arXiv:2611.29799v1 [math.SP] 22 Nov 2026

等磁场极限下 Iwatsuka 哈密顿量的谱

ABDALLAH MAICHINE

摘要。我们研究与仅依赖一个空间变量的磁场相关联的二维磁拉普拉斯算子，即所谓的 Iwatsuka 哈密顿量。我们关注等极限情形，此时磁场具有 $b(\cdot) = b_\infty + q(\cdot)$ 的形式，其中 $b_\infty > 0$且 $q \in C_0(\mathbb{R})$。我们证明，只要 q 紧支撑，且在其支撑的一侧边缘附近具有恒定符号，Iwatsuka 哈密顿量便具有绝对连续谱。

目录

1. 引言 1
2. 一般设定与初等性质 5
2.1. 谱带 $\mathcal{H}_b$ 5
3. 主要结果 7
4. 主要结果的证明 8
定理 3.2 的证明 9
4.1. 命题 3.3 的证明 12
致谢 12
参考文献 13

1. 引言

本文研究 Iwatsuka 型磁性微分算子的谱性质，其表达式为

$$\mathcal{H}_b := -\partial_{xx}^2 + (-\mathrm{i}\partial_y + \mathrm{a}(x))^2, \tag{1.1}$$

其中，对于每个 $x \in \mathbb{R}$, $a(x) := \int_0^x b(t)\,dt$ 以及 $b \in \mathbb{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$，均为磁场强度。

日期：2026年11月24日。

哈密顿量 $\mathcal{H}_b$ 出现在研究量子粒子在垂直磁场 $\mathbf{B}$ =(0, 0, $b(x)$)作用下二维运动的问题中。

对于恒定磁场 $b(x) = b_0 > 0$， $\mathcal{H}_b$ 退化为著名的二维朗道哈密顿量，其谱由 $\sigma(\mathcal{H}_b)$ =$b_0(2\mathbb{N} - 1)$给出，即所谓的朗道能级，每一个都是具有无穷重数的特征值。在这种情况下， $\mathcal{H}_b$ 在磁平移下保持不变，从而产生一致的电子密度，参见例如 [9] 或 [6, 第 2]节。磁场的任何变化都会破坏沿磁场变化方向的这一不变性。据推测，这种变化会将朗道能级扩展为纯绝对连续谱，参见 [2, 第 6 节。5]或 [5,第 7.2 节。3], 从而允许电子传播。

据我们所知，这一猜想至今尚未在完全一般的情形下得到解决。事实上，对哈密顿量 $\mathcal{H}_b$这一问题的兴趣始于 A. Iwatsuka 在其开创性工作 [8] 中的研究。此后，这类特殊哈密顿量的谱性质吸引了相当多的关注，参见例如 [4, 11, 12, 13, 16]。关于该模型的相关输运性质已在 [1, 7, 3] 中得到研究。

Iwatsuka哈密顿量 $\mathcal{H}_b$ 的一个基本特征是，其谱性质与 $\pm\infty$处磁场的渐近行为密切相关。特别是，当这些极限

$$b_\infty^- := \lim_{x\to-\infty} b(x), \qquad b_\infty^+ := \lim_{x\to+\infty} b(x)$$

存在且彼此不同时，可以证明 $\mathcal{H}_b$ 的谱是绝对连续的。

当两个渐近极限重合时，情况则不那么直接。在这种情形下，仅凭渐近磁场所提供的信息无法得出这样的结论。

本文旨在研究等极限情形下 $\mathcal{H}_b$ 的谱的绝对连续性。更确切地说，我们考虑满足以下条件的磁场

$$\lim_{-\infty} \mathrm{b}(x) = \lim_{+\infty} \mathrm{b}(x) = b_\infty > 0.$$

为更好地理解这种二分性，我们约定，由于 $\mathcal{H}_b$ 在 y 方向上具有平移不变性，因此它在酉等价意义下可表示为如下纤维的直积分

$$\mathcal{H}_b \sim \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathbf{h}_b(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{1.2}$$

其中，对每个 ξ，$\mathbf{h}_b(\xi) := -\partial_{xx}^2 + (\mathrm{a}(x) - \xi)^2$。特别地，

$$\sigma(\mathcal{H}_\mathrm{b}) = \bigcup_{\xi\in\mathbb{R}} \sigma(\mathbf{h}_\mathrm{b}(\xi)).$$

此外，若 b 满足 $b_{\min} \le b(x) \le b_{\max}$，其中 $b_{\max} \ge b_{\min} > 0$，则$\mathbf{h}_b(\xi)$具有紧预解算子，因此其谱为离散谱

$$\sigma(\mathbf{h}_b(\xi)) = \{\lambda_n(\xi) : n \in \mathbb{N}\}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

