arXiv:2611.29791v1 [cond-mat.quant-gas] 22 Nov 2026

不平衡费米超流体中受短程关联启发的占据效应的唯象分解

Lucas A. Souza [1],
*[1] Minas Gerais, Brazil

不平衡双组分费米超流体通常采用尖锐的费米阶跃占据数来描述，然而相互作用系统在费米面以下会出现耗尽，并形成高动量尾部。我们引入一种扇区分辨唯象框架，其中预先指定的一种受短程关联（SRC）启发的动量分布，可用于修正反常配对贡献（模型 P）、不平衡诱导的阻塞项（模型B），或同时修正两者（模型 P+B）。我们通过巨势景观，以及对三维和二维中配对/相分离态至极化正常态边界的定密度重构，对四种实现方式——理想情形、P、B 和 P+B——进行比较。在这两种维度中，配对扇区的修正几乎解释了临界极化的全部降低，而阻塞扇区的修正仍处于次要地位。因此，相边界形成两组近乎简并的情况：理想情形 $\simeq$ B 和 P $\simeq$P+B。这些结果在所述唯象构造的范围内，量化了预先指定的受短程关联启发的占据数如何分别传递至不平衡超流体的配对扇区和阻塞扇区。

I. 引言

具有不等粒子数的双组分费米气体，为研究配对、极化与相分离之间的竞争提供了直接的体系。在化学势差或粒子数不平衡较小时，配对有利于形成超流态；随着两个费米面之间的不匹配增大，体系则可能转变为极化正常态，或分离成配对区域与正常区域。Bedaque、Caldas 和 Rupak [1] 在三维中确立了这种竞争；Caldas [2] 也明确讨论了相应的零温超流—正常态量子相变及其临界不平衡度。此后，人们通过平均场和超越平均场方法 [3–10], 以及实验 [11, 12]对这一问题进行了研究。其二维实现引入了与二维束缚态及 BCS–BEC演化 [13, 14]相关的额外结构。在这两种维度中，相边界最终由固定密度下配对态、极化正常态和相分离构型之间的竞争决定。

对这一问题的大多数处理都采用理想的阶跃函数占据数，$n_\sigma(k) = \Theta(k_{F\sigma} - k)$。然而，相互作用费米系统在费米动量以下表现出耗尽，在其以上则具有非零占据数，其中包括与短程关联相关的高动量分量。这种结构被Tan接触关系 [15–17], 所编码，并已在核系统和超冷原子系统 [18–20], 中得到观测；在当代对普适性和尺度分离动量分布的描述中 [21–23]，它仍是一个活跃的研究课题。

基于占据数的现象学处理通过以含有高动量强度的耗尽分布取代理想费米阶跃，将关联效应纳入考量。在固定的动力学框架内应用时，这一方法可分离出与动量占据本身相关的响应。该方法已用于研究短程关联引起的核物质状态方程、中子星半径、潮汐形变能力及相关可观测量的变化 [24–26]。本文将同样的比较策略应用于不平衡配对，使用理想占据数和受短程关联启发的占据数，评估同一个热力学泛函。

关联占据与超流配对之间的联系在这里尤其重要。核物质计算表明，与理想占据数结果相比，谱强度再分配和高动量分量可以显著降低配对能隙 [27–29]。近期研究还强调，配对与高动量结构在动力学上相互交织，而非彼此独立的要素 [30]。这些结果促使我们探讨，受短程关联启发的占据数不仅如何修正平衡态配对能隙，还如何影响配对与粒子数不平衡之间的竞争。

在不平衡系统中，同一动量分布通过两个物理上不同的扇区影响问题。首先，费米面附近的耗尽会改变反常配对贡献中依赖于占据数的权重。其次，两个组分之间的占据数差异会改变由不平衡导致的阻塞动量区间的有效权重。我们分别用配对扇区方案（P）和阻塞扇区方案（B）来表示这两种响应；二者均由同一相关占据数生成，且在尖锐阶跃极限下都严格退化为理想理论。因此，这一构造是对共同的短程关联启发式输入进行扇区
解析的唯象实现。

我们比较同一热力学框架的四种实现：理想参考系、配对扇区模型 P、阻塞扇区模型 B，以及组合模型 P+B。这种分解衡量临界极化的变化在反常贡献与阻塞贡献之间的分配情况。P 修正

* lasouza@if.usp.br

作用于反常动量区域，而 B 仅在存在不平衡诱导的阻塞区间时才会激活。计算确定了各项贡献的大小与符号、它们的综合效应，以及由此产生的层级关系在二维和三维之间的延续性。

分析分别在三维和二维中独立进行。三维表述遵循文献 [1]，中的正则化，而二维计算则采用文献 [13]中的接触相互作用处理。后者置于文献 [14]所综述的更广泛的现代二维 BCS–BEC物理背景下。在这两种情况下，巨势景观都辅以完整的固定密度重构，因此，所报告的相变是在所考虑模型空间内，配对/相分离态与极化正常态之间的正则系综边界。

本文其余部分安排如下。第 II节建立理想三维和二维参考体系、关联占据以及 P/B 扇区分解。第III节总结数值实现和收敛性测试。第IV节展示巨势景观和正则系综相边界，第 V 节讨论相同的受短程关联启发的占据如何在两种维度中的配对和阻塞扇区内传递。

II. 理论框架

A. 不平衡双组分费米系 stem

我们考虑由组分 A 和 B 构成的双组分费米气体，两组分质量相等，均为 M，化学势分别为 μ_A 和 μ_B。在整个计算过程中，我们令 $\hbar = 1$ ，并在数值实现中采用 $M = 1$ 。平均化学势和不平衡场定义为

$$\mu = \frac{\mu_A + \mu_B}{2}, \qquad h = \frac{\mu_B - \mu_A}{2}, \tag{1}$$

因此， $\mu_A = \mu - h$ 和 $\mu_B = \mu + h$。相对于平均化学势定义的单粒子色散关系为

$$\xi_k = \frac{k^2}{2M} - \mu, \tag{2}$$

用 μ 和 h 表示时，两组分具有相同的色散关系。两组分之间的配对由单一复序参量 Δ 描述，由此得到的 Bogoliubov 准粒子能量为

$$E_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}. \tag{3}$$

对于均匀的固定-μ， h计算，能量均以平均化学势 μ 为基准表示，动量以 $\sqrt{2M\mu}$为基准，并以相应的自然单位表示巨正则势密度。在图 2所示的代表性景观中，我们在三维中采用 $\mu = 1$ 。在二维中，$\mu = 0.9841$ 由平衡平均场关系$\mu = \epsilon_F - |\epsilon_B|/2$ 和 $\Delta_0^2 = 2\epsilon_F|\epsilon_B|$得到，其中 $\Delta_0 \simeq 0.252$ 和$\epsilon_F = 1$。这些选择仅设定绘图尺度，不会影响正则系综中的相边界计算。

在等质量、固定（μ, h）的表示下，两个准粒子分支为 $E_k - h$ 和 $E_k + h$。只要满足以下条件，较低的分支 $E_k - h$ 就可能在有限的动量区间内变为负值：

$$E_k < h \iff |\xi_k| < \sqrt{h^2 - \Delta^2}, \tag{4}$$

这要求 $h > \Delta$；这就是阻塞区间，它会阻碍不平衡系统中的配对，造成泡利阻塞。

首先根据巨势 $\Omega(\mu, h, \Delta)$ 求得均匀分支。为确定粒子数固定时的物理边界，随后将这些分支转化到正则系综中，并与相应的混合构型进行比较。这个区别至关重要：化学势固定时 Ω 的驻点结构确定了可用的均匀分支，而临界极化则由定密度能量竞争决定。

