arXiv:2611.29797v1 [econ.EM] 22 Nov 2026

作为零测集的影子经济：影子经济的测度论方法

Rados-law A. Kycia [a] Andrzej Buszko [b]

[a] 数理经济学研究所，经济分析学院，华沙经济学院，波兰华沙[b] 波美拉尼亚大学，S-lupsk，波兰 S-lupsk

摘要

本文探讨了能否将影子经济定义为相对于测量经济交易的制度测度或传感器而言的一组零测集。为此，我们构建了一个可检验的测度论框架，用以重新界定并量化影子经济。传统经济学定义往往将实际存在的影子经济与国家机构的观测局限混为一谈。为解决这一问题，我们将影子经济建模为相对于制度测度的零测集，并分析三种互补的经济状态。在此背景下，我们探讨如何赋予标准数学工具以经济含义。首先，在低分辨率状态下，我们应用巴拿赫格和测度的勒贝格分解，通过上确界融合算子汇总不完整的制度登记库，以处理交易少报问题。其次，针对隐藏经济维度，我们运用 Copula 理论和 Kullback-Leibler散度优化，根据技术指标和物理指标重建未观测到的资金流。第三，为解决审计的可扩展性问题，我们将影子经济建模为稀疏向量，并应用压缩感知，通过随机、非相干且保护隐私的采样，检测交易量巨大的稀疏逃税网络。

关键词： 影子经济；间接经济；测度论；Radon-Nikodym 导数；Copula 理论；压缩感知；政府科技数学主题分类： 91B02, 91B82, 28A33, 94A12, 94A17, 62H20

1 引言

影子经济有许多不同、有时甚至相互矛盾的定义，这使得不同实证研究之间的比较变得困难。

非法生产、非法经济、灰色地带、非正规部门生产、月光经济、未观测经济、未登记商业活动、未申报经济和地下经济等术语，通常只涵盖影子经济活动的特定方面。Feige [25] 将影子经济定义为未申报、因此未被官方统计的经济活动。然而，Frey 和 Schneider 在 [27] 将这一概念主要限缩为未登记生产活动，这种做法可能过于狭隘。这样的定义无法明确服务、易货交易和金融交易的归属，尽管这些领域往往构成影子经济活动的重要渠道。同样，Tanzi [59]将影子经济与未纳入国民账户的生产联系起来。不过，这一定义引发了概念上的歧义：如果某项活动已计入国民账户，但相关纳税义务却被逃避，那么仅仅因为它已被统计记录，是否就应将其排除在影子经济之外?

Dell'Anno[19], 所提出的定义还存在另一项局限：他将影子经济界定为地下生产，其中既包括非正规活动，也包括非法活动。这些类别之间的区分并不完全清晰。非正规活动经常在法律和监管框架之外开展，这表明其与非法性之间存在 substantial 重叠。因此，非正规活动与非法活动之间的界限仍未得到充分界定。仅通过逃税来定义影子经济同样过于简单化，在分析上也不令人满意。并非所有逃税行为都必然构成参与影子经济，而许多影子经济活动所涉及的特征远远超出不遵守税法的范围。因此，纯粹基于税收的定义缺乏严谨分析所需的精确性，也无法为识别影子经济的边界提供清晰框架。

Smith-Hillman 在 [56]也提出了影子经济的定义。然而，将这一概念局限于未纳入官方 GDP 估算且未被税务机关发现的活动，是一种重大简化。影子经济的存在独立于公共机构对它的识别。未能发现此类活动并不会消除其经济后果，只会使其规模难以确定。这一点尤为重要，因为影子经济可能是反映制度低效、过度监管或治理缺陷的敏感指标。如果其规模仍不明确，人们可能会将其解释作用错误地归因于其他经济变量，进而导致诊断失误和政策建议不当。因此，将影子经济等同于其统计可观测性的定义，可能会

混淆现象本身与国家机构对其进行测量的能力。对影子经济的统一定义应涵盖所有在法律或监管框架之外开展的经济活动，和/或因预算收入流失而对公共部门造成不利后果的经济活动。

严谨的方法应识别相关要素，使用可测量指标将其操作化，从理论或经验角度赋予权重，并将其纳入多维框架（例如 MIMIC 模型、综合指数、结构方程模型）。学者和研究人员在影子经济测量方面持续面临挑战。目前最广为认可和采用的工具是 MIMIC（多重指标多重原因）模型 [20, 17]。尽管其核心概念有充分的理论依据，但用于评估影子经济的具体变量在不同研究中往往有所差异。例如，Dell'Anno 和 Schneider 在 [20] 中确定了与影子经济动态密切相关的变量：税收负担、失业、自雇、政府消费、司法效能指数和非法性指数。然而，Dell'Anno 在 [17], 中采用了以下决定因素：政府就业、税收负担、补贴/GDP、政府支付的社会福利、失业和自雇。由于采用了不同的解释变量，所得估计结果无法直接比较。使用 MIMIC 模型时，另一项关键要求是验证时间序列平稳性，尤其要进行单位根检验。许多研究忽视了这样一点：如果数据非平稳，则在参数估计和拟合优度评估之前，必须通过对数变换或一阶差分调整数据。

鉴于这些方法论上的挑战，需要采用新的数学方法对影子经济进行建模，以捕捉其完整的结构谱系。因此，我们提出了一种基于测度论 [26, 51, 7] 的抽象鸟瞰式模型，用于分离三个不同制度中的未记录活动的结构性成因。这些结构信息可用于改进间接经济测量值。因此，对政府数据工程（政府科技 [6]）进行适当调整后，主管机构便能更加精准地监测影子经济。

虽然现有文献中尚无完全相同的测度论处理方法，但若干现代方法采用了统计学、最优传输和机器学习方法。MIMIC 框架面临根本性的尺度识别问题，因此校准至关重要；已有多种校准规则被提出，用于为潜在得分 [18] 赋予计量单位。在随机建模中，研究者使用隐马尔可夫模型，根据汇总记录推断潜在集成流 [28]。作为另一种选择，多边际

最优传输模型已被用于人口流动和资金流动，将观测数据汇总为约束边缘分布，并通过学习型成本函数对时间依赖转移进行编码 [61]。另一种不同的、非随机但类似测度的税收缺口处理方法，通过同一批商品的实物记录、交易记录和财政记录之间的一致性，重建间接税责任，并通过对账残差和独立核查的噪声底来形式化这种一致性 [3]。另一项研究方向则结合计量经济学推断与移动货币流动、电子发票等高频数字数据，使用随机森林和梯度提升算法对税收缺口行为及合规情况进行建模[45]。

本文结构如下：第 2 节对测度论表述作直观介绍。第 3、4、5 节分别介绍影子经济建模的三种互补机制，重点讨论交易少报（巴拿赫格与测度融合）、隐藏维度上缺失的制度性测度（copula 与 Kullback-Leibler散度优化），以及基于稀疏性的可扩展审计（压缩感知）。最后，我们综合研究结果，并为决策者提出建议。

由于本文使用的数学结果均已确立，完整证明见补充材料。

2 直观图景

我们强调，我们的模型描述的是影子经济的静态快照。由于测量和执法行动会改变行为主体的行为——正如古德哈特定律 [57] 和卢卡斯批判 [39] 所揭示的那样——本文提出的静态框架是迈向完整动态理论的基础性第一步近似。

我们将大量依赖 [26, 51, 7] 中所述的测度论。底层可测空间 $(\Omega\ \mathcal{F})$ 中，Ω 是经济交易的集合，而 $\mathcal{F}$ 是其 σ-代数，它代表给定管辖区（范围从市到民族国家或全球经济）内的全部经济交易。在这个空间上，我们区分两类基本测度：

- 制度测度由国家机构用于观察、记录和征税经济活动。由于制度性登记册并不完整，无法涵盖 Ω 的全部范围，因此产生了影子经济，它由制度性零测集或少报集合构成。

- 真实（完整）测度用于衡量所有经济交易的实际数量或货币价值，包括被隐瞒的交易。这是一种潜在构念，政府无法直接、全面地观测到，但可以利用下文提出的数学情形加以近似或重构。

从较粗的制度性测度转向较精细的测度，对应于收紧财政与监管监控方式。用这种语言来说，两个经济体相对于某一制度性测度「几乎处处相等」，意味着它们在官方统计数据中看起来完全相同，但在制度性零测集（影子经济）上可能存在差异。若令 ν^* 表示 $(\Omega\ \mathcal{F})$ 上真实的交易量测度，并令 $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ 表示一个可测且 ν^*-可积的函数，用以表示交易 $x \in \Omega$ 的增加值，那么勒贝格积分$\mu^*(A) = \int_A f(x)\ d\nu^*(x)$定义了任意交易可测子集 $A \in \mathcal{F}$内创造的真实货币价值。

在这一诠释视角下，我们确定了影子经济的组成部分，它们源自四种主要的结构性成因:

- 方法论型影子经济——源于排除特定类别 s
  因法定或统计设计而未被计量的交易（例如无偿家庭生产、最低限度免税门槛，或严格禁止的非法贸易）。

- 技术型影子经济——源于缺乏能够记录特定交易渠道的国家传感器（例如点对点实物现金交易，或在仅监测电子银行登记系统时受到隐私保护的数字交易）。

- 拓扑型（司法管辖型）影子经济——源于交易被转移至国内机构的领土或法律管辖权之外（例如离岸避税天堂）；除非这些交易受到跨境自动信息交换条约的覆盖，否则仍不可见。

- 信息不对称导致的影子经济——源于在缺乏独立客观核验的情况下依赖自行申报，从而可能系统性地少报交易金额。

这些贡献将在以下章节中体现。

我们不再对个人逃税的心理倾向进行建模，而是采用测度论方法，将制度可观测性——国家登记系统测度经济的结构性能力——形式化。在这一视角下，法定免税和非法逃税都对应于一些集合

相对于制度测度而言，这些集合的测度为零（或拉东-尼科迪姆密度的约化零点）。

3 低分辨率情形

我们从这样一种情形入手：现有制度测度的分辨率较低，因此存在零集。我们将影子经济定义为一个零测集，并探讨如何改进这类测度以消除这些盲点。

考虑由所有经济交易构成的可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$。设 ν^* 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一个 σ-有限真实交易量测度，并令 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}_+$ 为一个可测函数，表示交易 $x \in \Omega$ 的增加值。本文始终将 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的真实价值测度 μ^* 定义为

$$\mu^*(A) = \int_A f(x)\, d\nu^*(x), \quad A \in \mathcal{F}, \tag{1}$$

假设 $\mu^*(\Omega) < \infty$（经济的总价值有限）。等价地，只要 $\mu^*(A)$ 表示 A 的真实货币量，我们就可以将 $f(x)$ 视为相对于 ν^* 的价值密度；或者在直接相对于 $d\mu^*$ 积分时，将 $f(x) \equiv 1$ 归一化。

我们将 μ^* 与一个制度测度 $\{\mu_i\}_{i\in I}$ 的有限族进行比较，其中 I 是一个有限指标集，代表不同的国家登记系统（例如，增值税申报、企业所得税申报、社会保障记录、海关登记系统）。假设制度性登记册不会影响任何可测集上不存在的经济价值，则每个登记库都满足 $0 \le \mu_i(A) \le \mu^*(A)$，对所有 $A \in \mathcal{F}$ 均成立。

为汇总制度性登记册，同时避免对同时出现在多个登记册中的交易重复计数，我们将合并后的制度性测度 μ 定义为格上确界 [43], ，取遍 $i \in I$：

$$\mu = \bigvee_{i\in I} \mu_i. \tag{2}$$

这意味着，如果登记册 $\{\mu_i\}_{i\in I}$ 的支集位于两两不相交的经济领域上，那么式（2）中的上确界就简化为普通求和 $\mu = \sum_{i\in I} \mu_i$。下文将重点讨论测度巴拿赫空间的结构；在将该空间扩展为巴拿赫格时，上确界运算 [43, 7] 将发挥重要作用。

由于制度测度只记录真实经济中存在的活动（$0 \le \mu \le \mu^*$），μ 相对于真实测度 [26] 绝对连续

μ^* 记作

$$\mu \ll \mu^*. \tag{3}$$

由于 μ^* 是有限正测度，且 $\mu \ll \mu^*$ 满足 $0 \leq \mu \leq \mu^*$，拉东–尼科迪姆定理 [26, 51] 保证存在唯一的密度$g \in L^1(\Omega\ \mathcal{F},\ \mu^*)$，且其在 $[0,1]$上有界：

定义 1 (交易可见性)。交易 $x \in\Omega$的可见性定义为拉东–尼科迪姆导数

$$g(x) = \frac{d\mu}{d\mu^*}(x) = \max_{i \in I} \frac{d\mu_i}{d\mu^*}(x) \in [0,1] \quad (\mu^*\text{-}a.e.). \tag{4}$$

当 $g(x) = 1$时，交易 x 对国家完全可见；当 $0 < g(x) < 1$时，则为部分少报；当 $g(x) =0$时，则完全不可见。这促使我们在下文中区分完全隐藏的影子经济的可测支撑集与影子经济零测集族

定义 2 (影子经济支撑集与零测集族)。影子经济支撑集（在 μ^*-零测集意义下定义）是完全未记录交易构成的可测集：

$$S = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\} \in \mathcal{F}, \tag{5}$$

且影子经济零测集族为

$$\mathcal{S} = \left\{ A \in \mathcal{F} \;\middle|\; \mu(A) = \int_A g(x)\, d\mu^*(x) = 0 \ \textit{and}\ \mu^*(A) > 0 \right\}. \tag{6}$$

影子经济的零测集源自上文提及的不同法律机制和技术机制，以下定义将对其加以区分。

定义 3 （门槛型影子经济）。对于法定营业额门槛 $C > 0$，可测集

$$S_{\textit{threshold}} = \{x \in \Omega \mid f(x) < C\} \tag{7}$$

是门槛化制度测度下的零测集

$$\mu_i(A) = \int_A \chi_{\{f(x) \geq C\}}(x)\, d\mu^*(x). \tag{8}$$

例如，小规模未注册的独资企业或依法免于注册、收入低于法定上限的业余销售 C 属于 $S_{\text{threshold}}$。

定义 4 (技术型影子经济**)**。 若制度性测度μ_i 在可测集 $S_{tech,i} \in \mathcal{F}$ 上存在技术性“盲点”，其中$\mu^*(S_{tech,i}) > 0$ 满足以下条件：由于制度性传感器 i无法观察该交易方式（例如，当 μ_i仅监测电子转账时，无法观察现金交易），因此 $\mu_i(S_{tech,i}) = 0$ 。

我们还刻画了同时逃过所有制度性登记册的核心影子经济。

定义 5 (联合影子经济支集**)**。 对所有制度性登记册均不可见的联合影子经济支集 $i \in I$ 是可测集

$$S_c = \bigcap_{i \in I} \left\{ x \in \Omega \;\middle|\; \frac{d\mu_i}{d\mu^*}(x) = 0 \right\}, \tag{9}$$

相应的公共零测集族为 $\mathcal{S}_c = \bigcap_{i \in I} \{A \in \mathcal{F} \mid \mu_i(A) = 0\}$。

由于每个 μ_i 都是非负测度，且 $\mu = \bigvee_{i \in I} \mu_i$，因此 $\mu(S_c) = 0$。

现在，我们在 $[0,1]$上表述最优财政执法问题。

定理 1 (制度性测度的最优条件**)**。 假设针对交易$x \in \Omega$ 执行可见性 $g \in [0,1]$ 的运行成本 $c : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}_+$ 是 *Carath´eodory* 函数（对每个 $g \in [0,1]$，关于 x 可测；并且对于 ν^*-几乎处处的 $x \in \Omega$，关于 $g \in [0,1]$ 为凸且连续可微），且满足 $\sup_{g \in [0,1]} c(x, g) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \nu^*)$。给定税率$\tau \in [0,1]$ 和 ν^*-可积的附加值函数 $f(x)$，可测可见性剖面 $g^*(x) \in [0,1]$ 可解净预算收入最大化问题

$$\max_{g:\Omega \to [0,1]} \int_\Omega \left(\tau f(x) g(x) - c(x, g(x)) \right) d\nu^*(x) \tag{10}$$

当且仅当对于 ν^*-几乎处处的 $x \in \Omega$，我们有

$$\begin{cases} \tau f(x) \le \frac{\partial c}{\partial g}(x, 0) & \text{if } g^*(x) = 0, \\ \tau f(x) = \frac{\partial c}{\partial g}(x, g^*(x)) & \text{if } g^*(x) \in (0,1), \\ \tau f(x) \ge \frac{\partial c}{\partial g}(x, 1) & \text{if } g^*(x) = 1. \end{cases} \tag{11}$$

