一台机器，三幅图示：对四年级至十年级函数概念教学进程的教学法分析

Vincent Tariel-Adam独立研究者；CommeUnJeu（https://commeunjeu.org），法国
vincent.tariel@alumni.polytechnique.org

2026年11月

arXiv:2611.29788v1 [math.HO] 22 Nov 2026

摘要

函数概念可以通过集合之间的对应、单值关系，或将输入转换为输出的过程来引入。本文介绍了一个函数源进阶体系的设计论证与批判性分析（四至十年级，名义年龄为9至16岁，其中包含两个关于量之间关系的年级），法国课程和国际文凭组织的章节均据此编写，并发表于 https://commeunjeu.org。全文首先提出并始终保留一个图式：函数是一台机器，它接受一个输入，应用一条规则，并恰好给出一个输出。其图示会随年龄变化（先是机器人，然后是方框，之后是箭头 f： $x \mapsto f(x)$），每次变化只展示一次，并将两幅图并列呈现；15岁以后，方框只在课程中再次出现，用于解释复合与反函数。研究指出较为困难的性质（输出的唯一性、常函数、无公式函数、一个函数对应两条规则、原像）从四年级起就在机器上加以呈现；“$relation$”一词保留用于表示两个量之间的联系，并在此处教授协变；有序对集合则以图像的形式再次出现。这些选择与作为认知根源的函数机器及其作者自身的警示、过程—对象理论、关于概念意象和协变的研究，以及法国和国际文凭组织的课程相联系。对注明日期的源文件进行模块级审查后发现，在七至十年级的177个练习模块中，只有2个出现了机器，没有任何练习要求学生绘制机器；公开章节则从关系开始。审查后所作的修订及其前后数量均已记录。本文未报告实证评估，但提出了开展此类评估的假设。

关键词： 函数概念；函数机器；对应关系；协变；具体性消退；数学教育学；课程设计。

MSC 2020年： 97I20（主要）；97D40、97D70、97U20。

1 引言

函数是学校数学从数的计算过渡到研究依赖关系所凭借的概念，也是其历史对教学影响最为深远的概念之一。其
函数的定义经历了这样的变化：从由一个变量和常数组成的量，转变为解析表达式，继而转变为一个量对另一个量的依赖关系；在 Dirichlet 之后，又转变为任意对应法则，最终成为不涉及任何计算的有序对集合（Kleiner，1989年；Sfard，1991；Thompson 和 Carlson，2017年）。20 世纪后半叶的学校定义沿用了最后几个阶段：两个集合，以及一条将第一个集合中的每个元素分别对应到第二个集合中恰好一个元素的规则；有时，这一定义是从作为序对集合的关系出发得到的（Markovits 等人，1986年；Bell 和 Janvier，1981）。关于学习者的研究记录了至今仍然存在的困难：学习者背诵出的定义与其概念意象相矛盾（Vinner

和 Dreyfus，1989年）；将函数等同于公式，拒绝接受常数函数和分段函数（Markovits 等人，1986年；Oehrtman 等人，2008年）；以及准教师无法说明“单一输出”的要求从何而来（Even，1993年）。

课程作者面对着一个该概念特有的设计问题。所选择的第一种表征必须体现输出的唯一性和规则的任意性；它必须能够引出表格、公式和图像，而不被其中任何一种所取代；同时也不能掩盖两个量可以共同变化这一事实。有两种切入方式可供选择。第一种从关系出发，即一个序对集合，并将函数定义为这样一种关系：每个第一元素都有一个对应元素。第二种从一个过程出发：机器接收一个输入，应用其规则，并给出一个输出。第二种切入方式已被同样指出其局限性的作者视为该概念的“认知根源”（Tall 等人，2000年）。

本文记录并分析了对这一问题的一种答案：一套以双语（英语和法语）课程及练习集编写的进阶序列，涵盖七个年级，其中两个年级涉及量之间的关系。本文的研究问题是：当一个图式将某个概念从*9*岁延续到*16*岁时，这个概念会变成什么样，而该图式又在哪些地方不足？首先呈现并始终保留一种图式：函数是一台机器，它接收一个输入，应用一条规则，并恰好给出一个输出。这一设计建立在五项原则之上：

(i) 在每个年级，机器就是定义；随着年级升高，后续定义会对其进行改写，其图示也会逐渐简化（第4节）；(ii) 从四年级起，概念的性质都通过机器提出，并以定义作为论据（第5节）；(iii) 保留“关系 ”一词，用于表示两个量之间的联系；在此处教授协变，并通过“用……表示”将二者联系起来（第6节）；(iv) 有序对集合并非出发点：它以图像的形式回归，即机器给出的点的集合（第7节）；(v) 在机器上读取 $f(x)$：即机器向输入 x 给出的输出 f （第8节）。

体裁与范围。 本文是一篇设计论证和课程分析，是同一作者关于分数进阶序列研究的配套论文（Tariel-Adam，2026年），二者采用相同的方法。与假设性学习轨迹（Simon，1995年；Clements和Sarama，2004年）一样，该进阶序列体现了学习目标、活动顺序以及关于学习的假设；本文将这些内容明确呈现，并将其与相关文献及实施这些内容的文件进行对照。本文的方法借鉴了教学工程中的先验分析 （Artigue，1990年、1992年），既关注总体层面的选择（表征、意义的顺序和图示），又在第10节关注三个任务及其教学变量。文中未报告课堂实验；关于学习者的陈述均取自所引用的文献，或作为设计假设提出。单独来看，这些原则没有一项是新的：函数机器是经典做法，其作者早已建议采用通过程序而非公式定义的机器（Tall 等人，2000年）。本文的贡献在于：将一个图式贯穿七个年级和三幅图；明确赋予关系和序对集合以相应位置；辨识出机器不足以完成任务的节点；并将所陈述的设计与相关材料进行对照，而这一过程促成了本文写作前完成的修订（第12.3节）。各函数族（线性、仿射、二次、指数）都有各自的进阶序列，不属于本文范围。

年级约定。 该进阶序列按源级别组织，标记为四年级至十年级，名义上对应9至16岁；另有两个关系层级，标记为六年级和七年级。文中还引用了十一年级和高等教育第一年的定义，以说明该定义并未改变。这是一个源进阶序列，而非国家课程：课程章节通过链接由此编排而成（第2节）。法语课程章节包括

（第2节）。在法语课程章节中，四年级凭借其测量值曲线，服务于$CM1$ 和$CM2$ 的数据章节（9至11岁）；四至七年级及关系层级服务于五年级 （12至13岁）；关系层级和一个方程层级服务于九年级；七至九年级服务于九年级；七至十年级服务于十年级。在国际文凭组织课程章节中，四年级服务于PYP 4，四、五年级服务于PYP 5，关系层级服务于MYP 1和MYP 2，七至十一年级服务于MYP 5（表2）。除非另有说明，“Grade N”均指该进阶序列中的级别。

2 语料库与方法

语料库。 语料库由函数进阶序列的源文件构成：4至10年级的每个年级各有一份课程和一个练习集，另有两个关系层级（6年级和7年级）的相关文件；其中还纳入了一份用方程层级的标记语言编写的计算程序定义，因为进阶序列将其描绘为链式机器。这些文件采用一种标记语言编写，其中每个定义、方法、例子、练习和答案都是带有类型和固定标识符的独立区块；课程章节中的区块或更高层级的区块可以链接 到其他位置编写的区块，并直接显示该区块而不复制。区块通过其标识符引用，例如30614。本文分析两个有日期标记的版本：2026年11月2日修订前的版本（审计所依据的版本，提交 `596ec5ecec`），以及同日修订后的版本（提交 `e8927be52e`）；表1列出了它们的规模。

陈述与计数。 与配套论文一样，本文围绕语料库作出三类陈述：存在性 （某个给定内容的区块存在于某个给定年级）、顺序 （一个区块排在另一个区块之前）和计数，对标记语言进行穷尽统计。计数由脚本针对每个区块的英语部分完成，并通过阅读核查；法语部分是对应的译文。当区块文本中包含某个标记时，便为该区块添加 该标记：机器（这个词，或机器的图像）、表格、绘制的图像、公式 $f(x) = \ldots$、符号表示 $f(\ldots)$、计算程序、关系词汇、以非 函数的形式呈现的对应关系、常函数、要求绘制 机器的请求。标记说明某个区块包含该标记，但不说明该区块如何使用它：所有关于用法的陈述都通过阅读区块作出。内容计数检查文件所拥有区块的正文；链接则单独计数。

投影。 统计的是源文件，而不是某个区块在汇编后的章节中重复出现的次数。课程章节（法语$CM1$、$CM2$、五年级、九年级、九年级、十年级；国际文凭组织 PYP 4、PYP 5、MYP 1、MYP 2、MYP 5，以及用于复合的中学项目五年级扩展课程和文凭项目一年级的两个章节）根据其链接表进行描述。链接表按单元列出各章节呈现的区块；另一个脚本沿每条链接追溯到相应的源区块，并统计某章包含机器的课程区块和练习区块的数量，以及课程呈现关系、机器或不含机器的定义时的顺序。这些表格说明了章节包含什么内容以及内容的顺序，而非学生实际经历了什么。投影数量分别按修订前和修订后的状态统计（提交 `d809e0071a`，该提交还将九年级九年级章节的坐标平面移到了图像之前）。

