棋盘出现在含有多个元素的等价类中。例如，外点为 (3，5) 和 (5，3) 的等价类，其棋盘 $\lambda_C \subset \{1, 2, 4\} \times \{1, 2, 4\}$ 的行长度为 3，3，2，并由 14523、24513、41523 和 42513 组成。

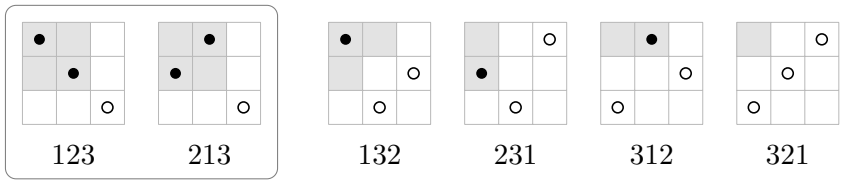


FIGURE 6. $\mathbb{S}_3$ 中关于 $\mathcal{W} = \{1\}$的五个 $\mathcal{W}$类。每个排列都配有其 $\mathcal{W}$棋盘（阴影部分），其中 $\mathcal{W}$内点为黑色，$\mathcal{W}$外点为白色。框出的那一对属于类 $\{123, 213\}$；其他类都只含一个元素。

外点	$\rho_C \times \kappa_C$	类 C
(4，4)	$\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$	1234，1324，2134，2314，3124，3214
(4，3)，(3，4)	$\{1, 2\} \times \{1, 2\}$	1243，2143
(4，3)，(2，4)	$\{1, 3\} \times \{1, 2\}$	1342，3142
(4，3)，(1，4)	$\{2, 3\} \times \{1, 2\}$	2341，3241
(4,2)，(3，4)	$\{1, 2\} \times \{1, 3\}$	1423，2413
(4，1)，(3，4)	$\{1, 2\} \times \{2, 3\}$	4123，4213

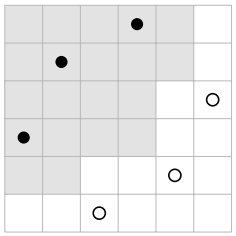
TABLE 1. $\mathbb{S}_4$ 中包含多个元素的 $\mathcal{W}$-等价类，适用于 $\mathcal{W} = \{1\}$。在每种情况下，棋盘 λ_C 都是整个 $\rho_C \times \kappa_C$。

例 6.8。这些等价类取决于 $\mathcal{W}$。令 $u = 426153$ 为例 6.3 中的排列。对于 $\mathcal{W} = \{1\}$ 和 $\mathcal{W} = \{21\}$，它的外点均为 (3,6)、(5,5) 和 (6,3)，但它们的棋盘不同（图 7）。

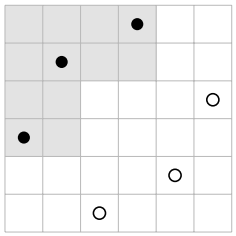
- 对于 $\mathcal{W} = \{1\}$，u的 $\mathcal{W}$-棋盘的行长度为 $5, 5, 4, 4, 2, 0$。该等价类的棋盘是完整的正方形 $\{1, 2, 4\} \times \{1, 2, 4\}$，该类由六个排列 126453、146253、216453、246153、416253 和 426153 组成。

- 对于 $\mathcal{W} = \{21\}$，u 的 $\mathcal{W}$-棋盘的行长度为 4，4，2，2，0，0。单元格 (4，4) 已不在其中，因此该类的棋盘行长度为 3，3，2，而该类由 146253、246153、416253 和 426153 组成。在剩下的两个排列 126453 和 216453 中，点 (4，4) 没有 $\mathcal{W}$-见证。因此它是 $\mathcal{W}$-外点，这两个排列构成另一个 $\mathcal{W}$-类，其外点为 (3，6)、(4，4)、(5，5) 和 (6，3)。