这里，$-\frac{\partial c}{\partial g}(x, g(x))$ 表示在 x 提高交易可见性的边际执法成本。

证明。 证明是对 *[4]* 中定理 *18.19* 的应用。

由于 $c(x,g)$ 是一个具有可积上界函数的 *Carath´eodory* 函数，且 *(10)* 中的被积函数逐点依赖于 $g(x) \in [0,1]$，因此，对可测函数 $g:\Omega \to [0,1]$ 求积分最大值的问题，等价于（另见 *[49]* 的定理 *14.60*）在紧区间 $g \in [0,1]$ 上，对 ν^*-几乎处处的 $x \in \Omega$，最大化逐点目标函数$I_x(g) = \tau f(x)g - c(x,g)$。

由于 $g \mapsto c(x,g)$ 在 $[0,1]$ 上是凸且连续可微的，而 $I_x(g)$在 $[0,1]$ 上是凹且连续可微的。根据 $[0,1]$ 上的 *Kuhn-Tucker* 最优性条件，当且仅当$I'_x(0) \leq 0$ 在 $g^* = 0$ 时， $g^* \in [0,1]$ 才使 $I_x(g)$ 最大化；当 $I'_x(g^*) = 0$ 在 $g^* \in (0,1)$时，以及当$g^* = 1$时， $I'_x(1) \geq 0$ 成立，由此得到 *(11)*。

推论 1. 如果 $c(x,g)$ 关于 $g \in [0,1]$ 是凸的，那么对于每笔满足 $\tau f(x) < \frac{\partial c}{\partial g}(x,0)$ 的交易 $x \in \Omega$，式 *(10)* 中的唯一最优可见性为 $g^*(x) = 0$。

证明。固定 x，定义 $I_x(g) = \tau f(x)g - c(x,g)$。那么 $I'_x(g) = \tau f(x) - \frac{\partial c}{\partial g}(x,g)$。由 $c(x,\cdot)$ 的凸性可知，边际成本 $\frac{\partial c}{\partial g}(x,g)$ 随 $g \in [0,1]$ 非递减，因此对于所有 $g \in [0,1]$， $\frac{\partial c}{\partial g}(x,0) \leq \frac{\partial c}{\partial g}(x,g)$。由于 $\tau f(x) < \frac{\partial c}{\partial g}(x,0)$，我们有对于所有 $g \in [0,1]$，$I'_x(g) < 0$。因此， $I_x(g)$ 在 $[0,1]$ 上严格递减，并在边界 $g^*(x) = 0$ 处取得其唯一最大值。

这个推论阐明了为什么理性的税务机关会刻意让微型交易留在合法影子经济中（$g^*(x) = 0$）：只要监控的边际行政成本超过潜在税收收益，强制提高可见性就会降低净公共收入。只有在理想化极限 $c \equiv 0$ 下， μ 全面收回 μ^*才是最优选择。从经济学角度来看，这一主题已有相关探讨。关于最优税务管理的经济学讨论见于 $[54, 55]$, ，而 [5]探讨了国家能力。

现在，我们举一个简单的例子，说明影子经济中的各种零测集。

例1. 考虑农业水果生产部门，其中Ω表示所有交易，而 $f(x)$ 表示交易 x 以当地货币计的货币价值。我们区分Ω的三个子集：

- 有组织的零售和批发贸易 $A \subset \Omega$，其中 $g(x) = 1$ 对应于 $x \in A$。所有交易均开具发票，并可在电子登记簿中查见。
- 小规模街头和农场门口交易 $B \subset \Omega$，其中交易金额 $f(x)$ 较小，且 $\tau f(x) < \frac{\partial c}{\partial g}(x, 0)$。国家通过法定豁免门槛规定 $g(x) = 0$ 的适用范围。

- 账外批发现金交易 $C \subset \Omega$，其中 $g(x) = 0$ 因现金监测存在技术性盲点而$x \in C$，尽管在改进感知能力后，$\tau f(x) > \frac{\partial c}{\partial g}(x,\ g(x))$进行税收征管将具有盈利性。

在此示例中，未记录的影子经济总支集为 $S = B \cup C$。

利用这一框架，我们重新定义了四个影子经济定量指标。其中一些指标已用于现代经济学分析，而我们为其提供了测度论基础。

定义 6（宏观差距）。定义为

$$\Delta := \int_{\Omega} f(x)\, d\nu^*(x) - \int_{\Omega} f(x)g(x)\, d\nu^*(x) = \\ = \int_{\Omega} (1 - g(x))\, d\mu^*(x) = \mu^*(\Omega) - \mu(\Omega). \tag{12}$$

当 μ^* 可以通过物理痕迹（例如电力消耗）*[34, 35]*, 进行估计时，我们可以计算相对宏观差距

$$M_{gap} = \frac{\int_{\Omega}(1 - g(x))\, d\mu^*(x)}{\mu^*(\Omega)} \in [0, 1]. \tag{13}$$

此处 $1 - g$（x）描述了经济的"局部不可见密度"，补充了经典的投入产出 *[36]* 和潜变量 *MIMIC* 方法 *[11]*。

定义 7（聚集不对称性指标）。假设存在某个阈值 $C > 0$，它是一个监管或税率拐点（在 f（x）$= C$处，边际税率或合规成本向上跳升），而制度性登记系统 μ 仍继续记录拐点上下的申报值 C）。为保持在 C 以下，操纵或少报交易的纳税人在 C 以下形成超额交易质量，在 C以上形成缺失质量；有关这些以统计术语定义的测度的使用方法，参见 *[50, 32]*。对于 $\epsilon > 0$，我们定义聚集比率

$$\mathcal{B}(C, \epsilon) = \frac{\mu\big(f^{-1}([C - \epsilon, C))\big)}{\mu\big(f^{-1}([C, C + \epsilon))\big)}. \tag{14}$$

这里，$\nu = \mu \circ f^{-1}$是定义在博雷尔 σ-代数$\mathcal{B}$（$\mathbb{R}_+$）上的推前值分布。在使用交易真实测度时，相对于平滑的反事实推前分布 $\mu^* \circ f^{-1}$，ν 的密度会出现不规则性（或在 C处出现原子点质量），这体现了阈值处的显著聚集。

定义 8（正交测度与不匹配比率）。给定两个不同的制度性登记册 μ_1 和 μ_2，我们可以对 μ_1 相对于 μ_2进行勒贝格分解 *[26]*

$$\mu_1 = \mu_1^{ac} + \mu_1^{\perp}, \tag{15}$$

其中 $\mu_1^{ac} \ll \mu_2$（因为每个 μ_2-零测集也是一个 μ_1^{ac}-零测集），且 $\mu_1^{\perp} \perp \mu_2$（$\mu_1^{\perp}$——相对于 μ_2 的奇异部分 *[26]* 集中在一个 μ_2 为零的可测集上）。对于任意满足 $\mu_1(A) > 0$ 的可测域 $A \in \mathcal{F}$，我们定义归一化错配比率

$$\mathcal{M}_{1,2}(A) = \frac{\mu_1^{\perp}(A)}{\mu_1(A)} = 1 - \frac{\mu_1^{ac}(A)}{\mu_1(A)} \in [0, 1]. \tag{16}$$

该比率量化了在 A 中由登记簿 μ_1 检测到、但对登记簿 μ_2 完全不可见的经济活动的确切比例。

定义*9*（边际执法投资回报率）。设 $\mathcal{M} = \{\mu \mid \mu \ll \mu^*, 0 \le \mu \le \mu^*\}$ 为可容许制度测度空间。税收总收入泛函为 $R(\mu) = \int_\Omega \tau g(x)\, d\mu^*(x)$，行政成本泛函为 $C(\mu) = \int_\Omega c(x, g(x))\, d\nu^*(x)$。在非负变分 $\delta g(x) \ge 0$ 以 $A \in \mathcal{F}$ 为支集的条件下，一阶变分为

$$\delta R(A) = \int_A \tau f(x) \delta g(x)\, d\nu^*(x), \tag{17}$$

$$\delta C(A) = \int_A \frac{\partial c}{\partial g}(x, g(x)) \delta g(x) d\nu^*(x). \tag{18}$$

A 上的边际执法投资回报率为

$$ROI(A) = \frac{\delta R(A)}{\delta C(A)}. \tag{19}$$

每当 $ROI(A) < 1$ 时，在领域 A扩大制度监控的成本会超过由此追回的新增税收收入 *[21, 22]*。

3.1 总测度的估计

由于真实测度 μ^* 是不可观测对象，应用经济学依赖间接代理变量和统计估计量，在宏观聚合量层面近似估计 μ^*。以下列表列举了一些示例：

- 电力消耗：将电力需求与官方报告产出进行比较，可揭示未记录生产 [34, 35]。

• 卫星夜间灯光光度测量：对夜间亮度进行遥感$\mu_{\text{摄影}}$ [31]，可通过经过校准的亮度—产出转换系数 k，得出一阶近似值$\mu^* \approx k\,\mu_{\text{摄影}}$。

• 货币需求：相对于无现金支付基线的实物现金超额需求，可用于估算未记录交易的规模 [58,2]。

• 潜变量与状态空间模型：MIMIC结构方程模型 [10, 52, 53, 24] 以及对自回归未观测成分的卡尔曼滤波 [47, 48] 可生成宏观估计值 $\mu_L \approx \mu^*$。

• 基于主体的建模（ABM）：对合成经济体 $\Omega_{\text{模拟}}$ [29] 进行蒙特卡洛模拟，可精确追踪模拟中的逃税行为$g_{\text{模拟}} = d\mu_{\text{模拟}}\, d\mu^*_{\text{模拟}}$，以校准现实世界先验。

• 列昂惕夫投入产出模型 [36, 37] 失衡：给定观测到的原材料投入 $\mu_{\text{投入}}$ 以及已知的某生产部门产出与投入之间的技术系数 k，可近似得出真实产出 $\mu^* \approx k\,\mu_{\text{投入}}$，并根据其与官方报告产出 $\mu_{\text{产出}}$之间的残差，估算未记录的影子产出$k\,\mu_{\text{投入}} - \mu_{\text{产出}}$。

现在，我们将估计 μ^* 时宏观一致性与微观不可识别性之间的根本权衡形式化，其中所依据的是经济活动物理痕迹的含噪聚合数据。

定理 2 (粗测度的收敛**)**。设 $(\Omega\ \mathcal{F})$ 为经济交易的可测空间，$\mathcal{G} \subsetneq \mathcal{F}$ 为由宏观经济总量（部门）生成的粗子-σ-代数。设 (Θ, Σ, P) 为一个外部概率空间，真实测度 $\mu^*(\theta, \cdot)$ 从定义在 $(\Omega\ \mathcal{F})$ 上的有限正测度的贝叶斯先验分布中抽取，且$\mu \ll \mu^*$ 为制度性测度。

对于每个宏观部门 $A \in \mathcal{G}$，假设我们观察到一列含噪的宏观物理痕迹

$$Z_i(A) = T(\mu^*(A)) + \epsilon_i(A), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{20}$$

其中 $T:\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 是一个连续双射，且其逆映射 T^{-1} 连续；$\{\epsilon_i(A)\}_{i=1}^{\infty}$ 是在 (Θ, Σ, P) 上的两两不相关的随机变量，且与 μ^* 独立，其中 $E[\epsilon_i(A)] = 0$ 且 $\mathit{Var}(\epsilon_i(A)) = \sigma^2 \in \mathbb{R}_+$。

在 $A \in \mathcal{G}$ 上定义宏观经验估计量为

$$\hat{\mu}_n^*(A) := T^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(A)\right). \tag{21}$$

Let

$$\mathcal{H}_n = \sigma(\{Z_i(A) : A \in \mathcal{G}, 1 \leq i \leq n\}) \subset \Sigma \tag{22}$$

记为由截至样本量 n 的所有宏观观测生成的 σ-代数，并令

$$\mathcal{H}_\infty = \sigma(\{\mu^*(A) : A \in \mathcal{G}\}) \subset \Sigma. \tag{23}$$

则满足以下条件：

1. 对于任意微观经济子集 $B \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{G}$，若给定宏观聚合量后，$\mu^*$（$B$）$\in L^2$（$\Theta$、$\Sigma$、$P$）具有非退化的条件先验方差，即 c：$= E[\mathit{Var}$（μ^*（B）$\mid \mathcal{H}_\infty$）$] > 0$，任何关于宏观观测$\mathcal{H}_n$ 可测的估计量序列 $\tilde{\mu}_n$（B）的均方误差都与零保持正距离，即

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} E\left[(\tilde{\mu}_n(B) - \mu^*(B))^2\right] \geq c > 0. \tag{24}$$

2. 在给定 μ^* 的任意实现条件下，对于每个宏观聚合量$A \in \mathcal{G}$，估计量 $\hat{}$ μ_n^*（A）依概率收敛于真实部门值 μ^*（A），当 $n \to \infty$ 时，即

$$\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n \to \infty} P\left(|\hat{\mu}_n^*(A) - \mu^*(A)| > \epsilon \mid \mu^*(A)\right) = 0. \tag{25}$$

$\hat{}$因此，宏观影子经济估计量 Δ_n（A）$=\hat{}\mu_n^*$（A）$-\mu$（A）在 $\mathcal{G}$ 上是一致的，即

$$plim_{n \to \infty} \hat{\Delta}_n(A) = \Delta(A). \tag{26}$$

证明。该证明基于参数测度与噪声空间上的贝叶斯推断（Θ、Σ、P）。从这个意义上说，测度是该空间上的随机变量，这使我们能够运用希尔伯特空间投影的经典结果。

第一点可通过注意到条件期望$\hat{}\mu_{opt}(B) = E[\mu^*(B) \mid \mathcal{H}_\infty]$ 是 $L^2(P)$ 最优投影来证明，参见 *[60]* 的第*9*节或 *[51]*的第*27*节。根据全方差公式，条件方差 $E[\mathit{Var}(\mu^*(B) \mid \mathcal{H}_\infty)] = c > 0$为任何宏观估计量的均方误差提供了严格下界，从而阻止其在 $\mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$上逐点收敛。

第二点可直接由应用于观测噪声的弱大数定律以及连续逆映射 T^{-1} *[26]* 的连续映射定理得出。

定理 2 为财政监测提出了三项建议：

- 当国家机构只能在粗粒度子-σ-代数 $\mathcal{G}$ 上观测宏观物理代理指标时，无法针对单个企业 $B \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$ 反演 $\mu = g\mu^*$；不过，在行业层面 $A \in \mathcal{G}$，观测噪声会相互抵消，行业差距 $\Delta(A)$ 可以被恢复。

- 宏观一致性依赖于物理联系的存在及其可逆性——该联系将 T 映射至另一量（例如能源产出定律）。对于不会留下宏观物理痕迹的逃税规避方案，T 不可逆，因此宏观物理代理指标会失效。

- 主管机构无需借助物理代理指标审计 $\mathcal{F}$ 中的每一笔微观交易，而是可以在 $\mathcal{G}$ 上使用粗略估计量，定位高差距行业，再在这些行业内开展详细审计。

接下来，我们将探讨国家如何通过融合一系列不同的制度测度／登记库$\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$，系统地提高微观分辨率。

定义 10 (融合算子**)**。 设 Φ_n 为由 $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$构造的累积制度测度。当引入新的制度测度 μ_{n+1}时，设其相对于 Φ_n 的勒贝格分解为

$$\mu_{n+1} = \mu_{n+1}^{ac} + \mu_{n+1}^{\perp},$$

其中，$\mu_{n+1}^{ac} \ll \Phi_n$ 和 $\mu_{n+1}^{\perp} \perp \Phi_n$ 支集于可测集 $S^{\perp} \in \mathcal{F}$上，且 $\Phi_n(S^{\perp}) = 0$。更新后的融合测度 Φ_{n+1} 对每个$A \in \mathcal{F}$ 定义如下：

$$\Phi_{n+1}(A) = \Phi_n(A \setminus S^{\perp}) + \mu_{n+1}(A \cap S^{\perp}) + \int_A \max\left(0, \frac{d\mu_{n+1}^{ac}}{d\Phi_n} - 1\right) d\Phi_n, \quad (27)$$

它与两个测度的巴拿赫格上确界 *[43],* 一致

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n \vee \mu_{n+1}. \quad (28)$$

方程（27）表明，新加入的登记库 μ_{n+1} 通过两个不同渠道扩展国家认知：首先，通过其奇异部分 $\mu_{n+1}^{\perp}$ 在$S^{\perp}$ 上的作用（揭示此前未记录的实体或交易类型，其中$\Phi_n = 0$）；其次，通过已受监测支集上超额密度的最大值 $\max\left(0, \frac{d\mu_{n+1}^{ac}}{d\Phi_n} - 1\right)$（此处 μ_{n+1}观测到的营业额占比高于现有登记库）。