自我审计的局限。 作者设计了这一进阶序列并进行了审计。语言模型审阅者分别阅读了本文的计划、修订建议，以及依据同一批材料编写的教师指南，并发现作者初稿中的陈述存在错误（一章公开章节被错误地归入某个区块；一幅图中标记的点不在曲线上）；文中报告的是更正后的陈述。源文件和计数脚本可应要求查阅；汇编后的章节已公开（附录 A）。由于本手稿没有附上带日期来源文件的公开档案，因此目前仅凭公开章节还无法独立复现这些计数。

表1：2026年11月2日修订前后的源文件（英文部分，各文件所包含的区块）。“机器”统计包含“机器”一词或机器像的区块；“绘制”统计符合机器绘制请求正则表达式的区块；它不统计所有绘图任务（546185 中的指令“绘制链条”就不符合）。书面练习在纸上或石板上作答，并根据照片批改。

	课程区块		练习模块			
年级	all	机器	all	书面	机器	draw
四年级	8	3	29	13	19	0
五年级	3	2	14	9	12	0
六年级	3	$1 \to 2$	13	13	6	0
关系，六年级	20	$0 \to 1$	60	18	0	0
关系，七年级	7	$0 \to 1$	38	24	1	0
七年级	$6 \to 7$	2	$47 \to 52$	$9 \to 14$	$0 \to 5$	$0 \to 2$
八年级	7	0	19	14	1	0
九年级	11	$1 \to 2$	$40 \to 41$	$17 \to 18$	$0 \to 1$	0
十年级	29	$2 \to 4$	71	24	1	0

3 理论背景

3.1 从公式到对应关系

函数概念的历史是一系列定义的演变（Youschkevitch，1976；Kleiner，1989）。依据Sfard（1991，第14–16页）的叙述：这个词最早见于莱布尼茨；约翰·伯努利将其描述为由变量和常数组成的量；欧拉先将其视为解析表达式，随后又将其视为一个量对另一个量的依赖关系；一系列定义的缺陷最终促使 Dirichlet 摒弃算法式方法，并引出布尔巴基纯粹结构性的定义——一个有序对集合，不涉及任何计算。Thompson 和 Carlson（2017）在参考 Boyer 后，将精确的对应规则追溯至 Dirichlet：该规则将 x 与 y对应起来，可以是任意的，也可以极不连续；他们还指出，当前定义沿袭了 Dirichlet 的定义，但采用笛卡尔积和有序对的形式来表述。20世纪下半叶的学校教科书将函数定义为两个集合以及一条规则，这条规则把第一个集合中的每个元素恰好对应到第二个集合中的一个元素；英国SMP课程则从关系入手（Markovits 等人，1986，第18页），其函数学习始于关系和箭头图，而有序对定义和作图技巧占用了大部分时间（Bell 和 Janvier，1981，第 34 页）。Thompson 和 Carlson （ 2017 ）以及 Oehrtman 等人（ 2008 ）认为，集合定义解决的是数学家所面对、初学者却无法设想的问题：用这一概念引入函数，等于向学习者呈现一个他们并未遇到的问题的解决方案。

3.2 过程与对象

Sfard（1991）区分了函数的操作性观念——一种计算过程，或从一个系统转换到另一个系统的明确定义的方法——与结构性观念，即有序对集合。在她的论述中，操作性观念分三个阶段先于结构性观念：内化（用公式计算因变量的值）、压缩（从输入—输出关系的角度思考这一过程，使学习者能够研究函数、绘制其图像、将两个函数复合并求出反函数），以及实体化；当学习者接受函数不一定可以计算时，便显现出这种本体论转变。文中还指出了两条旁支：原型（初学者一听到函数，就会想象线性映射）和一种准结构性方法，它将函数概念等同于其某种表征。在APOS传统中，一种计算机辅助教学将函数呈现为过程，学生为这些过程命名后再按名称加以应用，从而提升了许多大学生的理解（Breidenbach等人，1992）；相比之下，动作观念是在每次求值时将数代入

一个表达式（Dubinsky 和 Harel，1992）；Oehrtman 等（2008）也采用了这一描述：从动作观看，定义域和值域并不被视为集合，反函数被简化为“交换 x 和 y”，而复合则被简化为代入；过程观则将函数想象成一个实体，它接收输入、产生输出，并且可以逆转。Thompson（1994）补充指出，要形成过程概念并非易事，而且若没有以此为目标的教学，学习者往往无法达到这一阶段。

3.3 概念意象与已知困难

Vinner（1983）基于概念的定义与学习者所持有的概念意象之间的区别，构建了一种学习模型。在一项针对271名大学生和36名初中教师的研究中，许多定义，甚至更多的概念意象仍停留在初级阶段；而在那些给出现代定义的人中，概念意象与定义也常常相互矛盾（Vinner 和 Dreyfus，1989）。在152名未来中学教师中，许多人缺乏现代概念：他们没有理解函数的任意性，也很少有人能够解释单一输出的要求从何而来，或说明这一要求为何重要（Even，1993）。在一项针对约400名14至15岁学生的研究中，Markovits 等（1986）发现，在函数概念教学之后，有三类函数仍然难以被接受：常函数、分段定义的函数，以及由离散点集给出的函数；定义域和陪域常被忽视；像和原像只得到部分理解；例子的储备不足，而且过于接近线性；从图像过渡到公式比反向过渡更困难。他们写道，许多学生“认为函数仅由对应法则定义”（Markovits 等（1986），第22页）。根据 Oehrtman 等（2008）所引用的 Carlson 的研究，即使是在优秀的大学代数学生中，也很少有人把常函数认作函数；许多人认为函数必须由一个公式给出，把分段函数看作两个函数，并且难以接受两个不同的公式可以定义同一个函数。

3.4 函数机器作为认知根源及其局限

Tall等（2000）提出，输入—输出盒是这一概念的认知根源： 它是一个在学习初期便有意义的知识单元，通过扩展而非重构来发展，长期保持其意义，并随着理解的加深持续发挥作用。这个盒子具有对象的地位，承载着从输入到输出的过程；表格、图像、公式、程序和文字陈述则成为表示或计算其中关系的方式。对于定义域中的每个输入，若两个盒子给出的输出相同，无论其内部机制如何，它们就是“相同的”。这篇论文主要是理论性的，并借鉴了早期数据；作者也指出了这一认知根源的三个局限。若将盒子用作“猜猜我的规则”游戏，就会造成“所有函数都由公式给出这一认识论障碍”；因此，他们建议采用由程序定义的日常机器，例如根据重量计算寄信邮资的机器。盒子没有明确的定义域或陪域，可能会让人以为存在一个“自然”的定义域；他们建议尽早将其表示为从一个集合 A 到另一个集合 B的箭头。而实函数的图像还在坐标轴上加入了实数的序：它是“函数加上”其他东西，而不只是函数本身。在一项配套研究中，研究对象是两所社区学院修读非学分代数课程的学生——他们是成年人，而非儿童。入门组中有三分之二的学生在第一天就能读懂机器图示，但到学期末，入门组中只有41%能从图像读出输出，22%能从图像反推输入；作者据此认为，这些学生对机器与图像之间联系的理解较弱（McGowen 等人，2000）。一项面向八年级的技术丰富型设计发现，工具使用与概念发展之间的联系得益于准备活动、能够支持日益复杂推理的表征工具，以及与纸笔活动交替进行（Doorman 等人，2012）。

3.5 函数概念出现之前的函数思维

九岁半的儿童通过关注输入与输出之间的关系来探索函数表，并用口头语言和符号表达这种关系（Warren 等人，2006）；9至10岁的儿童运用了小学阶段通常不会涉及的代数思想和表征（Carraher 等人，2006）；六岁儿童能够以一般化的方式思考函数数据，这与只关注一个数值序列内部变化的传统做法形成对照（Blanton 等人，2015）。在一项面向三至五年级学生的早期代数干预中，书面回答从递归模式逐步发展到对应关系，有时还发展到协变（Stephens 等人，2017）。早期概念围绕“函数”一词组织起来的学生，通常对作为对象的函数理解得更好（Ayalon 等人，2017）。