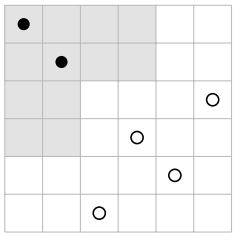
因此，等价类的数量有所不同。对于 $N = 3$、4、5、6，$\mathcal{W} = \{1\}$分别有 5、14、42、132 个等价类，而 $\mathcal{W} = \{21\}$分别有 6、23、103、513 个等价类；对于 $\mathcal{W} = \{\varnothing\}$，$\mathbb{S}_N$ 整体是一个等价类。对于$\mathcal{W} = \{21\}$和 $N = 4$，唯一包含多个元素的等价类是 $\{1243, 2143\}$。



$\mathcal{W} = \{1\}, \quad u = 426153$



$\mathcal{W} = \{21\}, \quad u = 426153$



$\mathcal{W} = \{21\}, \quad u = 126453$

FIGURE 7. 在例 6.8 中对 $\mathcal{W}$ 的依赖关系。每个排列都用其 $\mathcal{W}$-棋盘（阴影部分）表示，其中 $\mathcal{W}$-内点为黑色， $\mathcal{W}$-外点为白色。对于$\mathcal{W} = \{1\}$ 排列 426153 和 126453 属于同一个等价类；对于 $\mathcal{W} = \{21\}$ 它们属于不同的等价类。

注 6.9。 令 $Y(u)$ 表示包含 u 中所有点的最小杨图，即由所有位于某个 u点西北方或正西、正北方向的单元格组成的集合。它的外角就是 u 的从右至左最大值，因此对于 $\mathcal{W} = \{1\}$， u 的 $\mathcal{W}$-等价类是所有具有相同图 $Y(u)$ 的排列组成的集合。对于其他尾部集合，等价类通常更小。若 $\varnothing \notin \mathcal{W}$，则每个 $\mathcal{W}$-等价类都包含在一个具有相同最小杨图的等价类中。事实上， $\mathcal{W}$-内点有一个非空的 $\mathcal{W}$-见证，因此它不是从右至左最大值。因此， u 的从右至左最大值是 $\mathcal{W}$-外角，并且它们恰好是 $O_{\mathcal{W}}(u)$ 中不存在 $O_{\mathcal{W}}(u)$ 的点严格位于其东南方的那些点；所以它们由 $O_{\mathcal{W}}(u)$ 决定。例 6.8 展示了具有相同最小杨图的等价类如何分裂：其中一些点变为冻结点，棋盘随之缩小。

6.4. **理想的分裂**。现在我们也固定 $k \geq 1$，并通过 $\mathcal{W}$-见证元来描述理想 $\mathscr{I}_{k,\ \mathcal{W}}$。

引理 6.10。 对于每个 N，分量 $\mathscr{I}_{k,\ \mathcal{W}(N)}$ 由元素 $e_k[w, A]$ 张成，其中$w \in \mathbb{S}_N$，且 $A \subset [N]$ 是一个由 k 列构成的集合，使得 w 中各点在列A 上的角在 w 中有一个 $\mathcal{W}$-见证。

证明。 首先，设 $\tau \in \mathcal{W}$ 的长度为 t，设 $w \in \mathbb{S}_N$和 $L \subset [N]$ 满足 $|L| = k + t$，并写作$L = A \sqcup A'$，其中 A由 L中最小的 k 个元素组成。令 $w' = w_{L \leftarrow \mathrm{id}_k \oplus \tau}$。 对于 $\sigma \in \mathbb{S}_k$，排列 $w_{L \leftarrow \sigma \oplus \tau}$ 在 A 之外与 w' 重合，并在 A 上取 w（L）中最小的 k 个值，模式为 σ。因此 $w_{L \leftarrow \sigma \oplus \tau} = w'_{A \leftarrow \sigma}$，并且

$$(e_k \oplus \tau)[w, L] = e_k[w', A].$$

w' 中的点在列 A' 上构成模式 τ，并且它们位于列A 的右侧以及行 w'（A）的下方。因此，它们构成了 w' 中各点在列 A上的角的一个 $\mathcal{W}$-见证。

