arXiv:2611.29786v1 [math.CO] 22 Nov 2026

具有可数多个端的奇偶安全有向图是核完美的

Sjur Dyrkolbotn、Claude Fable 5.2、Michał Walicki

22.11.2026

摘要

有向图的核是一个独立集，所有其他顶点都指向该集合中的顶点；如果一个有向图的每个诱导子图都有核，则称其为核完美的。一个没有奇圈、且不存在这样的射线：其中有无穷多个顶点各自向该射线发送由不相交路径组成的无限扇的有向图，称为安全的。 [4] 中提出的“每个安全有向图都是核完美的”猜想，已在那里针对端的数量有限的情形得到证明。

我们证明了端数至多可数时的一个更强结论。为一条射线的顶点编号，并将一条终止于该射线的路径的类型 定义为其长度与末顶点编号之和的奇偶性。如果一个扇包含无穷多条每种类型的路径，则称其为混合 扇；如果一个有向图没有奇圈，并且不存在一条射线含有无穷多个顶点，使得每个这样的顶点都有一个指向它的混合扇，则称该有向图是奇偶安全 的。Yablo 图（ω，$<$）不是奇偶安全的。其仅允许在奇偶性不同的层之间添加弦的变体具有一个核——它是奇偶安全的，但并不安全。我们的主要结果是：端数至多可数的奇偶安全有向图是核完美的；由于安全性蕴含奇偶安全性，安全有向图的结论也随之成立。该有向图可以具有任意基数，并且不对端的结构作任何假设，但端数不可数的情形仍然悬而未决。

1 引言

1.1 核与悖论

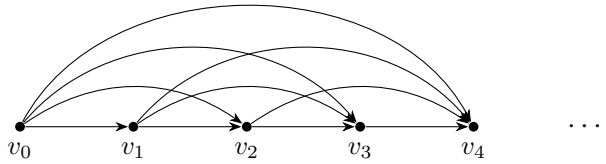
有向图 Γ 具有顶点集 $V(\Gamma)$ 和边集 $u \to v$，其中 $u, v \in V(\Gamma)$。顶点集 K 若不包含任何边，且每个外部顶点 K 都有一条边指向 K，则称其为核。可以将每个顶点看作一句话：“我所指向的一切都是假的”：

$$p_v \;\leftrightarrow\; \bigwedge_{v \to w} \neg p_w.$$

当且仅当真顶点构成一个核时，真值赋值才满足所有这些方程。没有核的有向图就是一个悖论。[1] 奇长度的有向圈是悖论，但偶长度的环不是；它有两个核。

例子 (Yablo)。 顶点 v_0、v_1、.....满足 $v_i \to v_j$ 对于所有 $i < j$。如果 v_i 为真，所有后续顶点都会为假；但这样一来， v_{i+1}只指向假顶点，就会为真。因此每个顶点都是假的，而 v_0 就应该为真。这里没有核，尽管没有环。

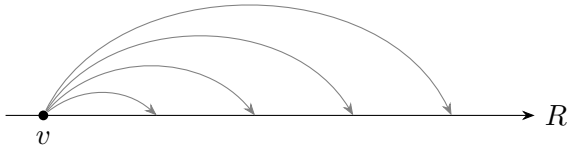
[1] 这个名称源于将核应用于悖论分析，例如 [1, 5]。



如果每个诱导子图都有一个核，那么这个有向图就是核完美 的。这是“没有悖论”的稳健形式。根据 Richardson 定理， [3] 一个没有奇圈的有限分支有向图是核完美的。因此，没有奇圈时，悖论需要无穷性；问题在于哪些无限构型会导致这种情况。

1.2 扇与奇偶扇

一条射线 是由互不相同的顶点组成的无限路径 $r_0 \to r_1 \to \cdots$。如果一个顶点 v 支配 一条射线 R，则称该顶点具有通向 R 的无限扇，即存在从 v 到 R 的无穷多条路径，且这些路径两两仅共享 v。



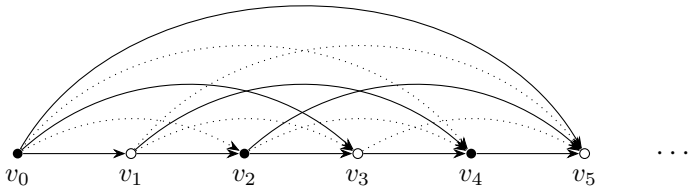
在 Yablo 图中，每个顶点都支配其所在的射线 $v_0 \to v_1 \to \cdots$。如果一个有向图 [4] 没有奇圈，且不存在包含无穷多个支配它的顶点的射线，则称其为安全 有向图。人们猜想每个安全有向图都是核完美的， [4, 猜想 1.2]）。

对于具有有限多个端的有向图，这一点已经得到证明 [4, 定理 3.19] ；对于一些具有无限多个端且形式特殊的类，也已得到证明。一个端 大致上是射线前进的一个方向。如果一条射线R 馈送 另一条射线 R' ，则意味着它 R 不断越过 R' 每一个有限障碍。相互馈送构成一个等价关系，而端 就是射线的这样一个等价类。

悖论关乎奇偶性，因此必须排除奇圈。从现在起，有向图是任意的，记作 Γ；而 无奇圈图 是没有奇圈的有向图，记作 G。自环是奇圈，因此无奇圈图没有自环，但可以含有偶圈，基数也可以任意。

安全性考察扇，但不关注奇偶性。在 Yablo 图中，问题在于 v_i既能一步到达v_j ，也能两步到达v_j 。

例 1.1 (奇Yablo)。 仅保留 Yablo 图中 $j-i$ 为奇数的边 $v_i \to v_j$ （被删除的边以虚线表示）。



每个顶点仍然通过直接边支配射线 $v_0 \to v_1 \to \cdots$，因此该有向图并不安全。但每条边都将偶数索引与奇数索引相连。该有向图是二部的，偶数索引的顶点构成一个核，并且它是核完美的。

因此，就扇而言，安全性禁止的情形太多了。Yablo 图具有而奇版本缺少的是这样一个扇：其中的路径在奇偶性上存在分歧。设 $R = r_0 \to r_1 \to \cdots$ 是一条射线，并将 n 称为 r_n的层级。以 r_n 为终点的路径 P 的类型是 $|P| + n$的奇偶性，其中 $|P|$ 是 P的长度。从 v 到 R 的无限扇若具有每种类型的无限多条路径，则称其为混合的。若存在这样一个扇，则 v 奇偶支配 R。如果一个有向图没有奇圈，并且不含有一条射线，其中包含无限多个奇偶支配该射线的顶点，则称其为奇偶安全。安全有向图都是奇偶安全的。

在 Yablo 图中，从 v_i 到较晚顶点的边构成一个混合扇。在奇版本中，所有从 v_i 到射线的路径类型都相同，因此没有扇是混合的。对于射线上的顶点 $v = r_m$，从 v 到 r_n 的路径类型恰好与从 v 到r_n的 R 线段奇偶性一致，当且仅当它与该线段的奇偶性一致。因此，从射线上的一个顶点出发的混合扇包含无穷多条与射线奇偶性不一致 的不相交路径：奇偶性相同的层级之间的奇连接，或奇偶性不同的层级之间的偶连接。

1.3 结果与证明的结构

定理 1.2。 至多有可数多个端的奇偶安全有向图是核完美的。特别地，至多有可数多个端的安全有向图是核完美的。

该有向图的基数可以是任意的，并且对其端的结构不作任何假设。证明的核心是定理 6.3：一个非核完美的奇偶安全有向图有不可数多个梯状端，其定义如下：

- 一个有限端口区域是指一组 X 顶点，其出邻点数量有限（在 X之外）；
- 如果不存在包含某个顶点且其诱导子图为核完美有向图的有限端口区域，则称该顶点为本质的；
- 一条梯子射线是经过无穷多个本质顶点的射线 b_1， b_2.....，使得从每个b_i 顶点到其后的每个 b_j 顶点之间都存在具有两种奇偶性的路径；
- 一条梯子端是包含一条梯子射线的端。

定理的证明　　6.3依赖于以下原理，该原理可能具有独立的意义。

引理 1.3（有限端口覆盖）。 如果无奇圈图 G 的每个顶点都位于某个有限端口区域中，且该区域诱导出一个核完美有向图，那么 G 就是核完美的。

这些区域可以任意重叠，数量也可以任意。对于含有奇圈的有向图，该引理不成立：在一个有向三角形中，每个单独的顶点都是一个核完美的有限端口区域。如果每个顶点都只有有限多个后继，那么每个单独的顶点都是一个核完美的有限端口区域；因此，该引理涵盖了 Richardson 定理。

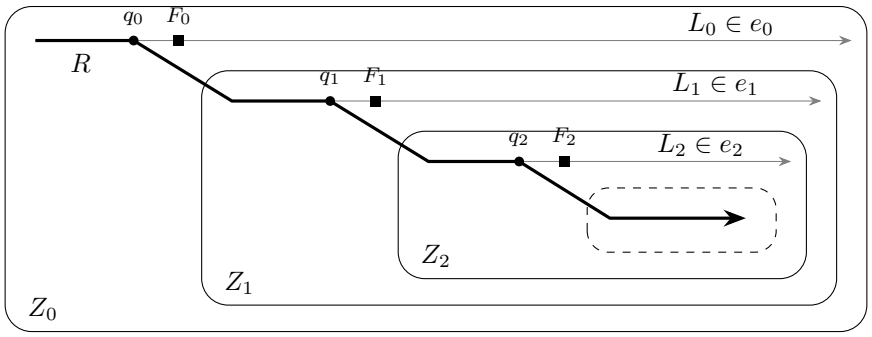
总的来说，定理 1.2 的证明是一种对角化论证：它表明，如果一个有可数多个端 Γ、 e_0， e_1，e_2，.....的奇偶安全有向图不是核完美的，那么它就有一个不在列表中的端。主要步骤如下：

1. 具有有限个端口的区域通过有限个真值与有向图的其余部分交互。如果每个顶点周围都有这样一个无悖论区域，那么这些区域就可以拼接起来， Γ 从而成为核完美的（引理 1.3）。因此，某些顶点是本质顶点，并且在每个悖论区域内，都存在一条经过无限多个本质顶点的射线（命题 5.7）。

2. 设 L 为这样一条射线。根据奇偶安全性，某个本质顶点 q 不向 L 发送混合扇。于是存在一个有限集 F，即闸门，使得从 q 到 L 的某个尾部、且避开 F的所有路径都具有相同的类型。