B. 理想平均场参考

引入关联占据数之前，我们先在每种维数下确定理想（阶跃占据）参考；当占据数替换为尖锐费米阶跃时，第IIC 节中的每个模型都会退化到这一极限， $n_\sigma(k) = \Theta(k_{F\sigma} - k)$。

a. 三维。 遵循 Bedaque、Caldas 和 Rupak [1], ，截断正则化的巨势为

$$\Omega_{3D}(\Delta) = \frac{\Delta^2}{g_{\text{eff}}} + \int_0^\Lambda \frac{k^2 dk}{2\pi^2}\Big[\xi_k - E_k - (h - E_k)\,\Theta(h - E_k)\Big]. \tag{5}$$

这里， Λ是接触相互作用理论的紫外动量截断。其取值远高于与 μ、 h和 Δ相关的动量尺度。将裸耦合根据 Λ进行一致调整后，低能可观测量应不再受截断进一步增大的影响。

我们不直接改变依赖于截断的耦合，而是使用平衡参考能隙 Δ_0 作为控制参数。对于每个选定的 Δ_0，通过要求 $h = 0$ 巨势在 $\Delta = \Delta_0$处具有一个稳定极小值，来确定 $g_{\text{eff}}(\Lambda)$：

$$\frac{1}{g_{\text{eff}}(\Lambda)} = \int_0^\Lambda \frac{k^2\,dk}{2\pi^2}\,\frac{1}{2\sqrt{\xi_k^2 + \Delta_0^2}}. \tag{6}$$

因此， Δ_0 参数化了在三维中进行的相互作用扫描。

为了用真空s波散射长度 a表示相同的相互作用，依赖于截断的耦合

必须与重整化接触相互作用建立关联。对于锐动量截断，

$$\frac{1}{g_{\rm eff}(\Lambda)} = -\frac{M}{2\pi a} + \int_0^\Lambda \frac{k^2\,dk}{2\pi^2}\,\frac{1}{2\epsilon_k}, \qquad \epsilon_k = \frac{k^2}{2M}, \quad (7)$$

或者，在计算真空积分后，

$$\frac{1}{g_{\rm eff}(\Lambda)} = -\frac{M}{2\pi a} + \frac{M\Lambda}{2\pi^2}. \quad (8)$$

将这一关系与方程（6）结合可得

$$\frac{1}{k_F a} = \frac{\Lambda}{\pi k_F} - \frac{2\pi}{M k_F\, g_{\rm eff}(\Lambda)}. \quad (9)$$

方程（9）用于将由 Δ_0 定义的相互作用值转换为标准散射长度变量$1/(k_F a)$。数值实现采用 $M = 1$。

b. 二维。按照 Caldas、Mota、Farias 和 Souza [13], 的做法，二体接触相互作用直接通过二体束缚能 ϵ_B 而非耦合常数进行正则化，从而得到径向巨势

$$\Omega_{2D}(\Delta) = \int_0^\Lambda \frac{k\,dk}{2\pi}\left[\xi_k - E_k + \frac{\Delta^2}{2\epsilon_k + |\epsilon_B|} - (h - E_k)\Theta(h - E_k)\right], \qquad \epsilon_k \equiv \frac{k^2}{2M}. \quad (10)$$

这里 ϵ_k 是自由（真空）色散关系，不同于式（ $\xi_k = \epsilon_k - \mu$ （2）中的化学势平移后的 ϵ_B：正则化反项由真空二体束缚能 μ确定，因此与 Λ 无关，这与标准的二维接触相互作用正则化一致。相互作用已通过真空束缚能完成重整化，因此 $\Lambda = 16$ 只是对收敛积分进行数值截断。取值 较为保守；第 III 节验证了，扩展积分范围后，所报告的可观测量保持不变。

c. 均匀分支。在这两种维度下，Ω(Δ)的三个相关驻定结构分别为：BCS解（在 $\Delta \neq 0$处的极小值）、正常态解（$\Delta = 0$）以及Sarma型解（一个内部驻点，通常是Ω(的局部极大值)Δ，当 h >0时）。与参考文献一致，Sarma分支仅作为均匀稳定性诊断予以保留；在固定密度下，它不被视为基态候选，因为第IIF3 节所述的混合态通常占优。

C. 受短程关联启发的关联占据

关联占据数是 P 和 B 扇区共同的输入。其形状包含费米动量以下的耗尽、附近减弱的不连续性k_F，以及渐近的 k^{-4} 尾部，这些特征受到微观计算和接触关系的启发 [15–17，21–23]。下文给出理想和受短程关联启发的无量纲分布，并按组分依赖的动量 $k_{F\sigma}$进行缩放。在一次给定的计算中，分布参数保持固定，而 $k_{F\sigma}$ 则随 (μ, h) 变化。规定的占据数仅通过下文定义的配对权重 $\Phi(k)$ 和阻塞权重 $B_{\rm SRC}(k)$ 进入泛函。这使同一关联分布能够分别改变配对贡献和阻塞贡献，而相互作用及其余准粒子结构保持不变——

。热力学密度通过对巨势求导独立获得。由于尺度 $k_{F\sigma}$ 取决于化学势，且巨势还包含配对相干因子，积分后的规定占据数不一定与相应的热力学密度完全一致。

1. *Momentum-distribution model*

关联占据数建模为分段定义的分布：费米动量以下发生耗尽，在 $q = 1$处的不连续性减弱，并带有高动量 k^{-4} 尾部，这与 Tan 接触标度一致。对于组分 σ，我们写作 $q = k/k_{F\sigma}$，其中

$$k_{F\sigma} = \sqrt{2M\mu_\sigma}, \qquad \mu_A = \mu - h, \quad \mu_B = \mu + h. \quad (11)$$

由于 $k_{F\sigma}$取决于（μ, h），分布 n_σ（k） $=n^{(d)}$ 分布（$k/k_{F\sigma}$）会随热力学导数 $-\partial\Omega/\partial\mu$ 和 $-\partial\Omega/\partial h$而变化。计算过程中，其无量纲形式保持不变。

对于理想参考系，无量纲占据数为尖锐的费米阶跃，

$$n_{\rm ideal}(q) = \Theta(1 - q). \quad (12)$$

对于受短程关联启发的分布，我们采用如下分段形式

$$n^{(d)}_{\rm corr}(q) = \begin{cases} \mathrm{clip}(n_0 - (n_0 - n_{1-})q^\alpha, 0, 1), & q < 1, \\ \mathrm{clip}\big((n_{1+} - c_d)q^{-\beta} + c_d q^{-4}, 0, 1\big), & q \geq 1, \end{cases} \quad (13)$$

其中 d = 2, 3 表示维数，而 clip(y, 0, 1) ≡min[1, max(0, y)] 将占据数限制在

区间 $[0,1]$内。对于表 I 中的所有参数集，未经过截断的表达式本身已处于 $[0,1]$范围内；因此，截断操作不起作用，也不会改变下文的归一化。

系数 c_d 固定了关联分布的归一化。定义

$$I^{(d)}_{\text{below}} = \frac{n_0}{d} - \frac{n_0 - n_{1-}}{\alpha + d}, \qquad c_d = \frac{\dfrac{1}{d} - I^{(d)}_{\text{below}} - \dfrac{n_{1+}}{\beta - d}}{\dfrac{1}{4-d} - \dfrac{1}{\beta - d}}, \tag{14}$$

可得

$$\int_0^\infty n^{(d)}_{\text{corr}}(q)\, q^{d-1}\, dq = \frac{1}{d}, \tag{15}$$

分别对应二维中的径向测度 $k\,dk$ 和三维中的径向测度 $k^2 dk$。

对于理想选择或关联选择，各物种占据数为

$$n_\sigma(k) = n^{(d)}_{\text{profile}}\left(\frac{k}{k_{F\sigma}}\right), \qquad \sigma = A, B, \tag{16}$$

其中，$n^{(d)}_{\text{分布}} = n_{\text{ideal}}$ 适用于理想模型，而 $n^{(d)}_{\text{分布}} = n^{(d)}_{\text{corr}}$ 适用于受短程关联启发的模型。