映射 $\lambda_n(\cdot)$、 $n \in \mathbb{N}$称为色散函数，它们决定相应电子系统的输运性质。

$\mathbf{H}_b$ 的谱带定义为$\mathbf{B}_n := \lambda_n(\mathbb{R})$，对每个 $n \in \mathbb{N}$均如此，使得 $\sigma(\mathcal{H}_b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{B}_n$。

文献 [13, 命题 22] 证明了

$$\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{b}(x) = \mathrm{b}_\infty^\pm \implies \lim_{\xi\to\pm\infty} \lambda_n(\xi) = (2n-1)b_\infty^\pm, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

由此立即得到

$$(2n-1)[\min(\mathrm{b}_\infty^-, \mathrm{b}_\infty^+), \max(\mathrm{b}_\infty^-, \mathrm{b}_\infty^+)] \subset \mathcal{B}_n.$$

因此， $\mathcal{H}_\mathrm{b}$ 在不等极限情形下具有绝对连续谱$\mathrm{b}_\infty^- \ne \mathrm{b}_\infty^+$。此外，当磁场 b 单调时，等号成立；见 [8, 引理 2.3（ii）]。我们已在下文的命题2.3 中总结了上述性质。

本文关注的等极限情形 $\mathrm{b}_\infty^- = \mathrm{b}_\infty^+ = b_\infty$ 更为微妙，因为每个带函数的两个渐近极限都在 $(2n-1)b_\infty$ 处重合。

本文研究磁场 b 在 $\pm\infty$ 处具有相等极限这一临界情形。更具体地说，我们作出以下假设：

(A1) $b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$，且存在 $b_{\max} \ge b_{\min} > 0$ 使得

$$\mathrm{b}_{\min} \le \mathrm{b}(x) \le \mathrm{b}_{\max}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(A2) $b(x) = b_\infty + q(x)$，其中 $q \in C_0(\mathbb{R})$。

据我们所知，对于满足**(A1)** 和**(A2)**的整个非恒定磁场类，其谱的绝对连续性尚未得到证明。

在本文中，除 **(A1)** 和 **(A2)** 外，我们还证明，在以下任一附加假设下，$\mathcal{H}_b$ 的谱具有绝对连续性：

(A3) $q \in C_c(\mathbb{R})$，并在其支撑边缘之一附近具有恒定符号；**(A4)** q 恰好具有两个节点域。

我们要强调，假设 **(A3)** 涵盖了广泛的紧支撑扰动类别，包括 [4, 定理 26] 中所考虑的扰动。后一个结果要求 q 在其整个支撑上具有恒定符号，或具有多项式衰减，同时在其支撑边缘附近保持恒定符号。

此外，假设 **(A3)** 还涵盖了具有有限个节点域的扰动 q，包括 [13, 定理 3.2]中考虑的那些扰动。然而，(A3) 不涵盖其节点 q 在其支撑的两端[1] 聚集的扰动。也就是说，如果 q 具有如下形式

$$q(x) = x(1-x)\sin\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)1_{(0,1)}(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

我们的方法是证明，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，色散函数 λ_n 都不是常数。为此，我们首先在引理4.2中建立其导数的一个公式。随后利用 Hellmann–Feynman 公式证明，对于每个 $\mu \neq 0$，都有

$$\lambda_n'(\xi) = \frac{2}{\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}(b(x)-\mu)\,(\mathrm{a}(x)-\xi)\,\psi_n^2(x,\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

其中，$\psi_n(\cdot,\xi)$ 表示 $\mathbf{h}_\mathrm{b}(\xi)$ 的一个归一化特征函数，满足

$$\mathbf{h}_\mathrm{b}(\xi)\psi_n(\cdot,\xi) = \lambda_n(\xi)\psi_n(\cdot,\xi).$$

如果 q 是紧支撑的，我们可以选取 $|\xi|$ 充分大，使得$\mathrm{supp}(f)$ 位于 $\psi_n(\cdot,\xi)$的禁区内。将 $\mu = b_\infty$ 代入（1.4），并对禁区内的 $\psi_n(x,\xi)$ 应用 Wentzel–Kramers–Brillouin（WKB）近似，我们得到 λ_n'的如下渐近展开

$$\lambda_n'(\xi) = \frac{2}{b_\infty}\,|\xi|\,\psi_n^2(0,\xi)\int_{\mathrm{supp}(q)} q(x)\mathrm{e}^{-\int_0^x \mathrm{a}(t)\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-2x|\xi|}(1+r_n(x,\xi))\,\mathrm{d}x, \tag{1.5}$$

其中 $\|r_n(\cdot,\ \xi)\|_{\infty,\ \mathrm{supp}(q)} = O\left(|\xi|^{-1}\right)$。最后，利用（1.5），我们证明当 λ_n 满足 **（A3）** 时，其并非常数。