3. 令 Z^* 表示 q 不经过闸门所能到达的所有部分。它是一个有限端口区域，因此， q 作为本质的区域，其中包含一个悖论。将 Z^* 分为两部分：一部分是 A 仍能到达 L 的尾部，另一部分是其余部分 Z'。由于所有从 q 经由 A 到达 L 的路径类型都相同， A 是二部的，如同奇数 Yablo 图；而二分有向图不会引发问题。因此，这个悖论位于 Z' 中，故其中还包含另一条同类射线 L' 。 Z' 内没有任何射线能够持续到达 L。

4. 对 e_0 这样做，然后在 e_1 的新区域内重复，依此类推。沿着 L_0 走到 q_0，进入 Z_1，再沿着 L_1 走到 q_1，进入 Z_2，依此类推。所得射线 R 的尾部位于每个 Z_i 中，因此它的端不属于任何一个 e_i （定理 6.3）。



区域 Z_{i+1} 位于闸门 F_i后方，无法到达 L_i的尾部，且不包含端 e_i的任何射线。粗射线 R 在每个 Z_i中都有一段尾部。

论文的结构及 Claude 的使用

第 2 节介绍标准概念和结果，第 3 节介绍本文特有的一些基本概念。第 4 节引入有限端口区域，并证明核心结果引理 1.3。第 5 节定义本质顶点和梯形射线。第 6 节介绍对角论证，并证明非核完美的奇偶安全有向图具有不可数多个梯状端，由此推出定理 1.2。只对无环有向图感兴趣的读者可以忽略所有关于强连通分量的内容：在这种情况下，它们都是单个顶点。

这些结果是在与 Claude 进行了数小时交互后得出的；在此过程中，该工具在引导下完成了大部分形式化工作。这些结果已在 Lean 中得到验证。第 7 节介绍了用于主要结果定理 1.2 的 Lean 形式化，以及所需的定义。证明本身可见于 `https://walickimichal.github.io/michal.github.io/count-parity-safe-proof.lean`。

2 核与半核

$\Gamma[X]$ 是由 X诱导的子图，并且 $\Gamma - F = \Gamma[V(\Gamma) \setminus F]$。记 $N_\Gamma(u)$为 u 在 Γ 中的后继（出邻点）集合，记 $N_\Gamma^-(u)$为其在 Γ中的前驱点，并将二者都推广到顶点集合。对于子图 H， $N_H(u)$是 u 在 H中的后继集合；因此 $N_{\Gamma[X]}(u) = N_\Gamma(u) \cap X$。一条游走 是有限的顶点序列，其中每个顶点指向下一个；其长度 是其边的数目，并且若它结束于起点，则它是闭 的。一条路径 是顶点互不相同的游走；单个顶点是一条

长度为零的路径。一条环 是正长度的闭游走，除第一个顶点外不重复任何顶点。若存在从 u 到 v 的路径，则顶点 u 可达 v；每个顶点都可达自身。若 $N_\Gamma(D) \subseteq D$，则集合 D 是后继闭 的。顶点的未来集 是它所可达的顶点集合。一个汇点 是没有后继的顶点。 v 的强连通分量 是顶点 w 的集合，使得 v 可达 w且 w 可达 v。

若一个集合不包含任何边，则称其为独立集。核是一个独立集 K，使得每个不属于 K 的顶点在 K中都有一个后继。对于在 K 上取值为 1、在其他地方取值为 0 的真值赋值 x，当且仅当核方程成立时， K 是一个核

$$x(v) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x(w) = 0 \text{ for all } w \in N_\Gamma(v)$$

在每个顶点 v处都成立。

引理 2.1（奇偶原理）。 设 G 是一个无奇圈图。

1. 每个闭游走的长度都是偶数。*2.* 从 u 到 v 的每个游走都包含一条从 u 到 v 的路径，且该路径的长度与游走的长度奇偶性相同。这里，“包含”是指该路径只使用游走中的顶点。*3.* 每个强连通分量 S 都有一种着色 c： $S \to \{0,1\}$，使得 S 内部的每条边都连接颜色不同的顶点。在 S 的两个给定顶点之间的所有游走都有相同的奇偶性。

证明。 (1) 取一条长度最短的奇数闭游走。如果它重复经过了除起点之外的某个顶点，就会分解成两条更短的闭游走，其中一条是奇数长度。因此它是一个奇圈。

(2) 如果游走重复经过某个顶点，就删去两次经过该顶点之间的闭游走。根据 (1)，奇偶性不变。重复此过程。

(3) 固定 $r \in S$。如果从 r 到 $x \in S$ 的两条游走具有不同的奇偶性，那么它们与一条从 x 到 r 的游走结合起来，就会得到奇偶性不同的闭游走。因此，从 r 到x 的游走的奇偶性 $c(x)$ 是良定义的，并且沿着 S 内的每条边都会改变。在 S 中两个顶点之间的游走始终留在 S 中，所以其奇偶性由两端的颜色决定。 □

如果一个有向图的所有顶点都能用两种颜色着色，使每条边连接不同颜色的顶点，那么这个有向图就是二部的。因此它不含奇圈。根据 (3)，无奇圈图的每个强连通分量都诱导出一个二分有向图。我们为每个强连通分量固定这样一种着色 c，此后不再更改。

半核是一个独立集 S，满足 $N_\Gamma(S) \subseteq N_\Gamma^-(S)$：无论什么 S 指向某个顶点，该顶点都会反过来指向 S, [2]。它是一个不会被外部因素破坏的部分解。接下来的三个命题对所有有向图都成立。它们基本上已在 [2] 中给出；该文还证明了随后的命题（使用佐恩引理）。

引理 2.2（[2]）。 *1.* 半核链的并是半核。

2. 如果 D 是后继闭的，则 $\Gamma[D]$的每个半核，特别是 $\Gamma[D]$的每个核，都是 Γ的半核。*3.* 设 S 是 Γ 的半核，且 $C = V(\Gamma) \setminus (S \cup N_\Gamma^-(S))$。如果 S' 是 $\Gamma[C]$的半核，则 $S \cup S'$ 是 Γ 的半核。

命题 2.3（[2]）。 如果 Γ 的每个非空诱导子图都有非空半核，则 Γ 是核完美的。

一个核心 是指不含非空半核的非空有向图。

推论 2.4。 非核完美的有向图包含一个诱导核。在核 C 中不存在汇点，并且对于每个非空的后继闭 $D \subseteq V(C)$ 有向图 $C[D]$ 是一个核且没有核。特别地， C 中每个顶点的未来集都诱导出一个核。

证明。 第一个结论是命题 2.3 的逆否命题。汇点是一个单元素半核。其余部分由引理 2.2(2) 得出。 □

引理 2.5 (两部分)。 设 $D \subseteq V(\Gamma)$ 是后继闭的。若 $\Gamma[D]$ 和 $\Gamma - D$ 核完美，则 Γ 核完美。

证明。 设 H 是 Γ的一个非空诱导子图。若 H 在 D中没有顶点，则它有一个核。否则， $V(H) \cap D$ 在 H 中是后继闭的，且诱导出一个有核的有向图；根据引理 2.2(2)，该核是 H 的一个非空半核。应用命题 2.3。 □

2.1 二分有向图的典范核

二分有向图是核完美的。我们还需要一个更强的结论：以明确方式选取的核，并且当顶点被移除时能单调地响应。设 B 是一个二分有向图，其颜色类为 B_0， B_1，且设 $Q \subseteq V(B)$。对 $T \subseteq Q \cap B_0$，令

$$\Phi_Q(T) = \{x \in Q \cap B_0 : \text{ every successor of } x \text{ in } Q \text{ has a successor in } T\}.$$

令 $T(Q)$ 为所有满足 $T \subseteq \Phi_Q(T)$ 的 $T \subseteq Q \cap B_0$ 集合的并，且

$$\kappa(Q) = T(Q) \cup \{y \in Q \cap B_1 : \ y \text{ has no successor in } T(Q)\}.$$

将 $T(Q)$ 理解为能够一致地声明为真的颜色 0 顶点的最大集合。

引理 2.6。 *1.* $\kappa(Q)$ 是 $B[Q]$ 的核。因此，每个二分有向图都是核完美的。

2. 如果 $Q \cap B_0 \subseteq Q' \cap B_0$ 和 $Q \cap B_1 \supseteq Q' \cap B_1$，那么 $\kappa(Q) \cap B_0 \subseteq \kappa(Q') \cap B_0$，并且 $\kappa(Q) \cap B_1 \supseteq \kappa(Q') \cap B_1$。

证明。 映射 Φ_Q 是单调的：较大的 T 会给出较大的 $\Phi_Q(T)$。记 $T = T(Q)$。每个满足 $T_0 \subseteq \Phi_Q(T_0)$ 的 T_0 集合都满足 $T_0 \subseteq \Phi_Q(T)$，因此 $T \subseteq \Phi_Q(T)$。应用 Φ_Q 得到 $\Phi_Q(T) \subseteq \Phi_Q(\Phi_Q(T))$，所以 $\Phi_Q(T)$ 是并集中的一个集合，而 $\Phi_Q(T) \subseteq T$。因此， $T = \Phi_Q(T)$。

（1） $B[Q]$ 与 B_0 连接的边。设 $x \in T$ 和 $y \in \kappa$（Q）$\cap B_1$。根据 κ的定义，不存在边 $y \to x$；同样也不存在 $x \to y$，因为 $x \in \Phi_Q$（T）意味着 x 在 Q 中的每个后继在 T中都有一个后继。因此， κ（Q）是独立的。位于 κ（Q）之外的顶点 $y \in Q \cap B_1$ 在 T中有一个后继。位于 $T = \Phi_Q$（T）之外的顶点 $x \in Q \cap B_0$ 有一个后继 $y \in Q$，而该后继在 T中没有后继；这个 y位于 κ（Q）中。

（2）设 $T = T$（Q）。若 $x \in T$，则 $x \in Q' \cap B_0$，且 x 在 Q' 中的每个后继都位于 Q 中，因此在 T中有一个后继。于是 $T \subseteq \Phi_{Q'}$（T）且 $T \subseteq T$（Q'）。 κ（Q'）中的一个顶点 $\cap B_1$ 位于 Q 中，并且在 T（Q'）中没有后继 $\supseteq T$，所以它位于 κ（Q）中。 □

对于单个二分有向图的核，条件 (2) 可以简化为只考虑一部分（仅与 B_0 或仅与 B_1 相交），从而得到一个完备格；但在后面的引理 4.6 中，应用这一序时却需要两个分量。交换 B_0 和 B_1 的角色可得到另一个（最大或最小）核，它同样满足 (2)；下文的内容均不依赖于这一选择。