定理3 （真实测度的渐近重构）。 设（Ω $\mathcal{F}$, μ^*）是一个表示真实经济的有限测度空间（$\mu^*(\Omega) < \infty$），并且

设 $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一列制度测度，满足 $0 \le \mu_k \le \mu^*$，其拉东–尼科迪姆导数为 $g_k = \frac{d\mu_k}{d\mu^*}$，取值于 $[0,1]$。定义前 n 个登记库的累积融合算子如下：

$$\Phi_n = \bigvee_{k=1}^{n} \mu_k. \tag{29}$$

于是，$\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是满足 $\Phi_n \ll \mu^*$ 且密度为 $h_n(x) = \frac{d\Phi_n}{d\mu^*}(x) = \max_{1\le k\le n} g_k(x) \in [0,1]$的测度非递减序列。此外，还满足以下条件：

1. 序列 $\{\Phi_n\}$在全变差范数 *[26, 43],*下收敛于真实测度 μ^*

$$\lim_{n\to\infty} \|\mu^* - \Phi_n\|_{TV} = 0, \tag{30}$$

因此，当且仅当满足以下条件时，总体影子经济消失（$\lim_{n\to\infty}\Delta_n = \lim_{n\to\infty}(\mu^*(\Omega) - \Phi_n(\Omega)) = 0$）：

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{d\mu_k}{d\mu^*}(x) = 1 \quad \textit{for } \mu^*\textit{-almost all } x \in \Omega. \tag{31}$$

特别地，*(31)*意味着以下结论——定义零支撑集$N_k = \{x \in \Omega \mid g_k(x) = 0\}$，则有

$$\mu^*\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} N_k\right) = 0. \tag{32}$$

2. 引入新的制度性测度 μ_{n+1} 会严格减少未测度的影子经济差距（$\|\mu^* - \Phi_{n+1}\|_{TV} < \|\mu^* - \Phi_n\|_{TV}$），当且仅当

$$\mu^*\left(\{x \in \Omega \mid g_{n+1}(x) > h_n(x)\}\right) > 0, \tag{33}$$

当且仅当在相对于 Φ_n的勒贝格分解 $\mu_{n+1} = \mu_{n+1}^{ac} + \mu_{n+1}^{\perp}$ 中，$\mu_{n+1}^{\perp} \not\equiv 0$（先前的零集/影子经济集合的渗透）或 $\Phi_n\left(\left\{x \in \Omega \mid \frac{d\mu_{n+1}^{ac}}{d\Phi_n}(x) > 1\right\}\right) > 0$（已受监测交易的可见性提高）成立时，该条件成立。

证明（证明概要）． Φ_n 的拉东–尼科迪姆导数为 $h_n(x) = \max_{1\le k\le n} g_k(x)$。由于 $1 - h_n(x)$ 是由可积函数1界定的单调非增序列，全变差范数下的收敛性可直接由勒贝格控制收敛定理*[26]*得出。

定理3为设计中央财政数据库提供了蓝图：财政部不应建立满足 $\mu_{n+1} \le \Phi_n$的冗余登记库，而应优先建设能够穿透现有零测集（$\mu_{n+1}^{\perp} \neq 0$）的登记库，或通过在现有登记库仅看到部分金额之处采集完整交易金额来改进现有登记库。这与依赖统计独立性及样本间重叠的生态学捕获—再捕获（Petersen）方法 [33], 形成对照，而我们的融合算子则利用互相奇异性与逐点支配，类似于多传感器数据融合 [38]。

3.2 制度测度空间

在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的所有有限带符号测度构成一个巴拿赫空间 $\mathcal{M}(\Omega)$，并赋予全变差范数 $\|\cdot\|_{TV}$，见 [26]。相对于 μ^* 绝对连续的测度所构成的子空间，通过拉东–尼科迪姆导数 $g_k = \frac{d\mu_k}{d\mu^*}$ 与巴拿赫空间 $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu^*)$ 等距且序同构。当赋予逐点格上确界 $(\vee)$ 和下确界 $(\wedge)$ 运算时，它形成巴拿赫格 [43]

$$(g_1 \vee g_2)(x) = \max(g_1(x), g_2(x)), \tag{34}$$
$$(g_1 \wedge g_2)(x) = \min(g_1(x), g_2(x)). \tag{35}$$

对于制度测度的可数集合 $\mathcal{B} = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu^*)$，我们可以从两个不同的泛函分析视角研究其完备性：线性组合（巴拿赫空间结构）和格上确界（巴拿赫格结构）。

在线性（数据融合）方法中，我们使用锥线性组合 $\hat{\mu}_n = \sum_{k=1}^{n} w_k^{(n)} \mu_k$, $w_k^{(n)} \ge 0$来逼近 μ^*。区分公共零测集的缺失（序带完备性）与在 $L^1(\mu^*)$ 中的完全线性稠密性，可得到以下刻画。

定理4（影子经济的 Hahn–Banach 定理与拓扑完备性）。设 $\mathcal{B} = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu^*)$ 是一组可数的制度测度，其密度为 $g_k = \frac{d\mu_k}{d\mu^*} \in L^1(\mu^*)$。那么：

1. 拓扑完备性（不存在不可观测域）：不存在非零影子经济域 $A \in \mathcal{F}$ $(\mu^*(A) > 0)$，使其对所有 $\mu_k \in \mathcal{B}$ 都是共同零测集，当且仅当 $\sup_{k \in \mathbb{N}} g_k(x) > 0$ μ^*-几乎处处成立；这等价于由 $\mathcal{B}$ 在巴拿赫格 $L^1(\mu^*)$ 中生成的闭序理想（带）等于整个空间 $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu^*)$。

2. 线性完备性：真实测度 μ^* 在全变差范数下属于闭线性张成 $\mathcal{span}(\mathcal{B})$，即，

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\mu^* - \sum_{k=1}^{n} w_k^{(n)}\mu_k\right\|_{TV} = 0, \tag{36}$$

当且仅当不存在有界可测带符号函数 $f \in L^\infty(\Omega\ \mathcal{F}, \mu^*)$，使其对每个制度性测度都取零（$\int_\Omega f\, d\mu_k = 0$对所有 $k \in \mathbb{N}$均成立），同时对真实测度的积分非零（$\int_\Omega f\, d\mu^* > 0$）。

证明。该定理是泛函分析中的经典结果——关于 $L^1(\Omega\ \mathcal{F}, \mu^*)$情形，参见 *[26]*, ；关于巴拿赫格方法，参见 *[43]*。

要在实践中估计非负权重 $w_1, \ldots, w_n \geq 0$，需要求解 L^1 回归问题

$$\arg\min_{w_1,\ldots,w_n\geq 0}\left\|\mu^* - \sum_{k=1}^{n} w_k\mu_k\right\|_{TV}. \tag{37}$$

请注意，我们要求 $w_k \geq 0$，但不强制要求 $\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$，因此，如果各个登记库系统性地低报营业额，且 $g_k < 1$，权重便可对线性组合进行缩放，使其与 μ^*相匹配。

在第二种方法中，我们通过上确界融合算子 $\Phi_n = \bigvee_{k=1}^{n} \mu_k$直接利用巴拿赫格结构。我们有

定理 5（融合算子对全测度的重构）。设 $\mathcal{B} = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是满足 $0 \leq \mu_k \leq \mu^*$ 的制度测度可数族，其密度为 $g_k = \frac{d\mu_k}{d\mu^*}$，取值于 $[0, 1],$，并假设 $\mu^*(\Omega) < \infty$。融合测度序列 $\Phi_n = \bigvee_{k=1}^{n} \mu_k$ 在全变差范数下收敛于 μ^*，

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\mu^* - \bigvee_{k=1}^{n} \mu_k\right\|_{TV} = 0, \tag{38}$$

当且仅当 $\mathcal{B}$ 满足格忠实性条件

$$\sup_{\mu_k\in\mathcal{B}} \frac{d\mu_k}{d\mu^*}(x) = 1 \quad \mu^*\text{-}a.e. \tag{39}$$

证明。证明与定理*3*类似，并基于*Banach*格上确界的性质。

利用 L^1 与 L^∞之间的对偶性，将 [26], 视为衡量经济的测度，便可将对偶元素赋予用于经济交易的经济策略。我们可以将前面的定理解释如下。

推论 2。 一个可数族的制度测度 $\mathcal{B} = \{\mu_1, \mu_2, \dots\}$张成 $L^1(\Omega\ \mathcal{F},\ \mu^*)$的稠密子空间，

$$\overline{span(\mathcal{B})} = L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu^*), \tag{40}$$

当且仅当不存在非零有符号规避概况／策略 $f \in L^\infty(\Omega\ \mathcal{F},\ \mu^*)$湮灭所有 $\mu_k \in \mathcal{B}$

$$\left(\forall \mu_k \in \mathcal{B} : \int_\Omega f(x)\, d\mu_k(x) = 0\right) \implies f(x) = 0 \quad \mu^*\text{-}almost\ everywhere. \tag{41}$$

$L^1(\mu^*)$的范数完备性保证，任何制度估计量的柯西序列 $\{\hat{}\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(\lim_{n,\ m\to\infty} \|\hat{}\mu_n - \hat{}\mu_m\|_{TV} = 0)$都会收敛到一个有效的极限测度 $\hat{}\mu_\infty \in L^1(\mu^*)$；而巴拿赫格 $L^1(\mu^*)$的戴德金完备性则确保，任何由 μ^* 在上方有界的制度测度族的上确界 $\bigvee_\alpha \mu_\alpha$ 都作为 $L^1(\mu^*)$中的良定义测度存在 [43]。

4 隐藏维度机制

本节研究一种机制：国家仅拥有固定且有限数量的制度性登记册 $\{\mu_1, \dots, \mu_d\}$ $(d < \infty)$，无法扩充登记册基础以直接覆盖所有经济维度。相反，制度性登记册只能观测经济活动的边缘投影（例如电力消耗、登记就业和货运量），而其他维度（例如账外现金收入或离岸结算）则无法观测。

我们首先定义这一机制的设定。设总交易空间 Ω（博雷尔空间）为d可观测坐标空间 Ω_1，.. .，Ω_d与一个隐藏坐标（博雷尔）空间 Ω_{hid}的乘积（博雷尔）空间

$$\Omega_{\text{obs}} = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d, \tag{42}$$

$$\Omega = \Omega_{\text{obs}} \times \Omega_{\text{hid}} = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d \times \Omega_{\text{hid}}. \tag{43}$$

每个交易状态都是一个向量 $x = (x_{\text{obs}},\ x_{\text{hid}}) \in \Omega$，其中 $x_{\text{obs}} = (x_1,\ \dots,\ x_d) \in \Omega_{\text{obs}}$。按经济总量进行归一化后，我们可以将真实

测度 $\mu^* \in \mathcal{P}(\Omega)$ 视为 Ω 上的联合概率测度。定义典范坐标投影算子 π_k: $\Omega \to \Omega_k$，其中 $k = 1, \ldots, d$，第 k 个边际制度分布即为推前测度

$$\mu_k = \mu^* \circ \pi_k^{-1} \in \mathcal{P}(\Omega_k). \tag{44}$$

首先，考虑可观测空间 $\Omega_{\text{obs}} = \mathbb{R}^d$ 上的子问题（或当 $\Omega_{\text{hid}} = \emptyset$时）：国家能够准确观测一维边缘分布$\{\mu_1, \ldots, \mu_d\}$，并试图重构联合分布 μ^*。

问题 1（边缘重构问题）。 根据固定的有限组边际制度测度$\{\mu_1, \ldots, \mu_d\}$, $d < \infty$，重构联合概率测度 μ^* 。

根据 Sklar定理 [46], ， $\mathbb{R}^d$ 上的任意联合分布都可分解为其一维边缘分布和依赖结构（copula），由此得到以下定理。

定理 6（影子经济Sklar定理（[46]中的定理 2.10.9））。 在 $\mathbb{R}^d$ 上的每个联合概率测度 μ^*，其累积分布函数为 F_{μ^*}，边缘累积分布函数为 $F_{\mu_1}, \ldots, F_{\mu_d}$，均可通过 ***Copula*** 函数 C: $[0,1]^d \to [0,1]$ 表示，使得

$$F_{\mu^*}(x_1, \ldots, x_d) = C\big(F_{\mu_1}(x_1), \ldots, F_{\mu_d}(x_d)\big). \tag{45}$$

如果边缘分布 F_{μ_k} 是连续的，则***copula*** C 是唯一的。

当 μ^* 及其边缘分布关于 $\mathbb{R}^d$上的勒贝格测度绝对连续，且 C具有Copula密度$\frac{\partial^d C}{\partial u_1 \ldots \partial u_d}$时，联合密度 p^*可分解为边缘密度 p_k 与Copula密度 c的乘积

$$p^*(x_1, \ldots, x_d) = c\big(F_{\mu_1}(x_1), \ldots, F_{\mu_d}(x_d)\big) \prod_{k=1}^{d} p_k(x_k). \tag{46}$$

这是在假设copula与累积分布函数足够光滑（例如绝对连续）的条件下，对(45)求导而得到的。

从经济角度看，Copula密度 c 刻画了生产投入（例如劳动、电力、原材料）与金融产出之间的技术耦合。逃税会使所报告的金融边际分布相对于由实物边际分布与技术Copula所隐含的联合分布发生扭曲。

为了选取一个与观测到的边缘分布和先验技术知识 $\mu_{\text{tech}} \in \mathcal{P}(\Omega)$ 一致的唯一联合测度，我们可以选择最小化 Kullback-Leibler（KL）散度（I 对 [16] 的投影）这一方法。

定理 7 (通过 KL 散度重构 **(**[16]**))**。 设 $\mu_{tech} \in \mathcal{P}(\Omega)$ 为参考技术先验测度，并设 $\Gamma(\mu_1, \ldots, \mu_d) = \{\nu \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \nu \circ \pi_k^{-1} = \mu_k,\ k = 1, \ldots, d\}$ 为满足边缘约束的联合概率测度 ***Fr´échet*** 类 *[30]*。假设至少存在一个可行测度 $\nu_0 \in \Gamma(\mu_1, \ldots, \mu_d)$ 使得 $KL(\nu_0 \parallel \mu_{tech}) < \infty$。那么，该优化问题

$$\hat{\mu}^* = \arg\min_{\nu \in \Gamma(\mu_1, \ldots, \mu_d)} KL(\nu \parallel \mu_{tech}), \tag{47}$$

其中

$$KL(\nu \parallel \mu_{tech}) = \int_{\Omega} \log\left(\frac{d\nu}{d\mu_{tech}}\right) d\nu \quad for\ \nu \ll \mu_{tech}, \tag{48}$$

具有唯一极小值点 $\hat{}\mu^* \in \Gamma(\mu_1, \ldots, \mu_d)$。

此外，当 Ω 是有限离散乘积空间，或者当密度在矩形支撑集上严格为正且有界，并且远离零和无穷大（因此边缘对数势可积，$\lambda_k \in L^1(\mu_k)$ *[16]*）时，其相对于 μ_{tech} 的拉东–尼科迪姆导数具有精确的乘法形式

$$d\hat{\mu}^*(x) = \left(\prod_{k=1}^{d} a_k(x_k)\right) d\mu_{tech}(x), \tag{49}$$

其中，边缘势 $a_k(x_k) := \exp(\lambda_k(x_k) - 1/d) > 0$ 的选取满足 $\hat{}\mu^* \circ \pi_k^{-1} = \mu_k$，对 $k = 1, \ldots, d$均成立。

证明(证明概要**)**。 *I*-投影的存在性和唯一性源于 ***Kullback-Leibler***散度在闭凸 ***Fr´echet*** 约束集 *[16]*上的严格凸性。方程（*49*）中的乘法指数形式，是通过拉格朗日乘子处理线性边缘约束 *[16, 30]*，由 ***Csisz´ar*** 投影定理得出的标准结果。

现在我们来探讨何时 $\Omega = \Omega_{\text{obs}} \times \Omega_{\text{hid}}$，也就是说，当 Ω 包含未观测隐藏维度 Ω_{hid} 时，在什么精确的数学条件下，*I*-投影 $\hat{}\mu^*$ 能在 Ω 上处处恢复真实联合测度 μ^*？ 利用测度解体以及 Kullback-Leibler散度的链式法则，我们得到了严格的充要刻画。