命题 3.3 在假设 **（A4）** 下给出了该结果，该假设与 [13]中所考虑的一个假设密切相关。为完整起见，我们在此情形下给出一个更简单的证明。

本文的组织如下。在第2节中，我们介绍一般设置，并建立Iwatsuka

[1]这里，节点是指 q 的零点，函数在这些点处变号，即这些点将两个节点域分隔开来。

哈密顿量的一些基本谱性质，包括对其谱带的描述。第3 节用于陈述我们的主要结果。最后，在第4节中，我们建立一些初步估计，并证明定理3.2 和命题3.3。

2. 一般设定与基本性质

设 $b \in \mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 是一个满足以下条件的磁场强度

(A1) 存在两个正常数 $0 < b_{\min} \leq b_{\max} < \infty$，使得

$$b_{\min} \leq b(x) \leq b_{\max}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

对所有 $x \in \mathbb{R}$，定义 $\mathrm{a}(x) = \int_0^x b(t)\,\mathrm{d}t$，并考虑以下微分表达式

$$\mathcal{H}_b := -\partial_{xx}^2 + (-\mathrm{i}\partial_y + a(x))^2 \tag{2.1}$$

其作用于 $\mathbb{R}^2$ 上的光滑函数。

微分算子 $\mathcal{H}_b$ 在 $L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ 中有一个非负自伴实现。该实现对应于（对称）半双线性型 $\mathfrak{a}\colon \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \times \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$，定义如下

$$\mathfrak{a}(f, g) := \int_{\mathbb{R}^2} \partial_x f\, \partial_x \bar{g}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^2} (-\mathrm{i}\partial_y + \mathrm{a}(x))f)\, \overline{(-\mathrm{i}\partial_y + \mathrm{a}(x))\, g}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

对于所有 f，$g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2,\ \mathbb{C})$。

众所周知，$\mathfrak{a}$是可闭的，且其闭扩张的定义域与磁性 Sobolev 空间 $\mathbf{H}^1_{\mathbf{A}}(\mathbb{R}^2,\ \mathbb{C})$相同，参见例如 [10,第 7], 章，其定义为

$$\mathbf{H}^1_{\mathbf{A}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) : (-\mathrm{i}\nabla + \mathbf{A}(x))f \in L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \right\},$$

其中$\mathbf{A}(x,\ y) = (0,\ \mathrm{a}(x))$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个向量场。值得指出的是，$\mathbf{A}$ 起到与场$\mathbf{B}(x,\ y,\ z) = (0,\ 0,\ b(x))$ 相关的磁矢势（二维对应物）的作用。

2.1. 的谱带 $\mathcal{H}_b$。

定义 $\mathcal{U}\colon L^2(\mathbb{R}^2,\ \mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R},\ L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C}))$ 为酉算子，其表达式为

$$(\mathcal{U}f)_\xi(x) := (\mathcal{U}f(\xi))(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\xi y} f(x, y)\,\mathrm{d}y, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}), \tag{2.2}$$

其中 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2,\ \mathbb{C})$ 表示由 $\mathbb{R}^2$ 上光滑且快速衰减的函数构成的 Schwartz 空间。

因此，我们可以写成

$$\mathcal{U}\mathcal{H}_b\mathcal{U}^* = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathbf{h}_b(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{2.3}$$

其中，对所有 $\xi \in \mathbb{R}$，均有

$$\mathbf{h}_b(\xi) := -\partial_{xx}^2 + (\mathrm{a}(x) - \xi)^2. \tag{2.4}$$

由假设 (A1) 可知，对于任意 $\xi \in \mathbb{R}$，$(\mathrm{a}(x) - \xi)^2$ 在无穷远处趋于无穷。因此，对于所有 $\xi \in \mathbb{R}$，$\mathrm{h}_b(\xi)$ 都有紧预解算子。因此，$\mathrm{h}_b(\xi)$ 的谱是离散的，且仅由特征值组成。此外，所有特征值都是单重的 [8]。我们将 $\mathrm{h}_b(\xi)$ 的特征值按递增顺序记为 $\lambda_1(\xi) < \lambda_2(\xi) < \dots$。

注记 2.1。还值得一提的是，在假设 *(A1)* 下，a 是一个连续[2] 递增函数，因为 $\mathrm{a}'(x) = b(x) \geq b_{\min} > 0$。此外，$\lim_{\pm\infty} \mathrm{a}(x) = \pm\infty$。因此，a 是一个从 $\mathbb{R}$ 到 $\xi \in \mathbb{R}$ 的连续映射，对每个 $x_\xi \in \mathbb{R}$，存在唯一的 使得 $\mathrm{a}(x_\xi) = \xi$。