3.6 对应关系与协变

协变方法将 y 从一个值变化到下一个值的过程，与 x 从一个值变化到下一个值的过程协调起来，例如沿着表格的列向下进行（Confrey和Smith，1994年、1995年）。Thompson（1994年）主张从幼儿园到大学二年级都采用协变方法，并在需要时采用对应关系；同时指出，有些对应关系既没有解析表达式，也无法从协变角度理解，例如一个人的姓名与其社会保障号码之间的对应关系。Carlson等人（2002年）提出了协变推理的心理活动框架。Thompson和Carlson（2017年）认为，仅仅把函数视为一个输入对应一个输出，并不能使学生具备对共同变化的两个量进行推理的能力；他们还回顾了这样一种假设：要从协变角度理解对应规则，首先需要形成该规则的过程概念。Leinhardt等人（1990年）的综述将对应关系和协变视为理解函数关系的两种方式。

3.7 符号寄存器与图像

对 Duval（1993年）而言，将一份知识从一种符号寄存器转换到另一种，是一种根本性的认知操作，无法简化为在单一寄存器内进行的处理；许多学习困难都源于寄存器之间缺乏协调。情境图像很容易被误读，尤其是当其图示层面与含义相冲突时；而表格有助于研究变量的变化（Bell 和 Janvier，1981）。在一项针对法语十年级班级（260名学生）的研究中，Coppé 等人（2007年）发现，数值表和图像未必是引入函数概念的最恰当途径，而且即便不理解函数是什么，也能完成转换任务。对未由代数公式定义的函数进行处理的困难，在进入大学时依然存在（Vandebrouck，2011年）；而在一种图形环境中，十一年级学生仅根据图像研究函数，这使他们较少依赖传统练习（Bloch，2002）。

3.8 具体性渐隐

将具体表征逐步替换为更抽象的表征，这一过程称为具体性渐隐，也是一项针对数学与科学教学的系统综述所探讨的主题（Fyfe 等，2014年）。进阶序列中的三幅图遵循这一顺序；论文并未声称该综述支持所选的具体图示或年龄。

3.9 制度背景

在法国，2008年的九年级 课程大纲通过例子引入了函数概念，将其描述为“一个使一个数对应另一个数的过程”（法国国民教育部，2008年）。2016年针对第四学段 课程大纲的教学资源通过让学生理解函数将某些数与唯一的像相关联，并借助计算程序来讲授函数概念；同时指出，严格定义数值函数并非中学教育的目标

（法国国民教育、高等教育与研究部，2016年）。2020年的课程大纲列出了相关词汇、表征（符号表达式、表格、图像、计算程序）以及记号 $f(x)$和 $x \mapsto f(x)$，但没有给出定义（法国国民教育、青年与体育部，2020年）。2026年的课程大纲首先“在量的情境中”引入函数概念，从五年级起使用“取决于”；要求学生在九年级 应用计算程序并在倒序运行程序后找出起始数；在九年级 学习函数例子，但“不对函数概念作一般性研究”；并逐步引入记号 $P(A)$、 $p(t)$和箭头（法国国民教育部，2026a）。在十年级，函数概念得到巩固，被视为“表示一个变量对另一个变量的依赖关系”；其图像是坐标满足$y = f(x)$的点所组成的集合（法国国民教育与青年部，2019年；法国国民教育部，2026年）。在国际文凭组织的中学项目中，课程指南将函数定义为涉及一个或多个变量的关系或表达式；MYP 1–3不涉及这一部分内容，而在MYP 4–5中安排映射、函数记号以及一次函数和二次函数；扩展课程还包括定义域和值域，复合函数和反函数则作为拓展内容（国际文凭组织，2020年）。文凭课程指南将函数描述为一种映射，它把自变量（输入）的每个值与因变量（输出）的一个且仅一个值相关联；并以非正式方式介绍反函数，称其“反转或消除某个函数的作用”（国际文凭组织，2019年）。

4 原则1：机器就是定义

设计原则1。 函数是一种机器，它接受一个输入，应用一条规则，并给出且只给出一个输出；相同的输入总是得到相同的输出。这是每个年级都适用的定义：之后的定义只是用字母、集合和箭头重写它，而不是用另一个定义取而代之。随着年级升高，图示逐渐简化；每次图示的变化都只展示一次，并将新旧图示并列呈现。

4.1 同一定义，换种写法

四年级时，这个定义就已经恰到好处：“函数是一条规则，它接受一个输入数，并恰好返回一个输出数。对于每个输入，函数机器总是给出相同的输出，每次都遵循相同的规则”（182067）。定义前的一段文字将机器与数字模式的输入/输出表联系起来；位置表是一种输入/输出表，其中输入的是位置，输出的是相应的项（3921）。七年级时，“画成方框的机器”这一说明展示了两次同一台机器，随后为它命名：“给机器命名为 f 后，其输出写作 $f(x)$，读作‘f的 x’”（546182）。九年级时，定义保留了方框，并补充说明：函数 f “是一条规则，它为每个输入值指定且只指定一个输出值。它的工作方式就像画成方框的机器 [。.....] 机器所接受的输入是 x 的值，规则对这些值会给出一个输出。同一台机器也可以用带箭头的一行式子表示”（30614）。十年级时，定义域是“机器所接受的输入”（3961）；十一年级时，规则从一个集合 X 映射到一个集合 Y，$f\colon\ X \to Y$（4492）。到了高等教育第一年，定义仍然是一条规则：从 E 到 F 的映射“是一条规则 f，它将 E中的每个元素x与 F中的一个且仅一个元素对应起来”（22847）；图像是 $E \times F$的一部分，随后才给出它的刻画（22849）。整个进阶序列始终没有用另一种定义取代机器，只是换了种方式来表述它。

4.2 三幅图

四年级的机器是一个机器人：规则写在机器人上，输入从顶部进入，输出从侧面出来。作者认为，对于十三岁的学生来说，这种画法太幼稚了，而2026年11月的修订确定了同一台机器的三幅图：机器人一直使用到

大约11岁（4至6年级）；从大约12岁开始（7至9年级），使用一个方框，即内部写有规则并带有两个箭头的矩形；从大约15岁开始，使用箭头 $f\colon\ x \mapsto f(x)$。每次变化只展示一次，即在同一幅图中展示两种画法（图1）。15岁以后，方框只在课程中重新出现，用来解释：复合时将两台机器组成链式机器（3969），以及用下一台机器抵消前一台机器以求反函数（3973）；没有练习要求画出它。

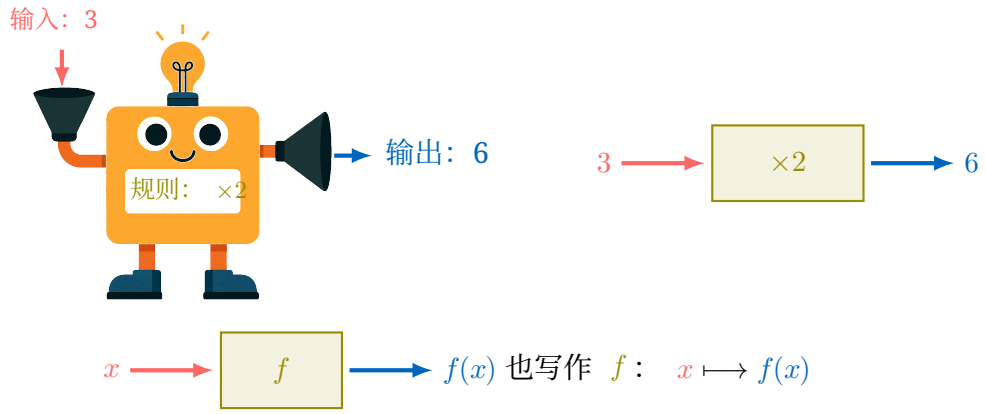


图1：两种图示变化，每种各展示一次。上方为七年级：早期年份的机器人和方框（区块 546182）。下方为九年级：方框和直线（区块 30614）。在这些过渡图示中，输入为红色，规则为橄榄色，输出为蓝色。

4.3 这种选择带来了什么，又推迟了什么

这一选择获得了连续性：一名学生在15年级时遇到的机器，就是他在9年级时遇到的那台机器，这正是 Tall等（2000）对认知根源的要求。它推迟了集合的引入。机器人和方框都没有定义域，也就是同一作者所称的极限；进阶序列先用文字回答这一问题，之后才用符号作答：“机器所接受的输入”在九年级时进入定义，并在十年级时命名为定义域，而陪域则等到十一年级才出现。它还推迟了将陪域视为函数身份组成部分这一点：在高等教育第一年，两个映射只有在其定义域、陪域和值都一致时才相等（22851），而 $x \mapsto x^2$ 从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 不同于 $x \mapsto x^2$ 从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}_{+}$。一台只展示其规则的机器无法说明这一点；第10.4节将再次讨论它。

5　Pri原则2：概念的性质，置于机器之上　e

设计原则2。 使这一概念变得困难的性质——一个输入绝不会对应两个输出，两个输入可能有相同的输出，机器可能对每个输入都给出相同的数字，规则不一定是公式，两个规则可能定义同一个函数，机器可以反向运行——都通过四年级的机器呈现，并以定义为论据设置书面练习。