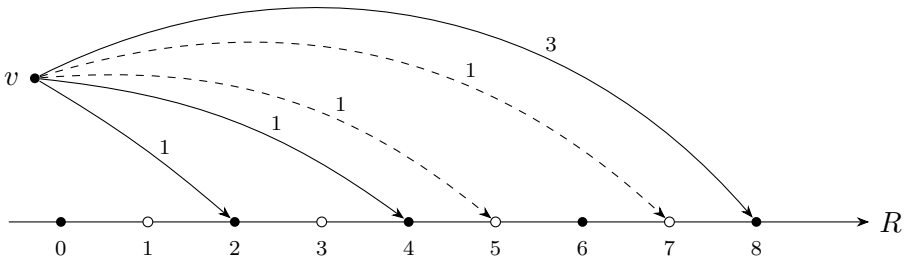
3 条射线：扇、奇偶扇、馈送与端

一条射线 是由互不相同的顶点组成的无限序列 $R = r_0 \to r_1 \to \cdots$；它的尾部 是射线$r_n \to r_{n+1} \to \cdots$。对于射线上的顶点，“之后”和“截至”是指沿射线顺序而言。一条射线包含于 集合 Z，是指它的所有顶点都在 Z中。

从顶点 v 到射线 R 的无限扇是从 v到 R的顶点的一族正长度路径，其中任意两条路径只共享 v。如果存在这样的扇，则 v 支配 R。顶点 v 可能位于 R上，也可能不在其上，并且这些路径可能在终点 R 之前相交。

设 $R = r_0 \to r_1 \to \cdots$是一条射线。 r_n的层级为 n。对于一条终止于 r_n的游走 P，P相对于 R 的类型是 $|P| + n$的奇偶性，其中 $|P|$是 P的长度。

定义 3.1。从 v 到 R 的无限扇若其路径中有无限多条为偶类型且有无限多条为奇类型，则称为混合扇。如果存在从 v 到 R的混合扇，则 v 奇偶支配R。若一个有向图不含奇圈，且没有任何射线包含无限多个奇偶支配它的顶点，则称该有向图是奇偶安全的。



射线上的层级以及扇路径的长度。实线表示奇类型（长度加层级为奇数），虚线表示偶类型。若两种类型的路径各有无限多条，则该扇为混合扇。

关于定义的三点说明。

- 取 R 的一个尾部，会使所有层级都减去同一个数。这会翻转所有类型，或者一个也不翻转。因此， v 是否奇偶支配 R 并不取决于编号从哪里开始；并且 v奇偶支配 R，当且仅当它奇偶支配 R的一个尾部。

- 奇偶支配蕴含支配。因此，安全有向图是奇偶安全的。奇偶安全性在诱导子图下保持。

- 若 $v = r_m$ 位于 R上，则从 v 到 r_n 的游走 P与射线一致，当且仅当 $|P|$ 与 $n - m$具有相同的奇偶性；否则不一致。一致游走的类型与 m相同，不一致游走则为另一种类型。

引理 3.2 (奇偶割判据)。顶点 v 奇偶支配射线 R，当且仅当对于每个有限集 $F \not\ni v$ 和 R 的每个尾部 T，在 $\Gamma - F$ 中都存在两条从 v 出发、长度为正的路径，它们分别到达 T 中的顶点，且相对于 R 具有不同的类型。

因此，如果 v 不 奇偶支配 R，则存在一个有限集 $F \not\ni v$ 和 R 的一个尾部 T，使得 $\Gamma - F$中从 v到 T的所有正长度路径都具有相同的类型。集合 F可以扩充为任何不包含 v的有限集，而 T 可以替换为它的任意一个尾部。

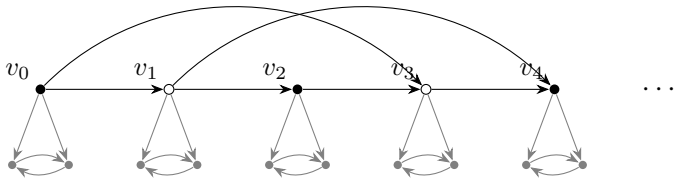
证明。令 v 向 R发送一个混合扇。有限集 $F \not\ni v$ 仅与其中有限条路径相交。每种类型都还剩下无穷多条路径，且它们的端各不相同，因此每种类型各有一条路径以 T 为端。反过来，我们构造一个混合扇 P_1，P_2，……，其中 P_k的类型与 k相同。若已找到 P_1，……，P_{k-1}

，令 F 由它们中除 v之外的顶点组成。从 v 到 R 的 $\Gamma - F$ 中有两条长度为正且类型不同的路径。令 P_k 为类型与 k相同的那条路径。它与先前的路径仅共享 v，因此以 R中的一个新顶点为端。□

例3.3（Yablo、奇Yablo 以及带偶圈的一个版本）。 在 Yablo 图中取 $R = v_0 \to v_1 \to \cdots$。边 $v_i \to v_j$ 的类型为 $1 + j$，因此从 v_i 出发的边构成一个混合扇：每个顶点都奇偶支配 R。

在例1.1的奇数 Yablo 图中，从 v_i 到 v_j 的一条游走具有 $j - i$的奇偶性；沿着一条射线，顶点的层级与其指标模 2 相差一个常数。因此，从一个顶点到一条射线的所有路径具有相同的类型。没有顶点奇偶支配任何射线，尽管每个顶点都支配每条射线。

现在对每个 i，向奇数 Yablo 图中添加顶点 x_i、y_i 以及边 $v_i \to x_i$、$v_i \to y_i$、$x_i \to y_i$ 和 $y_i \to x_i$。



该有向图具有偶圈 $x_i \to y_i \to x_i$，且没有奇圈。它不是二部的，因为 v_i分别经过一步和两步到达 y_i。新顶点不在任何射线上，并且连接其中两个 v_i的路径不能使用这些顶点。因此，通往射线的扇及其类型与奇数 Yablo 图中的相同：该有向图是奇偶安全的，但并不安全。它有一个端。根据定理 1.2，它是核完美的。

定义 3.4。 若对每个有限集 F，都有一条路径在$\Gamma - F$中从 R 的某个顶点通往 R'的某个顶点，则射线 R 馈送 射线 R'，记作 $R \rightsquigarrow R'$。若彼此馈送，则记作 $R \approx R'$。 Γ 的一个端 是 Γ的射线的一个$\approx$-类。

馈送总是在环境有向图 Γ中度量，即使所讨论的射线位于 Γ的某个区域中也是如此。

引理3.5 (馈送)。 *1.* 若 $R \rightsquigarrow R'$，则对每个有限 F 以及 R 的任意尾部 T 和 R'的任意尾部 T'，都有一条路径在 $\Gamma - F$ 中从 T 通往 T'。

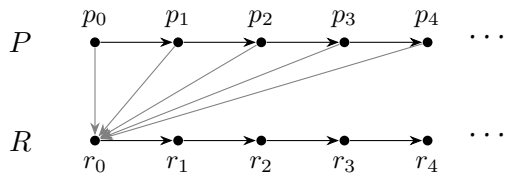
2. $R \rightsquigarrow R'$ 当且仅当存在从 R 到 R'的无穷多条两两不相交路径 .

3. 馈送具有自反性和传递性。一条射线与其每个尾部彼此馈送。因此，$\approx$ 是一种等价关系，而一条射线及其尾部属于同一个端。

证明。 (1) 将 F 扩大，加入 R 在 T 之外的顶点以及 R' 在 T' 之外的顶点；这些顶点只有有限个。(2) 有限集无法与无穷多条不相交路径都相交。反过来，给定从R 到 R'的有限条不相交路径，一条从 R 到 R' 且避开它们所有顶点的路径与它们不相交。(3) 长度为零的路径表明 $R \rightsquigarrow R$，射线和尾部也同理。设 $R \rightsquigarrow R' \rightsquigarrow R''$，且设 F 为有限集。令 T' 为 R' 的一个避开 F 的尾部。在 $\Gamma - F$ 中取一条从 R 到 T' 的某个顶点 b 的路径，再由 (1) 可在$\Gamma - F$ 中取一条从 R' 中位于 b 之后的某个顶点 b' 到 R'' 的路径。它们与 R' 从 b 到 b' 的线段合在一起，构成 $\Gamma - F$ 中一条从 R 到 R'' 的游走，而其中包含一条路径。□

备注。 根据 (2)，这些就是 [6] 意义下的端。 [4] 中的端定义较宽泛，因此我们的结果在限制前者数量的情况下，也适用于后者。更具体地说， [4] 将 $P \preceq R$ 定义如下：对于射线 P、R，若 P 的每个顶点都能到达 R 的某个顶点，则该端由以下子图确定： R ，即由所有能到达 R的顶点所诱导的子图。两条射线确定同一个端，当且仅当$P \preceq R$ 且 $R \preceq P$；记作 $P \simeq R$。若 Q 馈送 R，则 $P \preceq R$，因此 $\approx$ 比 $\simeq$ 更细；按定义 3.4 的意义计算的端数目，不小于按 [4] 的意义计算的端数目。

两种端可能有所不同。设射线 $P = p_0 \to p_1 \to \cdots$ 的边对于所有 i 都连接到一条不相交的射线 $R = r_0 \to r_1 \to \cdots$。



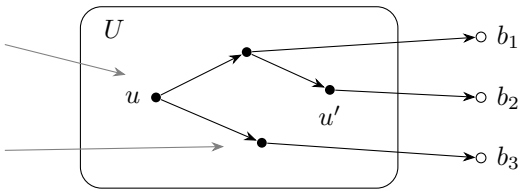
于是 $P \preceq R$，但 P不馈送 R，因为单个顶点 r_0 阻断了所有路径。此处 $R \not\preceq P$，所以这些射线在两种意义下都确定了不同的端。若添加边 $r_i \to p_i$ ，其中 i为偶数，则 R 馈送P ，但仍然 $P \not\approx R$，而 $P \simeq R$。现在两条射线位于同一个强连通分量中。在不存在奇圈的情况下（例如，排除 $p_i \to r_0$ 中 i为奇数的边），强连通分量是核完美的；这就是我们处理此类情形的方式。

4 有限端口区域与覆盖引理

本节确立核心引理 1.3，从而可以拼接核完美区域的解。

定义 4.1。 集合 $U \subseteq V(\Gamma)$ 是 Γ 的有限端口区域 ，如果它的端口 $\partial U = N_\Gamma(U) \setminus U$ 集合是有限的。

端口是 U 之外且被 U 指向的顶点。（它们始终取自主有向图 Γ。）对指向 U的边没有任何限制。每个后继封闭集都是一个没有端口的有限端口区域；而后继有限的顶点自身就是一个有限端口区域。



一个有三个端口的区域。顶点 u 可以到达所有端口； u' 只能到达 b_2。入边（灰色）不受限制。

引理 4.2。 *1.* 两个有限端口区域的并集是一个有限端口区域。

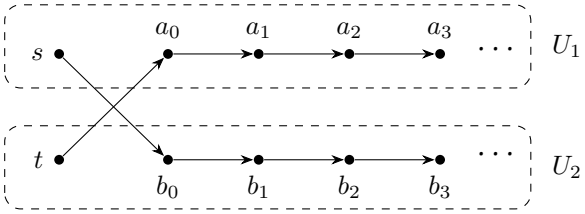
2. 如果 U 是 Γ 的有限端口区域，且 H 是 Γ 的诱导子图，那么 $U \cap V(H)$ 是 H 的有限端口区域。