定理8 (精确重构条件 **(**（[16]）。 设 $\Omega = \Omega_{obs} \times \Omega_{hid}$，其中 $\Omega_{obs} = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d$；并设 $\Gamma = \{\nu \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \nu \circ \pi_k^{-1} = \mu_k$ 对于 $k = 1, \ldots\ldots, d\}$ 是与可观测边缘分布相匹配的 ***Fr´échet*** 测度类$\mu_k = \mu^* \circ \pi_k^{-1}$。假设 $KL(\mu^* \parallel \mu_{tech}) < \infty$，并令

$$\hat{\mu}^* = \arg\min_{\nu \in \Gamma} KL(\nu \parallel \mu_{tech}). \tag{50}$$

根据概率测度的分解，可写为 $d\nu(x_{obs}, x_{hid}) = \nu(dx_{hid} \mid x_{obs})\, d\nu_{obs}(x_{obs})$，其中 ν_{obs} 是 ν 在 Ω_{obs}上的边缘测度。那么，当且仅当以下两个条件同时成立时，估计量能够恢复真实联合测度（$\hat{}\mu^* = \mu^*$）：

1. 在可观测子空间Ω_{obs}上，真实可观测边缘分布 μ^*_{obs} 是$\mu_{tech,\ obs}$ 到 $\Gamma_{obs} = \{\eta \in \mathcal{P}(\Omega_{obs}) \mid \eta \circ \pi_k^{-1} = \mu_k\}$的$I$-投影；这在正密度支撑下成立，当且仅当拉东–尼科迪姆导数 $\frac{d\mu^*_{obs}}{d\mu_{tech,\ obs}}$ 分解为一维边缘势

$$\frac{d\mu^*_{obs}}{d\mu_{tech,\ obs}}(x_1, \ldots, x_d) = \prod_{k=1}^{d} a_k(x_k) \quad (\mu^*_{obs}\text{-}a.e.). \tag{51}$$

也就是说，$\mu_{tech,\ obs}$ 已经精确刻画了可观测维度$(X_1, \ldots, X_d)$之间的高阶 *copula*相互作用。

2. 对 μ^*_{obs}-几乎处处的 $x_{obs} \in \Omega_{obs}$，真实经济在Ω_{hid} 上的条件概率核与条件技术先验一致

$$\mu^*(dx_{hid} \mid x_{obs}) = \mu_{tech}(dx_{hid} \mid x_{obs}). \tag{52}$$

特别地，若存在可测映射 $f : \Omega_{obs} \to \Omega_{hid}$，使得 $X_{hid} = f(X_{obs})$ μ^*-几乎处处成立（这在离散划分上对应于条件香农熵 $H(X_{hid} \mid X_{obs}) = 0$ *[15]*为零，或对平方可积随机变量对应于条件方差*Var*$(X_{hid} \mid X_{obs}) = 0$ 几乎处处为零），则在Ω_{hid} 上的精确恢复成立，当且仅当前验条件核集中于 f的确定性图上，即 $\mu_{tech}(dx_{hid} \mid x_{obs}) = \delta_{f(x_{obs})}(dx_{hid})$。

证明。证明重复了 *[16],* 的结果，此外还利用了映射 $f : \Omega_{obs} \to \Omega_{hid}$ 的存在；该映射在 Ω_{hid} 上诱导测度，并对测度 *[7]* 进行分解。

条件 1 意味着，政府的基准技术模型已经正确把握了与影子经济总量有关的可观测变量之间的联合关系。条件 2 假设，政府的基准技术模型已经正确把握了从可观测变量到隐藏变量的条件联系。当定理 8 的条件 1 或 2 不成立时——例如，影子经济采用了偏离“照常经营”先验的创新性逃避耦合 μ_{tech} ——重构误差 KL($\mu^* \parallel \hat{}\mu^*$) 恰好由 Csisz´ar 信息毕达哥拉斯定理 [16] 决定。

定理 9 (信息毕达哥拉斯定理（ [16]中的定理 2.2）。令 $\mathcal{P}(\Omega)$ 为概率测度空间，令 $\mu_{tech} \in \mathcal{P}(\Omega)$ 为参考先验测度，令 $\Gamma \subset \mathcal{P}(\Omega)$ 为概率测度的闭凸集，使得 $\hat{}\mu^* = \operatorname{argmin}_{\nu\in\Gamma} KL(\nu \parallel \mu_{tech})$ 存在，且 $KL(\hat{}\mu^* \parallel \mu_{tech}) < \infty$。那么，对于任何满足 $KL(\mu^* \parallel \mu_{tech}) < \infty$ 的真实测度 $\mu^* \in \Gamma$，以下不等式成立

$$KL(\mu^* \parallel \mu_{tech}) \geq KL(\mu^* \parallel \hat{\mu}^*) + KL(\hat{\mu}^* \parallel \mu_{tech}). \tag{53}$$

此外，如果 $\Gamma = \Gamma(\mu_1, \ldots, \mu_d)$ 由线性边缘约束定义（其中 $\mu^* \ll \hat{}\mu^*$），则该关系成立且为严格等式（见 *[16]*中的公式 ***(3.1)***）

$$KL(\mu^* \parallel \mu_{tech}) = KL(\mu^* \parallel \hat{\mu}^*) + KL(\hat{\mu}^* \parallel \mu_{tech}). \tag{54}$$

这三个项可以作如下经济学解释：

- $KL(\mu^* \parallel \mu_{tech})$ - 真实经济μ^* 与政府的基准技术先验 μ_{tech}之间的总信息散度。
- $KL(\hat{}\mu^* \parallel \mu_{tech})$ - 通过更新 μ_{tech} 以满足观测到的制度边缘分布 $\mu_1, \ldots, \mu_d$ 而计入的散度。或者，这表示在假定的技术基准下，估计量所捕获的信息。
- $KL(\mu^* \parallel \hat{}\mu^*)$ - 真实经济 μ^*与 I-投影 $\hat{}\mu^*$之间的残余差异，这是由未测量的跨维*copula*变动或隐维偏差引起的，偏离了 μ_{tech}。

推论 3. 由于 I-投影保留了先验 μ_{tech} 的高阶 *copula* 相互作用和隐维条件分布，因此任何改变 *copula* C 但不改变一维边缘分布 μ_k 的新型逃税方案，对边缘约束而言都是不可见的。其全部散度都被吸收到不可恢复误差 $KL(\mu^* \parallel \hat{}\mu^*)$中。此外，如果 μ^* 为 μ_{tech} 消失的地区赋予正概率（$\mu^* \not\ll \mu_{tech}$），那么 $KL(\mu^* \parallel \mu_{tech}) = +\infty$，且必须通过真实数据审计重新校准先验。

5 压缩感知区域

第 3 节和第 4 节中的制度要求要么有足够丰富的登记库集合（基准测度） $\mathcal{B}$，要么要求物理投入之间存在严格的技术耦合。本节讨论相反的制度。我们考虑一个由 N 实体构成的经济体，在这个经济体中，审计每个实体的成本过高，但大规模

逃税集中在一小部分 $K \ll N$ 行为者身上（例如，有组织的增值税转盘式欺诈网络或集中式非法制造）。

我们应用压缩感知（CS）理论 [14, 23, 9], ，该理论此前曾用于检测智能电网中的窃电 [1, 40] 以及通信网络中的异常 [62, 42]。

压缩感知适用于离散设定。因此，我们将交易空间 Ω 离散化为一个由 N“原子” $\{A_j\}_{j=1}^{N}$构成的可测划分，其中 $1 \leq N < \infty$。原子重构整个交易空间 $\Omega = \bigsqcup_{j=1}^{N} A_j$，且彼此不相交$A_i \cap A_j = \emptyset$，对于 $i \neq j$均如此。每个原子 A_j 可以代表单个企业、纳税人识别号或本地经济节点。

我们区分 $(\Omega\ \mathcal{F})$ 上的两种测度：

- μ_{leg} （法定申报测度）——由官方纳税申报和法定登记册诱导的行政测度。根据定义，μ_{leg} 在完全未登记的影子活动上为零。

- μ_{tech} （技术／网络传感测度）——一种物理或网络层面的传感机制（例如智能电网变压器负载总量、货运清算节点或银行间流动性结算），用于捕捉 μ^* 跨原子的线性组合所形成的真实经济流量。

我们将原子$\{A_j\}_{j=1}^{N}$ 上的真实影子经济差距向量 $s^* \in \mathbb{R}^N$ 定义为

$$s^* = \begin{bmatrix} \mu^*(A_1) - \mu_{\text{leg}}(A_1) \\ \mu^*(A_2) - \mu_{\text{leg}}(A_2) \\ \vdots \\ \mu^*(A_N) - \mu_{\text{leg}}(A_N) \end{bmatrix}, \tag{55}$$

其中，对于带符号或正的隐匿测度 $\mu_{\text{hid}} := \mu^* - \mu_{\text{leg}}$。相对于 μ_{leg}对 μ^* 进行勒贝格分解,

$$\mu^* = r\,\mu_{\text{leg}} + \mu_{\text{sing}}, \tag{56}$$

其中 $r = \frac{d\mu^*}{d\mu_{\text{leg}}}^{ac} \geq 1$是 μ^* 相对于 μ_{leg} 的绝对连续部分的拉东–尼科迪姆导数，而 $\mu_{\text{sing}} \perp \mu_{\text{leg}}$ 支撑于合并的影子经济零测集 S_c （定义9）上。于是，每个分量s_j^* 可分解为两种逃税机制

$$s_j^* = \int_{A_j} (r(x) - 1)\, d\mu_{\text{leg}}(x) + \mu_{\text{sing}}(A_j). \tag{57}$$

此处 $\int_{A_j} (r(x) - 1)\ d\mu_{\text{leg}}(x)$ 表示对已登记活动的价值低报（信息不对称），而 $\mu_{\text{sing}}(A_j)$ 则表示完全账外的交易。

假设税务机关使用分段常数感知滤波器执行 $M \ll N$ 聚合线性测量 $y \in \mathbb{R}^M$

$$\phi_i(x) = \sum_{j=1}^{N} \Phi_{i,j} \chi_{A_j}(x), \quad i = 1, \ldots, M. \tag{58}$$

然后我们可以构建压缩感知方程

$$y_i = \int_{\Omega} \phi_i(x)\, d\mu_{\text{hid}}(x) = \sum_{j=1}^{N} \Phi_{i,j} \mu_{\text{hid}}(A_j) = \sum_{j=1}^{N} \Phi_{i,j} s_j^*, \tag{59}$$

或写成矩阵形式

$$y = \Phi s^*, \tag{60}$$

其中， $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 是测量（感知）矩阵。该方程将测得的差异 y 与真实的影子经济 s^*联系起来。现在我们可以应用压缩感知理论了。

定理10 （稀疏影子经济的精确恢复（ [12]）） 。 设 $s^* \in \mathbb{R}^N$ 为通过 $M \ll N$ 聚合检查 $y = \Phi s^*$观测到的未知影子经济差距向量，其中 $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$。假设：

1. K—创新域中的稀疏性：向量 s^* 至多具有 K个非零元素（ $K < M \ll N$）：

$$\|s^*\|_0 = |\{j \in \{1, \ldots, N\} \mid s_j^* \neq 0\}| \leq K, \tag{61}$$

其中 $\mathit{supp}\,(s^*) = \{j \mid s_j^* \neq 0\}$。

2. 阶数为 $2K$ 的受限等距性质（*RIP*）：感知矩阵Φ 满足阶数为 $2K$的 *RIP*，这意味着对于每个 $2K$-稀疏向量 $v \in \mathbb{R}^N$，

$$(1 - \delta_{2K})\|v\|_2^2 \leq \|\Phi v\|_2^2 \leq (1 + \delta_{2K})\|v\|_2^2, \tag{62}$$

其受限等距常数严格满足

$$\delta_{2K} < \sqrt{2} - 1. \tag{63}$$

那么，凸 ℓ_1-最小化（基追踪）问题 *[9]*

$$\hat{s} = \arg\min_{s \in \mathbb{R}^N} \|s\|_1 \quad \textit{subject to} \quad \Phi s = y \tag{64}$$

具有唯一解，并精确恢复真实的影子经济向量

$$\hat{s} = s^*. \tag{65}$$

证明 (证明概要**)。** 该证明采用了 *Cand`es [12, 13]*所建立的受限等距性质（限制等距性质）和零空间几何。误差向量 $h = \hat{s} - s^*$ 满足 ℓ_1 锥条件 $\|h_{T_0^c}\|_1 \leq \|h_{T_0}\|_1$，从几何上将扰动限制在 Φ的核内。应用 ***RIP*** 条件 $\delta_{2K} < \sqrt{2}-1$ 迫使投影范数 $\|h_{T_0}\|_2$ 消失，从而得到精确恢复 $\hat{s} = s^*$ *[12]*。

定理10为组织税务审计提出了两项直接的操作原则：

1. 当逃税集中在 $K \ll N$ 实体中时，国家无需进行 N 单独审计；只需开展 $M = \mathcal{O}(K \log(N/K))$次随机非相干聚合检查，即可高概率满足$2K$ 阶限制等距性质（RIP），并准确重构 s^* [13, 9]。

2. 为满足限制等距性质（RIP），感知矩阵 Φ必须与典范实体基不相干；关于这一性质的详细讨论，见 [9]。传统孤岛式审计一次只检查一个行业或税务机关，会产生受限等距常数较差的分块对角感知矩阵。另一方面，要检测稀疏的大规模欺诈网络，随机跨行业汇集至关重要。

我们还强调， [12] 中的定理 1.3描述了这样一种情形：测量值由 $y = \Phi s + z$给出，噪声 z 有界$\|z\|_{\ell_2} \leq \epsilon$。这使得我们能够根据含噪测量值进行重构。

下面举例说明上述方法的应用场景。

示例 2 (货币流动与旋转式欺诈模型**)。**考虑一个由 N 家企业构成的网络，其中 $K \ll N$ 家空壳公司开具虚假的增值税发票（s^*）。无需审计所有 N 家企业开具的每张发票， $y \in \mathbb{R}^M$ 会记录按 Φ定义的 M 个随机化的多邮政编码或多银行结算池汇总后的增值税净结算不平衡。随后，压缩感知方法可以重建真实的影子经济 s^* ，因为影子经济具有稀疏性（$K \ll N$）。

示例 3 （通过智能电网电力传感器检测非法制造）。 设N 为某地区的工业工厂数量， $s^* \in \mathbb{R}^N$ 表示未记录的超额生产。测量向量 $y \in \mathbb{R}^M$ 记录了 M 个变电站馈线上的超额用电量（超出申报生产基准的部分），其中$\Phi_{i,j}$ 利用列昂惕夫系数，将连接至馈线 i 的工厂 j 的用电量转换为货币产出当量。当只有 $K \ll N$家工厂从事账外生产时，通过考察压缩感知重构向量 s^* 的非零分量， ℓ_1 最小化可根据馈线聚合值 y 精准定位相关工厂。

示例 4（通过区域现金取款异常识别非正规劳动）。 设N 表示某大都市区的大型雇主， s_j^* 表示雇主 j支付的未申报的现金工资总额。向量 $y \in \mathbb{R}^M$ 测量 M 个自动取款机集群中的发薪日现金取款异常，而$\Phi_{i,\ j}$ 则根据城市出行模型（例如 *[44]*）对雇主 j 至自动取款机集群 i 的通勤概率进行建模。如果非正规工资支付呈稀疏分布（$K \ll N$），基追踪就能识别不合规雇主。

我们还想评论一下逆问题。在压缩感知中，也可以利用成熟的稀疏传感器布置理论来优化传感器布置矩阵 Φ [8, 41, 9]。存在观测噪声 $y = \Phi s^* + \epsilon_y$时，重建稳定性取决于 Φ的 K列子矩阵的奇异值谱： Φ_T($|T| \le 2K$)的最大奇异值与最小奇异值之比（由 $\sqrt{}$(1 + δ_{2K})/(1 − δ_{2K})控制）应尽可能接近 1。通过$Y = \Phi S$ ，利用历史审计配对数据（Y， S）对未知物理传递矩阵 $\Phi \in \mathbb{R}^{M\times N}$ 进行经验校准，需要 $L \ge N$ 线性独立的历史审计观测$S = [s^{(1)}, \ldots, s^{(L)}]$，并且必须考虑审计引起的行为变化（第 2 节中提及），这些变化可能会随着时间推移而改变 Φ 。