四、五年级学生在纸张或石板上完成、并根据照片批改的书面练习，已经体现出文献所描述的困难，每道题都以定义作为论证依据。一台函数机器昨天对输入 5 输出 10，今天却输出 12，因此不可能是函数机器（291812）。一台对每个输入都输出 7 的机器则是函数机器，这与一名学生所说的“它什么也算不出来”（291832）相矛盾：Markovits等（1986）所述的常函数在九岁或十岁时便以机器的形式出现。神秘机器要求找出一个规则，使其符合表格的每一列，因为“一个结果可以提示一个规则；结果可以否定一个规则，却永远无法证明它”（291818，修正见 291819；291826）；这些书面练习的批改接受任何与学生所找到的规则一致的输出，从而避免把有限个结果视为能够确定唯一规则，但这本身并未反驳“每个函数都有一个

公式”的观念。反向运行一台机器，可以根据已知输出找出输入，然后再正向检查（291830）。另外，两台规则不同的机器——“乘以 2”和“将输入与自身相加”——是同一台机器，因为对于每个输入，它们给出的输出都相同（291836）：Tall等（2000）关于相同性的判据，就这样向十岁学生进行了表述。

在七年级，修订新增的一组书面练习要求学生画出机器（546183–546191）：$f(x) = 3x + 1$ 画成由两台机器组成的链式机器，先“乘以 3”，再“加 1”；交换两台机器后，函数发生改变（5($x - 2$) 对比 $5x - 2$）；从输出 22 反向运行链式机器，先逆转最后一台机器；三个函数 $u(x) = 2(x + 3)$、$v(x) = 2x + 6$、$w(x) = 2x + 3$，仅通过对三个输入进行测试，只能推测 u 和 v 相等，而分配律则能证明它对每个输入都成立；以及一台邮局机器，其规则是一个步骤表，价格在 20 克和 100 克处发生跳变。尽管没有任何单一公式$a \times m + b$ 能够表示它，它仍然是一个函数——这正是 Tall等（2000）推荐的日常机器，也是 Markovits等（1986）意义上的分段函数。在七年级和八年级，其他书面练习要求学生说明以下问题的理由：学生与颜色之间的箭头图，其中完整的检验标准是“每个输入都恰好发出一条箭头”（291868，修正号 291869）；通过竖线检验的图形（291882）；针对某学生提出“函数不能两次给出相同输出”的说法，利用 $(-2)^2 = 2^2$ 予以反驳（291886）；两张表格，其中一张是常数函数（291888）；以及班级中的各种情境，其中一个情境失败了，因为 13 到 31 之间的整数没有对应的月份（291898）。

6 Pri原则3：两个共同变化的量之间的关系 r

设计原则3。“关系”一词用于指两个量之间的联系：测量表、行程图像、换算、公式。当第一个量的每个取值恰好决定第二个量的一个取值时，第二个量就用第一个量来表示，并将这种依赖关系描绘成机器；关系还补充了机器本身无法呈现的内容，即协变。

两个关系层级都围绕具体情境展开。六年级：“关系描述两个变量（量）如何相互联系”（2019年30）；测量值的表格和折线图；距离—时间图，其中时间置于横轴，因为距离取决于时间，而每个点都读作一句话（444316）；换算图，其中换算如同一台机器，输入欧元、输出美元，遵循“乘以1.2”的规则；反向读取图像时，则是反向运行这台机器（444323）。到了七年级，这两者相遇。“相关联”并不意味着“由……决定”：五名学生的鞋码和身高彼此相关，但37码对应两种身高，因此无法根据鞋码通过规则计算出身高（292062）。当第一个量的每个取值恰好决定第二个量的一个取值时，第二个量就用第一个量来表示，定义将其描绘出来（图 2），随后又补充了协变：“边长每增加1厘米，周长就增加4厘米，无论边长是多少”（331804）。接下来的方法用公式 $P = 4 \times c$、函数记号 $P(3) = 12$、表格和图像来表示同一种依赖关系（331805）。



图 2：“就……而言”，七年级关系（区块 331804）：正方形的边与周长之间的关系，在协变句之前以机器的形式绘制。

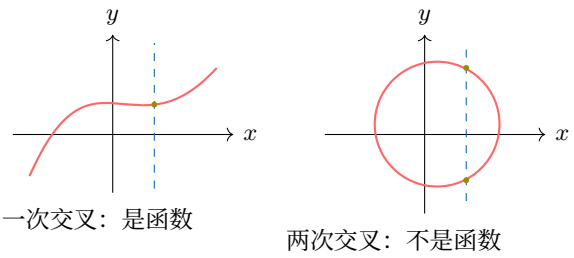
在六年级，这个关系也被写成有序对集合，并给出了一个不是函数的反例：“是……的因数”，从{2，3} 到{4，6，9}，其中2有两个对应项（450209）。在图像出现之前，这一说明是进阶序列唯一一次将关系写成序对集合；无论机器安排在哪个位置，它都被置于机器之后（第 9 节）。设计假设是，Thompson和Carlson（2017）认为函数观“ 一进一出”中缺失的协变，应当在量之间自然产生的地方进行教学，并在“用……表示”处与机器衔接

。“用……表示”之间的衔接是否成立，文献并未显示：协变只在“用……表示”的定义中提到过一次，并在关系层级中进行练习，而不是在函数层级中练习（第12节）。

7 原则4：序对集合以图像的形式回归

设计原则4。有序对集合并非起点。它以图像的形式回归：图像上的点，其坐标分别是输入和机器给出的输出。机器给出的是这些点，而不是点与点之间绘出的线。

四年级时，学生在数据章节中首次接触曲线，那时还没有机器：每个测量值都变成一个点，点上记录着两项读数；这些点按顺序连接起来，课程说明曲线增添了什么——变化的形状——以及曲线没有增添什么：“曲线连接测量值；它不会凭空创造从未测量过的值”（357157）。一道书面练习设下陷阱：学生在八月和九月之间的线段中点读出 $20\,^{\circ}\mathrm{C}$，并以为这是测量值（357169）。这句话后来随着机器和公式再次出现。六年级时：“只有这些点是机器的输出；绘制线段是为了帮助眼睛从一个点追踪到下一个点”（202177）；七年级时，在两个计算所得的点之间，线的形状“仍然只是一个猜想；再用公式计算一个值可以推翻它，却永远无法证明它”（422895）；八年级时，函数的图像是所有点的集合（x，$f(x)$），而“数值表只给出其中一些点：连接这些点只是一个猜想，除非规则给出了中间各点的值”（30470）。垂线检验从图像上解读定义：垂线上各点的输入都相同，因此若它与图像相交两次，就意味着同一个输入对应两个输出（291608，图3）。高等教育第一年，图像成为 $E \times F$ 由$\forall x \in E,\ \exists! \, y \in F,\ (x,\ y) \in \Gamma$(22849)刻画的对象：序对集合最后才出现，作为映射图像的一项性质。



Figu图3：八年级的垂线检验（区块291608）：从图像中读出的定义 h.

对于 Tall等（2000）而言，实函数的图像是“函数加”：它在坐标轴上加入了实数的序。进阶序列没有用这些词来表述，但关于连接点的反复句子正是这种添加的体现：两点之间的线段，是对尚未计算的输入所作的断言。

8 原则5：$f(x)$ 从机器中读出

设计原则5。符号表示 $f(x)$ 是对机器的读取：f 是机器的名称，x 是它的输入，$f(x)$ 是它为 x给出的输出。它是在机器上引入的，而不是作为先行的公式引入。

修订后的区块在方框上呈现符号表示。在七年级，标出方框的注释将其命名为 f，并写出其输出 $f(x) = 2x$ (546182)；随后给出的例子将一个计算程序 “ 选择一个数。将所选的数乘以 3。将结果加 1” 转化为函数：逐步对 x 执行该程序，$x \to 3x \to 3x + 1$，因此 $f(x) = 3x + 1$，并对一个数进行检验 (331826)。

在九年级，开篇的问题从“乘以 2”的方框转到它的表格，再到 f(输入) $=$ 输出，括号表示“函数 f 对输入所进行的运算”，接着是 $f(x) = 2x$ (30613)；定义则指出各部分： f 函数（规则）、 x 输入变量、 $f(x)$输出、“ f下 x的像”，以及 $f(x)$ 的一个原像，也称为前像 x(30614)。在关系层级中，量的字母变成函数的名称；该方法提醒学生， P(3)并不表示“P 乘以 3”，而是“边长为 3 时的周长”(331805)。设计假设是，如果学生将 $f(x)$理解为输入 x 对应的 f 的输出，就会通过让 $x + a$ 经过机器来计算 $f(x + a)$，而不是在表达式末尾加上 a ——据 Oehrtman 等人（2008）转述 Carlson 的研究，43% 的优秀大学代数学生犯了这种错误。