命题 2.2. 假设 *(A1)* 成立，则有

- $\xi \mapsto \lambda_n(\xi)$ 可解析延拓至包含实数轴 $\mathbb{R}$ 的 $\mathbb{C}$ 开集。
- $$\sigma(\mathcal{H}_b) = \bigcup_{\xi \in \mathbb{R}} \sigma(\mathbf{h}_b(\xi)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n, \tag{2.5}$$

  其中，$\mathcal{B}_n = \overline{\lambda_n(\mathbb{R})}$ 表示 $\mathcal{H}_b$ 的第 n 条能带。
- 对于所有 ξ 和 n，存在一个归一化特征函数 $\psi_n(\cdot, \xi) \in L^2(\mathbb{R})$，使得

$$\mathrm{Ker}\left(\mathbf{h}_b(\xi) - \lambda_n(\xi)\right) = \mathrm{span}\left\{\psi_n(\cdot, \xi)\right\}.$$

一个自然的问题是，$\mathcal{H}_b$ 是否具有绝对连续谱；若其能带 $\mathcal{B}_n$、$n \in \mathbb{N}$ 是宽度非零的区间，则可得到这一结论。对于恒定磁场 $b(x) = b_{\min} = b_{\max}$ 的情形，众所周知，$\mathcal{H}_b$ 对每个特征值都有无穷重数的点谱。

命题 2.3. 假设 *(A1)* 成立，则

i) 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有

$$\mathcal{B}_n \subseteq (2n-1)[b_{\min}, b_{\max}]. \tag{2.6}$$

ii) 假设极限 $_{-\infty}\mathrm{b}$ 和极限 $_{+\infty}\mathrm{b}$ 均存在。定义

$$\mathrm{b}_\infty^- := \min(\lim_{-\infty} \mathrm{b}, \lim_{+\infty} \mathrm{b}), \quad \mathrm{b}_\infty^+ := \max(\lim_{-\infty} \mathrm{b}, \lim_{+\infty} \mathrm{b}).$$

[2] a 确实是 C^1 函数。

于是，

$$(2n-1)[b_\infty^-, b_\infty^+] \subseteq \mathbf{B}_n. \tag{2.7}$$

由上述命题可知，在极限不相等情形下，即 $\lim_{-\infty} b \neq \lim_{+\infty} b$，能带 $\mathbf{B}_n$, $n \in \mathbb{N}$ 可描述如下。

推论 2.4. 假设 *(A1)* 成立。假设 $\lim_{-\infty} b$ 和 $\lim_{+\infty} b$ 存在且不相等。那么，$\mathcal{H}_b$ 的谱包含绝对连续谱，且谱隙有限。

3. 主要结果

本节中，除了假设 **(A1)** 外，我们还将作如下假设

(A2) $b(x) = b_\infty + q(x)$, with $q \in C_0(\mathbb{R})$ and $b_\infty > 0$.

这里， $C_0(\mathbb{R})$ 表示在无穷远处消失的连续函数空间。也就是说，

$$C_0(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}.$$

我们的目标是证明，对于一大类非零扰动 $q \in C_0(\mathbb{R})$， $\mathcal{H}_b$ 的谱是绝对连续的。

在陈述主要结果之前，我们先澄清一些用于表述假设的术语。

定义 3.1。 令 f： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续。

(1) 当且仅当存在 $p \in \mathbb{R}$ 使得，我们称 f 具有两个节点域:

- $x \mapsto (x-p)f(x)$ 不变号，
- 存在 $x_- \in (-\infty, p)$ 和 $x_+ \in (p, \infty)$，使得 $f(x_-)f(x_+) \neq 0$。

(2) 假设 f： $\in C_c(\mathbb{R})$ 具有紧支撑。记作

$$x_{\min} := \inf \operatorname{supp}(f) \quad and \quad x_{\max} := \sup \operatorname{supp}(f).$$

我们称 f 在其支撑的某一边缘附近具有恒定符号，当且仅当存在 $x_0 \in (x_m, x_M)$ 使得满足以下任一条件

$$f\,1_{(x_{\min}, x_0)} \geq 0, \quad or \quad f\,1_{(x_{\min}, x_0)} \leq 0,$$

或者在 $(x_0, x_{\max})$ 上具有相同性质。

现在，我们陈述本文的主要结果

定理 3.2. 假设*(A1)*和*(A2)*成立。此外，假设满足以下条件

(A3) $q \in C_c(\mathbb{R})$ 并且 q 在其支撑的某一边缘附近具有恒定符号。

那么，对每个 n, $|\mathbf{B}_n| > 0$，均成立。特别地， $\mathcal{H}_b$ 具有绝对连续谱。

上述定理3.2 涵盖了此前关于在某个紧集之外为常数的磁场、证明相同结论的结果，例如 [4, 定理 2。6], [8,假设 (B2)], [13,定理 3。2]。其证明见第4节。