参数 n_0、n_{1-}和 n_{1+} 决定了 k_F 以下的耗尽以及 $q = 1$处减小的不连续性，而 α 和 β 控制费米面以下和以上的动量依赖性。显式的 $c_d q^{-4}$贡献确定了渐近尾部，并在表 $q \gtrsim 2$ I中的所有非理想分布里占主导地位。二维和三维中使用相同的（n_0、n_{1-}、n_{1+}、α、β）取值；只有 c_d会发生变化，以满足式（15）。

表 I 总结了计算中所采用的剖面。其耗尽和不连续性范围由关联核物质和配对研究 [27–29] 所指导，并被视为敏感性集合，而不是微观拟合。主要结果采用中子物质-强 剖面，而备选剖面则用于检验该扇区层级结构的稳定性。理想 剖面恢复了第 IIB节中的阶跃占据。

表 I. 方程（13）–（15）中采用的参考关联占据分布。主图和引用的数值结果使用 *NM-strong* 参数集，而 *NM-moderate* 和 *SM-strong* 则用于检验扇区层级关系的敏感性。NM 表示受核物质启发的耗尽，SM 表示更强的示意性修正；其范围参考文献 [27–29] 设定，并非旨在作为微观拟合。

参数集	n_0	n_{1-}	n_{1+}	α	β
理想	1.00	1.00	0.00	2.0	8.0
NM-moderate	0.97	0.90	0.05	2.0	8.0
中子物质-强	0.95	0.86	0.06	1.8	8.0
SM-strong	0.88	0.74	0.10	1.2	8.0

2. *Pairing-coherence modification: Model P*

因子 $1 - 2n_\sigma(k)$ 衡量了相干配对通道可利用的粒子–空穴占据不平衡。因此，我们使用关联占据来定义对称的、动量依赖测度

$$\Phi(k) = \sqrt{|1 - 2n_A(k)|\,|1 - 2n_B(k)|}\,, \tag{17}$$

对于理想阶梯占据数，该式恒等地满足 $\Phi(k) = 1$。在巨正则势被积函数中，$\Phi(k)^2$ 仅乘在<style id='7'>反常、依赖能隙的贡献上，而不是正常态部分。记作 $\xi^0_k \equiv |\xi_k|$ 后，被积函数的配对 / 正常态部分为

$$(\xi_k - \xi^0_k) + \Phi(k)^2(\xi^0_k - E_k), \tag{18}$$

代替朴素乘积 $\Phi(k)(\xi_k - E_k$。当 $\Phi(k) = 1$时，两种形式一致，恰好恢复公式（5）。当 $\Phi(k) < 1$时，两者不同：公式（18）偏离 $\Delta = 0$极限，

$$\Big[(\xi_k - \xi^0_k) + \Phi(k)^2(\xi^0_k - E_k)\Big]\Big|_{\Delta=0} = \xi_k - \xi^0_k, \tag{19}$$

它与 $\Phi(k)$ 完全无关（因为 $E_k \to \xi^0_k$ as $\Delta \to 0$），而朴素乘积则并非如此。因此，模型 P 被有意定义为一种按扇区解析的探针：$\Delta = 0$ 处的正常态参考值保持不变，只有反常凝聚贡献被重新加权。组合 $\Phi^2(k)$ $= |1 - 2n_A(k)|\,|1 - 2n_B(k)|$ 在交换两个组分时具有对称性，对于理想占据数恒等地化为 1，其动机来自出现在关联配对核中的依赖占据数的相干因子，包括文献 [27] 中的短程关联处理。几何平均以同等方式处理两个分量，在费米面不连续性之间保持非负，并产生乘积 Φ^2，用于对两个组分的反常通道进行加权。这一构造提供了当前框架中始终采用的规定占据数的配对扇区操作性实现。

3. *Correlated Pauli blocking: Model B*

对于理想阶梯式占据数，占据失配本身就是两个费米动量之间区间的指示量，

$$B_0(k) = \Theta(k_{FB} - k) - \Theta(k_{FA} - k), \tag{20}$$

当 $k_{FA} < k < k_{FB}$ 时等于一，其他情况为零。利用 $k_{F\sigma} = \sqrt{2M\mu_\sigma}$（式（11））， 边界 k_{FA} 和 k_{FB} 界定了谱阻塞区间$k_{1,\,2} = \sqrt{2M\,(\mu \mp \sqrt{h^2 - \Delta^2})}$，因此对于所有 $\Delta \geq 0$，只要满足 $h > \Delta$，$B_0(k)\ \Theta(h - E_k) = \Theta(h - E_k)$ 便恒成立。因此，理想模型无需额外的动量窗口，便能重现文献 [1, 13] 中的阻塞项

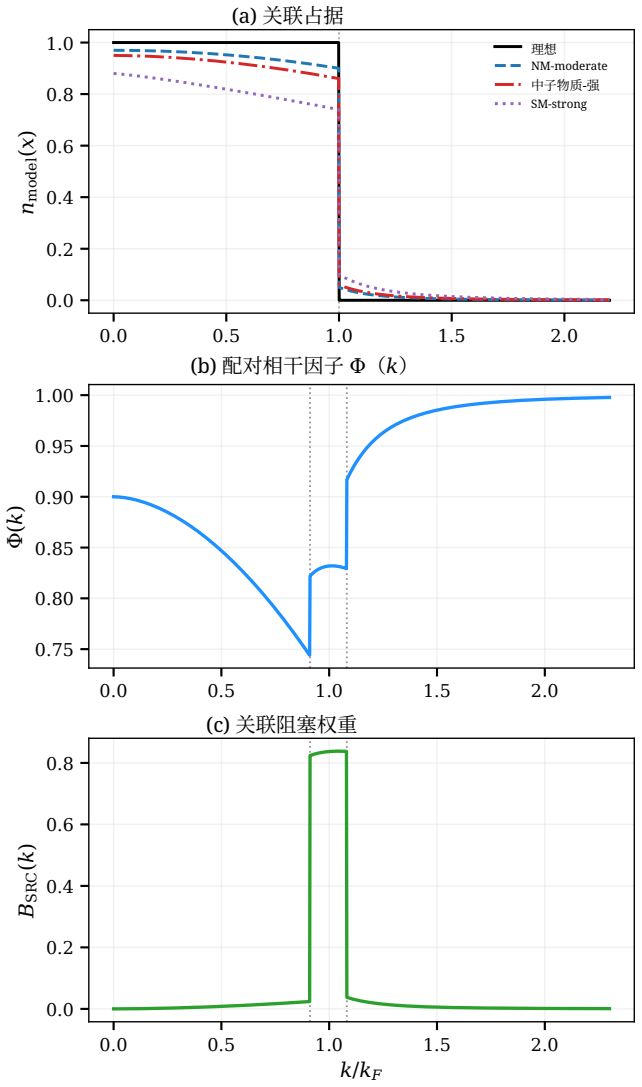


图1。唯象构造的动量空间输入。(a) 理想和关联占据分布$n_{\mathrm{model}}(x)$，其中 $x = k/k_{F\sigma}$，对应三组基准参数集。(b) 方程($\Phi(k)$中的配对相干因子 17。(c) 方程($B_{\mathrm{SRC}}(k)$中的关联阻塞权重 21。图(b)和(c)中的竖直点线表示取决于组分的两个费米动量。后两个面板采用NM-强占据分布，以表示不平衡构型。

因子。模型B以占据不平衡本身取代这一硬区间，并使用关联分布：

$$B_{\mathrm{SRC}}(k) = \big[n_B(k) - n_A(k)\big]_+, \qquad [z]_+ \equiv \max(z, 0). \tag{21}$$