6 综合与建议

第 3、4 和 5 节提出的三种数学情形，分别探讨了影子经济在结构上的不同表现形式，彼此互为补充。我们从第 3 节最简单的情形入手：影子经济由少报和无效的制度测度所致。解决方法是增加新的“正交”制度测度，并使用融合算子（测度的格上确界）来提高灵敏度，逐步接近总测度。接着，在第 4 节中，我们扩展模型，将测量划分纳入经济领域，并考虑经济中有一部分无法被任何制度测度观测到，但可通过基于物理活动（如能源消耗）的间接测量加以观测。在对相关技术过程作出某些假设的前提下，我们可以恢复部分不可见的经济，并将其与通过熵最大化程序对可见部分作出的估计相结合。最后，我们在第 5 节中考察由少数高交易量主体造成的影子经济。应用压缩感知后，我们得以确认，通过选择性、稀疏的随机测量，可以恢复有关这些少数主体的信息。

这三种情况代表了最典型的情形，可以利用测度论、多元分析和压缩感知中的标准定理轻松进行分析，

其中的关键问题在于满足相关数学理论适用性的假设条件，而我们已将这些条件用经济学术语加以表述。

现在，我们针对上述讨论的情形，向决策者提出相应建议。重要的是，应依据已实施的制度性测度，对经济交易 Ω 形成一致的认知。因此，税务机关应将彼此分散的国家登记系统关联起来，并采用逐点格上确界，为每位纳税人的真实活动确立证据下界。由于新的制度性测度是一项成本高昂的过程，政策制定者在为新的国家级信息技术登记系统拨款之前，应先评估能否通过试点样本获得关于经济的真正新信息，以验证新测度是否能够穿透现有零测集，或提升超出现有测度的可见性，避免因重复投入而造成低效。如果制度性测度无法观测到经济中那些可通过其物理指纹追踪的隐藏维度，那么引入新的制度性／技术性测度，就必须以全面理解将物理痕迹转化为经济交易的技术过程为基础。否则，就会产生系统误差。从压缩感知的角度看，在针对稀疏的高交易量欺诈网络时，传统的逐行业审计无法满足受限等距性质。因此，最佳方法是将随机化的跨行业汇集物理／网络清算流与官方纳税申报相结合，使主管机构能够以 ℓ_1 最小化的方式，在仅需传统审计一小部分成本的情况下，锁定并查明主要逃税者。

最后一点与观察者悖论有关——本文的理论允许主管机构对完整经济进行静态快照。不过，快照的设计应避免惊动影子经济的参与者，因为他们可能会改变规避策略，从而导致快照迅速过时。

7 结论

我们为跨越三种运行机制的影子经济建模与量化建立了形式化的测度论基础：部分登记少报（巴拿赫格理论）、未记录的经济维度（Copula 理论与最大熵/I-投影），以及稀疏的高规模逃税网络（压缩感知）。针对每种运行机制，我们都证明了精确恢复真实潜在测度 μ^* 的充要条件，并为决策者制定了建议。

我们重点指出两项主要的理论局限，它们为未来研究指明了自然方

向。第一项涉及对静态快照的研究。本文分析的是静态测度空间。要将这一框架扩展至随时间演化的影子经济，需要引入过滤概率空间、随机过程和鞅分解 [51]。另一项与观察者悖论有关。由于执法会改变底层测度 μ^* 及其 copula 结构，更成熟的理论应当考虑测量所诱发的逃税策略内生变化。

所提出的理论可用于将现代数据驱动型人工智能方法引入政府科技应用，从而提高经济的可解释性。

致谢

RK 的工作部分得到了欧盟“地平线欧洲”玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里行动资助（编号 101300007）的资助。

在准备本研究的过程中，作者使用了生成式人工智能工具来协助润色语言和构建证明的呈现方式。使用这些工具后，作者独立核查了所有数学推导，并对本出版物的内容承担全部责任。

参考文献

[1]Ahmed, M.、Khan, A.、Ahmed, M.、Tahir, M.、Jeon, G.、Fortino, G. 和 Piccialli, F.（2022）。智能电网中的能源盗窃检测：分类、比较分析、挑战与未来研究方向，《IEEE/CAA 自动化学报》，9（4）：578–600；DOI： https://doi.org/10.1109/JAS.2022.105404

[2] Ahumada, Hildegart、Alvaredo, Facundo 和 Canavese, Alfredo（2008年）。衡量影子经济的货币法：被忽视的初始条件问题，《经济学通讯》，101（2）：97–99；DOI： https://doi.org/10.1016/j.econlet.2008.06.001

[3] Alimkhanova N., Djalilov R.H., Egamberdieva S.R., Ismatullaev J.A., Kholmuradov O.N., Oramova N., Khushmuradov O., Anvarova L., Raimberdiev A.A.（2026年）。作为记录一致性的间接税问责：数字技术与大数据环境下的存货会计与审计，《Front. Big Data》9:1953628。DOI： https://doi.org/10.3389/fdata.2026.1953628

[4] Aliprantis, Charalambos D. 和 Border, Kim C.（2006年）。无限维分析：搭便车者指南，Springer Berlin, Heidelberg。[5] Besley, Timothy 和 Persson, Torsten（2009）。国家能力的起源：产权、税收与政治，《美国经济评论》99（4）：1218–44。[6] Bharosa, Nitesh（2022年）。政府科技的兴起：特洛伊木马还是伪装的祝福？一项研究议程，《政府信息季刊》39（3）；DOI：https://doi.org/10.1016/j.giq.2022.101692[7] Bogachev, Vladimir I.（2006年）。测度论，Springer Berlin, Heidelberg。[8] Brunton, B. W.、Brunton, S. L.、Proctor, J. L. 和 Kutz, J. N.（2016年）。面向分类的稀疏传感器布置优化，《SIAM应用数学杂志》76（5）：2099–2122；DOI：https://doi.org/10.1137/15M1036713[9] Brunton, Steven L. 和 Kutz, J. Nathan（2022年）。数据驱动科学与工程：机器学习、动力系统与控制，剑桥大学出版社，第2版。[10]Buehn, A. 和 Schneider, F.（2012年）。世界各地的影子经济：新见解、既有知识与新的估计，《国际税收与公共财政》19：172–194。[11] Buehn, A. 和 Schneider, F.（2013年）。使用*MIMIC*方法估计跨国犯罪资金流的初步尝试，载于：B. Unger 和 D. van der Linde（编），《洗钱研究手册》，爱德华·埃尔加出版社，切尔滕纳姆，英国，第172–189页。[12] Cand`es, Emmanuel J.（2008年）。受限等距性质及其对压缩感知的影响，《数学报告》346（9-10）：589–592；DOI：https://doi.org/10.1016/j.crma.2008.03.014[13] Cand`es, Emmanuel J. 和 Wakin, M. B.（2008年）。压缩采样简介，《IEEE信号处理杂志》25（2）：21–30；DOI：https://doi.org/10.1109/MSP.2007.914731[14] Cand`es, E mmanuel J.、Romberg, Justin K. 和 Tao, Terence（2006年）。从不完整且不准确的测量值中进行稳定的信号恢复，《纯粹与应用数学通讯》59（8）：1207–1223；DOI：https://doi.org/10.1002/cpa.20124

[15] Cover, Thomas M. 和 Thomas, Joy A.（2006年）。《信息论要素》，Wiley-Interscience。[16] Csisz´ar, I.（1975）。概率分布的 *I*-散度几何与最小化问题，《概率年刊》，3（1）：146–158；DOI：https://doi.org/10.1214/aop/1176996454[17] Dell'Anno, R.（2007）。《葡萄牙影子经济：*MIMIC* 方法分析》，《应用经济学杂志》，10，253–277，DOI：https://doi.org/10.1080/15140326.2007.12040490[18]Dell'Anno, R.（2023）。通过结构方程建模方法测量不可观测对象：估算非正规经济，《国际税收与公共财政》30，247–277；DOI：https://doi.org/10.1007/s10797-022-09742-0[19] Dell'Anno, R. 和 Solomon, O. H.（2008年）。《美国影子经济与失业率：二者是否存在结构关系？一项实证分析》，《应用经济学》，40（19）：2537–2555；DOI：https://doi.org/10.1080/00036840600970195[20]Dell'Anno, R., Schneider, F.（2003年）。《意大利及其他经合组织国家的影子经济：我们了解多少？》，《公共财政与公共选择杂志》，21，97–120，DOI：https://doi.org/10.1332/251569203X15668905422009[21] Diamond, Peter A. 和 Mirrlees, James A.（1971年）。《最优税收与公共生产 *I*：生产效率》，《美国经济评论》，61（1）：8–27。[22] Diamond, Peter A. 和 Mirrlees, James A.（1971年）。《最优税收与公共生产 *II*：税收规则》，《美国经济评论》，61（3），第1部分：261–278。[23] Donoho, D. L.（2006年）。压缩感知，《电气电子工程师学会信息论汇刊》，52（4）：1289–1306；DOI：https://doi.org/10.1109/TIT.2006.871582[24] Dybka, P., Kowalczuk, M., Olesi´nski, B. 等（2019）。货币需求与 *MIMIC* 模型：构建测量影子经济的结构化混合方法，《国际税收与公共财政》26，4–40；DOI：https://doi.org/10.1007/s10797-018-9504-5

[25] 埃德加·L·费格（2009）。《地下经济：逃税与信息失真》，剑桥大学出版社。[26] 杰拉尔德·B·福兰（1999）。《实分析：现代技术及其应用》，威利，第2版。[27] 布鲁诺·S·弗雷 和 弗里德里希·施耐德（2000年）。《非正规经济与地下经济》，工作论文，第0004号，林茨约翰·开普勒大学经济系，林茨； https://hdl.handle.net/10419/73197[28]伊莎贝尔·哈斯勒、阿克塞尔·林、陈永新和约翰·卡尔松（2019年）。估计隐马尔可夫链上的集成流，2019年电气电子工程师学会第58届决策与控制会议（CDC），法国尼斯，第1331–1338页，DOI: https://doi.org/10.1109/CDC40024.2019.9029787[29] 萨沙·霍坎普、拉斯洛·古利亚什、马修·科勒和萨尼思·维杰辛格（2018年）。《逃税的基于主体建模：理论方面与计算模拟》，威利计算与定量社会科学丛书。[30] 哈里·乔（1997年）。《多元模型与多元依赖概念》，Chapman and Hall/CRC。[31] 苏克尼兰·凯奥拉、马格努斯·安德松和奥拉·霍尔（2015年）。《从太空监测经济发展：利用夜间灯光和土地覆盖数据衡量经济增长》，《世界发展》，66：322–334；DOI: https://doi.org/10.1016/j.worlddev.2014.08.017[32]亨里克·雅各布森·克莱文（2016年）。聚集效应，《经济学年度评论》，8：435–464；DOI：https://doi.org/10.1146/annurev-economics-080315-015234 [33] 查尔斯·J·克雷布斯（2009）。生态学 （第6版），培生 Benjamin Cummings。[34] 玛丽亚·拉科（1998）。《维谢格拉德国家隐性经济的国际比较：家庭用电方法》，载于：L. 哈尔彭和 Ch. 维普洛兹（编），《匈牙利：迈向市场经济》。CEPR出版社，巴黎和伦敦。https://cepr.org/publications/books-and-reports/hungary-towards-market-economy[35] 玛丽亚·拉科（2000）。《电力消费数据能说明问题吗？——后社会主义国家的电力强度与隐性经济》，

载于：E. Maskin 和 A. Simonovits（编），《计划、短缺与转型》ormation: E文集 in H献给 J´anos Kornai. The MIT 出版社ress.[36] Leontief, Wassily（1953）。动态分析，载于：Leontief, Wassily（编），《美国经济结构研究》。纽约：牛津大学出版社。[37] Leontief, Wassily（1966）。投入产出经济学，牛津大学出版社。[38] Liggins, Martin E.、Hall, David L. 和 Llinas, James（2008）。多传感器数据融合理论与实践手册，第2版，CRC。[39] Lucas, Robert（1976）。计量经济学政策评估：批判，载于：Brunner, K.；Meltzer, A.（编），《菲利普斯曲线与劳动市场》。卡内基—罗切斯特公共政策会议系列，第1卷。纽约：美国爱思唯尔，第19–46页；DOI：https://doi.org/10.1016/S0167-2231(76)80003-6[40]Lydia, M.、Kumar, G. E. P. 和 Levron, Y.（2019）。基于压缩感知的窃电检测，2019年第5届高级计算与通信系统国际会议（ICACCS），印度哥印拜陀：995–1000；DOI：https://doi.org/10.1109/ICACCS.2019.8728396[41] Manohar, Krithika、Brunton, Bingni W.、Kutz, J. Nathan 和 Brunton, Steven L.（2018）。数据驱动的稀疏传感器布置用于重构：展示利用已知模式的优势，IEEE控制系统，38（3）：63–86；DOI：https://doi.org/10.1109/MCS.2018.2810460[42] Mardani, M.、Mateos, G. 和 Giannakis, G. B.（2013）。动态异常图谱：通过稀疏性和低秩跟踪网络异常，IEEE信号处理精选主题期刊，7（1）：50–66；DOI：https://doi.org/10.1109/JSTSP.2012.2233193[43] Meyer-Nieberg, Peter（1991）。巴拿赫格，施普林格出版社，柏林海德堡。[44] Mishina, M.、Mityagin, S.、Belyi, A.、Khrulkov, A. 和 Sobolevsky, S.（2024）。迈向城市可达性：通过出行分布建模评估社会设施供给，智慧城市，7：2741–2762；DOI：https://doi.org/10.3390/smartcities7050106

[45] Mulyanyuma, Aaron Ayeta（2026）。撒哈拉以南非洲的税收管理与国内资源动员：收入效率、合规性和数字税收制度的大数据计量分析，跨学科研究学术期刊，15（5），115，DOI：https://doi.org/10.36941/ajis-2026-0147[46] Nelsen, R. B.（2006）。《*Copula*入门》，第2版，Springer统计学丛书，Springer，纽约。[47] Ozbek, Levent 和 Ozlale, Umit（2005）。采用扩展卡尔曼滤波器测量产出缺口，《经济动态与控制杂志》，29（9）：1611–1622；DOI：https://doi.org/10.1016/j.jedc.2004.09.005[48]Rajan, M. P. 和 Mathew, J.（2012）。卡尔曼滤波器与金融时间序列分析，载于：Mathew, J.、Patra, P.、Pradhan, D.K.、Kuttyamma, A.J.（编），《环保型计算与通信系统》。ICECCS 2012。《通信与信息科学》，第305卷。Springer，柏林，海德堡；DOI：https://doi.org/10.1007/978-3-642-32112-2_40[49] Rockafellar, R. Tyrrell 和 Wets, Roger J. B.（2009）。变分分析，Springer Berlin，海德堡。[50] Saez, Emmanuel（2010）。纳税人会在折点处聚集吗？，《美国经济学杂志：经济政策》，2（3）：180–212；DOI：https://doi.org/10.1257/pol.2.3.180[51] Schilling, R. L.（2017）。测度、积分与鞅，剑桥大学出版社。[52] Schneider, F. 和 Enste, D.（2000）。影子经济：规模、成因与后果，《经济学文献杂志》38（1）：77–114；DOI：https://doi.org/10.1257/jel.38.1.77[53] Schneider, F. 和 Williams, C. C.（2013）。影子经济，经济事务研究所，伦敦。[54] Slemrod, Joel（1990）。最优税收与最优税收制度，《经济展望杂志》，4（1）：157–178；DOI：https://doi.org/10.1257/jep.4.1.157[55] Slemrod, Joel 和 Yitzhaki, Shlomo（1985）。税收征管机构的最优规模，NBER工作论文1759，美国国家经济研究局；DOI：https://doi.org/10.3386/w1759

[56] Smith-Hillman, A. V. (2007). 竞争政策、通货膨胀与腐败：来自非洲经济体的证据，《应用经济学快报》，14 (9)，653–656，DOI: https://doi.org/10.1080/13504850500461415[57] Strathern, Marilyn (1997).提升评级：英国大学体系中的审计，《欧洲评论》，5 (3)，约翰·威立父子公司：305–321.[58] Tanzi, Vito (1982).《美国及国外的地下经济》，纽约：自由出版社。； https://labordoc.ilo.org/permalink/41ILO_INST/1p87pg0/alma992186243402676[59] Tanzi, Vito (1999). 地下经济估算的用途与滥用，《经济学杂志》，109 (456)：F338–F347；https://www.jstor.org/stable/2566007[60] Williams, David (1991).《鞅与概率》，剑桥大学出版社。[61]Yang, Zha and Zha, Hongyuan (2023). 通过反演多边际最优传输，从聚合数据估算潜在人口流动，载于：2023年SIAM国际数据挖掘会议（SDM）论文集，181–189，DOI: https://doi.org/10.1137/1.9781611977653.ch21[62] Zhang, Yin, Roughan, Matthew, Willinger, Walter, and Qiu, Lili (2009).时空压缩感知与互联网流量矩阵，载于：ACM SIGCOMM 2009数据通信会议论文集（SIGCOMM '09）。计算机协会，纽约，纽约州，美国：267–278；DOI: https://doi.org/10.1145/1592568.1592600