除紧支撑情形外， $\mathcal{H}_b$ 在 q 恰有两个节点域时具有绝对连续谱。该结论可由 [13]推出。为完整起见，我们在此陈述该结论，并在第4节给出一个简短证明。

命题 3.3。假设*(A1)* 和*(A2)* 均成立。再假设以下条件成立

(A4) q 有两个节点域。

那么， $\mathcal{H}_b$ 具有绝对连续谱。

4. 主要结果的证明

在证明定理3.2 和命题 3.3之前，我们将介绍有关特征值 $\psi_n(\cdot, \xi)$的一些有用的初等结果。

定义

$$\ell_n(x,\xi) := \left(\psi_n'(x,\xi)\right)^2 - \left((\mathrm{a}(x)-\xi)^2 - \lambda_n(\xi)\right)\psi_n^2(x,\xi), \tag{4.1}$$

以及 $\beta_n(x,\xi) := \frac{\partial \ell_n}{\partial x}(x,\xi)$。有

$$\beta_n(x,\xi) = -2b(x)(\mathrm{a}(x)-\xi)\psi_n^2(x,\xi). \tag{4.2}$$

由 [8,引理 3.4], 可推得以下关于 ψ_n, β_n 和 ℓ_n 的性质

命题 4.1. 假设满足 *(A1)* 。设 $\xi \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{N}$。那么，

- 存在正常数 L_n、 c_n 和 δ_n ，使得

$$|x - x_\xi| > L_n \Longrightarrow |\psi_n(x,\xi)| \le c_n \exp\left(-\frac{|x-x_\xi|}{\delta_n}\right), \tag{4.3}$$

  其中 $x_\xi := \mathrm{a}^{-1}(\xi)$ ，对每个 $\xi \in \mathbb{R}$ 均成立。

- $\ell_n(x, \xi) \to 0$ 当 $x \to \pm\infty$ 时。

我们证明中的关键工具是一个关于λ_n的导数公式，我们将在下面的引理中给出。

引理 4.2. 假设*(A1)* 和 *(A2)*成立，并令 $n \in \mathbb{N}$。那么，对于每个 $\mu \neq 0$，有

$$\lambda_n'(\xi) = \frac{2}{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} (b(x) - \mu)\,(\mathrm{a}(x) - \xi)\,\psi_n^2(x,\xi), \tag{4.4}$$

对每个 $\xi \in \mathbb{R}$。

注 4.3。常数 μ在 (4.4) 中的选取与 ξ无关。也可以陈述该结果，使 μ 依赖于 ξ。

引理 4.2的证明。设 $n \in \mathbb{N}$ 且 $\xi \in \mathbb{R}$。有

$$\lambda_n(\xi) = \langle \mathbf{h}_b(\xi)\,\psi_n(\cdot\,,\xi),\, \psi_n(\cdot\,,\xi)\rangle_{L^2(\mathbb{R})}.$$

由于 $\|\psi_n(\cdot\,,\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = 1$。于是，*Hellmann–Feynman* 公式 给出

$$\lambda_n'(\xi) := \frac{\mathrm{d}\lambda_n}{\mathrm{d}\xi}(\xi) = \left\langle \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{h}_b(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\,\psi_n(\cdot\,,\xi),\, \psi_n(\cdot\,,\xi) \right\rangle = -2\,\langle (\mathrm{a}(x) - \xi)\,\psi_n, \psi_n\rangle.$$

因此，

$$\lambda_n'(\xi) = -2\int_{\mathbb{R}} (\mathrm{a}(x) - \xi)\,\psi_n^2(x,\xi)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\beta_n(x,\xi)}{b(x)}\,dx.$$

根据命题 4.1，可写为

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \beta_n(x,\xi)\,dx &= \lim_{s\to\infty} \int_{-s}^{s} \beta_n(x,\xi)\,dx \\ &= \lim_{s\to\infty} \left(\ell_n(s,\xi) - \ell_n(-s,\xi)\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

因此，经过直接计算可得

$$\begin{aligned}\lambda_n'(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\beta_n(x,\xi)}{b(x)}\,dx - \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}} \beta_n(x,\xi)\,dx \\ &= -\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}} \beta_n(x,\xi)\,\frac{b(x)-\mu}{b(x)}\,dx \\ &= \frac{2}{\mu}\int_{\mathbb{R}} (b(x) - \mu)\,(\mathrm{a}(x) - \xi)\,\psi_n^2(x,\xi)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