因此，方程(21)是基于占据数对理想阻塞指示函数的直接扩展：在尖锐阶跃极限下，它在 k_{FA}与 k_{FB}之间恰好为一，在区间外为零。其积分权重不同于 $B_0(k)$。减小的积分权重体现了费米面下方的耗尽以及高动量尾部所产生的重叠。阻塞区间存在的谱条件，即方程(4)，与赋予该区间的权重在概念上是不同的。前者决定低能准粒子支何处为负；后者则在耗尽和尾部形成后，保留相同的占据差异解释。在数值实现中， $B_{\mathrm{SRC}}(k)$使用方程(21)中的精确正部进行计算。另一方面，方程($\Theta(h - E_k)$–(5)中的赫维赛德因子 10)通过平滑逻辑门进行计算，以确保其在第 III节数值求解器中的可微性。

占据输入及由其构造的两个动量相关因子如图 1 所示。占据分布决定了配对相干因子 $\Phi(k)$以及关联阻塞权重 $B_{\mathrm{SRC}}(k)$，而这两个量分别进入巨势的不同扇区。

4. *Four-model decomposition*

配对扇区和阻塞扇区独立切换，从而得到本文始终进行比较的四种模型：

model	pairing sector	blocking sector
ideal	$\Phi = 1$	B_0
P	Φ [Eq. (17)]	B_0
B	1	B_{SRC} [Eq. (21)]
$P{+}B$	Φ [Eq. (17)]	B_{SRC} [Eq. (21)]

(22)

模型 P+B 是对现象学方案的完整实现，而 P 和 B 是诊断开关，用于展示共同的占据输入如何分别传递到各个扇区。 $\Phi(k)$ 和 $B_{\mathrm{SRC}}(k)$ 均恢复精确的理想极限。随后通过四模型比较确定各扇区贡献的符号和大小，并检验它们的排序在不同维度和占据分布下是否稳定。

D. 三维表述

汇总第 IIB–II C4 节内容，计算中使用的三维关联占据数巨势为

$$\Omega_{3D}=\frac{\Delta^2}{g_{\rm eff}}+\int_0^{\Lambda}\frac{k^2dk}{2\pi^2}\Big\{\left[(\xi_k-\xi_k^0)+\Phi(k)^2(\xi_k^0-E_k)\right]-B(k)\,(h-E_k)\,\Theta(h-E_k)\Big\},\tag{23}$$

其中 $\Phi(k)$ 和 $B(k)$ 按照方程（22）设定（理想模型使用 $\Phi=1,\ B=B_0$），$g_{\rm eff}$ 由参考间隙 Δ_0处的方程（6）确定，且 $\Lambda=8$ （动量单位由$M=1$设定）用于标准计算。

由于 $\Phi(k)$ 和 $B(k)$ 是瞬时（μ,h）依赖的占据数的固定泛函（第 IIC节），且不依赖于 Δ，因此驻定条件 $\partial\Omega_{3D}/\partial\Delta$ =0 可对四种模型同时写成闭式。利用 $\partial E_k/\partial\Delta=\Delta/E_k$ 并除以 Δ (当$\Delta\neq0$时），

$$\frac{2}{g_{\rm eff}}=\int_0^{\Lambda}\frac{k^2dk}{2\pi^2}\left[\frac{\Phi(k)^2}{E_k}-\frac{B(k)}{E_k}\,\Theta(h-E_k)\right].\tag{24}$$

对于理想模型（$\Phi=1,\ B=B_0,\ h=0$），这可化简为 $2/g_{\rm eff}=\int_0^{\Lambda}k^2dk/2\pi^2\,/E_k$，即在求得的 Δ 处计算公式（6）的结果恰好两倍，这与 $g_{\rm eff}$ 本身的定义一致。对于模型 P、B 和 P+B，公式（24）仍是关于Δ定义良好的封闭方程，但 $\Phi(k)$ 和 $B(k)$ 关于 k 的函数形式不够简单，无法代数求逆；因此，配对分支取为使 $\Omega_{3D}(\Delta)$ 最小的 Δ 值，具体做法是在稠密的 Δ 网格上进行搜索并局部细化（第 III节）。这能在不进行符号求解的情况下，找到与公式（24）相同的驻点。正常分支为 $\Delta=0$；若存在 Sarma型分支，则它是第 II B 节所述 $\Omega_{3D}(\Delta)$ 的局部极大值。

E. 二维表述

相应的二维泛函为

$$\Omega_{2D}=\int_0^{\Lambda}\frac{k\,dk}{2\pi}\left\{\left[(\xi_k-\xi_k^0)+\Phi(k)^2(\xi_k^0-E_k)\right]+\frac{\Delta^2}{2\epsilon_k+|\epsilon_B|}\right\}-\int_0^{\Lambda}\frac{k\,dk}{2\pi}\,B(k)\,(h-E_k)\,\Theta(h-E_k),\tag{25}$$

其中，在标准计算中 $\Lambda=16$，$\epsilon_k=k^2/2M$ 为公式（10）中的自由色散关系。二维特有的一点是，正则化反项 $\Delta^2/(2\epsilon_k+|\epsilon_B|)$ 不受 $\Phi(k)^2$ 加权：它是对二维接触相互作用紫外发散的记账项，直接对应于三维泛函（23）中完全位于积分之外的动量无关项 $\Delta^2/g_{\rm eff}$，并不是物理上的占据数加权配对贡献。将其与真正的反常项$\xi_k^0-E_k$ 一起用 $\Phi(k)^2$ 加权，会使反项与其旨在正则化的配对信号一同受到抑制。由于该反项由真空二体束缚能而非介质中的化学势确定，因此它由自由色散关系 ϵ_k 构成，而不是由在 Ω_{2D} 中其他位置使用的平移后的 ξ_k构成；因此对于所有 $k\geq0$，$2\epsilon_k+|\epsilon_B|>0$，该项不会产生有限动量极点。

阻塞结构与三维情形相似：交叉条件式（4）给出了阻塞区间边界 $k_{1,\ 2}^2=2M\ (\mu\pm\sqrt{h^2-\Delta^2})$，如参考文献 [13], 所示；其中，理想理论中的单位占据失配被 $B_{\rm SRC}(k)$ 式（21）中的结果所替代。

根据第 IID （$\Phi(k)$、$B(k)$ 不依赖于 Δ），逐项对方程（25）求导并除以 $\Delta\neq0$，可得到闭合的定态条件

条件

$$0=\int_0^{\Lambda}\frac{k\,dk}{2\pi}\left[-\frac{\Phi(k)^2}{E_k}+\frac{2}{2\epsilon_k+|\epsilon_B|}+\frac{B(k)}{E_k}\,\Theta(h-E_k)\right]\tag{26}$$

对于全部四种模型。对于理想模型（$\Phi=1,\ B=B_0$），式（26）与参考文献 [13],中的能隙方程完全相同，因为其中 $\Phi^2=\Phi=1$。对于模型 P、B 和 P+B，$\Phi(k)^2$ 和 $B_{\rm SRC}(k)$ 同样阻止了对 Δ进行代数反演；配对分支通过与三维中使用的相同 Δ-网格最小化确定（第 III节），该方法以数值方式而非符号方式满足式（26）。式（25）是第 IVB节所述验证中使用的泛函；本节未给出定量比较。

F. 正则系综热力学

1. *Density reconstruction*

相竞争是一个定密度问题，因此必须从 Ω 中求得密度，而不能通过自由气体公式指定。在固定 Δ时，

$$n_T=n_A+n_B=-\frac{\partial\Omega}{\partial\mu},\qquad m=n_B-n_A=-\frac{\partial\Omega}{\partial h},\tag{27}$$

给定目标密度 $n_A^\star$，$n_B^\star$ (等价于 $n_T^\star=n_A^\star+n_B^\star$和 $m^\star=n_B^\star-n_A^\star$)，将式（27）反解，得到

每个试探值 Δ 对应的化学势（μ，h），通过最小化无量纲残差求得

$$\mathbf{R}(\mu,h)=\left(\frac{n_T-n_T^\star}{n_T^\star},\frac{m-m^\star}{n_T^\star}\right). \tag{28}$$