《影子经济作为零测集。影子经济的测度论方法》的补充

Rados-law A. Kycia [a] Andrzej Buszko [b]

[a] 数理经济学研究所，经济分析学院，华沙经济学院，华沙，波兰[b] 波美拉尼亚大学，斯-武普斯克，斯-武普斯克，波兰

摘要

本补充材料给出了论文中的证明。这些证明基于测度论、多元微积分和压缩感知中的标准结果，因此将其列于补充材料中。

1 低分辨率状态

定理 1 (制度性测度的最优条件)。 设执行交易$x \in \Omega$ 的可见性 $g \in [0,1]$ 的运营成本 $c\colon \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}_+$ 为 *Carath´eodory* 函数（对每个 $g \in [0,1]$在 x 上可测，并且对于 ν^*-几乎处处的 $x \in \Omega$，关于 $g \in [0,1]$ 为凸函数且连续可微），满足 $\sup^{g\in[0,1]} {}^{C}(x,g) \in L^1(\Omega\ \mathcal{F},\nu^*)$。给定税率$\tau \in [0,1]$和 ν^*-可积的附加值函数 $f(x)$，可测的可见性剖面 $g^*(x) \in [0,1]$ 求解净预算收入最大化问题

$$\max_{g:\Omega\to[0,1]} \int_\Omega \left(\tau f(x)g(x) - c(x,g(x))\right) d\nu^*(x) \tag{1}$$

当且仅当对于 ν^*-几乎处处的 $x \in \Omega$，我们有

$$\begin{cases} \tau f(x) \le \frac{\partial c}{\partial g}(x,0) & \text{if } g^*(x) = 0, \\ \tau f(x) = \frac{\partial c}{\partial g}(x,g^*(x)) & \text{if } g^*(x) \in (0,1), \\ \tau f(x) \ge \frac{\partial c}{\partial g}(x,1) & \text{if } g^*(x) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

这里，$-\frac{\partial c}{\partial g}(x,g(x))$ 表示在 x 提高交易可见性的边际执法成本。

证明。 该证明应用了 *[1]* 中的定理 ***18.19***。

由于 $c(x, g)$ 是具有可积上界函数的 ***Carath´eodory*** 函数，且式 ***(1)*** 中的被积函数逐点依赖于 $g(x) \in [0,1]$，因此，对可测函数 $g : \Omega \to [0,1]$ 上的积分进行最大化，可转化为（另见 *[12]*中的定理 ***14.60***）在紧区间 $g \in [0,1]$上，对逐点目标函数$I_x(g) = \tau f(x)g - c(x, g)$进行最大化；这一结论对 ν^*-几乎处处的 $x \in\Omega$成立。

由于 $g \mapsto c(x, g)$ 在 $[0,1]$上是凸且连续可微的，而 $I_x(g)$在 $[0,1]$上是凹且连续可微的。根据 $[0,1]$上的 ***Kuhn-Tucker*** 最优性条件， $g^* \in [0,1]$ 使 $I_x(g)$ 最大化，当且仅当 $I'_x(0) \leq 0$ 当 $g^* = 0$ 时， $I'_x(g^*) = 0$ 当 $g^* \in (0,1)$ 时，以及 $I'_x(1) \geq 0$ 当$g^* = 1$时成立，由此得到式 ***(2)***。

推论 1. 如果 $c(x, g)$ 关于 $g \in [0,1]$ 是凸的，那么对于每一笔满足 $\tau f(x) < \frac{\partial c}{\partial g}(x, 0)$ 的交易 $x \in\Omega$ ，式 ***(1)*** 中唯一最优可见性为 $g^*(x) = 0$。

证明。固定 x，定义 $I_x(g) = \tau f(x)g - c(x, g)$。于是 $I'_x(g) = \tau f(x) - \frac{\partial c}{\partial g}(x, g)$。根据 $c(x, \cdot)$ 的凸性，边际成本 $\frac{\partial c}{\partial g}(x, g)$ 关于 $g \in [0,1]$ 单调不减，因此对于所有 $g \in [0,1]$， $\frac{\partial c}{\partial g}(x, 0) \leq \frac{\partial c}{\partial g}(x, g)$。由于 $\tau f(x) < \frac{\partial c}{\partial g}(x, 0)$，对所有 $g \in [0,1]$，我们有 $I'_x(g) < 0$。因此， $I_x(g)$ 在 $[0,1]$上严格递减，并在边界 $g^*(x) = 0$ 处取得唯一最大值。

1.1 总测度的估计

定理 2 (粗测度的收敛)。 设$(\Omega\ \mathcal{F})$ 为经济交易的可测空间， $\mathcal{G} \subsetneq \mathcal{F}$ 为由宏观经济总量（部门）生成的粗子-σ-代数。设(Θ, Σ, P) 为外部概率空间，真实测度 $\mu^*(\theta, \cdot)$ 从$(\Omega\ \mathcal{F})$上有限正测度的贝叶斯先验分布中抽取，且 $\mu \ll \mu^*$ 为制度性测度。

对于每个宏观部门 $A \in \mathcal{G}$，假设我们观测到一列含噪声的宏观物理痕迹

$$Z_i(A) = T(\mu^*(A)) + \epsilon_i(A), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

其中 $T : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 是连续双射，且其逆映射 T^{-1}连续； $\{\epsilon_i(A)\}_{i=1}^{\infty}$ 是在(Θ, Σ, P) 上的两两不相关随机变量，且独立于 μ^*，其中 $E[\epsilon_i(A)] = 0$ 且 $\mathbf{Var}(\epsilon_i(A)) = \sigma^2 \in \mathbb{R}_+$。

将宏观经验估计量定义为 $A \in \mathcal{G}$:

$$\hat{\mu}_n^*(A) := T^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(A)\right). \tag{4}$$

Let

$$\mathcal{H}_n = \sigma(\{Z_i(A) : A \in \mathcal{G}, 1 \leq i \leq n\}) \subset \Sigma \tag{5}$$

表示由截至样本量为 n 的所有宏观观测生成的 σ-代数，并令

$$\mathcal{H}_\infty = \sigma(\{\mu^*(A) : A \in \mathcal{G}\}) \subset \Sigma. \tag{6}$$

于是，以下条件成立：

1. 对任意微观经济子集 $B \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{G}$，若 $\mu^*(B) \in L^2(\Theta, \Sigma, P)$在给定宏观聚合量的条件下具有非退化的条件先验方差，即 $c := E[\mathbf{Var}(\mu^*(B) \mid \mathcal{H}_\infty)] > 0$，则任何关于宏观观测$\mathcal{H}_n$ 可测的估计量序列 $\tilde{\mu}_n(B)$ 的均方误差都有一个严格大于零的下界，即

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} E\left[(\tilde{\mu}_n(B) - \mu^*(B))^2\right] \geq c > 0. \tag{7}$$

2. 对于 μ^*的任意实现，给定每个宏观聚合量$A \in \mathcal{G}$，估计量 $\hat{}\mu_n^*(A)$ 依概率收敛于真实部门值 $\mu^*(A)$，当 $n \to \infty$ 时，即

$$\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} P\left(|\hat{\mu}_n^*(A) - \mu^*(A)| > \epsilon \mid \mu^*(A)\right) = 0. \tag{8}$$

$\hat{}$因此，宏观影子经济估计量 $\Delta_n(A) = \hat{}\mu_n^*(A) - \mu(A)$ 在 $\mathcal{G}$ 上是一致的，即

$$plim_{n\to\infty}\hat{\Delta}_n(A) = \Delta(A). \tag{9}$$

证明。我们从第二个陈述开始。固定一个宏观部门 $A \in \mathcal{G}$，并对 $\mu^*(A)$的实现取条件。实体轨迹观测的经验平均值为

$$\bar{Z}_n(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(A) = T(\mu^*(A)) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i(A). \tag{10}$$

由于噪声变量 $\{\epsilon_i（A）\}_{i=1}^{\infty}$ 两两不相关，且与 $E[\epsilon_i（A）]=0$ 具有共同的有限方差 σ^2，切比雪夫不等式（大数弱定律 *[8]*）给出

$$plim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i(A) = 0, \quad so \quad \bar{Z}_n(A) \xrightarrow{P} T(\mu^*(A)). \tag{11}$$

由于 T^{-1} 是连续的，连续映射定理 *[8]* 表明

$$\hat{\mu}_n^*(A) = T^{-1}(\bar{Z}_n(A)) \xrightarrow{P} T^{-1}(T(\mu^*(A))) = \mu^*(A),$$

并由斯卢茨基定理（通过连续运算保持依概率收敛 *[8]*），

$$\hat{\Delta}_n(A) = \hat{\mu}_n^*(A) - \mu(A) \xrightarrow{P} \mu^*(A) - \mu(A) = \Delta(A). \tag{12}$$

现在证明第一个结论。选取一个微观经济子集 $B \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{G}$，并令 $\tilde{\mu}_n(B)$ 为任意 $\mathcal{H}_n$-可测估计量。定义噪声 σ-代数$\mathcal{E} = \sigma(\{\epsilon_i(A) : A \in \mathcal{G}, i \geq 1\}) \subset \Sigma$。由于每个 $Z_i(A)$ 都是 $\mu^*(A)$ 和 $\epsilon_i(A)$的确定性函数，因此对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们都有 $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}_\infty \vee \mathcal{E}$。

由于观测噪声 $\mathcal{E}$ 与 μ^*独立， $\mu^*(B)$ 在 $L^2(\Theta, \mathcal{H}_\infty \vee \mathcal{E}, P)$ 上的 $L^2(P)$-正交投影（参见 *[14]*的第*9*节或 *[13]*的第*27*节）就是$\hat{}\mu_{opt}(B) = E[\mu^*(B) \mid \mathcal{H}_\infty \vee \mathcal{E}] = E[\mu^*(B) \mid \mathcal{H}_\infty]$。根据全方差公式以及条件期望的 L^2-最优性，对于每个$n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} E\left[(\tilde{\mu}_n(B) - \mu^*(B))^2\right] \geq E\left[(E[\mu^*(B) \mid \mathcal{H}_\infty] - \mu^*(B))^2\right] = \\ = E\left[Var(\mu^*(B) \mid \mathcal{H}_\infty)\right] = c > 0. \end{aligned} \tag{13}$$

对 $n \in \mathbb{N}$ 取下确界，得到 下确界$_{n\in\mathbb{N}} E[(\tilde{\mu}_n(B) - \mu^*(B))^2] \geq c > 0$。因此，无论收集多少宏观观测，都无法确定 $\mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$ 内影子经济的微观经济分配。

定理3 (真实测度的渐近重构**)**。 设 **(**Ω $\mathcal{F}$**,** μ^***)** 为一个表示真实经济的有限测度空间 **(**$\mu^*(\Omega) < \infty$**)**，并设 $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ 是满足 $0 \leq \mu_k \leq \mu^*$ 的一列制度测度，其拉东–尼科迪姆导数为 $g_k = \frac{d\mu_k}{d\mu^*}$， 取值于 $[0, 1]$。定义前 n 个登记库的累积融合算子为

$$\Phi_n = \bigvee_{k=1}^{n} \mu_k. \tag{14}$$

那么， $\{\Phi_n\}_{n=1}^\infty$ 是一个非递减的测度序列，满足 $\Phi_n \ll \mu^*$，其密度为 $h_n(x) = \frac{d\Phi_n}{d\mu^*}(x) = \max\overline{x_{1\leq k\leq n}} g_k(x) \in [0, 1]$。此外，以下条件成立：

1. 序列 $\{\Phi_n\}$在全变差范数 *[8, 10]*,下收敛于真实测度 μ^*

$$\lim_{n\to\infty} \|\mu^* - \Phi_n\|_{TV} = 0, \tag{15}$$

使得总体影子经济消失（$\lim_{n\to\infty}\Delta_n=\lim_{n\to\infty}(\mu^*(\Omega)-\Phi_n(\Omega))=0$），当且仅当满足以下条件：

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{d\mu_k}{d\mu^*}(x)=1\quad for\ \mu^*\text{-}almost\ all\ x\in\Omega. \tag{16}$$

特别是，式（*16*）意味着如下结论——定义零支撑集$N_k=\{x\in\Omega\mid g_k(x)=0\}$，则有

$$\mu^*\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}N_k\right)=0. \tag{17}$$

2. 引入新的制度性测度 μ_{n+1} 当且仅当满足以下条件时，才会严格缩小未测度的影子经济差距（$\|\mu^*-\Phi_{n+1}\|_{TV}<\|\mu^*-\Phi_n\|_{TV}$）

$$\mu^*\left(\{x\in\Omega\mid g_{n+1}(x)>h_n(x)\}\right)>0, \tag{18}$$

当且仅当在相对于 Φ_n的勒贝格分解 $\mu_{n+1}=\mu_{n+1}^{ac}+\mu_{n+1}^{\perp}$ 中，$\mu_{n+1}^{\perp}\not\equiv 0$（先前的零集/影子经济集合发生渗透）或 $\Phi_n\left(\left\{x\in\Omega\mid\frac{d\mu_{n+1}^{ac}}{d\Phi_n}(x)>1\right\}\right)>0$（对已受监测交易的可见性有所改善）时，该条件成立。

证明。 由于 $0\le\mu_k\le\mu^*$ 对所有 k均成立，每个 $\Phi_n=\bigvee_{k=1}^{n}\mu_k$ 都满足 $0\le\Phi_n\le\Phi_{n+1}\le\mu^*$，因此 $\Phi_n\ll\mu^*$，其拉东–尼科迪姆导数为

$$h_n(x)=\frac{d\Phi_n}{d\mu^*}(x)=\max_{1\le k\le n}g_k(x)\in[0,1]\quad for\ \mu^*\text{-}a.e.\ x\in\Omega. \tag{19}$$

由于 $h_{n+1}(x)=\max(h_n(x),g_{n+1}(x))$ 序列 $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 逐点单调不减，且上界为 1，因此逐点收敛于 $h_\infty(x):=\sup_{k\in\mathbb{N}}g_k(x)\in[0,1]$。

对于测度 $\Phi_n\le\mu^*$，全变差距离定义为

$$\|\mu^*-\Phi_n\|_{TV}=\int_\Omega\left|\frac{d\mu^*}{d\mu^*}-\frac{d\Phi_n}{d\mu^*}\right|d\mu^*=\int_\Omega(1-h_n(x))\,d\mu^*(x). \tag{20}$$

由于 $0\le 1-h_n(x)\le 1$，且常值函数 1 是 μ^*-可积的（因为 $\mu^*(\Omega)<\infty$），勒贝格控制收敛定理 *[8]* 给出

$$\lim_{n\to\infty}\|\mu^*-\Phi_n\|_{TV}=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega(1-h_n(x))\,d\mu^*(x)=\int_\Omega(1-h_\infty(x))\,d\mu^*(x). \tag{21}$$

由于 $1-h_\infty(x)\ge 0$ μ^*-几乎处处，右侧的积分等于0 当且仅当 $h_\infty(x)=\sup_{k\in\mathbb{N}}g_k(x)=1$ 对于 μ^*-几乎处处的 $x\in\Omega$成立。因此，

公共零支集 $\bigcap_{k=1}^{\infty} N_k = \{x \in \Omega \mid h_\infty(x) = 0\}$ 是$\{x \in \Omega \mid h_\infty(x) < 1\}$ 的子集，因此具有 μ^*-零测集。

为证明陈述*2*，注意在步骤 $n+1$，全变差间隙的减少量为

$$\|\mu^* - \Phi_n\|_{TV} - \|\mu^* - \Phi_{n+1}\|_{TV} = \int_\Omega (h_{n+1}(x) - h_n(x))\, d\mu^*(x) = \\ = \int_\Omega \max(0, g_{n+1}(x) - h_n(x))\, d\mu^*(x). \qquad (22)$$

根据融合算子的定义

$$\Phi_{n+1}(A) = \Phi_n(A \setminus S^\perp) + \mu_{n+1}(A \cap S^\perp) + \int_A \max\left(0, \frac{d\mu_{n+1}^{ac}}{d\Phi_n} - 1\right) d\Phi_n,$$