定理的证明 3.2。假设**(A3)** 成立。令 $n \in \mathbb{N}$，只需证明 λ_n 不是常数。为此，我们将使用关于 λ_n'的公式（4.4）。取 $\mu = b_\infty$ 代入（4.4），可得

$$\lambda_n'(\xi) = \frac{2}{b_\infty}\int_{\mathbb{R}} q(x)\,(\mathrm{a}(x) - \xi)\,\psi_n^2(x,\xi)\,\mathrm{d}x.$$

令 $M > 0$ 满足 $\mathrm{supp}(q) \subset [-M, M]$。则，

$$\lambda_n'(\xi) = \frac{2}{b_\infty} \int_{-M}^{M} q(x)\tilde{\beta}_n(x,\xi)\, dx,$$

其中 $\tilde{\beta}_n(x,\ \xi) := (\mathrm{a}(x) - \xi)\ \psi_n^2(x,\ \xi)$，对所有 $x \in [-M, M]$ 和 $\xi \in \mathbb{R}$均成立。

我们将证明存在 $\xi \in \mathbb{R}$，使得 $\lambda_n'(\xi) \neq 0$。为此，我们的方法将基于 $\beta_n(x,\ \xi)$ 关于 $\xi \to \infty$ 的渐近展开，且该展开关于 $x \in [-M, M]$ 一致。

在整个证明过程中，c 表示一个正常数，该常数可能随行而变化。它可能依赖于 n，但不依赖于 ξ 和 x。

为方便读者，我们将证明分为三个步骤。步骤 1：ψ_n 的 WKB公式。

由于 ψ_n 满足特征值问题

$$-\partial_{xx}^2\psi_n(x,\xi) + (\mathrm{a}(x) - \xi)^2\psi_n(x,\xi) = \lambda_n(\xi)\psi_n(x,\xi) \tag{4.5}$$

且 $\lambda_n(\xi)$ 是 n阶特征值（极小极大原理），对应于薛定谔算子 $\mathbf{h}_b(\xi)$。接着，根据椭圆算子特征函数零点的经典结果，参见 [15]，$\psi_n(\cdot,\ \xi)$ 恰有 $(n-1)$ 个零点，且这些零点位于允许区 $\Omega_n(\xi)$中，其中

$$\Omega_n(\xi) := \{x \in \mathbb{R} : (\mathrm{a}(x) - \xi)^2 \leq \lambda_n(\xi)\}.$$

考虑到（2.6），可得

$$\Omega_n(\xi) \subseteq \{x \in \mathbb{R} : (\mathrm{a}(x) - \xi)^2 \leq (2n-1)\mathrm{b}_{\max}\}.$$

此外，很容易看出

$$|\mathrm{a}(x) - \xi| \geq b_{\min}\, |x - x_\xi|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

因此，选取 ξ 使得

$$\mathrm{dist}(x_\xi, [-M, M]) > L_n := \frac{\sqrt{(2n-1)b_{\max}}}{b_{\min}}, \tag{4.6}$$

可得 $\Omega_n(\xi) \cap [-M, M] = \emptyset$。特别地，存在一个阈值$\mathfrak{t}_n > 0$ 使得 $[-M, M] \subset \Omega_n(\xi)^c$，对每个 $\xi \in (-\infty, -\mathfrak{t}_n)$ 均成立。

现在，令 $\xi < -\mathfrak{t}_n$。设 $h = -\xi^{-1}$。因此，（4.5）变为

$$-h^2\partial_{xx}^2\psi_n(x,-h^{-1}) + (1 + h\,\mathrm{a}(x))^2\,\psi_n(x,-h^{-1}) = h^2\,\lambda_n(-h^{-1})\psi_n(x,-h^{-1}).$$

由于在这种情况下，$[-M, M] \subset \Omega_n(\xi)^c$，我们将在禁区中应用半经典 WKB近似，例如参见 [14, 第 6], 章，并得到

$$\psi_n(x,-h^{-1}) = \psi_n(0,-h^{-1})\,\mathrm{p}_h(x)^{-\frac{1}{2}}\,\exp\left(-h^{-1}\int_0^x \mathrm{p}_h(t)\,dt\right)(1 + O_x(h)), \tag{4.7}$$

对于所有的 $x \in [-M, M]$ 和 $h \to 0$，其中

$$\mathrm{p}_h(x) := \left((1 + h\mathrm{a}(x))^2 - h^2\lambda_n(-h^{-1})\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall x \in [-M, M], \tag{4.8}$$

并且，由于 a 在 $[-M, M]$ 中有界，

$$\sup_{x\in[-M,M]} |O_x(h)| \le c\,|h|.$$

步骤 2。 的渐近公式。由（4.8）以及有界性 λ_n和 λ_n^{-1}，我们推得

$$\mathrm{p}_h(x) = 1 + h\,\mathrm{a}(x) + O(h^2), \qquad \forall x \in [-M, M].$$