3. 设 Z 是 Γ 的有限端口区域，设 $v \in Z$，且 $F \not\ni v$ 为有限集。从 v 在 $\Gamma[Z] - F$ 中可达的顶点集合是 Γ 的有限端口区域，其端口位于 $\partial Z \cup F$ 中。我们将这样的集合称为 v 处的锥。

证明。（1）$\partial(U \cup U\prime) \subseteq \partial U \cup \partial U'$。（2）$U \cap V$（$H$）在 H 中的端口属于 U 在 Γ 中的端口。（3）离开该锥的一条边，其终点位于 Z 之外，因而位于 ∂Z 中；或者终点是 Z 中一个不可达的顶点，而该顶点必定位于 F 中。 □

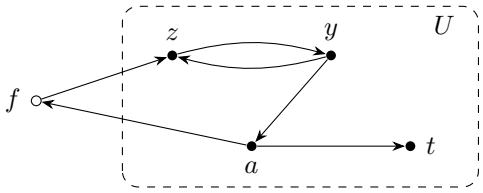
将一个有限端口区域 U 视为带有有限个端口的设备后，一旦端口的真值确定，区域 U 内部的方程便不再涉及外部。如果 $G[U]$ 是核完美的，那么对于<স্টyle id='4'>每一种端口值模式，都可以求解这些方程：删除指向真端口的顶点，因为它们必定为假，然后对剩余部分取一个核。困难在于，解可能不止一个，而两个互相观察的区域所作的选择必须彼此相容。

例4.3（不相容的选择：一个无环示例）。取两条射线 $a_0 \to a_1 \to \cdots$ 和 $b_0 \to b_1 \to \cdots$，再取另外两个顶点 $s \to b_0$ 和 $t \to a_0$。



区域 U_1 由 s 和 a射线组成；它唯一的端口是 b_0。区域 U_2 由 t 和b射线组成；它唯一的端口是 a_0。一条射线有两个核。因此，U_1 可以自由地按规则“a_0 为真，当且仅当 b_0 为假”来回应其端口，而 U_2 则按规则“b_0 为真，当且仅当 a_0 为真”来回应。两条规则合在一起会产生矛盾，尽管该有向图有一个核。U_1 的规则使 a_0 依赖于一个 a_0 无法到达的端口。我们只允许顶点依赖于它能够到达的端口。

例4.4（一个带有环的例子）。令 $f \to z$, $z \to y$, $y \to z$, $y \to a$, $a \to f$ 和 $a \to t$。



所有环都是偶数长度的。令 $U = \{z, y, a, t\}$，其中单个端口为 f。汇点 t 为真，因此无论 f 为何，a 都为假。然后 z 和 y 各自构成一个二环，有两个解。它们都可到达 f。因此 U 可以按规则“z 当且仅当 f 为真”作出判断。但 f 处的方程表明，f 当且仅当 z 为假。可达性不再能排除循环依赖，因为 f 和 z 位于同一个环上。

这条规则的问题在于它的方向。顶点 z 沿环绕行时，与 f 相距奇数步。让 f 为真，理应会使 z 趋于为假。遵循这一点的规则，在适应强连通分量二着色的序关系下是单调的，而单调循环系统有解。

在本节余下部分，G 是一个无奇圈图。赋值上的上述序定义如下。设 S 是一个带有其着色 c 的强连通分量。对于 $v \in S$，若 $c(v) = 0$，则令 $\leq_v$ 为 $\{0, 1\}$ 上的通常序 $0 < 1$；若 $c(v) = 1$，则令其为逆序。对于定义在集合 Y 上的赋值 a，a'，记作

$$a \sqsubseteq_S a' \text{ on } Y \quad \text{if} \quad a(v) \leq_v a'(v) \text{ for } v \in Y \cap S \quad \text{and} \quad a(v) = a'(v) \text{ for } v \in Y \setminus S.$$

向上移动 u 按此顺序，颜色为 0 的顶点变得更真，而颜色为 1 的顶点变得更假。

引理 4.5（符号规则）。设 S 为一个强连通分量，$v \in S$、$Y \subseteq N_G(v)$ 为 v 的一组后继，并且 $a \sqsubseteq_S a'$ 在 Y 上。若对所有 $w \in Y$ 都有 $e(a) = 1$（当 $a(w) = 0$ 时），否则令 $e(a) = 0$。则 $e(a) \leq_v e(a')$。

证明。在 S 之外，Y 的顶点上的两个赋值一致。S 中的 Y 顶点，其颜色与 v 的颜色相反。若 $c(v) = 0$，它们在 a' 下为真，当且仅当它们在 a 下为真，因此 $e(a) \leq e(a')$。若 $c(v) = 1$，它们在 a 下为真，当且仅当它们在 a' 下为真，因此 $e(a) \geq e(a')$，也就是 $e(a) \leq_v e(a')$。 □

解与求解器。设 U 是 G 的一个有限端口区域。可达性和强连通分量始终是指 G。端口模式 是一个映射 $\beta : \partial U \to \{0,1\}$。对于 β，U 的解 是一个映射 $\alpha : U \to \{0,1\}$，使得 $\alpha \cup \beta$ 在 U 的每个顶点处都满足核方程。U 的一个求解器 是一个族 $\sigma = (\sigma_\beta)$，其中每个端口模式对应一个解。对于 $u \in U$，令 $\partial U(u)$ 表示 u 可达的端口集合。该求解器

- 因果的 当且仅当 $\sigma_\beta(u)$ 仅依赖于 $\beta|\partial U(u)$；
- 单调的 当 fo 对于每个强连通分量 S G：$\beta \sqsubseteq_S \beta'$ 在 ∂U 上蕴含 $\sigma_\beta \sqsubseteq_S \sigma_{\beta'}$ 在 $U \cap$ 上 S.

如果一个求解器具有因果性且是单调的，则称其为良好 求解器。在无环有向图中，强连通分量都是单个顶点，因此每个求解器都是单调的。

引理 1.3 的证明分为三个步骤：核完美区域具有良好求解器；良好求解器在加入另一个核完美区域后仍然成立；以及以这种方式获得的求解器链具有极限。

引理 *4.6*（分层求解）。设 $W \subseteq V(G)$ 诱导出一个核完美有向图，且 $X \subseteq V(G) \setminus W$ 是有限的。对于 $w \in W$，令 $X(w)$ 为 X 中可由 w 到达的顶点集合。假设对于每个 $w \in W$，给定一个函数 $g_w : \{0,1\}^X \to \{0,1\}$，使得 $g_w(\gamma)$ 仅依赖于 $\gamma|X(w)$。那么，对于每个 $\gamma \in \{0,1\}^X$，都可以选择一个映射 $\omega_\gamma : W \to \{0,1\}$，使得对于所有 $w \in W$

1. $\omega_\gamma(w) = 1$ 当且仅当 $g_w(\gamma) = 1$ 且 $\omega_\gamma(z) = 0$ 对所有 $z \in N_{G[W]}(w)$</style>；
2. $\omega_\gamma(w)$ 仅依赖于 $\gamma|X(w)$</style>；
3. 对每个强连通分量 S（属于 G）：如果 $\gamma \sqsubseteq_S \gamma'$ 在 X 上蕴含 $g_w(\gamma) \leq_w g_w(\gamma')$ </style>对所有 $w \in W \cap S$均成立，那么 $\gamma \sqsubseteq_S \gamma'$ 在 X 上蕴含 $\omega_\gamma \sqsubseteq_S \omega_{\gamma'}$ 在 $W \cap S$上。

将 $g_w(\gamma) = 0$ 理解为一个否决：在参数值 γ下，W 之外的某个因素迫使 w 为假。

证明。对于 $\Phi \subseteq X$，令 $W_\Phi = \{w \in W : X(w) = \Phi\}$，这是 Φ的层。如果 $w \to z$ 是 W内部的一条边，那么 $X(z) \subseteq X(w)$：一条边要么留在同一层，要么通向集合严格更小的层。层的数量是有限的。

若强连通分量 S 为标记的，则它同时与 X 和 W 相交。设 S 为标记分量，且 $x \in X \cap S$。$W \cap S$ 的所有顶点都能到达相同的顶点，因此 $W \cap S$ 位于同一层 W_Φ 中，且 $x \in \Phi$。若 $w \in W \cap S$ 且 $w \to z$，并且 $z \in W_\Phi$，则 z 能到达 x，因此 $z \in S$：在其所在层内，$W \cap S$ 是后继闭的。若 S' 是另一个与 W_Φ 相交的标记分量，则 S' 能到达 $x \in S$，且对称地，S 能到达 S'，因此 $S' = S$。所以，每一层至多包含一个标记分量的迹 $W \cap S$。

我们通过对 $|\Phi|$ 进行归纳，在层 W_Φ 上定义映射 ω_γ。固定 Φ 上的一个模式 δ，并同时考虑所有满足 $\gamma|\Phi = \delta$ 的 γ；对于 $w \in W_\Phi$，值 $g_w(\gamma)$ 以及 w 在较低层中的后继处的值均由 δ 确定。若 $w \in W_\Phi$ 被否决，则称其为被否决的：若 $g_w(\gamma) = 0$，或 w 在较低层中的某个后继的值为 1。

- 若该层包含某个标记分量的迹 $W \cap S$，令 Q 为其中未被否决的顶点集合，并令 ω_γ 在二分有向图 $G[W \cap S]$ 的典范核 $\kappa(Q)$ 上取值为 1，其中 $B_i = \{w : c(w) = i\}$；在 $W \cap S$ 的其余部分取值为 0。

- 在该层的其余部分中，还要否决那些在 $W \cap S$ 中拥有值为 1 的后继的顶点；令 K 为由未被否决的顶点诱导的子图的核。由于 $G[W]$ 是核完美的，这样的核存在；并令 ω_γ 在 K 上取 1，在其他地方取 0。

所有选择仅依赖于 δ，这就得到（2）。对于（1）：被否决的顶点取值为 0，正如所应如此。未被否决的顶点在其所在层的自身部分之外没有值为 1 的后继，并满足$g_w(\gamma) = 1$；在其所在部分内，核性质表明，当且仅当其在那里所有后继的值均为 0 时，该顶点的值才为 1。

