TH弯曲与偶极型贝西科维奇–克克亚集的维数 S

ANTONIO CÓRDOBA 与 CHUHAN SUN

摘要。本文为包含子午圆的集合，以及差集包含球面的集合，建立了精确的豪斯多夫维数和盒计数维数界。

固定球面 S^{n-1}上的两个对跖点 N、 S，并考虑经过它们的大圆族。假设$\mathbb{R}^{n-1}$中的贝西科维奇–卡凯亚重叠猜想成立，我们证明，每个包含该族中每个圆的平移和伸缩副本的有界集 $K \subset \mathbb{R}^n$ 都满足 $\dim_H K \geq n-1$。特别地，对于包含每种方向的一个圆的有界集，同样的结论也成立。单位球面表明此界是精确的。我们还无条件证明，每个有界集$K \subset \mathbb{R}^n$、 $n \geq 2$满足 $S^{n-1} \subset K - K$时，其下盒维数大于或等于 $n(n-1)/(2n-1)$，且此界同样是精确的。

arXiv:2611.29803v1 [math.CA] 22 Nov 2026

1. Besicovitch-Kakeya 重叠猜想

在欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中，设 B_N^r, $N \geq 1$ 是由半径为 $r > 0$、高度为 rN、方向任意的 $n-$ 维管状邻域组成的集合。

假设 $\{R_1, R_2, \ldots, R_M\} \subset \mathrm{B}_N^r$ 是一组管状邻域，其中任意两个之间的角度始终大于 $\frac{1}{N}$。（特别地，这一假设意味着 $M \lesssim N^{n-1}$。）下面是一个重要的猜想：

Besicovitch-Kakeya 重叠猜想：在上述假设下，有如下不等式：

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big| \sum_{j=1}^{M} \chi_{R_j} \Big|^{\frac{n}{n-1}} \leq C(n)[\log(1+N)]^{a(n)} \sum_{j=1}^{M} |R_j|,$$

其中 $C(n)$、 $a(n)$ 是仅依赖于维数 n 的有限常数。

注 1. 对于许多应用，只需采用较弱的版本：对每个 $\varepsilon > 0$，将 $C(n)[\log(1+N)]^{a(n)}$ 替换为 $C_\varepsilon N^\varepsilon$。

注 2。 这个猜想的二维情形证明众所周知，见[1],[2]。最近，*OpenAI* 宣布了三维证明，该证明与 *Wang* 和 *Zahl* 的工作密切相关 [7]。

注 3。 回忆一下，给定一个有界集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 以及给定 $\alpha \geq 0$ 和 $\delta > 0$，我们有如下定义

$$\mathcal{H}_\delta^\alpha(E) := \inf \Big\{ \sum_k [\mathrm{diam}(Q_k)]^\alpha \Big\}, \tag{1}$$

其中下确界取遍 E 的所有由直径小于 δ的立方体 Q_k 构成的可数覆盖。将豪斯多夫测度定义为

$$\mathcal{H}^\alpha(E) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^\alpha(E).$$

上述极限总是存在，尽管它可能是无穷大的，并具有以下性质： （*1*）$\mathcal{H}^\alpha$ 是可数可加的，在平移和旋转下保持不变，并满足

$$\mathcal{H}^\alpha(\lambda E) = \lambda^\alpha \mathcal{H}^\alpha(E), \ \textit{for}\ \lambda > 0.$$

（2）$\mathcal{H}^0(E)$ 统计 E 内点的个数，而

$$\mathcal{H}^n(E) = c_n|E|,$$

其中 $c_n = \frac{\pi^{n/2}}{2^n\, n\, 2(\frac{n}{2})!}$，且 $|E|$表示 $\mathbb{R}^n$ 中 E 的勒贝格测度。

(3) $\mathcal{H}^\alpha(E) < \infty$意味着，当 $\beta > \alpha$ 时，$\mathcal{H}^\beta(E) = 0$。另一方面，如果 $\beta < \alpha$ 且$\mathcal{H}^\alpha(E) > 0$，那么 $\mathcal{H}^\beta(E) = \infty$。

因此，给定一个有界集 $E \subset \mathbb{R}^n$，存在唯一的 α，使得当 $\beta > \alpha$ 时，$\mathcal{H}^\beta(E) = 0$，并且当 $\beta < \alpha$ 时，$\mathcal{H}^\beta(E) = \infty$。

定义 1。 α唯一的这个数称为 E 的豪斯多夫维数。也就是说

$$\dim_H(E) = \sup\left\{\beta : \mathcal{H}^\beta(E) = \infty\right\} = \inf\left\{\alpha : \mathcal{H}^\alpha(E) = 0\right\}.$$

一个重要的观察是，我们可以用属于宽度为 2^{-k} 的网格 Γ_k 的球或二进方体替代立方体，其中 k 为正整数，而不改变$\dim_H(E)$ 的值。

$\mathbb{R}^n$中还有另一种维数概念，即有界集 F 的盒计数维数或闵可夫斯基维数 $\dim_B(F)$，见 [5]。我们有几种等价的定义，其中一种如下。