由于 $\mathrm{a}(\cdot)$ 在 $[-M, M]$ 中有界，且 $\lambda_n(\cdot)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界，因此上述展开关于 x 是一致的。此外，记 $\tilde{}\mathrm{a}(x) = \int_0^x \mathrm{a}(t)\,\mathrm{d}t$，对每个$x \in [-M, M]$，可得

$$h^{-1}\mathrm{p}_h(x) = \frac{x}{h} + \tilde{\mathrm{a}}(x) + O(h), \qquad \forall x \in [-M, M]..$$

此外还有

$$(\mathrm{p}_h(x))^{-\frac{1}{2}} = 1 + O(h), \qquad \forall x \in [-M, M].$$

因此可得

$$\psi_n(x, -h^{-1}) = \psi_n(0, -h^{-1})\exp(-x\,h^{-1} - \tilde{\mathrm{a}}(x))(1 + O(h)), \qquad \forall x \in [-M, M].$$

等价地，

$$\psi_n(x, \xi) = \psi_n(0, \xi)\,\mathrm{e}^{-\tilde{\mathrm{a}}(x)}\,\mathrm{e}^{-x\,|\xi|}(1 + O(\xi^{-1})), \qquad \forall x \in [-M, M],$$

由此可得

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_n(x, \xi) &:= (\mathrm{a}(x) - \xi)\psi_n^2(x, \xi)\\ &= |\xi|\,\psi_n^2(0, \xi)\,\mathrm{e}^{-2x|\xi| - 2\tilde{\mathrm{a}}(x)}(1 + O(\xi^{-1}),\end{aligned}$$

对所有 $x \in [-M, M]$ 均成立。记 $\tilde{q}(x) = q(x)\mathrm{e}^{-2\tilde{\mathrm{a}}(x)}$，则对每个 $x \in [-M, M]$，我们可推出 λ_n' 的如下展开式

$$\lambda_n'(\xi) = \frac{2}{b_\infty}\,|\xi|\,\psi_n^2(0, \xi)\int_{-M}^{M} \tilde{q}(x)\mathrm{e}^{-2x|\xi|}(1 + r_n(x, \xi))\,\mathrm{d}x, \tag{4.9}$$

其中上确界 $\sup_{x\in[-M,M]} |r_n(x, \xi)| \le c\,|\xi|^{-1}$，其中 $c > 0$ 为某个正常数。

步骤 3：结论性论证。根据假设 (A3)，存在 $x_0 \in (x_{\min}, x_{\max})$，使得 $(x_{\min}, x_0)$ 或 $(x_0, x_{\max})$ 是 q 的节点域，其中 $x_{\min}$ 和 $x_{\max}$ 指的是 $\mathrm{supp}(q)$ 的边，如定义 3.1 所述。假设 $(x_{\min}, x_0)$ 是 q 的节点域。我们希望读者在阅读下文论证时能够理解，另一种情形将以

非常相似的方式处理，因此我们对节点域的选择不失一般性。

让我们通过反证法进行论证，并假设 $\lambda_n' \equiv 0$。令 $\xi \in (-\infty,\ -\mathfrak{t}_n)$。由（4.9）可推得

$$\int_{x_{\min}}^{M} \tilde{q}(x) \mathrm{e}^{-2(x-x_0)|\xi|}(1 + r_n(x,\xi))\,\mathrm{d}x = 0.$$

特别地，

$$\int_{x_{\min}}^{x_0} \tilde{q}(x)\,\mathrm{e}^{-2|\xi|(x-x_0)}\,\mathrm{d}x = \int_{x_{\min}}^{M} r_n(x,\xi)\,\tilde{q}(x)\,\mathrm{e}^{-2|\xi|(x-x_0)}\,\mathrm{d}x - \int_{x_0}^{M} \tilde{q}(x)\,\mathrm{e}^{-2|\xi|(x-x_0)}\,\mathrm{d}x$$

考虑到关于 r_n的估计，可得

$$\left|\int_{x_{\min}}^{x_0} \tilde{q}(x)\,\mathrm{e}^{-2|\xi|(x-x_0)}\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{c}{|\xi|}\int_{x_{\min}}^{x_0} |\tilde{q}(x)|\,\mathrm{e}^{-2|\xi|(x-x_0)}\,\mathrm{d}x + \frac{\|q\|_\infty}{|\xi|}.$$