（3）令 $\gamma \sqsubseteq_S \gamma'$ 在 X上。如果 S 未被标记，则或者是 $W \cap S = \varnothing$ 或者是 $\gamma = \gamma'$，因而无需证明任何内容。令 S 被标记，且其迹位于 W_Φ中。 $w \in W \cap S$ 在较低层中的一个后继无法到达 $X \cap S$中的任何顶点，否则它将属于 S。由（2）可知，对于 γ 和 γ'，其值相同。因此，$W \cap S$ 上的否决仅通过 g_w而有所不同，并且根据假设， $Q_\gamma \cap B_0 \subseteq Q_{\gamma'} \cap B_0$ 和 $Q_\gamma \cap B_1 \supseteq Q_{\gamma'} \cap B_1$。引理 2.6(2)给出 $\omega_\gamma \sqsubseteq_S \omega_{\gamma'}$ 在 $W \cap S$上。 □

引理 4.7（核完美区域具有良好求解器）。 每个诱导出核完美有向图的有限端口区域都有一个良好求解器。

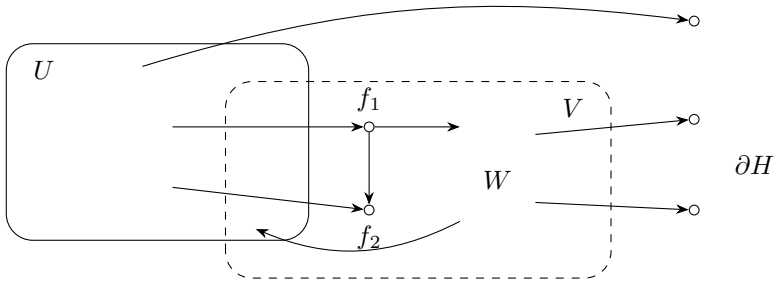
证明。 对 $W = U$、 $X = \partial U$ 和 $g_u(\beta)$ 应用引理 4.6，当且仅当 $\beta(b) = 0$ 对所有端口 $b \in N_G(u)$ 成立时取 $= 1$。这些端口由 u 到达。性质（1）是 u 处关于 $\omega_\beta \cup \beta$ 的核方程，而（2）是因果性。（3）的假设由符号规则成立，将其应用于 u 的后继中属于 Y 的端口集合，因此（3）是单调性。 □

现在设 $U \subseteq H$ 为有限端口区域。 U 的每个端口都位于 H 中，或是 H 的端口。若对于 H 的每个端口模式 β，求解器 τ 扩张 求解器 σ （针对 U），则称前者.....

$$\tau_\beta | U = \sigma_{\beta'} \qquad \text{where } \beta' = (\tau_\beta \cup \beta)|\partial U.$$

扩张具有传递性，只需将定义逐层写出即可看出。

引理 4.8 (添加区域**)**。 设 U 是一个配有良好求解器 σ 的有限端口区域，且 V 是一个诱导出核完美有向图的有限端口区域。那么 $H = U \cup V$ 有一个扩展 σ 的良好求解器。



$H = U \cup V$。 U 的端口是 $F = \{f_1,\ f_2\}$ 内部的顶点以及 H 的一些端口。 V 的其余部分是 W。

证明。 H 是一个有限端口区域。令

$$F = \partial U \cap H, \qquad X = F \cup \partial H, \qquad W = H \setminus (U \cup F).$$

于是 $\partial U \subseteq X$，集合 X 是有限的，而 $W \subseteq V$ 诱导出一个核完美有向图。对于顶点 v，令$X(v)$表示 X 中 v 可通过正长度路径到达的顶点集合。（在引理 4.6 中，$X(w)$允许空路径。两者在 W 上相同，因为 $W \cap X = \emptyset$；但对于 $f \in F$，只有当 f 位于一个环上时，$f \in X(f)$才成立。）

步骤 *1*：假设 X上的值已知。令 $\gamma \in \{0, 1\}^X$。在 U上使用解 $\sigma_{\gamma|\partial U}$。对于$w \in W$，令 $g_w(\gamma) = 1$，当且仅当 w 在 $U \cup X$ 中的所有后继的值均为 0 时成立。每个这样的后继都属于 $X(w)$，或者是一个顶点 $u \in U$，其端口可由 w到达；由于 σ 是因果的，$g_w(\gamma)$ 只依赖于$\gamma|X(w)$，尽管 w在 U中可能有无限多个后继。引理 4.6 给出了 ω_γ在 W上的映射。令 a_γ为 $H \cup \partial H$ 上的赋值，它在 X上取值为 γ，在 U 上取值为 $\sigma_{\gamma|\partial U}$，在 W上取值为 ω_γ。于是：

(a) a_γ 在 U 和 W的每个顶点处都满足核方程；

(b) 对于 $v \in U \cup W$，$a_\gamma(v)$ 只依赖于 $\gamma|X(v)$；

(c) 对于每个强连通分量 S：如果 $\gamma \sqsubseteq_S \gamma'$ on X，那么 $a_\gamma \sqsubseteq_S a_{\gamma'}$ on $(H \cup \partial H) \cap S$。

我们还注意到

(d) 如果 $\gamma \sqsubseteq_S \gamma'$ on X 且 $v \notin S$ 从 S可达，那么 $a_\gamma(v) = a_{\gamma'}(v)$。

事实上，这样的 v 无法到达 S中的任何顶点；应用 (b)，或者如果 $v \in X$，则有 $\gamma(v) = \gamma'(v)$。对于 (c)：在 $X \cap S$ 上这是假设，而在 $U \cap S$ 上，由于 σ 是单调的，因此成立。令 $w \in W \cap S$，并令 Y为其在 $U \cup X$中的后继集合。根据刚才所述内容以及 (d)，$a_\gamma \sqsubseteq_S a_{\gamma'}$ on Y。符号规则给出 $g_w(\gamma) \leq_w g_w(\gamma')$，而引理 4.6(3)给出了关于 $W \cap S$的结论。

步骤 *2*：在 F 处的方程。F 的顶点属于 H，因此它们对应的方程也必须成立。$f \in F$ 的所有后继都位于 $H \cup \partial H$ 中。因此，f 处的方程为

$$\gamma(f) = h_f(\gamma), \qquad h_f(\gamma) = 1 \iff a_\gamma(z) = 0 \text{ for all } z \in N_G(f),$$

并且 $h_f(\gamma)$ 只依赖于 $\gamma|X(f)$：根据 (b)，f 在 $U \cup W$ 中的后继，以及 f 在 X 中的后继，都属于 $X(f)$。将 F 的顶点划分为彼此可达的顶点类，并将这些类列为 $K_1, \ldots, K_m$，使得每个类只能到达自身以及排在它之前的类。给定 H 的一个端口模式 β，将 $\gamma = \beta$ 赋给 ∂H，然后依次确定 γ 在 $K_1, K_2, \ldots$上的值。当轮到 $K = K_j$ 时，γ 在 ∂H 以及更早的类上的值已知，并且对于 $f \in K$，$X(f) \subseteq \partial H \cup K_1 \cup \cdots \cup K_j$。对于 $\delta \in \{0, 1\}^K$，令 γ_δ 为 X 上的赋值，使其取这些已知值，在 K 上取 δ，并在较晚的类上取 0；这些较晚的类无关紧要。我们需要一个 δ，使得 $\Psi(\delta) = \delta$，其中

$$\Psi : \{0,1\}^K \to \{0,1\}^K, \qquad \Psi(\delta)(f) = h_f(\gamma_\delta).$$

令 S 为包含 K 的强连通分量。若 $\delta \sqsubseteq_S \delta'$ 在 K 上，则 $\gamma_\delta \sqsubseteq_S \gamma_{\delta'}$ 在 X 上。由 (c) 和 (d)，赋值 a_{γ_δ} 和 $a_{\gamma_{\delta'}}$ 在任意 $f \in K$ 的后继集合上满足 $\sqsubseteq_S$，而符号规则给出 $\Psi(\delta) \sqsubseteq_S \Psi(\delta')$。因此，$\Psi$ 是有限偏序集 $(\{0,1\}^K, \sqsubseteq_S)$ 上的单调映射，该集合有一个最大元 δ_0。于是 $\delta_0 \sqsupseteq \Psi(\delta_0) \sqsupseteq \Psi^2(\delta_0) \sqsupseteq \cdots$，且该序列最终在 Ψ 的一个不动点 δ^* 处稳定。它是最大的一个：不动点 δ 满足 $\delta = \Psi^n(\delta) \sqsubseteq_S \Psi^n(\delta_0)$。令 $\gamma|K = \delta^*$。

（如果 K 是一个不在任何环上的单个顶点，那么 $f \notin X(f)$，映射 Ψ 为常值映射，而这一步只计算 h_f。（在无环有向图中，全部过程就是如此。））

将所得的 γ^β 记为 γ，并令 $\tau_\beta = a_{\gamma^\beta}|H$。

步骤 *3*：检查 $g.\tau_\beta$ 是 β 的 H 的一个解，这是由 (a) 和步骤 2 得出的。根据构造，它扩展了 σ。

因果的。沿着类列表进行归纳法，γ^β 在 K_j 上的取值仅依赖于 β 在从 K_j可达的 H 端口处的取值：对于 K_j，映射 Ψ 由 γ^β 在 ∂H 上的取值以及更早类上的取值决定，

但仅限于 K_j 可达的部分。根据 (b)，$\tau_\beta(v)$ 仅依赖于 β 在 H的端口处的取值，而 v 可达这些端口。

单调的。令 S 为一个强连通分量，且 $\beta \sqsubseteq_S \beta'$ 在 ∂H上。记 $\gamma = \gamma^\beta$ 和 $\gamma' = \gamma^{\beta'}$。一个无法到达 S 的 F 类，不会到达 S中的任何端口，因此根据因果性，$\gamma = \gamma'$ 在其上。

先假设 $K = F \cap S$ 非空。它是其中一个类，且排在它前面的类都无法到达 S。令 Ψ, Ψ' 为 K 在 β和 β'上的映射，它们由赋值 $\gamma_\delta, \gamma'_\delta$构造而成；令 δ^*, δ'^*为它们的最大不动点。于是 $\gamma_\delta \sqsubseteq_S \gamma'_\delta$ 在 X上，因此如步骤 2 中那样，对于每个 δ，都有 $\Psi(\delta) \sqsubseteq_S \Psi'(\delta)$。因此，$\delta^* = \Psi(\delta^*) \sqsubseteq_S \Psi'(\delta^*)$；反复应用单调映射 Ψ'，对于所有 n，都有 $\delta^* \sqsubseteq_S \Psi'^n(\delta^*) \sqsubseteq_S \Psi'^n(\delta_0)$。所以 $\delta^* \sqsubseteq_S \delta'^*$。