反演保留精确的 $A\leftrightarrow B$ 对称性，并未将密度与化学势之间的理想气体关系用作物理近似。有限差分步长、求解器容差和初始化流程详见第III节。

2. Canonical energy

对于每个固定的（n_A，n_B，Δ），求解方程（27）得到（μ，h）后，正则系综能量密度由勒让德变换给出

$$E(n_T,m,\Delta)=\Omega(\mu,h,\Delta)+\mu n_T+hm. \tag{29}$$

正常分支为 $E_N(n_A,\ n_B)\equiv E(n_T,\ m,\ 0)$。配对（平衡）分支为

$$E_{\rm pair}(n)\equiv\min_{\Delta}E(2n,0,\Delta), \tag{30}$$

通过对正则系综能量关于 Δ进行最小化得到。数值搜索和细化策略见第 III 节。Sarma型分支若存在，则记录为在相应固定密度下 $\Omega(\Delta)$ 的局部最大值，仅用作稳定性诊断，绝不作为下文混合态的候选态。

3. Phase-separated state

候选混合态由正常相分数x 和每组分密度为 n_c的平衡配对核心构成，其中正常壳层密度由各组分总密度守恒确定：

$$n_A=(1-x)\,n_c+x\,n_A^N,\qquad n_B=(1-x)\,n_c+x\,n_B^N, \tag{31}$$

因此，对于给定的试探值（x，n_c），

$$n_A^N=\frac{n_A-(1-x)n_c}{x},\qquad n_B^N=\frac{n_B-(1-x)n_c}{x}, \tag{32}$$

满足 n_A^N，$n_B^N\geq 0$。混合态能量为

$$E_{\rm mix}(n_A,n_B)=\min_{x,\,n_c}\Big[(1-x)\,E_{\rm pair}(n_c)+x\,E_N\big(n_A^N+n_B^N,\,n_B^N-n_A^N\big)\Big], \tag{33}$$

采用第 $E_{\rm pair}$ 节中的相同 E_N和II F2。边界情形 $x=0$（均匀平衡配对态）和$x=1$（均匀正常态）不计作非平凡相分离；真正的混合基态对应于 $0<x<1$。

为提高数值计算效率，在进行公式（33）中的最小化之前，将均匀配对态和正常态的能量制成密度的函数表。插值和最小化的具体细节见第III节。

a. 相边界定位。 在耦合固定时，沿着固定 ΔE（p）$\equiv E_{\rm mix}$（p）$-E_N$（p）的直线，作为极化 n_T的函数 $p=m/n_T$进行计算，该量在相分离区域内是光滑且非递增的；一旦公式（33）中的最小化收缩为平凡的 $x=1$ 分支，该量便恒等于零。临界极化 $p_c\equiv m_c/n_T$ 是这两个区域之间的边界。在数值上，p_c 被确定为使 $E_{\rm mix}-E_N$ 变为零的区间左端点；区间套定与二分法过程见第III节。

III. 数值实现 N

该形式体系采用数值求积、非线性求解器、插值和收敛性测试进行计算，具体总结如下。

a. 动量网格。 方程（23）–（25）中的积分采用梯形法则计算。由于方程（13）中的相关占据数在 $q=1$ 处不连续，被积函数在 $k=k_{FA}$和 $k=k_{FB}$处存在折点。因此，动量网格由均匀子区间组成，并在这些动量处精确分隔，从而避免任何梯形区间跨越不连续点。标准计算在三维情况下使用 1600 个点，其中 $\Lambda=8$；在二维情况下使用 1800 个点，其中 $\Lambda=16$。

b. Δ网格。 第IIF 2 节的配对分支在一个 120 点的 Δ 网格上定位，随后围绕每个可靠的局部最小值进行有界标量细化。

c. 密度反演。方程（28）采用缩放残差容差 3×10^{-3}（二维）和 5×10^{-3}（三维）。如果初始尝试失败，则对（9×9（二维）或 7×7（三维）种子网格在（μ，h）上的候选点进行评分，以有界最小二乘法细化最佳候选点，并仅在必要时使用差分进化搜索。

d. 混合相最小化。在（x，n_c）中的搜索使用 101×101 网格，随后通过 Nelder–Mead 方法进行细化。通过二分法将临界极化定位至10^{-5}–10^{-6}（p）。此容差仅控制 $E_{\rm mix}-E_N$ 中零平台的边缘；p_c 中的总不确定性主要由密度反演和插值决定。

e. 失败处理。 不符合第 IIF 1 节容差要求的密度表点将被排除，而非外推。

此类失败仅出现在极端密度比下，超出用于确定相边界的区域。

f. 一致性检查。 该实现保留了正常态能量对 $\Delta = 0$ 的独立性（与Φ(*k*)无关），并且在同时交换物种标签和 $h \to -h$时，正则系综能量保持不变。

g. 热力学导数。 密度由在固定 Δ条件下对 Ω(μ， h, Δ) 进行中心有限差分得到。由于$k_{F\sigma} = \sqrt{2M\mu_\sigma}$取决于（$\mu$， h），因此计算总导数时会计入 $n_\sigma(k)$的变化。在$[5\times10^{-4}, 2\times10^{-3}]$范围内将有限差分步长减半或加倍，重建得到的密度在数值精度范围内保持不变。

h. 截断收敛性。 在三维中，将截断值从 $\Lambda = 8$增至 $\Lambda = 20$，在所采样的最强耦合下，平衡态能隙和正则系综能量的变化均小于 0。5%。在较弱的代表性点，P+B 相对于理想能隙的比值变化约为 1。9%，仍处于总体数值不确定性范围内。在二维中，积分经由 ϵ_B重整化后为紫外有限；将数值上限扩展至$\Lambda = 16$ 后， p_c 的变化小于 3×10^{-3}。图 3 中曲线间距看起来不均匀，是有限耦合网格分段线性绘制所致；计算得到的序列仍保持单调。

i. 分辨率细化 p_c。 在每个维度各选取一个具有代表性的耦合参数，采用更精细的动量、混合相和极化网格，并收紧密度反演容差，重复进行计算。在两个维度中，理想模型与 B 之间的差异仍可分辨。二维中，P 与 (P+B) 之间的差异仍然有限；三维中，该差异在数值分辨率范围内消失，两个模型无法区分。

j. 参数集敏感性。 表I 中的替代分布在两个维度中均保留了理想模型≈B 和 P ≈P+B 的排序。理想边界的偏移量随指定占据修正强度的增加而增大。报告的相边界采用中子物质-强分布作为二维与三维共同的参考。

IV. 结果

A. 巨势景观与均匀分支

图 2 展示了理想模型和经短程关联修正的模型中的 Ω(Δ) − Ω(0)。固定的(μ, h)参考值在第 II节中给出。这些取值设定了绘图尺度，不参与正则系综相边界的计算。理想模型（第一列）设定了参考结构：在 $h = 0$ 处，按照参考耦合（第 IIB节）的构造，势在 $\Delta = \Delta_0$处只有一个最小值。随着 h 增大，该最小值相对于正常态逐渐升高，最终仅具有局部稳定性，并形成一个局部最大值，随后在势进一步上升之前出现一个局部最小值——这是Sarma型竞争所导致的三极值、均匀固定-(,)特征，详见第 II B节。值，随后在势进一步上升之前出现一个局部最小值——这是 Sarma型竞争所导致的三极值、均匀固定-(μ, h)特征，详见第 IIB节。与该讨论一致，这个中间驻点不是固定密度基态的候选状态；固定密度下的实际基态则来自第 IIF 3 节的正则系综混合态构造，并显示于图 3中。