令 N_ε 表示用边长为 ε 的网格覆盖 F 所需的立方体数量。那么

$$\underline{\dim}_B(F) = \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N_\varepsilon}{|\log\varepsilon|} \quad \textit{and} \quad \overline{\dim}_B(F) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N_\varepsilon}{|\log\varepsilon|}.$$

如果上述两个极限都存在且相等，它们的共同值就是盒计数维数 $\dim_B(F)$。

若将集合 F 的闵可夫斯基香肠记为 $F_\varepsilon = \{x : \mathrm{dist}(x, F) \le \varepsilon\}$（沿用 *Mandelbrot* [4] 的术语），那么 $\dim_B(F)$描述了测度$|F_\varepsilon|$ 减小的方式，即

$$\underline{\dim}_B(F) = n - \limsup_{\varepsilon\to 0} \left|\frac{\log|F_\varepsilon|}{\log\varepsilon}\right| \quad \textit{and} \quad \overline{\dim}_B(F) = n - \liminf_{\varepsilon\to 0} \left|\frac{\log|F_\varepsilon|}{\log\varepsilon}\right|.$$

此外，我们还有如下不等式：

$$\underline{\dim}_B(F) \ge \dim_H(F).$$

2. 卷曲 Kakeya 集

我们考虑一个有界集 $K \subset \mathbb{R}^n$，其中（$n \ge 3$）在 $\mathbb{R}^n$ 中的每个可能位置上都包含一个一维圆。

Theorem 1. 如果弱 *Besicovitch-Kakeya* 重叠猜想在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中成立，我们有 e

$$\dim_H(K) \ge n - 1.$$

注 4. 注意，单位球面 $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 是一个例子，说明上述估计是尖锐的。情形 $n = 3$ 已在 [3] 中通过一种略有不同的方法得到证明，该方法直接进行证明，且不假设弱 *Besicovith-Kakeya* 重叠猜想。另一方面，文献 [2]给出了整个 *Besicovitch-Kakeya* 重叠猜想在维数 $n = 2$中成立的证明。

定理 1 将是以下更强结果的推论：

在单位球面 S^{n-1} 上固定两个对跖点 N, S（即极点），并令 E 表示赤道，它定义为 S^{n-1} 与经过原点且垂直于连接 N 和 S 的直线的超平面的交集。因此，E 是 S^{n-2} 单位球面。对于 E 上的每个点 $\sim\xi \in$，令 C_ξ 表示由 S^{n-1} 与经过 N、S 和 ξ 的二维 $\widetilde{}$ 平面的交集所得到的大圆。我们可以将 $\{C_\xi\}_{\xi\in\mathcal{E}}$称为子午圆族。

假设有界集 $K \subset \mathbb{R}^n$ 对 E 中的每个 $\xi \in$ 都包含一个半径为 $\sim r$（ξ）的圆 $C_{\xi,\, r(\xi)}$，该圆由 C_ξ 经伸缩和平移得到。那么我们有：

定理 2. 假设弱贝西科维奇–克克亚重叠在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中成立，则有：

$$\dim_H(K) \geq n-1.$$

证明。设 $\{Q_\sigma\}$ 是由边长为 $\ell(Q_\sigma) \leq 2^{-k_0}$ 的二进方体构成的集合 K 的一个覆盖，使得

$$K \subset \bigcup_\sigma Q_\sigma = \bigcup_{k\geq k_0} \left(\bigcup_\sigma Q_\sigma^k \right),$$

其中立方体 Q_σ^k 属于 $\mathbb{R}^n$ 中的二进网格 Γ_k，且 $\ell(Q_\sigma^k) = 2^{-k}$。定义

$$E_k = \bigcup_\sigma Q_\sigma^k, \quad N_k = \mathrm{card}\{Q_\sigma^k\}.$$

根据豪斯多夫维数的定义，要证明定理 2，只需证明对于任意 $\alpha < n-1$，都存在一个正的 $\lambda_\alpha > 0$，使得

$$\sum_{k\geq k_0} N_k 2^{-k\alpha} \geq \lambda_\alpha > 0.$$

事实上，证明一个更强的结果会更方便，即：

断言 1. 对每个 $\alpha < n-1$，存在 $\lambda_\alpha > 0$、$k \geq k_0$，使得

$$N_k 2^{-k\alpha} \geq \lambda_\alpha > 0.$$

~对每个 $\xi \in$E，令 $r(\xi)$ 表示由 C_ξ 经伸缩和平移得到的圆 $C_\xi \subset K$ 的半径。

Let

$$\mathcal{E}_m = \{\xi \in \mathcal{E} : 2^{m-1} \leq r(\xi) < 2^m\}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