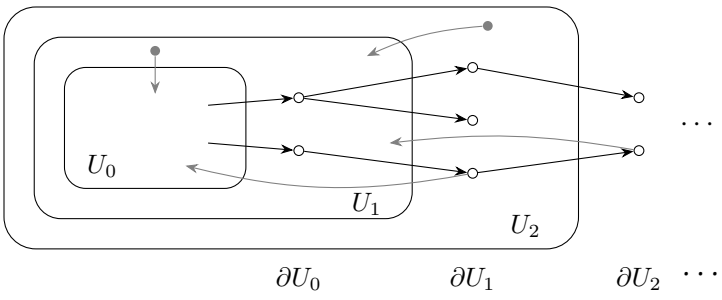
无论哪种情况，令 $\hat{}\gamma$ 为 X 上的赋值：它在 X 中从 S 可达的顶点上与 γ 一致，在其余顶点上与 γ' 一致。从 S 可达的 X 中的顶点属于 ∂H、K，或属于一个无法到达 S 的类。因此，$\hat{}\gamma \sqsubseteq_S \gamma'$ 在 X 上成立，而 (c) 给出 $a_{\hat{\gamma}} \sqsubseteq_S a_{\gamma'}$ 在 $H \cap S$ 上成立。此外，$a_{\hat{\gamma}} = a_\gamma$ 在 $H \cap S$ 上成立：在 $F \cap S$ 上成立，因为 $\hat{}\gamma = \gamma$ 在那里成立；在 $(U \cup W)$ 上，依据 (b)，$\cap S$ 成立，因为 S 中的顶点只能到达从 S 可达的顶点。因此，$\tau_\beta \sqsubseteq_S \tau_{\beta'}$ 在 $H \cap S$ 上成立。 □

现在，我们已经具备了实现本节目标所需的一切。

引理 1.3 (有限端口覆盖)。如果无奇圈图 G 的每个顶点都属于一个有限端口区域，且该区域诱导出一个核完美有向图，那么 G 就是核完美的。

证明。根据引理 4.2(2)，假设对诱导子图也成立。因此，由命题 2.3，只需证明满足该假设的非空无奇圈图 G 具有一个非空半核。我们找到一个非空后继封闭集 D，使得 $G[D]$ 具有一个核；根据引理 2.2(2)，这就足够了。

令 U_0 为包含某个顶点的核完美有限端口区域，并令 σ^0 为它的一个良好求解器（引理 4.7）。给定一个具有良好求解器 σ^n的有限端口区域 U_n，对其有限个端口中的每一个，选取一个包含该端口的核完美有限端口区域，并使用引理 4.8，逐一将这些区域添加到 U_n 中。所得结果是一个具有良好求解器σ^{n+1} 的有限端口区域 $U_{n+1} \supseteq U_n \cup \partial U_n$，且它扩展了 σ^n。令 $D = \bigcup_n U_n$。它是后继封闭的，因为 $N_G(U_n) \subseteq U_{n+1}$。



U_n 的端口位于 U_{n+1}内部。U_{n+1} 的端口状态决定了 U_n的端口状态。返回 U_n （灰色）的边不受限制。

令状态 为有限非空 $P_n = \{0,1\}^{\partial U_n}$的元素。由于 $\partial U_n \subseteq U_{n+1}$，每个状态 $\beta \in P_{n+1}$决定一个状态 $\pi_n(\beta) = \sigma^{n+1}_\beta | \partial U_n \in P_n$。根据柯尼希引理，存在一个状态序列 $\beta_n \in P_n$，使得对所有 n都有 $\pi_n(\beta_{n+1}) = \beta_n$：满足 $\beta_i = \pi_i(\beta_{i+1})$ 的有限序列 $(\beta_0, \ldots, \beta_n)$ 构成一棵具有有限层级的无限树，因为每个 $\beta_n \in P_n$ 都会生成一个这样的序列。由于 σ^{n+1} 扩展了 σ^n，

$$\sigma^{n+1}_{\beta_{n+1}} | U_n = \sigma^n_{\beta'} \quad \text{with} \quad \beta' = \sigma^{n+1}_{\beta_{n+1}} | \partial U_n = \pi_n(\beta_{n+1}) = \beta_n.$$

因此，这些解在重叠部分上一致，其并集为 $\kappa \in \{0,1\}^D$，且有 $\kappa | \partial U_n = \beta_n$。所以在 $U_n \cup \partial U_n$ 上，赋值 κ 是 $\sigma^n_{\beta_n} \cup \beta_n$，它满足 U_n每个顶点处的核方程。D 的每个顶点都属于某个 U_n。因此，κ确定了 $G[D]$的一个核。 □

5 梯形射线：悖论沿射线传播

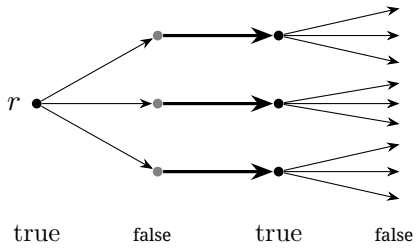
5.1 碰撞

如果 Γ 包含从 u 到 v 的两种奇偶性的路径，就记作 $u \prec v$，并称其为碰撞。在无奇圈图G中，根据奇偶原理，两种奇偶性的游走就足够了，因此

$$u \text{ reaches } v, \quad v \prec w, \quad w \text{ reaches } x \quad \Longrightarrow \quad u \prec x. \tag{$*$}$$

在无奇圈图中，若 $u \prec v$ 那么由引理 2.1(3)可知，u 和 v 属于不同的强连通分量；特别地，$u \neq v$。

引理 5.1 (碰撞)。设 C 是一个不含奇圈的核心，r 是 C的一个顶点。则 C 中存在一个顶点z，使得 $r \prec z$ 属于 C。



粗体：所选的
真后继 $d(v)$

证明。尝试构造一个包含 r的半核。声明 r 为真。每个真顶点的后继都必须为假；这里没有选择。每个假顶点都需要一个真后继；这里存在选择，我们一劳永逸地作出如下选择：由于 C 没有汇点，为每个顶点 v选取一个后继 $d(v)$。如果游走 $r = x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_\ell$ 交替，则对所有奇数 t都有 $x_{t+1} = d(x_t)$。令 E 为偶数长度交替游走的最后顶点集合，即该尝试使其为真的顶点；令 O 为奇数长度交替游走的最后顶点集合，即该尝试使其为假的顶点。偶数交替游走可以通过任意边延长，而奇数交替游走可以通过所选的边延长，因此

$$N_C(E) \subseteq O, \qquad d(O) \subseteq E.$$

如果 E 和 O 不相交，那么根据第一个包含关系，E 将是独立的；根据第二个包含关系，E 的每个后继都将在 E中拥有一个后继。因此，E 将是一个包含 r的半核。核心中不存在这样的半核。因此，某个 z 可由奇偶性不同的游走从 r 到达。 □

5.2 本质顶点与梯形射线

定义 5.2. 若 v 属于 Γ，且不存在包含 v 的 Γ 的有限端口区域能诱导出核完美有向图，则称 v 在 Γ 中是本质的。用 E_Γ 表示本质顶点的集合。

在 Yablo 图中，每个顶点都是本质的：围绕 v_i 的有限端口区域包含了除有限多个 v_j 之外的所有顶点。若在 Yablo 图中添加一个顶点 s，并添加唯一一条边 $s \to v_0$，则 s 不是本质的，因为 $\{s\}$ 是一个核完美的有限端口区域。悖论“位于” v_i，而不在 s。

引理 5.3 （本质顶点）。 *1.* 若 H 是 Γ 的诱导子图，则 $E_H \subseteq E_\Gamma$。

2. 当且仅当 v 处的任意锥都不诱导出核完美有向图时，顶点 v 才是本质的。具体而言：如果 v 是本质的，Z 是包含 v的有限端口区域，且 $F \not\ni v$ 是有限的，那么在 $\Gamma[Z] - F$ 中从 v 可达的顶点集合所诱导出的有向图不是核完美的。

3. 在一个不含奇圈的核心 C 中，每个顶点都能到达 C的一个本质顶点 .

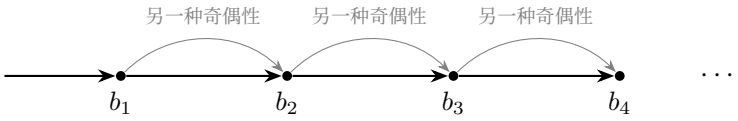
证明。 (1) 如果 $v \in V$（H）包含在 Γ 的一个有限端口区域 U 中，且 $\Gamma[U]$ 是核完美的，那么 $U \cap V$（H）也是 H 的一个这样的区域。

(2) 根据引理4.2(3)，锥是有限端口区域。反过来，如果 $U \ni v$ 是核完美的有限端口区域，那么在 $\Gamma - \partial U$ 中从 v 可达的顶点所形成的锥包含于 U 中。

(3) 设 D 是 C 中某个顶点的未来集。根据推论 2.4， $C[D]$ 不是核完美的。根据引理 1.3，某个 $w \in D$ 是 $C[D]$ 中本质的；根据 (1)，它在 C 中也是本质的。 □

核完美有向图没有本质顶点。根据 (3) 和推论 2.4，一个非核完美的无奇圈图具有本质顶点。本节余下部分将证明，它具有一条特殊的梯子射线，其中有无穷多个本质顶点。

定义5.4。 Γ 的一条梯子射线 是指一条包含 Γ的本质顶点 b_1、 b_2、 b_3、.....且按此顺序排列的射线，并且 $b_i \prec b_j$ ， 只要 $i < j$。这些 b_i 是梯子射线的检查点 。



一条梯子射线（粗线）。每个检查点都是本质的，并且也可通过一条奇偶性相反的路径到达下一个检查点；该路径不必与这条射线不相交。

引理 5.5。 *1.* 梯子射线的尾部仍是一条梯子射线，并且属于同一个端。

2. 拼接。 在一个无奇圈图中，设一条射线 R依次经过顶点 p_0、 q_0、 p_1、 q_1、.....，其中每个 p_n 都是本质的，且 $p_n \prec q_n$。那么 R 是一条以 p_n为检查点的梯子射线。

3. 在无奇圈图中，梯子射线的任何尾部都不包含在单个强连通分量中。

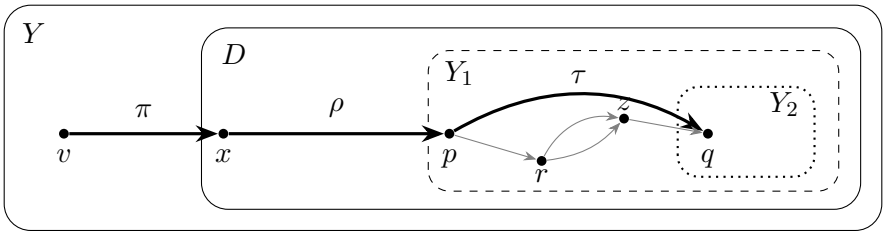
证明。 (1) 去掉尾部之外的检查点。(2) 对于 $n < m$ ， 顶点 q_n 沿着 R可达 p_m ， 因此根据（$*$），$p_n \prec p_m$ 。 (3) 检查点 $b_i \prec b_j$ 位于不同的强连通分量中。 □