其次，设 w 与 A 如陈述中所述，设 X 为该角的一个 $\mathcal{W}$-见证，其模式为$\tau \in \mathcal{W}$，设 A' 为 X的列的集合，并令 $L = A \sqcup A'$。 X 的点位于列 A的右侧以及行 w（A）的下方。因此对所有 $\sigma \in \mathbb{S}_k$有 $w_{A \leftarrow \sigma} = w_{L \leftarrow \sigma \oplus \tau}$， 且$e_k[w, A] =$ （$e_k \oplus \tau$）$[w, L]$。 □

定理 6.11. 对每一个 N,

$$\mathscr{I}_{k,\mathcal{W}}(N) = \bigoplus_{C \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{W}}(N)} \mathscr{I}_C, \qquad where \quad \mathscr{I}_C = \mathscr{I}_{k,\mathcal{W}}(N) \cap \Bbbk C,$$

并且，(8) 中的同构 $\Bbbk C \cong \Bbbk \lambda_C$ 将 $\mathscr{I}_C$ 映射到棋盘理想 $(e_k)_{\lambda_C} = I_k(\lambda_C)^{(1;1)}$。特别地，分裂 (7) 成立。

证明。首先，设 $e_k[w,A]$ 是引理 6.10 中的一个元素， c 是列 A 中 w 的点的角，并设 C 是 w 的 $\mathcal{W}$-类。于是 $c \in \lambda_{\mathcal{W}}(C)$，并且根据引理 6.4(3)，列 A 中 w 的点是 $\mathcal{W}$-内的。因此 $A \subset \kappa_C$ 和 $w(A) \subset \rho_C$，且整个盒子$w(A) \times A$包含于 λ_C。所以，对每个 $\sigma \in \mathbb{S}_k$，将列 A 中 $T(w)$ 的点替换为 $w_{A\leftarrow\sigma}$ 中的点，即得到 λ_C 的一个横截集；根据命题 6.6(1)，有 $w_{A\leftarrow\sigma} \in C$。因此， $e_k[w,A]$ 的所有项都属于 C，并且在同构 (8) 下，元素 $e_k[w,A]$ 变为 $e_k[T(w)\ A]$，这是张成 $(e_k)^{\lambda_C}$ 的元素之一。

其次，设 C 是一个 $\mathcal{W}$类， T 是 λ_C的一个横截集，而 A 是 k 列的集合，使得 T中位于列 A 的点的角c属于 λ_C。设 $w \in C$是满足 $T(w) = T$ 的排列。则 $c \in \lambda_{\mathcal{W}}(w)$，也就是说， c在 w中有一个 $\mathcal{W}$-见证。因此， $e_k[w,A]$ 是引理 6.10 中的元素之一，并且它对应于 $e_k[T,A]$。

最后，根据第一部分，$\mathscr{I}_{k,\ \mathcal{W}}(N)$的每个张成元素都属于单个直和项 $\Bbbk C$。因此，$\mathscr{I}_{k,\ \mathcal{W}}(N)$是子空间 $\mathscr{I}_C$的直和，其中每个子空间都由属于 $\Bbbk C$的张成元素张成；根据前两部分， $\mathscr{I}_C$对应于 $(e_k)^{\lambda_C}$，而根据引理 5.4，这就是 $I_k(\lambda_C)^{(1;1)}$。取商即得 (7)。□

例 6.12。设 $\mathcal{W} = \{1\}$ 和 $u = 561234$ （图8）。从右至左最大值为 (6，2) 和 (4， 6)，且 $\lambda_{\mathcal{W}}(u)$ 的行长度为 5， 5， 5， 1， 1， 0。 $\mathcal{W}$-内部点为 (5， 1)、(1， 3)、(2， 4) 和 (3， 5)，而棋盘 $\lambda_C \subset \{1,2,3,5\} \times \{1,3,4,5\}$ 的行长度为 4，4， 4，1。其横截集将第 1 列映射到第 5 行，并将第 3、4、 5 列以任意顺序映射到第 1、 2、 3 行，因此 u 的类为$C = \{56abc4 : \ \{a,b,c\} = \{1,2,3\}\}$，大小为六。对于 $k = 2$ 和 $A = \{3,4\}$，角 (2，4) 具有$\mathcal{W}$-见证 {(4，6)}，并且

$$e_2[u,\{3,4\}] = (e_2 \oplus 1)[u,\{3,4,6\}] = 561234 - 562134 = \Delta_{\{1,2\},\{3,4\}}\, x_{51}x_{62}x_{35}x_{46}.$$