第三列图对比了固定 h下的四种模型。启用配对相干修正（P）后，有限-Δ 分支的势阱显著高于理想曲线；在二维中，这一变化足以使局部有利的配对分支转为局部不利。仅阻塞模型（B）仍与理想曲线接近，而组合模型（P+B）的变化则与 P 十分相似。在二维中，每对模型成员之间的微小偏移在数值上仍可分辨；在三维中，这些偏移与标准数值分辨率相当或低于该分辨率。因此，稳健的结果是成对排序：理想模型 $\approx B$ 与 $P \approx$ P+B；这两对之间的偏移在两个维度中均由 P 控制。

B. 临界极化与相边界

图 3 展示了临界极化 $p_c \equiv m_c/n_T$，该结果由相同的规范构造得出，分别对应两种维数，并以这些无量纲单位直接绘制，且每次扫描固定 n_T。在所绘曲线下方，式（33）的混合态最小化结果倾向于配对／相分离态；曲线上方则倾向于极化正常态（仅限于均匀配对态、相分离态和正常态构成的受限相空间；未纳入空间调制态）。

a. 三维结果。 应用式（9）中与截断相一致的转换后，取样范围为 $1/(k_Fa)$ ≈−1.20 至 0。00，范围从 BCS区延伸至幺正极限。在此范围内，理想边界与 B 边界在数值上始终相近，而 P 和 P+B 边界则形成另一组明显更低的边界。在$1/(k_Fa) \simeq -0.74$处，例如，标准计算给出 $p_c = 0.0883$（理想），0。0845（B），0。0265（P）和 0。0264 （P+B ）。理想边界与 B 边界之间的差异很小（为理想值的 ≈ 4%），但在第 III 节所述的数值细化后仍可分辨；在相同的细化下，P 和 P+B 在数值上无法区分。因此，三维结果呈现出理想边界与 B 边界之间虽小但可分辨的差异，以及理想／B 边界组与 P／P+B 边界组之间大得多的偏移。

b. 二维结果。 理想边界再现了文献 [13]，中已发表二维结果的定性趋势，即 p_c 随 $|\epsilon_B|/\epsilon_F$ 单调增加，且曲率相近；此处不尝试进行定量叠加。观察到与三维中相同的层级关系：理想边界与 B 彼此接近，而 P 和 P+B 则构成第二组，数值显著更低。在$|\epsilon_B|/\epsilon_F \approx 0.27$ 处，按二维归一化的计算结果为 $p_c = 0.540$ （理想），0.514（B）、0.281（P）和0.259（P+B）。

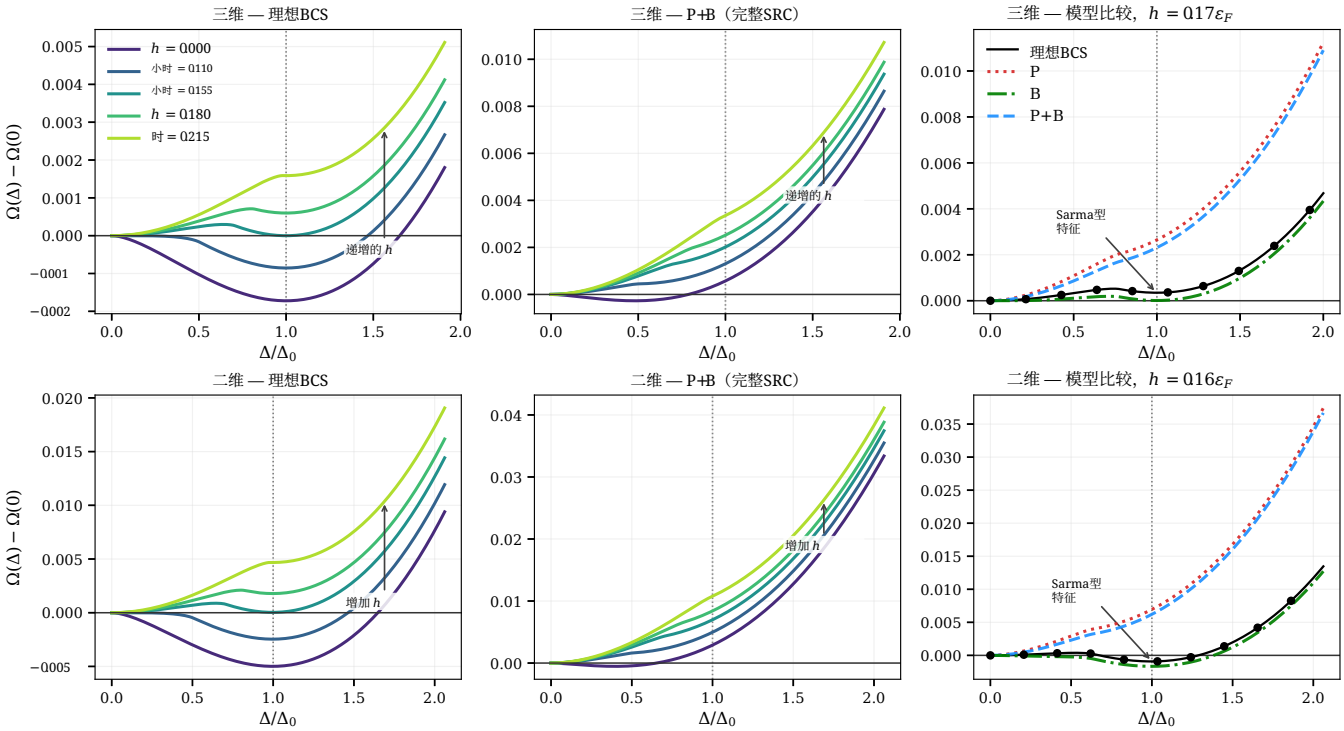


图 2. 三维（上排）和二维（下排）中理想模型与SRC修正模型的巨势景观，以 $\Omega(\Delta)-\Omega(0)$ 表示，其中 Δ 以参考能隙 Δ_0 归一化（$\Delta_0 = 0.22$ 在三维中，$\Delta_0 \approx 0.252$ 在二维中）。第一列展示不平衡场 h 取五个值时的理想模型（见图例）；第二列展示相同 h/Δ_0 比值下的 P+B 模型；第三列比较固定 h 下的理想、P、B 和 P+B 模型（3D：$h = 0.17$；2D：$h = 0.16$）。竖直点线标示 $\Delta/\Delta_0 = 1$；水平线标示正常态参考值 $\Omega - \Omega(0) = 0$。标注为“Sarma型特征”的箭头标示 $\Omega(\Delta)$ 的一个均匀固定-(μ, h)驻点，这不同于第 II F 3 节中的定密度正则系综基态。

相对于理想边界，配对扇区修正约占总降幅的 92%，而仅阻塞导致的偏移约为理想值的 4.7%。P 与 P+B 边界相差约 0.022，大于三维中的差距，但它们彼此仍比与理想边界及 B 曲线的差距小得多。

作为参考，图3 还列出了Mitra等人报告的临界极化度 [12]，针对受陷阱束缚的准二维 ^{6}Li 气体。我们保留了该研究中使用的实验记号 E_B 和 E_F，而 ϵ_B和 ϵ_F 分别表示本研究均匀体系计算中的束缚能标度和费米能标度。因此，实验数据点仅作为半定量参考。它们对应于在有限温度 $T/T_F = 0.18\,(5)$ 下测得的、平衡中心核消失时的全局陷阱极化度，而我们的曲线表示均匀体系的 $T = 0$ 正则系综边界。此外，该实验针对准二维体系，并采用基于陷阱的 E_F定义，因此比较关注的是特征极化度尺度及其相互作用依赖性，而非底层无量纲耦合变量完全相同。