该积分等于 $\mu_{n+1}^\perp(\Omega) + \int_\Omega \max\left(0, \frac{d\mu_{n+1}^{ac}}{d\Phi_n} - 1\right) d\Phi_n$。由于被积函数非负，当且仅当 $\mu^*(\{x \in \Omega \mid g_{n+1}(x) > h_n(x)\}) > 0$时，间隙才会严格减小；这等价于 $\mu_{n+1}^\perp(\Omega) > 0$ 或 $\Phi_n\left(\left\{x \in \Omega \mid \frac{d\mu_{n+1}^{ac}}{d\Phi_n}(x) > 1\right\}\right) > 0$。

1.2 制度测度空间

定理4 (影子经济中的 Hahn–Banach 定理与拓扑完备性**)**。 设 $\mathcal{B} = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu^*)$ 为一组可数的制度测度，其密度为 $g_k = \frac{d\mu_k}{d\mu^*} \in L^1(\mu^*)$。则：

1. 拓扑完备性（不存在不可观测域）：不存在非零影子经济域 $A \in \mathcal{F}$ $(\mu^*(A) > 0)$，使其对所有 $\mu_k \in \mathcal{B}$ 都是共同零测集，当且仅当 $\sup_{k \in \mathbb{N}} g_k(x) > 0$ μ^*-几乎处处成立；这等价于由 $\mathcal{B}$ 在巴拿赫格 $L^1(\mu^*)$ 中生成的闭序理想（带）等于整个空间 $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu^*)$。

2. 线性完备性：真实测度 μ^* 在全变差范数下属于闭线性张成 *span*$(\mathcal{B})$，即，

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \mu^* - \sum_{k=1}^{n} w_k^{(n)} \mu_k \right\|_{TV} = 0, \qquad (23)$$

当且仅当不存在有界可测带符号函数 $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu^*)$，使其对每个制度性测度都为零 $(\int_\Omega f\, d\mu_k = 0$对所有 $k \in \mathbb{N}$均成立），同时对真实测度的积分非零 $(\int_\Omega f\, d\mu^* > 0)$。

证明。我们从第一个结论的证明开始。可测集 $A \in \mathcal{F}$满足 $\mu_k(A) = \int_A g_k \, d\mu^* = 0$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 成立，当且仅当 $g_k(x) = 0$ μ^*-几乎处处在 A 上对所有 k成立，也就是说，$\sup_{k\in\mathbb{N}} g_k(x) = 0$ μ^*-几乎处处在 A上。因此，不存在满足$\mu^*(A) > 0$ 的此类集合，当且仅当 $\sup_{k\in\mathbb{N}} g_k(x) > 0$ μ^*-几乎处处成立。根据标准的巴拿赫格理论，*[10]*, 在 $L^1(\mu^*)$ 中的不交补 $\mathcal{B}^d = \{f \in L^1(\mu^*) \mid |f| \wedge g_k = 0, \forall k\}$ 是平凡的（$\mathcal{B}^d = \{0\}$），因此由$\mathcal{B}$ 生成的带 $\mathcal{B}^{dd}$ 等于 $L^1(\mu^*)$，当且仅当 $\sup_{k\in\mathbb{N}} g_k(x) > 0$ μ^*-几乎处处成立。

对于第二个论断，由于 L^1（Ω $\mathcal{F}$, μ^*）的对偶空间与 L^∞（Ω $\mathcal{F}$, μ^*）等距同构，*Hahn-Banach* 分离定理 *[8]*指出， $\mu^* \notin span$（$\mathcal{B}$）当且仅当存在一个连续线性泛函$f \in L^\infty$（Ω $\mathcal{F}$, μ^*），使得对所有 $k \in \mathbb{N}$，$\int_\Omega f \, d\mu_k = \int_\Omega f g_k \, d\mu^* = 0$，且$\int_\Omega f \, d\mu^* > 0$。

定理 5（融合算子对全测度的重构）。设 $\mathcal{B} = \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ 为一个满足 $0 \le \mu_k \le \mu^*$的制度测度可数族，其密度为 $g_k = \frac{d\mu_k}{d\mu^*}$，取值于 $[0, 1]$,，并假设 μ^*（Ω） $< \infty$。融合测度序列 $\Phi_n = \bigvee_{k=1}^n \mu_k$ 在全变差范数下收敛于 μ^*，

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \mu^* - \bigvee_{k=1}^n \mu_k \right\|_{TV} = 0, \tag{24}$$

当且仅当 $\mathcal{B}$ 满足格忠实性条件

$$\sup_{\mu_k \in \mathcal{B}} \frac{d\mu_k}{d\mu^*}(x) = 1 \quad \mu^*\text{-}a.e. \tag{25}$$

证明。 $\Phi_n = \bigvee_{k=1}^n \mu_k$ 关于 μ^*的拉东–尼科迪姆导数为 $G_n(x) =$最大值 $_{1\le k\le n} g_k(x) \in [0, 1]$，且

$$\|\mu^* - \Phi_n\|_{TV} = \int_\Omega (1 - G_n(x)) \, d\mu^*(x). \tag{26}$$

由于 $1 - G_n(x) \ge 0$ 单调不增，且被 μ^*-可积函数1*[8]*, 所控制，根据勒贝格控制收敛定理，得到

$$\lim_{n\to\infty} \|\mu^* - \Phi_n\|_{TV} = \int_\Omega \left(1 - \sup_{\mu_k \in \mathcal{B}} g_k(x)\right) d\mu^*(x). \tag{27}$$

由于被积函数 $1 -$ 上确界$_{\mu_k\in\mathcal{B}} g_k(x)$ 在 μ^*-几乎处处非负，因此其积分为零，当且仅当上确界$_{\mu_k\in\mathcal{B}} g_k(x) = 1$ μ^*-几乎处处成立。

推论 2. 一族制度测度 $\mathcal{B} = \{\mu_1, \mu_2, \dots\}$ 张成了 $L^1(\Omega$ $\mathcal{F}, \mu^*)$ 的稠密子空间，

$$\overline{span(\mathcal{B})} = L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu^*), \tag{28}$$

当且仅当不存在非零有符号逃避概况／策略 $f \in L^\infty(\Omega\ \mathcal{F}, \mu^*)$ 能消去所有 $\mu_k \in \mathcal{B}$

$$\left(\forall \mu_k \in \mathcal{B} : \int_\Omega f(x)\, d\mu_k(x) = 0\right) \implies f(x) = 0 \quad \mu^*\text{-}almost\ everywhere. \tag{29}$$

2 隐藏维度机制

定理 6 (影子经济Sklar定理（定理 2.10.9，见[11]）。 每个定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的联合概率测度 μ^*，其累积分布函数为 F_{μ^*}，边缘累积分布函数为 $F_{\mu_1}, \ldots, F_{\mu_d}$，都可以通过 ***Copula*** 函数 $C\colon [0,1]^d \to [0,1]$ 表示，使得

$$F_{\mu^*}(x_1, \ldots, x_d) = C\big(F_{\mu_1}(x_1), \ldots, F_{\mu_d}(x_d)\big). \tag{30}$$

若边缘分布 F_{μ_k} 连续，则 ***copula*** C 唯一。

证明。 *[11]*中的定理 *2.10.9*

定理 7 (通过 KL 散度重构（[7]）。 设 $\mu_{tech} \in \mathcal{P}(\Omega)$ 为参考技术先验测度，且 $\Gamma(\mu_1, \ldots, \mu_d) = \{\nu \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \nu \circ \pi_k^{-1} = \mu_k,\ k = 1, \ldots, d\}$ 为满足边缘约束的联合概率测度 ***Fr´echet*** 类 *[9]*。假设至少存在一个可行测度 $\nu_0 \in \Gamma(\mu_1, \ldots, \mu_d)$ 使得 $KL(\nu_0 \parallel \mu_{tech}) < \infty$。那么优化问题

$$\hat{\mu}^* = \arg\min_{\nu \in \Gamma(\mu_1, \ldots, \mu_d)} KL(\nu \parallel \mu_{tech}), \tag{31}$$

其中

$$KL(\nu \parallel \mu_{tech}) = \int_\Omega \log\left(\frac{d\nu}{d\mu_{tech}}\right) d\nu \quad for\ \nu \ll \mu_{tech}, \tag{32}$$

具有唯一极小值点 $\hat{}\mu^* \in \Gamma(\mu_1, \ldots, \mu_d)$。

此外，当 Ω 是有限离散乘积空间，或当密度在矩形支撑集上严格为正且有界并远离零和无穷大时（从而边缘对数势可积，$\lambda_k \in L^1(\mu_k)$ *[7]*），其相对于 μ_{tech} 的拉东–尼科迪姆导数具有精确的乘法形式

$$d\hat{\mu}^*(x) = \left(\prod_{k=1}^{d} a_k(x_k)\right) d\mu_{tech}(x), \tag{33}$$

其中，边缘势 $a_k(x_k) := \exp(\lambda_k(x_k) - 1/d) > 0$ 的选取应满足$\hat{}$ $\mu^* \circ \pi_k^{-1} = \mu_k$对于 $k = 1$，*.....*， d。

证明。 由连续线性推前算子 $\nu \mapsto \nu \circ \pi_k^{-1}$ 定义的 *Fr´echet* 约束集 Γ（μ_1，*...*，μ_d）在全变差范数下是凸且闭的。由于 $\nu \mapsto KL$（$\nu \parallel \mu_{tech}$）在 $\{\nu \in \mathcal{P}$（Ω）| 上严格凸，且 KL（$\nu \parallel \mu_{tech}$）$< \infty\}$ 在弱拓扑下具有紧的次水平集，因此存在满足 KL（$\nu_0 \parallel \mu_{tech}$）$< \infty$ 的 $\nu_0 \in \Gamma$（μ_1，*.....*，μ_d），从而保证全局极小值（*I*-投影）$\hat{}\mu^* \in \Gamma$（μ_1，*.....*，μ_d）*[7, 9]*的存在性与唯一性。

通过拉格朗日乘子 λ_k :$\Omega_k \to \mathbb{R}$ 推导函数形式（*33*），构造拉格朗日泛函

$$\mathcal{L}(\nu, \lambda_1, \ldots, \lambda_d) = \int_\Omega \log\left(\frac{d\nu}{d\mu_{tech}}(x)\right) d\nu(x) + \\ -\sum_{k=1}^{d}\left(\int_\Omega \lambda_k(x_k)\, d\nu(x) - \int_{\Omega_k} \lambda_k(x_k)\, d\mu_k(x_k)\right). \tag{34}$$

对 $\delta\nu$ 取一阶变分，得到

$$\delta\mathcal{L} = \int_\Omega \left[\log\left(\frac{d\nu}{d\mu_{tech}}(x)\right) + 1 - \sum_{k=1}^{d}\lambda_k(x_k)\right] d(\delta\nu)(x) = 0. \tag{35}$$

令方括号中的被积函数等于零（ μ_{tech}-几乎处处），可得

$$\frac{d\hat{\mu}^*}{d\mu_{tech}}(x) = \exp\left(\sum_{k=1}^{d}\lambda_k(x_k) - 1\right) = \prod_{k=1}^{d} a_k(x_k), \tag{36}$$

其中 $a_k(x_k) := \exp(\lambda_k(x_k) - 1/d)$。施加边缘约束 $\hat{}\mu^* \circ \pi_k^{-1} = \mu_k$ 可确定势函数 $a_k(x_k)$。

定理8 (精确重构条件 ([7]))。 设 $\Omega = \Omega_{obs} \times \Omega_{hid}$满足 $\Omega_{obs} = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d$，并设 $\Gamma = \{\nu \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \nu \circ \pi_k^{-1} = \mu_k$ 是对于 k =1、*.....*、$d\}$ 匹配可观测边缘分布$\mu_k = \mu^* \circ \pi_k^{-1}$ 的弗雷歇测度类。假设 $KL(\mu^* \parallel \mu_{tech}) < \infty$，并令

$$\hat{\mu}^* = \arg\min_{\nu \in \Gamma} KL(\nu \parallel \mu_{tech}). \tag{37}$$

根据概率测度的分解，写成 $d\nu(x_{obs}, x_{hid}) = \nu(dx_{hid} \mid x_{obs})\, d\nu_{obs}(x_{obs})$，其中 ν_{obs} 是 ν 在 Ω_{obs} 上的边缘测度。当且仅当以下两个条件同时成立时，该估计量才能恢复真实联合测度（$\hat{}\mu^* = \mu^*$）：

1. 在可观测子空间 Ω_{obs} 上，真实的可观测边缘分布 μ^*_{obs} 是 *I*-投影，将 $\mu_{tech,\ obs}$ 投影到 $\Gamma_{obs} = \{\eta \in \mathcal{P}(\Omega_{obs}) \mid \eta \circ \pi_k^{-1} = \mu_k\}$ 上；

当且仅当拉东–尼科迪姆导数 $\frac{d\mu^*_{obs,\ obs}}{d\mu_{tech}}$ 分解为一维边缘势时，该结论成立（在正密度支集条件下）

$$\frac{d\mu^*_{obs}}{d\mu_{tech,\ obs}}(x_1,\dots,x_d)=\prod_{k=1}^{d}a_k(x_k)\quad(\mu^*_{obs}\text{-}a.e.). \tag{38}$$

也就是说，$\mu_{tech,\ \ obs}$ 已经捕捉了可观测维度 $(X_1,\dots,X_d)$之间精确的高阶 *copula* 相互作用。

2. 对于 μ^*_{obs}-几乎处处的 $x_{obs}\in\Omega_{obs}$，真实经济在Ω_{hid} 上的条件概率核与条件技术先验一致

$$\mu^*(dx_{hid}\mid x_{obs})=\mu_{tech}(dx_{hid}\mid x_{obs}). \tag{39}$$

特别是，在存在可测映射 $f:\Omega_{obs}\to\Omega_{hid}$使得 $X_{hid}=f(X_{obs})$ μ^*-几乎处处成立的情况下（对于相应的离散划分，这等价于条件香农熵为零 $H(X_{hid}\mid X_{obs})=0$ *[6]*；对于平方可积随机变量，这等价于条件方差 $\mathrm{Var}(X_{hid}\mid X_{obs})=0$ 几乎处处为零），在Ω_{hid} 上精确恢复成立，当且仅当先验条件核集中于 f 的确定性图上，即 $\mu_{tech}(dx_{hid}\mid x_{obs})=\delta_{f(x_{obs})}(dx_{hid})$。

证明。根据 *Kullback-Leibler* 散度的链式法则 *[7, 6]*，，对于每个满足 $\nu\ll\mu_{tech}$ 的测度 $\nu\in\Gamma$，

$$KL(\nu\parallel\mu_{tech})=KL(\nu_{obs}\parallel\mu_{tech,\ obs})+\int_{\Omega_{obs}}KL\big(\nu(\cdot\mid x_{obs})\parallel\mu_{tech}(\cdot\mid x_{obs})\big)\,d\nu_{obs}(x_{obs}). \tag{40}$$

由于坐标投影 $\pi_k:\Omega\to\Omega_k(k=1,\dots,d)$ 只依赖于 x_{obs}，约束 $\nu\in\Gamma$ 仅约束可观测边缘分布$\nu_{obs}\in\Gamma_{obs}$，而不对条件核 $\nu(\cdot\mid x_{obs})$施加任何限制。

因此，对 $\nu\in\Gamma$ 最小化 *(40)* 可分解为两个独立的步骤：

1. 对于任意固定的可观测边缘分布 $\nu_{obs}\in\Gamma_{obs}$，*(40)* 中条件 *KL* 散度的积分非负，且当且仅当0时达到其最小值

$$\hat\mu^*(dx_{hid}\mid x_{obs})=\mu_{tech}(dx_{hid}\mid x_{obs})\quad for\ \hat\mu^*_{obs}\text{-}a.e.\ x_{obs}\in\Omega_{obs}. \tag{41}$$

2. 剩余项 $KL(\nu_{obs}\parallel\mu_{tech,\ \ obs})$ 在 $\nu_{obs}\in\Gamma_{obs}$ 上取最小值时，由唯一的可观测 I-投影 $\hat\mu^*_{obs}=\mathrm{argmin}_{\eta\in\Gamma_{obs}}KL(\eta\parallel\mu_{tech,\ \ obs})$实现。根据定理 *7* 和 *Csisz´ar* 定理，*[7]*，$\hat\mu^*_{obs}=\mu^*_{obs}$ 成立，当且仅当 $\frac{d\mu^*_{obs}}{d\mu_{tech}^{\ \ obs}}(x_1,\dots,x_d)=\prod_{k=1}^{d}a_k(x_k)$ μ^*_{obs}-几乎处处成立。