在同构 $\Bbbk C \cong \Bbbk\lambda_C$ 下，该元素变为 λ_C 的子式，取第 1、2 行和第 3、4 列，再乘以 $x_{51}x_{35}$。

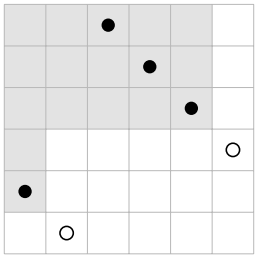


FIGURE 8. $u = 561234$ 关于 $\mathcal{W} = \{1\}$的 $\mathcal{W}$-棋盘。 $\mathcal{W}$-内点为黑色， $\mathcal{W}$-外点为白色。

例 6.13。设 $\mathcal{W} = \{1\}$ 和 $N = 4$。由例6.7可知，共有 14 个等价类：八个大小为一，五个大小为二，以及大小为六的等价类 $\{abc4\}$ ，其棋盘是完整的 3×3 正方形。

- 对于 $k = 2$，根据注 5.13，每个等价类对 (7) 贡献一个维数。因此，$\dim(\mathscr{I}/(e_2 \oplus 1))(4) = 14 = \#\mathrm{Av}_4(213) = \#\mathrm{Av}_4(123)$。
- 对于 $k = 3$，大小至多为二的等价类不含 3-链，并按其大小作出贡献。大小为六的等价类贡献 $6 - 1 = 5$，因为 3×3 行列式是其唯一的关系。因此，$\dim(\mathscr{I}/(e_3 \oplus 1))(4) = 8 + 10 + 5 = 23 = \#\mathrm{Av}_4(3214) = \#\mathrm{Av}_4(1234)$。

其棋盘为阶梯形的类 $\{3412\}$ 展示了注 5.14。对于 $k = 2$ ，该棋盘的梯形理想为零，而该类贡献一个维数；事实上，3412 同时避免了 213 和 123。将秩簇与棋盘外元素均为零的矩阵相交，会使该类消失。

注 6.14。分裂 (7) 是一种分层的影子。令 $J_N \subset R_N$ 为由乘积 Δ_A、$_B\, x_X$ 生成的理想，其中 Δ_A、$_B$ 是一个 $k \times k$ 子式，而 X 是位于其角的东南方、且处于不同的行和列中的单元格集合，它们构成来自 $\mathcal{W}$ 的模式。由引理 5.4 和 6.10，其权空间 $(J_N)_{(1;1)}$ 为 $\mathscr{I}_{k,\mathcal{W}}(N)$。对于矩阵 M，令 $\lambda_{\mathcal{W}}(M)$ 为满足以下条件的单元格 c 的集合： M 的非零元素包含这样一个严格位于 c 东南方的集合 X。那么，当且仅当对所有 $(a,b) \in \lambda_{\mathcal{W}}(M)$，秩 $M_{[a]\times[b]} < k$ 时， M 才属于 J_N 的零点集；也就是说，当且仅当将 M 限制在其自身的棋盘 $\lambda_{\mathcal{W}}(M)$ 上所得的矩阵属于梯形行列式簇 $Y_k(\lambda_{\mathcal{W}}(M))$。将引理 6.4 和命题 6.6 的证明应用于单项式的支撑而非排列，可知 $\lambda_{\mathcal{W}}(M)$ 仅取决于 M 在 $\lambda_{\mathcal{W}}(M)$ 之外的非零元素集合 O，并且存在一个多重分次向量空间的分解

$$R_N/J_N \cong \bigoplus_O x_O\, \Bbbk[x_c : c \in O] \otimes R_{\lambda_O}/I_k(\lambda_O),$$