9 逐年级推进

四、五年级：机器人、表格与第一条曲线。机器、机器的定义及其输入/输出表（四年级），随后是作为机器“笔记本”的数值表（五年级，193109），以及第5节的书面练习。在同一时期，数据章节为每个测量值标出一个点，并说明曲线没有显示什么（357155–357157）。在没有函数内容的第三学段法国课程中，只有曲线在$CM1$ 和$CM2$中出现；国际文凭组织则在 PYP 4 和 PYP 5 中讲授机器，并在 PYP 4 中讲授曲线。

六年级与关系层级：共同变化的量。将机器的数对作为点标出（六年级）；关系、表格、折线图、行程与换算（关系，六年级）；“用……表示”、依赖关系的表征，以及何时连接各点（关系，七年级）。关系层级适用于 MYP 1 和 MYP 2，以及法国的五年级和九年级；这些年级还讲授方程层级中的计算程序：“每个箭头都像一台带有自身规则的小机器，而整个程序就是这些机器组成的链条”，并按照“逆运算，以逆序”反向运行（299656）。

七年级：方框及其名称。从机器人到方框的过渡、名称 f 和$f(x)$、转化为函数的计算程序，以及要求学生把函数画成机器的书面练习组（第5节）。这一内容适用于法国五年级，章节如今以机器为开篇；在后续年级中，则适用于九年级、十年级 和 MYP 5。

八年级和九年级：图像、像、原像。将图像视为点的集合（$x,\ f(x)$)、垂线检验、在图像上读取像（八年级）；并列呈现方框和直线，在图像和表格中读取像与原像并进行计算，以及平方函数及其原像（九年级）。这些内容适用于九年级、十年级 和 MYP 5。

十年级：机器接受的输入，以及再次出现的方框。定义域和值域、偶函数和奇函数、函数运算、用两台链式机器表示复合（图4），以及通过后一台机器撤销前一台机器的操作来引入反函数（3973）；反函数要存在，“值域 f 中的每个输出 y 都必须恰好对应一个输入 x”（3974）。定义域适用于十年级 和 MYP 5；复合适用于中学项目五年级扩展课程、文凭项目一年级和法国高中毕业班，反函数则适用于中学项目五年级扩展课程和文凭项目一年级。

表2列出了每个公开章节中包含机器的课程模块和练习模块的数量，以及修订前后各模块中课程的顺序：课程呈现关系、机器以及不含机器的定义。

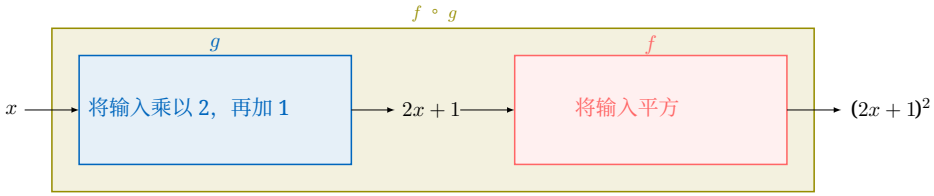


图4：复合，十年级（区块3969）：在第15课之后，方框只在课程中重新出现，用于解释。根据课程中的图缩放。

表2：修订前后的公开章节：包含机器的课程和练习模块（不包括所有关联区块、答案和视频），以及课程中带标签区块的顺序（M：包含机器的区块；R：关系的定义；F：不包含机器的函数的定义）。来源为进阶序列中的年级（R：关系层级；Eq.：方程层级）。修订前：提交 `596ec5ecec`；修订后： `d809e0071a`。

Year	章节	来源	课程	练习	顺序
CM1	组织与管理	4	0/19	0/61	–
CM2	数据的组织与管理	4	0/15	0/42	–
5e	数据 函数	4–7, R6, R7	3 → 4/18	9/59 → 12/62	RMMM → MMMRM
4e	函数	R6、R7，等式 7、8、9	0 → 2/26	0/60	R → RMM
3e	函数		2 → 3/42	0/98 → 6/109	MFM → MMM
2de	函数概论	7–10	0 → 2/23	0/60	F → MM
PYP 4	模式与函数	4	3/10	19/52	MMM
PYP 5	数列与规律	4, 5	4/12	12/51	MMMM
MYP 1	折线图	R6、7	0 → 1/15	0/59	– → M
MYP 2	坐标和直线	R6、R7	0 → 1/10	0/48	– →M
MYP 5	图像 函数	7–11, R6	1 → 3/39	0/97 → 1/98	RMF → MMRM
MYP 5扩展：进一步的函数		10, 11	2 → 3/27	1/84	MM → MMM
DP 1	函数 (AA SL)	10、11	2/43	0/68 → 0/72	MM →FMM

在文凭项目一年级中，新增的四道练习来自对考试题型问题的独立练习；而十一年级（4492）的定义失去了它的机器人，因此标记为 F。MYP 3 或 MYP 4 的章节均未用于这些文档。

10 三个任务，以及机器不足以解决之处

10.1 两条规则，一个函数

书面练习要求：三个函数分别由 $u(x) = 2(x + 3)$、 $v(x) = 2x + 6$ 和$w(x) = 2x + 3$ 定义；将每个函数画成链式机器；计算它们在输入 0、1 和 5 时的值；找出看起来相同的两个函数，然后证明它们对每个输入都相同；再给出一个输入，证明w 与它们不同（546189，七年级，曾在五年级 和九年级使用）。其教学变量包括图示——图示暗示它们不同： u 的链式机器是先执行 $+3$ ，再执行 $\times 2$； v 的链式机器则是先执行 $\times 2$ ，再执行 $+6$ ——还包括测试输入的数量（只能暗示等式成立），以及第三个函数（它与前两个都不同，只需一个输入就能证伪）。评分标准会扣除仅凭三次测试就得出结论的分数，也会扣除因 u 和 v 的链式机器不同便断定它们不同的分数。该任务让学生面对 Tall 等（2000）提出的判据：不论机制如何，对每个输入都得到相同的输出；同时也呈现了 Oehrtman 等（2008）报告的难点：一个函数可以有两个不同的公式。它还揭示了这一判据在学校教学中的局限：“每个输入”意味着每一个实数，但机器图示并未呈现这样的定义域，练习也没有明确说明这一点。

10.2 原像，以及为什么反向运行并不总是函数

书面练习要求：平方机器的规则是“将输入平方”，并接受所有数；将 4 和 -4 输入其中；反向运行它，找出结果为 9、再为 0、然后为-1的输入；画出 $-3 \le x \le 3$ 的曲线和直线 $y = 9$，并读出结果为 9 的输入；判断平方机器能否像“加 3”机器那样反向运行，使每个输出恰好对应一个输入（546193，九年级，曾就读于九年级 和 MYP 5）。题目中的变量是输出：正数、零或负数，分别对应两个、一个或没有输入——这是平方函数课程（422688）中的三种情况；记录表则是：曲线和水平线展示了仅知道 9 的平方根是 3 时所掩盖的两个输入（图5）。最后一个问题区分了寻找原像和求逆：反向运行时，9 会有两个输出，因此反向运行这台机器不会得到一个函数；平方根机器只有对正数或零输入时，才能撤销平方机器的运算。评分标准仅对“结果 9 只有 3”扣分，也会对未加限制地回答“可以，平方根”扣分。这项设计还预见到另一种答案：不是函数，因为两个输入会得到 9；这种说法混淆了输出唯一与输入唯一的要求；同一章节中会检验学生是否提出此类观点（291886）。对 McGowen 等人（2000）研究中的成年人来说，逆转推理是最难的一步；在机器情境中如此，在图像情境中更是如此。

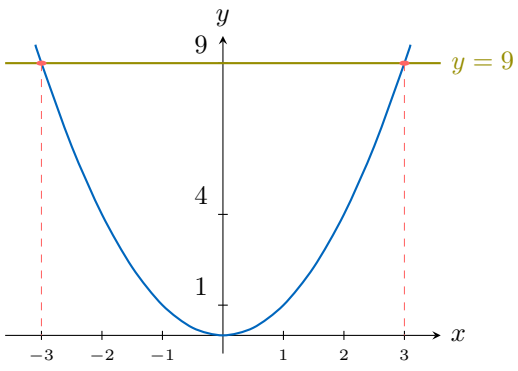


图5：平方机器反向运行，九年级（练习546193的修正）：直线$y = 9$ 与曲线相交于两个输入 -3 和 3的上方。

10.3 从机器到图像

四年级的书面练习询问：如果一名学生读出位于八月点和九月点之间连线中点处的温度为 $20\,^{\circ}\mathrm{C}$，是否可以说八月和

九月之间的温度是 C；预期答案指出，每个月只记录了一个温度，只有这些点代表测量值，而连线只是为了便于观察（357169，适用于*CM1* 和 PYP 4）。这里的变量是起始量的性质：一个月是被视为流逝的时间，还是被视为某次测量的标签。同样的问题在七年级以一般形式再次出现——只有当起始量可以取中间的每一个值时，才把这些点连起来；即便如此，曲线形状仍然只是一种猜想（422895）——而在八年级则针对由规则给出的函数（30470）。这项任务涉及两项研究发现：当图像的直观呈现与情境含义相冲突时，人们会误读情境图像（Bell 和 Janvier，1981）；而从图像转换为表格，无须理解函数是什么也能完成（Coppé 等人，2007）。单靠这项任务并不能建立机器与图像之间的联系；McGowen 等人（2000）发现这种联系较为薄弱。建立这种联系的方式，是将图像定义为机器给出的点的集合，并运用垂线检验。