在无环有向图中，可以通过从一次碰撞走到下一次碰撞来找到一条梯子射线。在有环的情况下，游走可能会返回先前到过的地方。下一个引理将迈出一步，避开任何给定的顶点集。

引理 5.6 (梯子步)。 设 H 是无奇圈图 G 的一个诱导子图， $v \in V(H)$， $A \subseteq V(H) \setminus \{v\}$，并设在 $H - A$ 中从 v 可达的顶点集合 Y 所诱导的有向图不是核完美的。那么， $H[Y]$ 中存在一条从 v 到顶点 q 的路径 P ，该路径经过顶点 p ， 且 p 位于 q 之前，使得

1. p 在 G 和 $p \prec q$中是本质的；

2. 从 q 在 $H - (A \cup V(P) \setminus \{q\})$ 中可达的顶点集合所诱导的有向图不是核完美的。



一个梯子步。路径 $P = \pi\rho\tau$ 是粗线。灰色： p 在两种奇偶性下都可达 r，而 r 又可达 z；并且 z 可达 q；因此 $p \prec q$。

证明。 $H[Y]$ 包含一个诱导核 C。取一条 $H[Y]$ 中的路径 π，从 v 通向 C 中的一个顶点，并在它位于 C中的第一个顶点 x 处停止。令 D 为 C中 x 的未来集；它诱导出一个核心，并且 π 与 D 仅在x处相交。由引理 5.3(3)，存在一个在 $C[D]$ 中本质的顶点 p，以及一条 D 中的路径 ρ，从 x 通向 p。由引理 5.3(1)， p 在 G中是本质的。

令 Y_1为 $C[D]$ – 中从 p可达的顶点集合（$V(\rho) \setminus \{p\}$）。它是 $C[D]$中以本质顶点 p 为顶点的一个锥，因此包含一个诱导核 C_1。取 $r \in C_1$。由引理 5.1，存在 $z \in C_1$使得 $r \prec z$；由引理 5.3(3)， z 可达一个在 C_1中本质的顶点 q。由于 p 可达 r，我们由（$*$）得到$p \prec q$。令 τ 为 Y_1 中从 p 到 q的一条路径，并且 $P = \pi\rho\tau$。这是一条路径： ρ 和 τ 位于 D中，而 π 与其仅在 x处相交； τ 位于 Y_1中，而 ρ与其仅在 p处相交。

最后，令 Y_2 为从 q 在 $C_1 - (V(\tau) \setminus \{q\})$ 中可达的顶点集合。它是 C_1 的本质顶点 q 处的一个锥，因此它诱导出的有向图不是核完美的。它避开了 A 以及 P 中除 q 之外的所有顶点，因为 $C_1 \subseteq Y_1 \subseteq D \subseteq Y$。因此，它包含于 (2) 中的集合，而该集合也不是核完美的。

□

命题 5.7。 设 G 是一个无奇圈图，且 $Z \subseteq V(G)$。如果 $G[Z]$ 不是核完美的，则 Z 包含 G 的某条梯子射线。

证明。设 $H = G[Z]$，令 q_{-1} 为 H 的一个诱导核中的顶点，并且 $A_0 = \varnothing$。 q_{-1} 在 H 中的未来集包含一个核心，因此引理 5.6 适用于 q_{-1} 和 A_0。它给出了从 q_{-1} 出发、经过 p_0、到达q_0 的一条路径 P_0，其结论 (2) 正是关于 q_0 和 $A_1 = V(P_0) \setminus \{q_0\}$ 的引理假设。继续处理 $A_{n+1} = A_n \cup (V(P_n) \setminus \{q_n\})$，我们得到从 q_{n-1} 出发、经过 p_n、到达 q_n 的路径 P_n，其中 P_n 避开A_n，也就是说，避开更早路径中的所有顶点（其第一个顶点除外）。将它们连接起来，得到 Z 中经过 p_0， q_0， p_1， q_1，..... 的一条射线，并且根据引理 5.5(2)，这是一条梯子射线。

□

核完美有向图没有本质顶点，因此也没有梯子射线。因此

命题 5.8。 无奇圈图是核完美的，当且仅当它没有梯子射线。

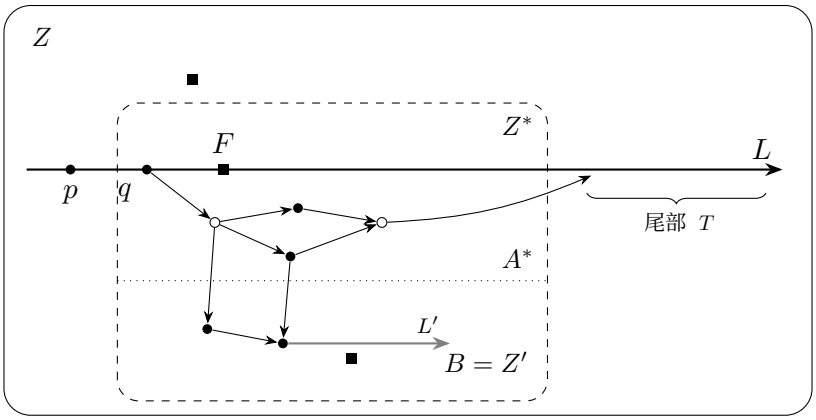
定义 5.9。 梯子端 是包含梯子射线的端。若某个端包含一条位于 Z中的梯子射线，则称其存在于 集合 Z 中。

图中出现了两个奇偶条件，应将它们区分开来。在梯子射线上，每个检查点都能通过奇偶性均不同的路径到达其后的每个检查点，但这些路径可能全部经过相同的顶点。混合扇要求从一个顶点出发，存在无穷多条属于两种类型且不相交的 路径。奇偶安全性表示：第一种奇偶冲突是每个悖论都具有的特征，而它不会无穷多次地伴随着第二种冲突。

6 闸门与对角梳

6.1 通过一个闸门

核心图景如下：一条射线 L 位于区域 Z中，而一个本质顶点 q 并不奇偶支配它。因此存在一个有限闸门 F，使得所有从 q 到 L 的尾部 T 且避开 F的路径都具有相同的类型。令 Z^* 表示 q 在 Z 中不经过该闸门所能到达的部分。它分为两部分：仍能不经过该闸门到达 T 的顶点，以及不能到达的顶点。



A^* 部分仍可在不经过闸门的情况下从 Z^* 到达尾部 T。所有经由 A 从 q 到 T 的路径都具有相同的类型，因此根据到 q的距离的奇偶性， A^* 被分成两种颜色。 B 部分无法到达 T。这个悖论以及一条新的梯子射线 L'都在 B中。

引理 6.1（闸门）。 设 Z 是无奇圈图 G的一个有限端口区域， L 是一条射线， $q \in Z$ 是 G 中一个不奇偶支配 L的本质顶点，且 $A \not\ni q$ 是一个有限集。那么存在 G 的一个有限端口区域 $Z' \subseteq Z \setminus A$ ，使得

1. Z' 中的每个顶点都可通过 $G[Z] - A$中的一条路径从 q 到达；
2. 位于 Z' 中的任何射线都不馈送 L；
3. G 中的某条梯子射线位于 Z'中。

证明。 根据奇偶割判据（引理 3.2），存在一个有限集 $F \not\ni q$，其中有 $A \subseteq F$，以及 L 的一个尾部 T，其中有 $q \notin T$，使得 $G - F$ 中从 q 到 T 的所有正长度路径相对于 L都具有相同的类型。根据奇偶原理， $G - F$中从 q到 T的所有游走也具有相同的性质：这样的游走包含一条具有相同端点和相同奇偶性的路径。

令 Z^* 为 $G[Z] - F$ 中从 q 可达的顶点所构成的锥。由引理 5.3(2)， $G[Z^*]$ 不是核完美的。令

$$A^* = \{x \in Z^* : \text{ some path in } G - F \text{ leads from } x \text{ to } T\}, \qquad B = Z^* \setminus A^*.$$

A^*是二部的。令 $x \in A^*$，并设 P、$P\prime$是 $G[Z] - F$ 中从 q 到 x 的游走。将这两条游走都沿着 $G - F$ 中从 x 到 T 中某个顶点的同一条路径延长。所得两条游走具有相同的类型和相同的末顶点，因此奇偶性也相同； P 和 P' 也如此。将 x 染成这种共同的奇偶性。若 $x \to y$ 是一条满足 x、$y \in A^*$ 的边，那么从 q 到 x 的游走接上这条边后，便是从 q 到 y 的游走，因此 x 和 y 的颜色不同。由此， $G[A^*]$ 是二部的，并且根据引理 2.6 是核完美的。

B 是闭的。设 $x \to y$ 是一条满足 $x \in B$ 和 $y \in Z^*$ 的边。若 y 在 $G - F$ 中有一条通往 T 的路径，那么 x 也有。因此， B 在 $G[Z^*]$ 中是后继闭的。

悖论在 B。如果 $G[B]$ 是核完美的，那么根据引理 2.5， $G[Z^*]$ 也将是核完美的。因此， $G[B]$ 不是核完美的。令 $Z' = B$。离开 B 的一条边也会离开 Z^*，所以 $\partial B \subseteq \partial Z^*$ 是有限的。性质（1）对整个 Z^* 都成立，而性质（3）由命题 5.7 得出。对于性质（2），假设一条位于 Z' 中的射线 S 馈送 L。根据引理 3.5（1），在 $G - F$ 中存在一条路径，从 S 的一个顶点通往 T。该顶点属于 A^*，而不属于 B。 □

每个假设各使用一次：不存在混合扇会产生闸门，并使 A^*成为二部的； q 的本质性使悖论留在 Z^*内，因而也留在 B内；而覆盖引理通过

命题 5.7 将该悖论转化为一条新的梯子射线。如果 q 完全不支配 L，则可以使 A^* 为空；这就是安全有向图的闸门。设置 A 是为了使后续构造避开已经使用过的顶点。