其中 O遍历与其自身棋盘 λ_O不相交的 $[N]\times[N]$单元集合。几何上， J_N 的零点集是不相交的分层并集 $(\Bbbk^\times)^O \times Y_k(\lambda_O)$。在多重次数 (1; 1) 中，集合 O 变为一个部分排列，即类 C的 $\mathcal{W}$-外点集合，而相应的求和项变为 $(R_{\lambda_C}/I_k(\lambda_C))_{(1;1)}$。

6.5. **Gr¨obner 基**。

引理 6.15. 设 $u \in \mathbb{S}_N$，令 C为其 $\mathcal{W}$-类，且令 p为 $k\cdots 21$ 或 $12\cdots k$。那么， u 包含来自 $p \oplus \mathcal{W}$ 的模式，当且仅当横截集 $T(u)$ 在 λ_C中包含 p。

证明。 $p \oplus \tau$在 u 中的一次出现由 p 的一次出现和 τ的一次出现构成，后者的所有点都位于前者所有点的下方和右方，也就是说，严格位于其角的东南方。因此， u 包含来自 $p \oplus \mathcal{W}$ 的模式，当且仅当 u 中有 p 的一次出现，其角在 u中有一个 $\mathcal{W}$-见证，也就是说，该角位于 $\lambda_{\mathcal{W}}(u)$中。根据引理 6.4(3)，此类出现中的点都是 $\mathcal{W}$-内点，因此属于 $T(u)$，而其角位于 $\rho_C \times \kappa_C$中，因而也位于 λ_C中。反过来，如果 $T(u)$中的某些点构成模式 p，且其角位于 $\lambda_C \subset \lambda_{\mathcal{W}}(u)$中，那么此角在 u中有一个 $\mathcal{W}$-见证。□

定理 *6.1* 的证明。 首先，考虑 $<_{\mathrm{lex}}$。根据定理 6.11，$\mathscr{I}_{k,\mathcal{W}}(N)$ 中的每个元素都是空间 $\mathscr{I}_C$ 中元素的和，而这些空间支撑在互不相交的排列集上。因此，$\mathscr{I}_{k,\mathcal{W}}(N)$ 的首置换就是所有 $\mathscr{I}_C$ 的首置换。根据定理 6.11 和命题 6.6(2)， $\mathscr{I}_C$ 的首置换对应于 $(e_k)_{\lambda_C}$ 的首横截集；根据推论 5.16，这些是 λ_C 中在 λ_C 中包含 $k\cdots 21$ 的横截集。根据引理 6.15，相应的排列是 C 中包含来自 $k\cdots 21 \oplus \mathcal{W}$ 的模式的元素。因此，$\mathscr{I}_{k,\mathcal{W}}$ 的每个首置换都包含某个生成元的首单项式，也就是说，这些生成元构成 $<_{\mathrm{lex}}$ 的 Gr¨obner 基。

其次，将 $k\cdots 21$ 替换为 $12\cdots k$，同样的论证也适用于 $<^c_{\mathrm{lex}}$。

最后，符号扭曲 θ将 $e_k \oplus \tau$映射到 $\mathrm{sgn}(\tau)\ s_k \oplus \tau$，并保持首单项式不变，因此 $s_k \oplus \mathcal{W}$ 是关于相同序的 Gröbner 基。避形排列数量相等这一结论即命题 4.10。□

证明还表明了更多内容：对于每个 $\mathcal{W}$-类 C， $\Bbbk C$ 在商中的像有一个由 λ_C 的横截集组成的基，其中这些横截集不含 λ_C中的递减 k-链；此外，还有另一个由不含 λ_C中递增 k-链的横截集组成的基。对 $\mathrm{Cl}_{\mathcal{W}}(N)$ 求和，便得到 Backelin 、 West 和 Xin 将其定理归约为 $12\cdots k$ 与 $k\cdots 21$ 形状 -Wilf 等价的结果。