因此，对于每个 $\xi \le \min(-c,\ -\mathfrak{t}_n)$，

$$\begin{aligned} 0 \le \left(1 - \frac{c}{|\xi|}\right)\int_{x_{\min}}^{x_0} |\tilde{q}(x)|\,\mathrm{d}x &\le \left(1 - \frac{c}{|\xi|}\right)\int_{x_{\min}}^{x_0} |\tilde{q}(x)|\,\mathrm{e}^{-2|\xi|(x-x_0)}\,\mathrm{d}x \\ &\le \frac{c\,\|q\|_\infty}{|\xi|}. \end{aligned}$$

令 $\xi \to -\infty$，可断言 $\int_{-M}^{x_0} |\tilde{q}(x)|\mathrm{d}x = 0$，这意味着在（$-M,\ x_0$）上$q = 0$。这导致矛盾，从而完成证明。

4.1. **命题 3.3 的证明。** 假设**(A4)**成立。记 α 为 q的节点。根据引理 4.2，有

$$\begin{aligned} \lambda_n'(\xi) = &\frac{2}{b_\infty}\int_{-\infty}^{\alpha} q(x)\,(\mathrm{a}(x) - \xi)\,\psi_n^2(x,\xi)\,\mathrm{d}x \\ &+ \frac{2}{b_\infty}\int_{\alpha}^{+\infty} q(x)\,(\mathrm{a}(x) - \xi)\,\psi_n^2(x,\xi)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

现在，取 $\xi = \mathrm{a}(\alpha)$，可得被积函数 $x \mapsto q(x)(\mathrm{a}(x) - \xi)\,\psi_n^2(x,\ \xi)$ 沿着 $\mathbb{R}$ 始终同号。由于 $(\mathrm{a}(\cdot) - \xi)\,\psi_n^2(\cdot,\ \xi)$ 和 q 都只有有限个零点，因此，$q(\cdot)\,(\mathrm{a}(\cdot) - \xi)\,\psi_n^2(\cdot,\ \xi) \not\equiv 0$。由此，$\lambda_n'(\mathrm{a}(\alpha)) \neq 0$，证明至此结束。

致谢。 作者感谢同事 O. El-Fallah 和 M. Ziyat 富有见地的讨论。

参考文献

[1] P. Briet、G. D Raikov 和 E. Soccorsi。条带上磁量子哈密顿量的谱性质。渐近分析，58(3):127–155，2008。[2] Hans L. Cycon、Richard G. Froese、Werner Kirsch 和 Barry Simon。薛定谔算子：及其在量子力学和整体几何中的应用。物理学文本与专著。Springer-Verlag，柏林–海德堡–纽约，1987。[3]N. Dombrowski、F. Germinet 和 G. D Raikov。磁障碍和磁导引中的边缘电流量子化。庞加莱年刊，12(6):1169–1197，2011。[4] P. Exner 和 H. Kovarik。磁性条带波导。物理学杂志 *A*：数学与一般，33:3297–3311，2000。[5] P. Exner 和 H. Kovarik。量子波导。理论与数学物理。Springer Cham，2015。[6] C. Garcìa-Cervera、S. Lahbabi 和 A. Maichine。磁场存在下具有二维对称性的电子结构模型。庞加莱年刊，2026年。[7] P. D Hislop 和 E. Soccorsi。正磁场下由 Iwatsuka 哈密顿量诱导的边缘态。数学分析与应用杂志，422(2):1194–1224，2015。[8] A. Iwatsuka。磁场中的绝对连续薛定谔算子实例。*RIMS* 出版物，21:385–401，1985。[9] L. D. Landau 和 E. M. Lifshitz。量子力学：非相对论理论，理论物理学教程第 3 卷。理论物理学教程。培格曼出版社，伦敦，1958。[10] E. H. Lieb 和 M. Loss。分析学，数学研究生教材第 14 卷。数学研究生教材。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，第二版，2001。[11] P. Miranda。沿一个方向具有非恒定磁场的薛定谔算子的特征值渐近。庞加莱年刊，17(7):1713–1736，2016。[12] P. Miranda 和 N. Popoff。Iwatsuka 哈密顿量在阈值处的谱。数学分析与应用杂志，460(2):516–545，2018。[13] M. M˘antoiu 和 R. Purice。Iwatsuka 模型的一些传播性质。数学物理通讯，188:691–708，1997。

[14] F. W. J. Olver. 渐近与特殊函数. A K Peters/CRC Press，马萨诸塞州韦尔斯利，第 2 版，1997 年。[15] E. C. Titchmarsh. 与二阶微分方程相关的特征函数展开. 牛津大学出版社，第 2 版，1962 年。[16] M. Tusek. 关于 Iwatsuka 模型的一种推广。《物理学杂志 A：数学与理论》，49:365205，2016 年。
拉巴特穆罕默德五世大学理学院数学系，伊本·白图泰大道 4 号，邮政信箱 1014 RP，拉巴特，摩洛哥电子邮箱：a.maichine@um5r.ac.ma