在 $E_B/E_F = 0.05(2)$ 处，实验点最接近理想曲线和 B 曲线，而在 $E_B/E_F =$ 0.32(7) 处，P 曲线和 P+B 曲线更接近测量值。由于在相互作用范围重叠的区域内只有两个实验点，因此无法唯一选定模型。数据对 p_c 对相互作用的依赖关系提供了定性约束，但并未构成对四种方案中任何一种的定量验证。

c. 维度比较。两种维度都呈现相同的层级关系：理想 $\approx$ B 和 $P \approx$ P+B，其中配对扇区的修正导致 p_c 的位移占主导，而阻塞修正仍然很小，在三维中约为理想值的 4%，在二维中为 4。7%。平衡态能隙呈现相同的配对关系，因为 B 仅作用于 Ω 的不平衡扇区（第II C3节）。由于两个面板采用不同的耦合变量，这里的比较关注的是共同的层级关系，而非逐点对应。两者曲率不同，反映了其底层相互作用尺度的差异：在三维中，$\Delta/\epsilon_F \propto \exp[\pi/(2k_F a)]$ 在弱耦合BCS区间内，导致初始上升缓慢，随后增幅变得更明显；而在二维中，任意弱吸引下都存在束缚态，且 $\Delta^2 \propto \epsilon_F|\epsilon_B|$ 会带来更快的初始增长，之后增长幅度逐渐减弱。

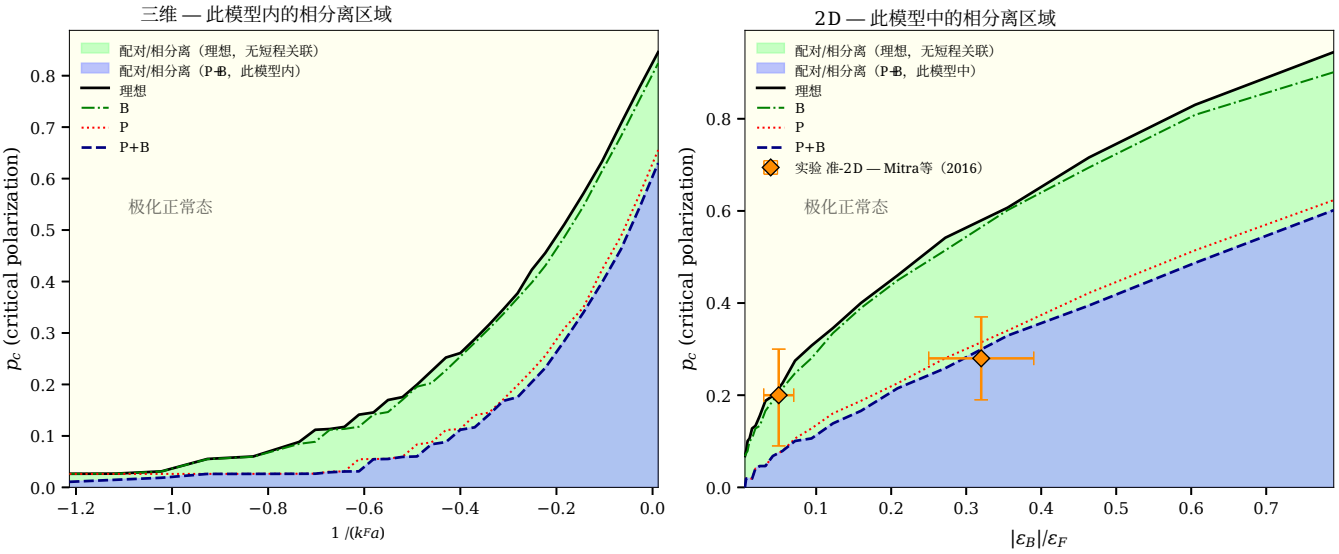


图 3. 临界极化度 $p_c \equiv m_c/n_T$（第 II F 3 节）将配对/相分离区域（$p < p_c$）与极化正常态（$p > p_c$）分隔开来，该结果由第 II F 3 节的正则系综混合态构造获得。左：三维结果，作为 $1/(k_F a)$ 的函数（式（9））， 其中 $1/$为标准 BCS–BEC交叉耦合。右：二维结果，作为 $|\epsilon_B|/\epsilon_F$的函数。在两个面板中，耦合强度均从左向右增加。曲线分别表示理想、P、B 和 P+B 模型；浅绿色区域由理想曲线界定，而深蓝色区域由 P+B 界定，表示在完整方案中仍然存在的配对/相分离区域。实心菱形表示 Mitra等人 [12] 报告的全局临界极化度，该数值对应于受困准二维 ^{6}Li 气体中平衡中心核的消失，其取值为 $E_B/E_F = 0.05$（2）和 0.32（7）。实验记号 E_B 和 E_F 沿用自文献 [12]。这些点仅按照其报告的 E_B/E_F 数值放置，以提供相互作用尺度的参考；由于实验费米能与均匀费米能的定义不同，其横向位置不应被解释为与 $|\epsilon_B|/\epsilon_F$的直接对应。误差条表示实验不确定性。测量在 $T/T_F = k_B T/\mu_{0\uparrow} = 0.18$（5）处进行，采用实验中的多数分量定义 T_F。因此，这些数据仅作为极化尺度及其相互作用依赖性的半定量参考，而不是对曲线所表示的同一均匀 $T = 0$ 正则系综边界的测量。

V. 讨论

四模型构造呈现出反复出现的层级关系

$$\text{ideal} \simeq B, \qquad P \simeq P{+}B, \tag{34}$$

在图 2 的巨势景观和图 3的正则相边界中。大部分 P+B 位移已经由 P 产生，而 B 则沿相同方向带来较小的修正。这一层级关系在两个维度以及所测试的所有占据分布中都保持不变。在具有代表性的二维耦合下，将 B 加入 P 会使 p_c 变化约 0.022；在三维中，经过细化后，P 和 P+B 在数值上变得无法区分。

这一层级关系与两种方案所采样的动量区域一致。配对权重 $\Phi(k)^2$ 贯穿整个反常贡献，并在 $h = 0$ 处仍然有效，而 $B_{\mathrm{SRC}}(k)$ 仅在因 $h > \Delta$ 而出现的阻塞区间内起作用。这一区别解释了为何 P 产生更大响应是合理的，尽管两种修正的符号和大小仍是该模型的数值结果。

微观配对计算提供了相关的物理背景。关联基函数研究表明与未关联的 BCS 理论相比， $^1S_0$ 能隙发生了显著变化 [31]，；而自洽谱函数方法发现，短程关联会使单粒子强度发生碎裂，并减少可用于配对的相干权重 [32]。Rios、Polls 和 Dickhoff 同样发现，在纳入短程关联修正后的谱强度时，多个核通道中的配对能隙受到抑制[27]。这些结果表明，配对响应不仅与积分后的高动量占据有关，也与配对核所采样的动量-能量区域内强度的耗尽和碎裂有关。

更一般地说，能隙取决于准粒子谱、单粒子剩余量、有效相互作用和介质极化 [29]。关联效应还会改变零温能隙、临界温度及其关系 [28]。因此，其影响通常无法通过对 BCS 能隙进行统一的普适缩放来表示。

模型 P 只能重现这种微观响应的定性趋势。它降低了反常扇区中依赖占据数的权重，但未包含文献 [27–29, 31, 32] 中相关的谱动力学： $n_\sigma(k)$ 是预先指定的，准粒子谱仍呈平均场特征，而 $\Phi(k)$ 是现象学权重，并非由修饰后的

传播子导出的核。在这种受限描述中，削弱反常扇区会缩小配对态或相分离态仍具有优势的极化范围。

所引用的微观研究也不能推出 $P \gg B$，因为它们没有区分反常响应与失衡阻塞响应。这种分解是当前框架所特有的。模型 P 保持 $\Delta = 0$ 正常参考态不变，并分离出反常凝聚贡献，而模型B则用关联占据失配替代理想的单位权重阻塞区间。因此，四模型比较区分了两种原本会被纳入单一有效修正的响应。