结合这两个步骤，$\hat{}\mu^* = \mu^*$ 在 $\Omega = \Omega_{obs} \times \Omega_{hid}$ 上成立，当且仅当 $\hat{}\mu^*_{obs} = \mu^*_{obs}$（条件 *1*）且 $\mu^*(dx_{hid} \mid x_{obs}) = \hat{}\mu^*(dx_{hid} \mid x_{obs}) = \mu_{tech}(dx_{hid} \mid x_{obs})\mu^*_{obs}$-几乎处处成立（条件 *2*）。在技术刚性（$X_{hid} = f(X_{obs})$ μ^*- 几乎处处）条件下，真实条件核是狄拉克测度 $\mu^*(dx_{hid} \mid x_{obs}) = \delta_{f(x_{obs})}(dx_{hid})$，其条件 *KL* 散度有限（为零），并且当且仅当 $\mu_{tech}(dx_{hid} \mid x_{obs}) = \delta_{f(x_{obs})}(dx_{hid})$ μ^*_{obs}-几乎处处成立时，才能由 $\hat{}\mu^*$ 恢复。

定理 9（信息毕达哥拉斯定理（ [7]）。令 $\mathcal{P}$（Ω）为 Ω 上概率测度的空间，令 $\mu_{tech} \in \mathcal{P}$（$\Omega$）为参考先验测度，令 $\Gamma \subset \mathcal{P}$（$\Omega$）为概率测度的闭凸集，并且$\hat{}\mu^* = \operatorname{argmin}_{\nu \in \Gamma} KL$（$\nu \parallel \mu_{tech}$）存在，其中 *KL*（$\hat{}\mu^* \parallel \mu_{tech}$）$< \infty$。那么，对于任意满足 *KL*（$\mu^* \parallel \mu_{tech}$）$< \infty$的真实测度 $\mu^* \in \Gamma$，以下不等式成立

$$KL(\mu^* \parallel \mu_{tech}) \geq KL(\mu^* \parallel \hat{\mu}^*) + KL(\hat{\mu}^* \parallel \mu_{tech}). \tag{42}$$

此外，如果 $\Gamma = \Gamma$（μ_1，...，μ_d）由线性边缘约束（其中 $\mu^* \ll \hat{}\mu^*$）定义，则该关系严格等式成立（见 *[7]*中的公式（*3.1*））

$$KL(\mu^* \parallel \mu_{tech}) = KL(\mu^* \parallel \hat{\mu}^*) + KL(\hat{\mu}^* \parallel \mu_{tech}). \tag{43}$$

这三个项可以作出经济学解释：

- *KL*($\mu^* \parallel \mu_{tech}$) - 真实经济$\mu^*$ 与政府的基准技术先验 μ_{tech}之间的总信息散度。
- *KL*($\hat{}\mu^* \parallel \mu_{tech}$) - 通过更新 μ_{tech} 以满足观测到的制度边缘分布 μ_1、...、μ_d所解释的散度。或者，这代表在假设的技术基准下，估计量所捕获的信息。
- *KL*($\mu^* \parallel \hat{}\mu^*$) - 真实经济 μ^*与其 I-投影$\hat{}\mu^*$之间的残余差异，这是由未测量的跨维*copula*变化或相对于 μ_{tech}的隐维偏差造成的。

证明。 根据 *[7],*，对于 $t \in [0,1]$，定义凸混合

$$\nu_t = (1-t)\hat{\mu}^* + t\mu^* = \hat{\mu}^* + t(\mu^* - \hat{\mu}^*). \tag{44}$$

由于 Γ 是凸的，且 $\hat{}\mu^*, \mu^* \in \Gamma$，因此对所有 $t \in [0,1]$都有 $\nu_t \in \Gamma$。由于 $\hat{}\mu^*$ 在 Γ 上使 *KL*($\nu \parallel \mu_{tech}$) 最小，因此 $\phi(t)$: KL($\nu_t \parallel \mu_{tech}$) 在 $t = 0^+$ 处的方向导数必须非负：

$$\frac{d}{dt} KL(\nu_t \parallel \mu_{tech})\Big|_{t=0^+} \geq 0. \tag{45}$$

设 $p^* = \frac{d\mu^*}{d\mu_{tech}}$ 和 $\hat{p} = \frac{d\hat{\mu}^*}{d\mu_{tech}}$ 分别是 μ^* 和 $\hat{\mu}^*$ 关于 μ_{tech} 的密度，因此 ν_t 的密度为 $p_t = \hat{p} + t(p^* - \hat{p})$。对 $\phi(t) = \int_\Omega p_t \log p_t \, d\mu_{tech}$ 关于 t 求导，得到

$$\phi'(t) = \int_\Omega (p^* - \hat{p}) \log p_t \, d\mu_{tech} + \int_\Omega (p^* - \hat{p}) \, d\mu_{tech}. \tag{46}$$

由于 μ^* 和 $\hat{\mu}^*$ 都是概率测度，因此 $\int_\Omega (p^* - \hat{p}) \, d\mu_{tech} = 1 - 1 = 0$。在 $t = 0^+$ 处求值可得最优性不等式

$$\int_\Omega p^* \log \hat{p} \, d\mu_{tech} \geq \int_\Omega \hat{p} \log \hat{p} \, d\mu_{tech} = KL(\hat{\mu}^* \parallel \mu_{tech}). \tag{47}$$

现在计算差值

$$\begin{aligned} KL(\mu^* \parallel \mu_{tech}) - KL(\mu^* \parallel \hat{\mu}^*) &= \int_\Omega p^* \log p^* \, d\mu_{tech} - \int_\Omega p^* \log \left(\frac{p^*}{\hat{p}} \right) d\mu_{tech} \\ &= \int_\Omega p^* \log \hat{p} \, d\mu_{tech}. \end{aligned} \tag{48}$$

立即应用（*47*）可得（*42*）：

$$KL(\mu^* \parallel \mu_{tech}) - KL(\mu^* \parallel \hat{\mu}^*) \geq KL(\hat{\mu}^* \parallel \mu_{tech}). \tag{49}$$

$\mu_1 \ \cdots \ \mu_d$ $p \ x \ =$

当 $\Gamma = \Gamma(\sum_{k=1}^d \lambda_k \ x_k \ - 1$ $\gamma,$ μ^* μ^* ,,) 由线性边缘约束定义，并且 $\log \hat{} () ()$ 如定理中所述时，和 $\hat{}$ 在每个Ω_k上具有相同的边缘分布μ_k，因此

$$\int_\Omega (p^* - \hat{p}) \log \hat{p} \, d\mu_{tech} = \sum_{k=1}^d \left(\int_{\Omega_k} \lambda_k(x_k) \, d\mu_k(x_k) - \int_{\Omega_k} \lambda_k(x_k) \, d\mu_k(x_k) \right) = 0, \tag{50}$$

这使得（*47*）和（*42*）变为严格等式。

推论 3。 由于 I-投影保留了先验 μ_{tech} 的高阶 *copula* 交互和隐维条件分布，任何改变 *copula* C 而不改变一维边缘分布 μ_k 的新型逃税方案，对边缘约束而言都是不可见的。其全部散度都被不可恢复误差 $KL(\mu^* \parallel \hat{} \mu^*)$ 吸收。此外，如果 μ^* 在 μ_{tech} 消失的地区 $\mu^* \not\ll \mu_{tech}$ 赋予正概率，则 $KL(\mu^* \parallel \mu_{tech}) = +\infty$，并且必须通过真实数据审计重新校准先验。

3 压缩感知制度

定理10 (稀疏影子经济的精确恢复（ [4]中的定理1.2）**)**。 设 $s^* \in \mathbb{R}^N$ 为通过 $M \ll N$ 聚合检查 $y = \Phi s^*$ 观测到的未知影子经济差距向量，其中 $\Phi \in \mathbb{R}^{M\times N}$。假设：

1. K-创新域中的稀疏性：向量 s^* 至多包含 K个非零元素（$K < M \ll N$）：

$$\|s^*\|_0 = |\{j \in \{1,\dots,N\} \mid s_j^* \neq 0\}| \le K, \tag{51}$$

其中 $\mathit{supp}(s^*) = \{j \mid s_j^* \neq 0\}$。

2. $2K$阶受限等距性质（*RIP*）：感知矩阵Φ 满足 $2K$阶受限等距性质，这意味着对于每个 $2K$-稀疏向量 $v \in \mathbb{R}^N$,

$$(1-\delta_{2K})\|v\|_2^2 \le \|\Phi v\|_2^2 \le (1+\delta_{2K})\|v\|_2^2, \tag{52}$$

其受限等距常数严格满足

$$\delta_{2K} < \sqrt{2} - 1. \tag{53}$$

那么凸 ℓ_1-最小化（基追踪）问题 *[3]*

$$\hat{s} = \arg\min_{s\in\mathbb{R}^N} \|s\|_1 \quad \textit{subject to} \quad \Phi s = y \tag{54}$$

存在唯一解，并能精确恢复真实的影子经济向量

$$\hat{s} = s^*. \tag{55}$$

证明。 我们改编 *Cand`es [4]* 的几何零空间证明和分层证明。令 $\hat{}s$ 为 ℓ_1 问题的任意一个极小化解，并定义重构误差向量 $h := \hat{}s - s^*$。由于 $\Phi\hat{}s = y = \Phi s^*$，我们有 $h \in \ker(\Phi)$。

令 $T_0 = \mathit{supp}(s^*)$，于是 $|T_0| \le K$。根据 $\hat{}s$的最优性， $\|\hat{}s\|_1 = \|s^* + h\|_1 \le \|s^*\|_1$。将 ℓ_1 范数分解到 T_0 及其补集 T_0^c 上，并应用反三角不等式，得到

$$\|s^*\|_1 \ge \|s^*_{T_0} + h_{T_0}\|_1 + \|h_{T_0^c}\|_1 \ge \|s^*_{T_0}\|_1 - \|h_{T_0}\|_1 + \|h_{T_0^c}\|_1. \tag{56}$$

由于 $\|s^*_{T_0}\|_1 = \|s^*\|_1$，它给出了 ℓ_1 锥条件

$$\|h_{T_0^c}\|_1 \le \|h_{T_0}\|_1. \tag{57}$$

经济学解释如下：方程（*57*）代表一个几何陷阱：任何试图隐藏在状态审计矩阵 Φ的零空间中、同时不增加 ℓ_1 范数的逃税扰动 $h \in \ker(\Phi)$ ，都必须将其至少一半的 ℓ_1 质量集中在真实的 K稀疏支集 T_0上。

下一步，我们按照幅值 $|h_i|$ 递减的顺序，将 T_0^c 划分为大小为 K 的互不相交子集 T_1、T_2、.....（因此，对于所有 $i \in T_{j-1}$、$m \in T_j$、 $j \geq 2$，有 $|h_i| \geq |h_m|$ ）。对于每个 $j \geq 2$ 和 $m \in T_j$,

$$|h_m| \leq \frac{1}{K} \sum_{i \in T_{j-1}} |h_i| = \frac{1}{K} \|h_{T_{j-1}}\|_1, \tag{58}$$

这意味着 $\|h_{T_j}\|_2 \leq K^{-1/2} \|h_{T_{j-1}}\|_1$。对 $j \geq 2$ 求和，并利用（*57*）和柯西-施瓦茨不等式（$\|h_{T_0}\|_1 \leq \sqrt{K} \|h_{T_0}\|_2$）， 得到所谓的壳层不等式,

$$\sum_{j \geq 2} \|h_{T_j}\|_2 \leq K^{-1/2} \sum_{j \geq 1} \|h_{T_j}\|_1 = K^{-1/2} \|h_{T_0^c}\|_1 \leq K^{-1/2} \|h_{T_0}\|_1 \leq \|h_{T_0}\|_2. \tag{59}$$

由于 $h \in \ker(\Phi)$，我们有 $\Phi h_{T_0 \cup T_1} = -\Phi h_{(T_0 \cup T_1)^c} = -\sum_{j \geq 2} \Phi h_{T_j}$。根据阶数为 $2K$ 的限制等距性质以及 *Cand`es [4]* 的引理 *2.1*（该引理指出，对于支集分别位于基数至多为 K 的两个互不相交集合上的任意两个向量 u、v，均有 $|\langle \Phi u、\ \Phi v \rangle| \leq \delta_{2K} \|u\|_2 \|v\|_2$），我们得到

$$\begin{aligned}
(1 - \delta_{2K}) \|h_{T_0 \cup T_1}\|_2^2 \leq \|\Phi h_{T_0 \cup T_1}\|_2^2 &= \left\langle \Phi h_{T_0 \cup T_1}, -\sum_{j \geq 2} \Phi h_{T_j} \right\rangle \\
&= -\sum_{j \geq 2} \langle \Phi h_{T_0}, \Phi h_{T_j} \rangle - \sum_{j \geq 2} \langle \Phi h_{T_1}, \Phi h_{T_j} \rangle \\
&\leq \delta_{2K} \left(\|h_{T_0}\|_2 + \|h_{T_1}\|_2 \right) \sum_{j \geq 2} \|h_{T_j}\|_2 \\
&\leq \sqrt{2} \delta_{2K} \|h_{T_0 \cup T_1}\|_2 \sum_{j \geq 2} \|h_{T_j}\|_2,
\end{aligned} \tag{60}$$

其中，最后一个不等式用到了 $\|h_{T_0}\|_2 + \|h_{T_1}\|_2 \leq \sqrt{2(\|h_{T_0}\|_2^2 + \|h_{T_1}\|_2^2)} = \sqrt{2} \|h_{T_0 \cup T_1}\|_2$。除以$(1 - \delta_{2K}) \|h_{T_0 \cup T_1}\|_2$ 并代入 *(59)*，得到

$$\|h_{T_0}\|_2 \leq \|h_{T_0 \cup T_1}\|_2 \leq C(\delta_{2K}) \frac{\|h_{T_0^c}\|_1}{\sqrt{K}} \leq C(\delta_{2K}) \frac{\|h_{T_0}\|_1}{\sqrt{K}} \leq C(\delta_{2K}) \|h_{T_0}\|_2, \tag{61}$$

其中

$$C(\delta_{2K}) = \frac{\sqrt{2} \delta_{2K}}{1 - \delta_{2K}}. \tag{62}$$

由于 $\delta_{2K} < \sqrt{2} - 1$ 意味着 $C\left(\delta_{2K}\right) < 1$，该不等式迫使 $\|h_{T_0}\|_2 = 0$，因此 $h_{T_0} = 0$。根据（*57*）， $\|h_{T_0^c}\|_1 \leq \|h_{T_0}\|_1 = 0$，所以 $h = 0$ 且 $\hat{} s = s^*$，如所述。

致谢

RK 的工作部分获得了欧盟“地平线欧洲”玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里行动资助（编号 101300007）的资助。

在准备本研究的过程中，作者使用生成式人工智能工具协助润色语言并组织证明的呈现方式。使用这些工具后，作者独立核验了所有数学推导，并对出版物的内容承担全部责任。

参考文献

[1] Aliprantis, Charalambos D. 和 Border, Kim C.（2006年）。无限维分析：搭便车者指南，Springer Berlin，海德堡。[2] Bogachev, Vladimir I.（2006年）。测度论，Springer Berlin，海德堡。[3] Brunton, Steven L. 和 Kutz, J. Nathan（2022年）。数据驱动科学与工程：机器学习、动力系统与控制，剑桥大学出版社，第2版。[4] Cand`es, Emmanuel J.（2008年）。受限等距性质及其对压缩感知的意义，《数学报告》，346（9-10）：589–592；DOI：https://doi.org/10.1016/j.crma.2008.03.014[5] Cand`es, Emmanuel J. 和 Wakin, M. B.（2008年）。压缩采样入门，《IEEE信号处理杂志》，25（2）：21–30；DOI：https://doi.org/10.1109/MSP.2007.914731[6] Cover, Thomas M. 和 Thomas, Joy A.（2006年）。《信息论要素》，Wiley-Interscience。[7] Csisz´ar, I.（1975）。概率分布的I-散度几何与最小化问题，《概率年刊》，3（1）：146–158；DOI：https://doi.org/10.1214/aop/1176996454[8] Folland, Gerald B.（1999）。实分析：现代技术及其应用，威利，第2版。[9] 哈里·乔（1997）。多元模型与多元依赖概念，Chapman and Hall/CRC。

[10] Meyer-Nieberg, Peter（1991）。巴拿赫格，施普林格出版社，柏林海德堡。[11] Nelsen, R. B.（2006年）。《*Copula*入门》，第2版，Springer统计学丛书，Springer，纽约。[12] Rockafellar, R. Tyrrell 和 Wets, Roger J. B.（2009）。变分分析，Springer Berlin，海德堡。[13] Schilling, R. L.（2017）。测度、积分与鞅，剑桥大学出版社。[14] Williams, David（1991）。《鞅与概率》，剑桥大学出版社。