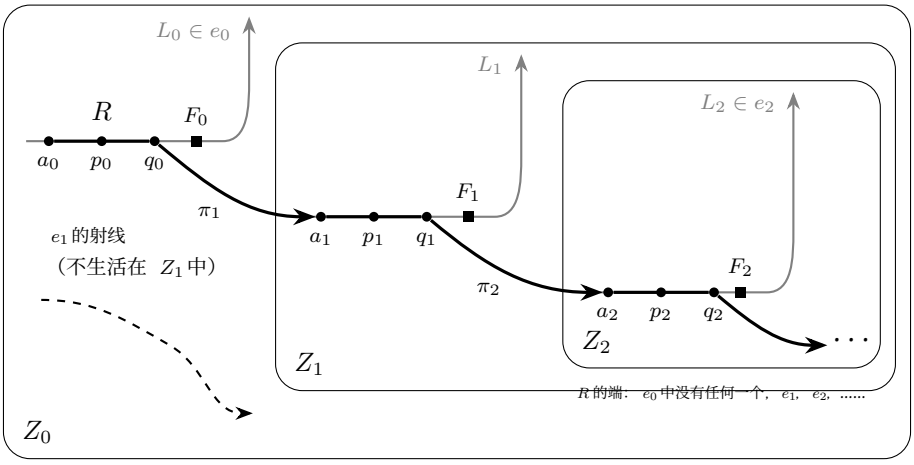
6.2 对角梳与主要结果

根据下面的引理，具有某个梯子端的奇偶安全 Γ 有不可数多个。

引理 6.2（对角梳）。若 Γ 是奇偶安全的，Z 是 Γ 的一个有限端口区域，其中包含某条梯子射线，并且 e_0、e_1、e_2、.....是 Γ 的一列（不一定互不相同的）梯子端，那么存在 Γ 的有限端口区域 $Z = Z_0 \supseteq Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq$、..... 以及一条位于 Z 中的梯子射线 R，使得对于每个 i

1. R 有一段尾部位于 Z_i 中；*2.* 位于 Z_{i+1} 中的任何梯子射线都不属于 e_i。

图示与第 1.3 节中的相同，下面给出更详细的说明。射线 R 是梳的脊，而射线 L_i 是它的齿。



在阶段 i，如果 e_i 生活在 Z_i 中，则齿 L_i 是 e_i 的一条射线（这里是 e_0 和 e_2）；否则，L_i 是位于 Z_i 中的任意一条梯子射线（这里是 e_1，其射线位于 Z_1 外）。脊 R（粗线）仅沿着 L_i 从 a_i 延伸到 q_i；在闸门 F_i 后面，L_i 的尾部转向一旁，并停留在 Z_{i+1} 外。位于 Z_{i+1} 中的梯子射线都不属于 e_i：在第一种情况下，它会延伸到 L_i，而闸门排除了这种可能；在第二种情况下，e_i 甚至不生活在 $Z_i \supseteq Z_{i+1}$ 中。R 的一条尾部位于每个 Z_{i+1} 中，因此 R 的端不是 e_i 中的任何一个。

证明。由于 Γ 是奇偶安全的，它没有奇圈，因此上文针对无奇圈图所陈述的结果适用于它。

（1）。我们将 R 构造为路径 $R_0 \subseteq R_1 \subseteq \cdots$ 的递增并，其中 R_i 在一个顶点 q_i 处结束。令 $Z_0 = Z$。假设已给定 Z_i，且其中有一条梯子射线；并且，如果 $i > 0$，已给定 R_{i-1}，Z_i 不包含 R_{i-1} 的顶点（或许 q_{i-1} 除外），且 Z_i 的每个顶点都可由 q_{i-1} 通过 $\Gamma[Z_{i-1}]$ 中的一条路径到达，该路径仅在 q_{i-1} 处与 R_{i-1} 相交。

- 齿。如果 e_i 位于 Z_i中，令 L_i 为位于 Z_i中的 e_i 的一条梯子射线。否则，令 L_i 为位于 Z_i中的任意一条梯子射线。
- 入口。</style>如果 $i = 0$，令 a_0 为 L_0 的第一个顶点（p_0 和 q_0 按下一步中的方式确定）。如果 $i > 0$ 且 q_{i-1} 位于 L_i上，令 $a_i = q_{i-1}$。否则，取一条如上所述从 q_{i-1}到 L_i中某个顶点的路径 π_i，在它第一个位于 L_i上的顶点 a_i 处截断，并将其接到 R_{i-1}上。

- 沿着齿。 </style} L_i 在 a_i之后有无穷多个检查点，它们全都是本质的；根据奇偶安全性，其中只有有限多个奇偶支配 L_i。选取 a_i 之后相邻的两个检查点 $p_i \prec q_i$，使得 q_i 不奇偶支配 L_i。将 L_i 从 a_i 到 q_i的线段接上。所得结果为 R_i。它是一条路径：该线段位于 Z_i中，而 Z_i除 q_{i-1}外不与 R_{i-1} 相交，且它与 π_i 仅在 a_i处相交。

- 闸门。 将引理 6.1 应用于 Z_i、 L_i、 q_i 和 $A = V(R_i) \setminus \{q_i\}$。由此得到 $Z_{i+1} \subseteq Z_i$，它满足上述为下一步所作的假设。
- 脊。 $R = \bigcup_i R_i$是一条射线，因为 R_i适当地延伸了 R_{i-1}。它依次经过 p_0、 q_0、 p_1、 q_1、 ... ...，这些 p_i 是本质的，且 $p_i \prec q_i$；因此，根据引理 5.5(2)， R 是一条梯子射线。它位于 Z_0 中。从 a_{i+1} 开始， R 由 L_j 的线段和 $j > i$ 组成，这些线段位于 $Z_j \subseteq Z_{i+1}$ 中；还由满足 $j > i + 1$ 的路径 π_j 组成，这些路径位于 $Z_{j-1} \subseteq Z_{i+1}$ 中。这就是 (1)。

(2). 假设一条位于 Z_{i+1} 中的梯子射线 S 属于 e_i。由于 $Z_{i+1} \subseteq Z_i$，端 e_i 位于 Z_i 中，因此 L_i 是在 e_i 中选取的，而 S 馈送 L_i。这与引理 6.1(2) 矛盾。 □

这就得到了以下定理。

定理 6.3. 设 Γ 是一个非核完美的奇偶安全有向图， Z 是 Γ 的一个包含本质顶点的有限端口区域。那么，有不可数多个梯子端存在于 Z 中。

证明。 由于 Γ 是奇偶安全的，它没有奇圈。 $\Gamma[Z]$ 不是核完美的，因此根据命题 5.7，一条梯子射线位于 Z 中，其端存在于 Z 中。假设存在于 Z 中的梯子端可以列为 $e_0, e_1, e_2, \ldots$，若只有有限多个，则允许重复。取引理 6.2 中的区域 Z_i 和梯子射线 R。由于 R 位于 Z 中，它的端是一个存在于 Z 中的梯子端，因此对某个 i，它就是 e_i。R 的尾部位于 Z_{i+1} 中。它是一条梯子射线，并根据引理 5.5(1) 属于 R 的端。因此，一条位于 Z_{i+1} 中的梯子射线属于 e_i，这与引理 6.2(2) 矛盾。

对于最后一句： Γ 是一个非奇圈图，但并非核完美，因此根据引理 5.3(3)和推论 2.4，它有一个本质顶点；而 V（Γ）是包含该顶点的有限端口区域。 □

现在很容易就能得出主要结果。

定理 1.2。 至多有可数多个端的奇偶安全有向图是核完美的。特别地，至多有可数多个端的安全有向图是核完美的。

证明。 若一个奇偶安全 Γ有可数多个端，则根据定理 6.3，它没有本质顶点；因此根据引理 5.3，它没有核心；进而根据推论 2.4，它是核完美的。安全有向图都是奇偶安全的。

□

7 Leandefinitions 和定理 1.2

```
variable {V : Type*} (E : V → V → Prop)
def IsCycle (v : V) (p : List V) : Prop :=
p ≠ [] ∧ List.IsChain E (v :: p) ∧
p.getLast? = some v ∧ p.Nodupdef NoOddCycle : Prop :=
∀ (v : V) (p : List V), IsCycle E v p → Even p.length
def IsKernelOf (X K : Set V) : Prop :=K ⊆ X ∧
(∀ u ∈ K, ∀ w ∈ K, ¬ E u w) ∧
```

```
    (∀ v ∈ X, v ∉ K → ∃ w ∈ K, E v w)def KernelPerfect :  Prop :=∀ X : Set V,  ∃ K : Set V,
 IsKernelOf E X Kdef IsRay (r :  Nat → V) : Prop :=Function.Injective r ∧∀ n :  Nat,
 E (r n) (r (n + 1))
def IsFan (v :  V) (R : Nat → V) (P : Nat → List V) (k :  Nat → Nat) :  Prop :=
(∀ n :  Nat, P n ≠ [] ∧List.IsChain E (v ::  P n) ∧(v ::  P n).Nodup ∧
(P n).getLast?  = some (R (k n))) ∧(∀ m n :  Nat, m ≠ n → List.Disjoint (P m) (P n))
def ParityDominates (v :  V) (R : Nat → V) : Prop :=∃ (P : Nat → List V) (k :  Nat → Nat),
 IsFan E v R P k ∧{n :  Nat | Even ((P n).length + k n)}.Infinite ∧{
n :  Nat | Odd ((P n).length + k n)}.Infinitedef IsParitySafe :  Prop :=
NoOddCycle E ∧ ∀ R : Nat → V,  IsRay E R → ¬ {n :  Nat | ParityDominates E (R n) R}.Infinite
def ReachAvoiding (F : Finset V) (u w :  V) : Prop :=
u ∉ F ∧ ReflTransGen (fun a b => E a b ∧ b ∉ F) u wdef Feeds (R R' : Nat → V) : Prop :=
∀ F : Finset V,  ∃ m n :  Nat,  ReachAvoiding E F (R m) (R' n)
def endOf (R : Nat → V) : Set (Nat → V) := {R' | IsRay E R' ∧ Feeds E R R' ∧ Feeds E R' R}
def Ends :  Set (Set (Nat → V)) := {S | ∃ R : Nat → V,  IsRay E R ∧ S = endOf E R}
/- **Theorem 1.2.** A parity-safe digraph with countably many ends is kernel-perfect.  -/
theorem kernelPerfect_of_paritySafe_of_countable_ends
(hS : IsParitySafe E) (hEnds :  (Ends E).Countable) :  KernelPerfect E := by ...
```

参考文献

[1] R. Cook, 《悖论模式》, 《符号逻辑杂志》, 69(3), 2004年, 第 767–774 页。

[2] V. Neumann-Lara, 有向图的半核, 技术报告, 数学研究所年刊 II, 墨西哥国立自治大学, 1971年。[3] M. Richardson, 非自反关系的解, 《数学年刊》58, 1953年, 573–590。[4] M. Walicki, 有限多个端的有向图的核, 《离散数学》, 342, 2019年, 第 473-486 页。[5] M. Walicki, 命题算子逻辑中的悖论结构, 《哲学逻辑杂志》, 第 53 卷, 第 6 期, 2024年, 第 1579–1639 页。

[6] J. Zuther, 有向图中的端, 《离散数学》184（1998年）, 225–244。