10.4 机器力有未逮之处

非数值函数。四年级的机器“接收一个输入数”，并给出一个输出数。涉及其他集合之间函数的内容，只出现在七年级和八年级的书面练习中——例如，将学生对应到颜色的箭头图（图 6），以及一个班级学生的年龄（291868、291898）——以及十一年级的定义中，即从集合 X 到集合 Y的函数。Thompson（1994）提出的例子中，一个名字与一个识别号码之间存在对应关系，却既没有公式也没有协变；课程中没有与之对应的内容。



图 1　　图 2

图 6：一个非数值函数，七年级（练习 291868）：图 1 表示一个函数，其中两名学生都对应红色；图 2 则不是函数，因为 Ali 对应了两个箭头。

仅由图像给出的函数。测量值的曲线没有可填入方框的规则。进阶序列将这类曲线视为已给定的点，并说明哪些值未曾测量；它并不要求学生根据图像所受的约束构造函数。Bloch（2002）描述了这类工作，Markovitset al.（1986）也对此提出建议（经过给定点的函数、先递增后为常数函数的函数）。

定义域和陪域。 正如作者所警告的那样，方框并没有定义域或陪域（Tall 等人，2000年）。进阶序列在九年级用文字介绍定义域（“机器接受的输入”），在邮局任务以及数字 13 到 31 没有对应月份的情境中要求学生找出定义域，并在十年级为其命名；而陪域及其在两个函数相等中的作用（22851），则要等到十一年级和高等教育第一年才会涉及。早早将机器表示为从一个集合 A到另一个集合 B 的箭头这一建议并未被采纳：箭头到 15 岁时才出现，集合则更晚。

动作观。 只用于一次计算一个输出的机器可能会固化动作概念（Thompson，1994；Oehrtman 等人，2008）。链式任务、相同性任务和逆向操作任务旨在培养过程观；但从七年级开始，许多练习模块都包含符号表达式（七年级英语部分的 52 个练习模块中，有 36 个在修订后包含一个公式$f(x) = \ldots$），而且只有在绘图组中才要求画出机器。文献还指出了另外两个局限。Sfard（1991）认为，对函数不一定可计算这一点的认识体现了实体化；而内部带有规则的机器却暗示了相反的观点，并且该进阶序列中的答案仅有步骤表和箭头图。此外，机器承载着

一种逐点视角，即关注一个输入及其输出；然而，函数研究还需要全局和局部视角——例如区间上的变化、奇偶性和极限——Vandebrouck（2011）要求教师明确讲授这些内容；而奇偶性和函数运算是在十年级不借助机器进行教学的。

11 预期困难

表3列出了文献记载的困难和预期错误，以及进阶序列中应对这些问题的区块。这些答案是设计选择，并非经过测试的补救措施。

表3：文献记载的困难和预期错误，以及应对这些问题的区块。

困难	文献	进阶序列中的答案（年级）
函数是一个公式	Tall等（2000）；Markovits 等人（1986年）；Oehrtman 等人（2008年）	神秘机器中“适用的规则”（4）；这个观点办公机器、步骤表（7）
常函数不是一个函数	Markovits 等人（1986年）；Oehrtman 等（2008年）	对每个输入都回答 7 的机器 (5)；常值表 (8)
单输出条件被错误应用	Markovits 等人 (1986年，第 20 页)	两个学生共享一种颜色（7）；$(-2)^2 = 2^2$ （8）；两个字母一个价格（7）；平方机器反向（9）
两个公式，两个函数	Oehrtman 等人（2008年）	“乘以 2”和“将输入与自身相加”（5）；$2(x+3)$ 和 $2x+6$ (7)
两点之间的直线已测量	设计假设（相关研究：Bell 和 Janvier 1981）	测量值曲线与萨米的读数（4）；计算点之间的猜想（R7, 8）
行程图是路线的图示	Bell 和 Janvier（1981）	将每个点读作一个句子；与起点的距离并非行进的距离（R6）
像和原像混淆	Markovits 等人（1986年）	机器上标注的词语：像是输出，原像是输入（9）
$f(x+a)$ 通过以下方式计算：加法 a	Oehrtman 等人（2008年）	$f(x)$在方框（7，9）中读作； P(3)不是“P倍3”（R7）
被忽略的定义域	Markovits 等人（1986年）；Tall 等人（2000年）	“机器接受的输入”（9、10）；没有月份的数字（8）
程序被还原为相同顺序	设计假设（2026年计划要求以逆序进行）	按逆序执行逆运算（公式（7））；从 22 回到 7 的链条（7）

12 讨论

12.1 与现有建议的关系

这一进阶序列遵循 Tall 等（2000）的认知根源，并回应了作者指出的两项局限：它介绍了以程序定义的机器，包括步骤表；还先用文字说明定义域，再引入符号。它没有采纳他们关于尽早引入显式集合之间的箭头的建议；他们对图的附加结构的警示将在第7节讨论。这一进阶序列不同于Thompson（1994）以及 Thompson和Carlson（2017）的观点，后者将协变置于首位：此处的进阶序列将对应关系置于首位，以机器的形式呈现；协变则置于关系层级中，并通过“就……而言”将两者联系起来。在两点上，它与法语文本一致——唯一像和计算程序（法国国民教育、高等教育与研究部，

高等教育与研究部，2016年），即应用并反向运行的程序，见九年级 （法国国民教育部，2026a）——但它偏离了2026年计划的顺序。该计划首先在“量的范畴中”引入这一概念：如今，五年级章节以机器开篇，尽管其中讨论的是量之间的依赖关系（自行车的数量乘以2即为轮子的数量，3921），随后才是关系章节。在国际文凭组织中，中学项目指南将函数内容排除在 MYP 1–3 之外（国际文凭组织，2020年）；进阶序列的 MYP 1 和 MYP 2 章节则包含关系，而方框只在换算和“就……而言”中出现。

12.2 审计揭示的内容

截至2026年11月2日，在修订之前，审计发现了既定设计与文件之间的六处不一致。(i) 引入$f(x)$后，机器几乎从练习模块中消失：四年级的29个练习模块中有19个包含机器，五年级的14个中有12个包含机器；但七年级的47个中为0个，八年级的19个中为1个，九年级的40个中为0个，十年级的71个中为1个，其中八年级和十年级的出现仅在评分标准中。(ii) 没有任何练习要求学生绘制机器。(iii) 有两篇公开章节先介绍关系、后介绍机器（五年级，顺序为RMMM；MYP 5，顺序为RMF，先介绍关系和序对集合），另有四篇没有带机器标签的区块（九年级、十年级、MYP 1、MYP 2），尽管九年级章节用于逆向运行计算程序。(iv) 九年级章节没有关于输出的唯一性的练习，而七年级和八年级共有五个此类书面练习：其中四个仅在MYP 5中提供，一个在任何章节中都没有。(v) 书面区块没有通过任何公开章节相互关联：六年级关于机器图像的区块及其练习、七年级的开篇问题和定义都是如此。(vi) 机器人是为14至17岁的学生绘制的：它出现在九年级的开篇问题中，该问题在九年级和MYP 5中提供；也出现在十一年级的定义中，该定义在文凭项目一年级中提供。

12.3 审计后进行的修订

修订于2026年11月2日完成，形成了所谓“之后”的分析状态。在源文件中：绘制机器人并将其与方框并列、同时命名方框的备注（546182）；九年级中将方框与直线并列，并定义“机器接受的输入”（30614）；九年级开篇问题中用方框代替机器人（30613）；从十一年级定义中删除机器人（4492）；“用……表示”中的机器及协变句（331804）；将转换绘制为双向运行的机器（444323）；将计算程序表示为链式机器，并按逆序反向运行（299656）；定义域中的“机器接受的输入”（3961）；将复合表示为两台链式机器（3969），并通过 $+3$ 然后 -3 (3973)引入反函数；七年级关于将函数绘制为机器的五道书面练习组成的练习组（546183–546191）；九年级反向运行的平方机器（546193）；以及对现有区块的修补——只有点是机器的结果（202177），连接表格中的点是一种猜想（30470, 422895），一个班级的情境（291898），“符合条件的规则”出现在神秘机器中（291818, 291826, 291844），以及在双规则机器中询问为什么两台机器对每个输入都给出相同输出的问题（291836）。在公开章节中：五年级 章节以机器开篇，机器人只出现一次；其中机器人配套的八道练习被关于机器的书面练习取代；九年级 章节加入了关于唯一性的五道书面练习、绘图练习组和平方机器；MYP 5章节先介绍机器，再介绍关系和序对集合。11月3日又进行了两项修正：九年级 章节的坐标平面从章节开头移至图像之前，垂线检验中标记的点（图3）也移到了曲线上。表1和表2给出了修订前后的数量。仍存在的情况是：九年级、MYP 1和MYP 2章节在课程中包含机器，但其任何练习中都没有机器；除各有一个区块外，机器仍未出现在八年级和十年级的练习中；六年级的图像定义（202177）以及七年级的开篇问题和定义仍未建立关联；练习291850现在安排在五年级中。