配对与高动量结构也可能相互影响。Li等人表明，中子–质子配对能够改变高动量分布 [30]。这里不存在这种反馈，因为 $n_\sigma(k)$在最小化之前就已固定。自洽扩展将同时确定谱强度、动量分布和配对场。在当前的扇区分辨语言中，这种处理将使 $n_\sigma(k)$响应于Δ 和 h，而不是预先规定，从而使$\Phi(k)$和 $B_{\mathrm{SRC}}(k)$本身取决于解，而非输入分布。这样便可检验：一旦允许占据数对配对场作出响应，此处发现的配对扇区主导地位是否仍然存在，或者它在一定程度上只是固定 $n_\sigma(k)$所造成的人为结果；同时，这还将使耗尽和高动量尾部随着 h 接近配对破缺阈值而变窄或变宽。当前构造无法捕捉这种响应，因为 $n_\sigma(k)$不保留关于 Δ的记忆。

另一个相关的拓展方向，是考察质心动量有限的配对态。本文的框架仅保留均匀的 BCS序参量以及第IIF 3节中的体相相分离混合物；不包含 Fulde–Ferrell–Larkin–Ovchinnikov（FFLO）配对及其相关涨落。对极化费米气体进行超越平均场的研究发现，FFLO关联及相关的量子临界性会重塑相图和准粒子谱，而这些效应无法由本文考察的均匀配对态／正常态／混合态竞争所捕捉 [33,34]。将本文受短程关联启发的扇区分解与纳入 FFLO 的处理进行比较，可以通过所得相边界进行定量比较，并通过以下方面进行定性比较：

正常态到配对态转变附近的临界行为，这是未来值得探索的自然方向。

主要局限源于现象学和平均场构造。计算仅限于 $T = 0$，而μ，h对$k_{F\sigma} = \sqrt{2M\mu_\sigma}$的隐式依赖，使密度响应成为预设方案的一部分，而非由守恒微观泛函求导得到的结果。有限温度会使占据数的不连续性和阻塞区间变得平滑，而配对涨落和空间调制相则可能改变相分离区域，尤其是在二维情况下。第IIF3节的混合态构造还将配对区域和正常区域视为由能量可忽略的尖锐界面连接的体相；超流区域与正常区域之间的有限表面张力，是强相互作用、布居失衡费米气体相图中长期存在且至今仅部分解决的因素 [35–37], , 纳入这一因素可能使重构的相边界偏离本文采用的简单混合规则。因此，图3应被视为 $T = 0$本文模型下均匀配对的基准。

VI. 结论

我们引入了一个扇区分辨唯象框架，其中同一种受短程关联启发的占据数会修正反常配对贡献、不平衡阻塞项，或二者同时修正。随后，我们通过巨正则势景观以及在二维和三维中对相边界进行完整的固定密度重构，对所得的理想、P、B 和 P+B 模型进行了比较。

正则系综结果始终满足理想 $\simeq B$和 $P \simeq P{+}B$。配对扇区的修正导致临界极化的大部分降低，而阻塞贡献则表现为较小的同号修正：在三维中约为理想值的 4 %，在二维中为 4.7%。这一排序在两种维度以及所测试的占据分布中均保持不变。

因此，该框架提供了一种简洁的诊断方法，用于考察给定的关联占据如何在不平衡超流体的不同扇区中传递。它还为进一步拓展奠定了基准，包括有限温度、空间调制相，以及自洽占据和准粒子谱。

[1] P. F. Bedaque、H. Caldas 和 G. Rupak，《物理评论快报》**91**，247002（2003）。[2] H. Caldas，Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics **53**，085301（2020）。[3] D. E. Sheehy 和 L. Radzihovsky，《物理评论快报》**96**，060401 2006（ ）。[4] H. Hu、X.-J. Liu 和 P. D. Drummond，《物理评论快报》**98**,070403 (2007). [5] L. He 和 P. Zhuang，Phys. Rev. A**78**, 033613 (2008)。[6] P. Strack 和 P. Jakubczyk，Phys. Rev. X **4**, 021012 (2014)。[7] C.-T. Wu、R. Boyack 和 K. Levin，Phys. Rev. A **94**, 0336042016()。[8] S. Dutta 和 E. J. Mueller，Phys. Rev. A **94**, 063627

(2016). [9] J. Tempere, S. N. Klimin, and J. T. Devreese, Phys. Rev. A 78, 023626 (2008). [10] L. Radzihovsky and D. E. Sheehy, 《物理学进展报告》73, 076501 (2010). [11] Y. Shin, M. W. Zwierlein, C. H. Schunck, A. Schirotzek, and W. Ketterle, 《物理评论快报》97, 030401 (2006). [12] D. Mitra, P. T. Brown, P. Schauß, S. S. Kondov, and W. S. Bakr, 《物理评论快报》117, 093601 (2016). [13] H. Caldas, A. L. Mota, R. L. S. Farias, and L. A. Souza, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experi- ment 2012, P10019 (2012). [14] C. S´a de Melo and S. Van Loon, Annual Review of Con- densed Matter Physics 15, 109 (2024). [15] S. Tan, 《物理学年鉴》323, 2987 (2008). [16] S. Tan, 《物理学年鉴》323, 2971 (2008). [17] S. Tan, 《物理学年鉴》323, 2952 (2008). [18] O. Hen, L. B. Weinstein, E. Piasetzky, G. A. Miller, M. M. Sargsian, and Y. Sagi, 《物理评论 C》92, 045205 (2015). [19] J. Decamp, J. J¨unemann, M. Albert, M. Rizzi, A. Min- guzzi, and P. Vignolo, Phys. Rev. A 94, 053614 (2016). [20] C. Daix, M. Dixmerias, Y.-Y. He, J. Verstraten, T. de Jongh, B. Peaudecerf, S. Zhang, and T. Yefsah, 《物理评论快报》136, 153402 (2026). [21] A. J. Tropiano, S. K. Bogner, and R. J. Furnstahl, 《物理评论 C》104, 034311 (2021). [22] O. A. Rubtsova and V. N. Pomerantsev, 《JETP快报》120, 547 (2024). [23] B.-J. Cai, B.-A. Li, and Y.-G. Ma, 《欧洲物理学杂志专题》10.1140/epjs/s11734- 026-02227-9 (2026). [24] L. A. Souza、M. Dutra、C. H. Lenzi 和 O. Louren˛co, 《物理评论 C》101，065202（2020）。[25] E. H. Rodrigues、M. Dutra 和 O. Louren˛co, 《皇家天文学会月刊》523，4859（2023）。[26] S. Gautam、A. Venneti、S. Banik 和 B. Agrawal, 《核物理 A》1053，122978（2025）。[27] A. Rios、A. Polls 和 W. H. Dickhoff, 《低温物理学杂志》189，234（2017）。[28] M. Drissi 和 A. Rios, 《欧洲物理学杂志 A》58，90（2022）。[29] A. Sedrakian 和 J. W. Clark, 《欧洲物理学杂志 A》55，167（2019）。[30] G.-p. Li、J.-y. Fu、J. Zhou、X.-l. Shang、J.-m. Dong 和 W. Zuo, 《物理评论 C》113，064302（2026）。[31] A. Fabrocini、S. Fantoni、A. Y. Illarionov 和 K. E. Schmidt, 《核物理 A》803，137（2008）。[32] D. Ding、A. Rios、H. Dussan、W. H. Dickhoff、S. J. Witte、A. Carbone 和 A. Polls, 《物理评论 C》94，025802（2016）。[33] M. Pini、P. Pieri 和 G. Calvanese Strinati, 《物理评论 B》107，054505（2023）。[34] F. Pirolo、L. Pisani 和 P. Pieri, 《物理评论 B》114，254507 2026（）。[35] T. N. De Silva 和 E. J. Mueller, 《物理评论快报》97，070402 2006（）。[36] H. Caldas, 《统计力学杂志：理论与实验》2007，P11012（2007）。[37] S. K. Baur、S. Basu、T. N. De Silva 和 E. J. Mueller，Phys. Rev. A 79，063628（2009）。