注记 6.16。 第 6.4 节和第 6.5 节中使用的 e_k 的唯一性质是：它是一个棋盘 Gr¨obner 基。令 G 为 $<_{\mathrm{lex}}$ 或 $<^c_{\mathrm{lex}}$ 的任意棋盘 Gr¨obner 基（定义 5.15）。由于（$g\oplus\tau$）$[w, L] = g[w_{L\leftarrow \mathrm{id}\oplus\tau}, A]$，其中 A 由 L 的前元数（g）个元素组成，因此相同的证明表明，$\{g \oplus \tau :\ g \in G,\ \tau \in \mathcal{W}\}$ 是关于同一序的 Gr¨obner 基，并且由其生成的理想的商是 $\bigoplus_{C\in \mathrm{Cl}_{\mathcal{W}}(N)} \Bbbk\lambda_C/$（$G$）$_{\lambda_C}$ 在元数 N 中。

注记 6.17。对于 $k \geq 3$，带符号扭曲的和 $e_k \oplus \tau$ 不能替换为二项式 $12\cdots k \oplus \tau - k\cdots 21 \oplus \tau$。例如，根据命题 4.11(1)，由 $1234-3214$ 生成的理想的商在元数五中维数为 99，而 $\#\mathrm{Av}_5(1234) = \#\mathrm{Av}_5(3214) = 103$。

References

[1] M. Aguiar 和 S. Mahajan, *"Monoidal Functors, Species and Hopf Algebras"*, 《CRM 专著丛书》29，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2010年。[2] M. D. Atkinson、M. M. Murphy 和 N. Ruˇskuc, *"Partially well-ordered closed sets of permutations"*, 《Order》19（2002），101–113。[3] E. Babson 和 J. West, *"The permutations $123p_4\cdots p_m$ and $321p_4\cdots p_m$ are Wilf-equivalent"*, 《图组合学》16（2000），373–380。[4] J. Backelin、J. West 和 G. Xin, *"Wilf-equivalence for singleton classes"*, 《应用数学进展》38（2007），133–148。[5] M. G. Barratt, *"Twisted Lie algebras"*, 载于：同伦论的几何应用 II（埃文斯顿，1977），《数学讲义》658，施普林格，柏林，1978年，9–15。[6] A. Berele 和 A. Regev, *"Hook Young diagrams with applications to combinatorics and to representations of Lie superalgebras"* **64** 1987 118 175 , 《数学进展》（），–。[7] M.-L. Bruner, *"Central binomial coefficients also count (2431, 4231, 1432, 4132)-avoiders"*, arXiv:1505.04929。[8] A. Burstein、T. Han、S. Kitaev 和 P. B. Zhang, *"On (shape)-Wilf-equivalence of certain sets of (partially ordered) patterns"* **32** 2025 1 7 , 《电子组合学杂志》（），#P 。。[9] L. Carlitz、R. Scoville 和 T. Vaughan, *"Enumeration of pairs of permutations"*, 《离散数学》14（1976），215–239。[10] T. Church、J. S. Ellenberg 和 B. Farb, *"FI-modules and stability for representations of symmetric groups"*, 《杜克数学杂志》164（2015），1833–1910。[11] C. De Concini、D. Eisenbud 和 C. Procesi, *"Young diagrams and determinantal varieties"*, 《数学发明》56（1980），129–165。[12] V. Dotsenko, *"Stable homology of Lie algebras of derivations and homotopy invariants of wheeled operads"*, 《组合数学》161（2025），756–799。[13] V. Dotsenko 和 A. Khoroshkin, *"Shuffle algebras, homology, and consecutive pattern avoidance"*, 《代数与数论》7（2013），673–700。[14] V. Dotsenko 和 A. Lopatin, *"Young's lattice, invariant ideals, and weak identities"*, arXiv:2610.36638。[15] P. Erd˝os 和 G. Szekeres, *"A combinatorial problem in geometry"*, 《组合数学》2（1935），463–470。[16] W. Fulton, *"Flags, Schubert polynomials, degeneracy loci, and determinantal formulas"*, 《杜克数学杂志》65（1992），381–420。[17] I. M. Gessel, *"Symmetric functions and P-recursiveness"*, 《组合学杂志 A 辑》53（1990），257–285。[18] J. R. Goldman、J. T. Joichi 和 D. E. White, *"Rook theory. I. Rook equivalence of Ferrers boards"*, 《美国数学会会刊》52（1975），485–492。[19] G. Higman, *"Ordering by divisibility in abstract algebras"*, 《伦敦数学会会刊》（3）2（1952），326–336。[20] C. J. Hillar 和 S. Sullivant, *"Finite Gröbner bases in infinite dimensional polynomial rings and applications"*, 《数学进展》229（2012），1–25。[21] A. Joyal, *"Une théorie combinatoire des séries formelles"*, 《数学进展》42（1981），1–82。[22] A. R. Kemer, *"Finite basis property of identities of associative algebras"*, 《代数与逻辑》26（1987），362–397。[23] A. R. Kemer, *"Ideals of Identities of Associative Algebras"*, 《数学专著译丛》87，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1991年。[24] D. E. Knuth, *"Permutations, matrices, and generalized Young tableaux"*, 《太平洋数学杂志》34（1970），709–727。[25] A. Knutson 和 E. Miller, *"Gröbner geometry of Schubert polynomials"*, 《数学年刊》（2）161（2005），1245–1318。[26] A. Knutson、E. Miller 和 A. Yong, *"Gröbner geometry of vertex decompositions and of flagged tableaux"*, 《纯粹与应用数学杂志》630（2009），1–31。[27] J.-L. Loday 和 B. Vallette, *"Algebraic Operads"*, 《数学科学基础丛书》346，施普林格，海德堡，2012年。[28] R. Nagpal、S. V. Sam 和 A. Snowden, *"Noetherianity of some degree two twisted commutative algebras"*, 《Selecta Mathematica》新系列 22（2016），913–937。[29] *"The Permutation Pattern Avoidance Library"*, 《Av(1234, 1243, 1324, 1342)》条目，https://permpal.com。[30] A. Polishchuk 和 L. Positselski, *"Quadratic Algebras"*, 《大学讲义丛书》37，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005年。[31] S. B. Priddy, *"Koszul resolutions"*, 《美国数学会汇刊》152（1970），39–60。[32] M. Ronco, *"Shuffle bialgebras"*, 《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》61（2011），799–850。[33] S. V. Sam 和 A. Snowden, *"GL-equivariant modules over polynomial rings in infinitely many variables"*, 《美国数学会汇刊》368（2016），1097–1158。