12.4 进阶序列未涉及的内容

协变在关系层级中有定义，并在衔接处提及一次，但没有在函数层级中进行练习。除数字之外的集合间的函数只出现在少数练习中。仅由图像给出的函数会被读取，而不会被构造。十一年级会命名陪域；在高等教育第一年，陪域在两个函数相等中的作用得到明确说明。函数族承担了后续关于图像和变化的大部分工作，但不在本文讨论范围内。

12.5 实证评估的假设

假设 1。 在4至5年级接触过常函数机器和双规则机器的学生，在14至15岁时，在Markovits等（1986）所用类型的任务中，比从关系入手学习的课程中的学生更常接受常函数以及一个函数可以有两个公式这一观点。

假设 2。 曾将函数画成链式机器的学生，在Oehrtman 等（2008）报告的任务中，比未曾这样做的学生更常通过代入计算 $f(x+a)$。

假设 3。 与其他方面相当但未接触过这句话的学生相比，从四年级起接触过关于连接点的这句话的学生，更常区分测量值和插值估计值；同时，当规则已知时，他们仍会求函数在中间输入值处的值。

假设 4。 在匹配的任务中，与其他方面相当但未接触过相关内容的学生相比，曾逆向操作平方机器的学生更常能正确区分求原像与函数求逆。

关于协变，没有提出任何假设：在预测方面，这一进阶序列没有为其在函数层级中留出足够空间。

12.6 局限性

作者设计了进阶序列，撰写了修订内容，并进行了审计。标记是针对英文部分的正则表达式；标记记录某个标记是否存在，而所有关于某项用途的陈述都是通过阅读得出的，但阅读过程并未进行双重编码。标记包括嵌入练习模块中的评分标准，不仅限于面向学生的提示，因此可能遗漏相关任务：546185号板块的绘图指令就未被标记。投影描述的是各章节展示了什么，而非实际教授了什么。关于机器本身的文献较为匮乏，且部分涉及成年人（McGowen 等人，2000年）；据此提出的论断属于设计假设。

13 结论

一台机器贯穿了从四年级到十年级的进阶序列：一个输入、一条规则、恰好一个输出。它的定义始终不变；变化的是它的图示，从机器人到方框，再到箭头，每种变化各展示一次。从九岁起，这台机器就用来呈现函数概念的难点：一个输入绝不会有两个输出，两个输入可以共享同一个输出，一台机器可能对所有输入都给出相同的答案，规则不一定是公式，两条规则可以定义同一个函数，而且机器可以反向运行。两个共同变化的量仍用关系表示，而序对集合则以图像的形式再次出现。分析也指出了仅靠一台机器无法涵盖的内容：非数值函数、仅由图像给出的函数、定义域与陪域，以及协变。审计显示，一旦写出 $f(x)$，机器便从练习中淡去；修订则让它重新出现在经过审计的函数与关系章节的课程中，以及五年级 和九年级的练习中。以这种方式教学的学生是否会以不同方式理解函数，仍是一个尚未开展评估的问题。

利益冲突

作者设计了本文分析的进阶序列，并开发了用于发布该序列的平台。

致谢

作者在撰写本文期间使用了人工智能语言工具：Claude（Anthropic）协助编写审计脚本、起草修订内容和论文，以及检索和核查书目参考文献；ChatGPT（OpenAI）协助批判性审阅论文计划、修订内容和教师指南。作者设计了这一进阶序列，并对本文内容承担全部责任。

参考文献

M. Artigue。《教学工程》。数学教学研究，9(3):281–308，1990年。卷册标注年份为1988年（期刊网站）或1989年（期刊页面）；本文为1989年八月所作演讲的文本；作者将其引作1990年。

M. Artigue。《教学工程》。载于 R. Douady 和 A. Mercier（编），数学教学研究：精选论文，第41–65页。La Pensée Sauvage，格勒诺布尔，1992年。M. Ayalon、A. Watson 和 S. Lerman。通过定义和例子揭示学生对函数的概念化。数学教育研究，19(1):1–19，2017年。doi: 10.1080/ 14794802.2016.1249397。已核实：记录及 ERIC 摘要（EJ1137493）；未阅读全文。

A. Bell 和 C. Janvier。对表示情境的图像进行解读。《为了数学的学习》，2(1):34–42，1981。URL `https://flm-journal.org/Articles/342368A19260FACE7BC364ED38AD7.pdf`。文章标注的期号日期为1981年7月；FLM目录将第2卷第1期列为1982年。

M. Blanton、B. M. Brizuela、A. M. Gardiner、K. Sawrey 和 A. Newman-Owens。6岁儿童关于概括函数关系的思维学习轨迹。数学教育研究杂志，46(5):511–558，2015。doi: 10.5951/jresematheduc.46.5.0511。已核实：文献记录及摘要；未阅读全文。

I. Bloch。《高中函数概念学习的图形环境》。*Petit x*，58：25–46，2002年。URL `https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/58x3_1561037777011-pdf`。D. Breidenbach、E. Dubinsky、J. Hawks 和 D. Nichols。函数的过程概念的发展。数学教育研究，23(3)：247–285，1992年。doi：10.1007/BF02309532。已核实：记录及 ERIC 摘要（EJ453573）；未阅读全文。M. Carlson、S. Jacobs、E. Coe、S. Larsen 和 E. Hsu。在对动态事件建模时应用协变推理：一个框架与一项研究。数学教育研究杂志，33(5)：352–378，2002年。doi：10.2307/4149958。已核实：记录及摘要（NCTM）；未阅读全文。D. W. Carraher、A. D. Schliemann、B. M. Brizuela 和 D. Earnest。早期数学教育中的算术与代数。数学教育研究杂志，37(2)：87–115，2006年。doi：10.2307/30034843。已核实：记录及摘要（NCTM）；未阅读全文。D. H. Clements 和 J. Sarama。数学教育中的学习轨迹。数学思维与学习，6(2)：81–89，2004年。doi：10.1207/s15327833mtl0602_1。

J. Confrey 和 E. Smith。指数函数、变化率与乘法单位。数学教育研究，26(2-3)：135–164，1994年。doi：10.1007/BF01273661。部分核实：记录已确认（Crossref）；其中一段内容通过 Thompson和Carlson（2017）获知。J. Confrey 和 E. Smith。分割、协变及其在指数函数发展中的作用。数学教育研究杂志，26(1)：66–86，1995年。doi：10.5951/jresematheduc.26.1.0066。已核实：记录及摘要（NCTM）；未阅读全文。S. Coppé、J.-L. Dorier 和 I. Yavuz。在法国十年级函数概念教学中数值表和变化表的使用。数学教学研究，27(2)：151–186，2007年。URL https://archive-ouverte.unige.ch/unige:16617。M. Doorman、P. Drijvers、K. Gravemeijer、P. Boon 和 H. Reed。工具使用与函数概念的发展：从重复计算到函数思维。国际科学与数学教育期刊，10(6)：1243–1267，2012年。doi：10.1007/s10763-012-9329-0。已核实：记录及摘要；未阅读全文。E. Dubinsky 和 G. Harel。函数的过程概念的本质。载于 G. Harel 和 E. Dubinsky（编），《函数概念：认识论与教育学视角》，MAA 笔记第 25 卷，85–106 页。美国数学协会，华盛顿特区，1992年。部分核实：页码来自三篇引用该文的作品；未阅读章节（其中一段内容通过 Oehrtman 等人 2008年获知）。R. Duval。符号表征系统与思维的认知运作。教学与认知科学年刊，5：37–65，1993年。URL https://publimath.fr/ist93004/。已核实：记录及摘要（Publimath）；已下载传真件，但为扫描件，未阅读。R. Even。学科知识与学科教学知识：未来中学教师与函数概念。数学教育研究杂志，24(2)：94–116，1993年。doi：10.5951/jresematheduc.24.2.0094。已核实：记录及摘要（NCTM）；未阅读全文。E. R. Fyfe、N. M. McNeil、J. Y. Son 和 R. L. Goldstone。数学与科学教学中的具体性渐隐：一项系统综述。《教育心理学评论》，26(1)：9–25，2014年。doi：10.1007/s10648-014-9249-3。国际文凭组织。文凭课程：数学：分析与方法指南（首次评估时间：2021年）。国际文凭组织，卡迪夫，2019年。2019年2月出版；已阅读项目副本，无公开 URL。国际文凭组织。中学项目：数学指南（自2020年9月/2021年1月起使用）。国际文凭组织，卡迪夫，2020年。2020年2月出版；已阅读项目副本，无公开 URL。I. Kleiner。函数概念的演变：简要综述。《大学数学杂志》，20(4)：282–300，1989年。doi：10.1080/07468342.1989.11973245。部分核实：记录、ERIC 摘要（EJ404371）及开头段落已阅读；未阅读全文。G. Leinhardt、O. Zaslavsky 和 M. K. Stein。函数、图像与绘图：任务、学习与教学。《教育研究评论》，60(1)：1–64，1990年。doi：10.3102/00346543060001001。已核实：记录及 ERIC 摘要（EJ414297）；未阅读全文。Z. Markovits、B.-S. Eylon 和 M. Bruckheimer。今日与昨日的函数。《为了数学的学习》，6(2)：18–24，28，1986年。URL https://flm-journal.org/Articles/435A001FB092B66926110B380E96D.pdf。