[34] S. V. Sam 和 A. Snowden, *"Gröbner methods for representations of combinatorial categories"*, 《美国数学会杂志》**30** （2017），159–203。[35] S. V. Sam 和 A. Snowden, *"Introduction to twisted commutative algebras"*, arXiv:1209.5122。[36] C. Schensted, *"Longest increasing and decreasing subsequences"*, 《加拿大数学杂志》**13** （1961），179–191。[37] A. N. Sergeev, *"The tensor algebra of the identity representation as a module over the Lie superalgebras* $\mathfrak{Gl}$ *（*n*，* m*）and* Q*（*n*）"*, 《数学文集》（新系列）**123(165)** （1984），422–430；英文译文载于《苏联数学文集》**51** （1985），419–427。[38] W. Specht, *"Gesetze in Ringen. I"*, 《数学杂志》**52** （1950），557–589。[39] D. A. Spielman 和 M. B´ona, *"An infinite antichain of permutations"*, 《电子组合学杂志》**7** （2000），注释 2。[40] Z. Stankova 和 J. West, *"A new class of Wilf-equivalent permutations"*, 《代数组合学杂志》**15** （2002），271–290。[41] R. P. Stanley, *"Enumerative Combinatorics, Vol. 1"*, 第 2 版, 《剑桥高等数学研究》**49**，剑桥大学出版社，剑桥，2012年。[42] B. Sturmfels, *"Gröbner bases and Stanley decompositions of determinantal rings"*, 《数学杂志》**205** （1990），137–144。[43] V. Vatter, *"Permutation classes"*, 载于：《计数组合学手册》（M. B´ona 编），CRC 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2015年，754–833；arXiv:1409.5159。

Anton Khoroshkin: Department of Mathematics、 University of Haifa、 Mount Carmel、3498838、Haifa Israel*Email address*：khoroshkin@gmail.com