M. McGowen、P. DeMarois 和 D. Tall。将函数机器作为认知根源。在国际数学教育心理学学会北美分会第 *22* 届年会论文集（*PME-NA 22*），第 247–254 页，亚利桑那州图森，2000年。网址： https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466958.pdf。ERIC ED466958。

法国国民教育部。初中三年级数学课程。2008年8月28日第 n° 6 号官方特别公报，2008年。部分核实：未查阅官方特别公报文本；关于函数的表述与下诺曼底数学教育研究所和卡昂学区督学的幻灯片（https://irem-archive.unicaen.fr/IMG/pdf/nvx_programme_3eme_site_irem.pdf）以及斯特拉斯堡学区的一份评论中所述完全一致。

法国国民教育部。2026年2月18日法令（第四学段法语和数学课程），附件2：第四学段数学课程，nor MENE2602912A。《官方公报》n° 10，2026年3月5日，2026a。网址 https://www.education.gouv.fr/bo/2026/Hebdo10/MENE2602912A。部分核实：官方公报页面拒绝访问（403）；附件根据项目副本阅读。

法国国民教育部。普通和技术高中二年级数学课程（2026年2月26日法令），nor MENE2602914A。《官方公报》n° 14，2026年4月2日，2026年。网址 https://www.education.gouv.fr/bo/2026/Hebdo14/MENE2602914A。部分核实：官方公报页面拒绝访问（403）；日期和NOR来自搜索结果；附件根据项目副本阅读。

法国国民教育、青年与体育部。《第四学段数学课程》（2020年秋季开学时生效的版本）。官方公报第 ° 31 号，2020年7月30日，2020年。部分核实：官方公报页面拒绝访问（403）；文本读取自一份副本（https://pi.ac3j.fr/wp-content /uploads/2025/11/Programme_Cycle_4_Mathematiques_Juillet_2020.pdf）。

法国国民教育、高等教育与研究部。《数据的组织与管理、函数：理解和使用函数概念》。数学课程配套资源（第四学段），Eduscol，2016年3月，2016年。网址 https://eduscol.education.fr/document/17287/download。

法国国民教育与青年部。《普通与技术高中二年级数学课程大纲》，NOR mene1901631a。官方特别公报第° 1 号，2019年1月22日，2019年。网址 https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901631A.htm。部分核实：官方公报页面拒绝访问（403）；NOR来自搜索结果；附件读取自项目副本。

M. Oehrtman、M. Carlson 和 P. W. Thompson。《促进学生函数理解连贯性的基础推理能力》。载于 M. P. Carlson 和 C. Rasmussen 编，《建立联系：本科数学教育研究与教学》，MAA 笔记第 73 号，第 27–42 页。美国数学协会，华盛顿特区，2008年。doi: 10.5948/UPO9780883859759.004。

A. Sfard。《数学概念的二重性：关于过程与对象作为同一枚硬币两面的思考》。《数学教育研究》，22(1):1–36，1991。doi: 10.1007/BF00302715。

M. A. Simon。《从建构主义视角重构数学教学法》。《数学教育研究杂志》，26(2):114–145，1995年。doi: 10.2307/749205。

A. C. Stephens、N. Fonger、S. Strachota、I. Isler、M. Blanton、E. Knuth 和 A. M. Gardiner。《小学生函数思维的学习进阶》。数学思维与学习，19(3):143–166，2017年。doi: 10.1080/10986065.2017.1328636。已核实：书目信息和摘要；未阅读全文。

D. Tall、M. McGowen 和 P. DeMarois。《作为函数概念认知根源的函数机器》。载于北美数学教育心理学国际小组第*22*届年会论文集（*PME-NA 22*），第255–261页，图森，亚利桑那州，2000年。网址 https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466964.pdf。ERIC ED466964。V. Tariel-Adam。《共享单位，测量长度：一年级至八年级分数教学进程的教学法分析》。arXiv:2610.14735，2026年。P. W. Thompson。《学生、函数与本科课程》。载于 E. Dubinsky、A. H. Schoenfeld 和 J. J. Kaput 编，《大学数学教育研究，*I*》，第4卷《*CBMS*数学教育议题》，第21–44页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1994年。doi: 10.1090/cbmath/004/02。P. W. Thompson 和 M. P. Carlson。《变化、协变与函数：数学思维的基础方式》。载于 J. Cai 编，《数学教育研究纲要》，第421–456页。美国数学教师委员会，雷斯顿，弗吉尼亚州，2017年。F. Vandebrouck。《函数研究的视角与工作领域》。教学与认知科学年刊，16:149–185，2011年。网址 https://bibnum.publimath.fr/IST/IST11001.pdf。S. Vinner。《概念定义、概念意象与函数概念》。《科学与技术中的数学教育国际期刊》，14(3):293–305，1983年。doi: 10.1080/002073 9830140305。已核实：书目信息和出版方摘要；未阅读全文。S. Vinner 和 T. Dreyfus。《函数概念的意象与定义》。数学教育研究杂志，20(4):356–366，1989年。doi: 10.5951/jresematheduc.20.4.0356。已核实：书目信息和摘要（美国全国数学教师理事会）；未阅读全文。E. A. Warren、T. J. Cooper 和 J. T. Lamb。《探究小学课堂中的函数思维：早期代数推理的基础》。《数学行为杂志》，25(3):208–223，2006年。doi: 10.1016/j.jmathb.2006.09.006。已核实：书目信息和 ERIC 摘要（EJ800610）；未阅读全文。A. P. Youschkevitch。《19世纪中叶以前的函数概念》。《精密科学史档案》，16(1):37–85，1976年。doi: 10.1007/BF00348305。部分核实：已确认书目信息（Crossref, zbMATH 0362.26006）；未阅读内容。

公共资源

所引章节均可在 https://commeunjeu.org 公开查阅：法国课程， https://commeunjeu.org/cours/fr-grade-4-organizing-and-handling-data/, https://commeunjeu.org/cours/fr-grade-5-data-and-charts/, https://commeunjeu.org/cours/fr-grade-7-functions/, https://commeunjeu.org/cours/fr-grade-7-equations/, https://commeunjeu.org/cours/fr-grade-8-functions/, https://commeunjeu.org/cours/fr-grade-9-functions/, https://commeunjeu.org/cours/fr-grade-10-functions/；国际文凭组织， https://commeunjeu.org/cours/ib-pyp-4-patterns-and-functions/, https://commeunjeu.org/cours/ib-pyp-4-data-handling/, https://commeunjeu.org/cours/ib-pyp-5-number-sequences-and-rules/, https://commeunjeu.org/cours/ib-myp-1-line-graphs/, https://commeunjeu.org/cours/ib-myp-2-coordinates-and-straight-line-graphs/, https://commeunjeu.org/cours/ib-myp-2-formulae/, https://commeunjeu.org/cours/ib-myp-5-functions/, https://commeunjeu.org/cours/ib-myp-5-extended-further-functions/。根据同一批材料编写的教师指南见 https://commeunjeu.org/enseignants/enseigner-les-fonctions/。

B 审计约定

审计会读取指定提交版本中源文件每个区块的英语部分（四至十一年级及两个关系层级的课程和练习集）。区块有标识符且没有链接时，便由文件拥有；镜像则包含链接和正文副本，并单独计数。文本中含有“machine”一词或机器的图像时，该区块会被标记为机器；文本中出现“draw”“complete”或“fill in”，且其后 40 个字符内出现“machine”时，会被标记为绘图，因此有些绘图指令会被漏掉；当区块将某种对应关系表述为不是函数，或提及垂线检验、两个输出或多个输出时，会被标记为不是函数；提及常函数时，会被标记为常数函数；包含形如 $f(x) = \ldots$ 的等式时，会被标记为公式。答案与练习分开计数。投影脚本会沿课程章节中的每个链接找到对应的源区块，并为该区块应用机器标签；它还会记录课程中包含机器（M）、定义关系（R）或不借助机器定义函数（F）的区块顺序。源文件的两个状态分别为提交版本 `596ec5ecec`（之前）和 `e8927be52e`（之后），投影的两个状态则为 `596ec5ecec` 和 `d809e0071a`。