并且注意到

$$\mathcal{E} = \bigcup_m \mathcal{E}_m$$

这意味着对某个 $m \in \mathbb{Z}$，我们必有

$$\mathcal{H}^{*(n-2)}(\mathcal{E}_m) > 0,$$

其中 $\mathrm{H}^{*(n-2)}$ 表示外 H^{n-2}–豪斯多夫测度。考虑到豪斯多夫维数在伸缩下不变，我们不妨假设 $\mathrm{H}^{*(n-2)}(\mathrm{E}_1) > 0$。因此，在下文中我们将假设 K 对每个方向 $\xi \in \mathrm{E}_1$, 都包含一个半径 $r(\xi)$ 介于 1 与 2 之间的圆，并且 $\mathrm{H}^{*(n-2)}(\mathrm{E}_1) > 0$。

设 C_ξ 为这些圆之一，我们对南北线 $N-S$ 的指定会自动在 C_ξ 中产生两个极点 $N_\xi - S_\xi$。我们将 C_ξ 分成八个相等的八分圆 $\{C_\xi^j\}_{j=1}^8$，并选取其中之一，即 C_ξ^1，它以北极 N_ξ 为中点。

引理1。对于每个 $\beta > 0$，存在 $\lambda_\beta > 0$，使得对于每个 $\xi \in \mathcal{E}_1$,

$$\mathcal{H}^1(C_\xi^1 \cap E_k) \geq \lambda_\beta 2^{-k\beta},$$

对于某个 $k \geq k_0$。

证明。 假设存在一个 $\beta > 0$，使得

$$\mathcal{H}^1(C^1_\xi \cap E_k) < \lambda_\beta 2^{-k\beta}, \quad \text{for any } \lambda_\beta > 0.$$

于是我们有

$$\frac{\pi}{4} \le \mathcal{H}^1(C^1_\xi) = \sum_{k\ge k_0} \mathcal{H}^1(C^1_\xi \cap E_k) < \lambda_\beta \sum_{k\ge k_0} 2^{-k\beta} \le \lambda_\beta \frac{2^{-k_0\beta}}{1-2^{-\beta}},$$

当 λ_β 足够小时，该命题不成立。因此，对于每个 $\xi \in \mathrm{E}_1,$，我们有

$$\mathcal{H}^1(C^1_\xi \cap E_k) \ge \lambda_\beta 2^{-k\beta}, \quad \text{for a certain } k \ge k_0.$$

□

接下来，定义集合

$$\Omega_k = \{\xi \in \mathcal{E}_1 : \mathcal{H}^1(C^1_\xi \cap E_k) \ge \lambda_\beta 2^{-k\beta}\},$$

并注意到

$$\mathcal{E}_1 \subset \bigcup_{k\ge k_0} \Omega_k.$$

由于对于每个 $\xi \in \mathrm{E}_1,$，都存在 $k \ge k_0$ 满足 $\xi \in \Omega_k$，因此我们有

$$\mathcal{H}^{*(n-2)}(\Omega_k) \ge \lambda_\beta 2^{-k\beta},$$

对于一个方便 $\lambda_\beta > 0$。由此估计可得，集合 Ω_k 包含一个方向子集 $\mathrm{A} = \{\xi_a\}$，使得 $|\xi_a - \xi_b| \ge 2^{-k}$对于不同的 ξ_a、 $\xi_b \in \mathrm{A}$，且 $\mathrm{card}\{\mathrm{A}\} \simeq \lambda_\beta 2^{-k\beta} 2^{k(n-2)}$。我们将 D^k_ξ 定义为 E_k中所有满足 $C^1_\xi \cap Q^k_\sigma \neq \varnothing$ 的立方体$\{Q^k_\sigma\}$的并集，并注意到

$$\left|D^k_\xi\right| \gtrsim \lambda_\beta 2^{-k\beta} 2^{-k(n-1)}.$$

于是我们有

$$\sum_{\xi_a \in \mathcal{A}} \left|D^k_{\xi_a}\right| \gtrsim \lambda_\beta 2^{-k\beta} 2^{-k(n-1)} \lambda_\beta 2^{-k\beta} 2^{k(n-2)} = \lambda_\beta^2 2^{-k} 2^{-2k\beta}, \tag{2}$$

并且由 Hölder不等式可得

$$\sum_{\xi_a \in \mathcal{A}} |D^k_{\xi_a}| \le |E_k|^{\frac{1}{n-1}} \left[\int \left| \sum_{\xi_a \in \mathcal{A}} \chi_{D^k_{\xi_a}} \right|^{\frac{n-1}{n-2}} \right]^{\frac{n-2}{n-1}}. \tag{3}$$

接下来，我们通过垂直投影将每个 $D^k_{\xi_a}$ 投影到集合 $\widetilde{D}^k_{\xi_a}$ 上，使得每个满足 $Q^k_\sigma \cap C^1_{\xi_a} \neq \varnothing$ 的立方体 Q^k_σ都沿垂直方向平移到以 $\mathbb{R}^n$的超平面$x_n = 0$ 为中心的立方体 $\widetilde{Q}^k_\sigma$。我们称 $\widetilde{D}^k_{\xi_a}$ 为相应的投影图形。此时， $\widetilde{D}_{\xi_a}$包含在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个管状邻域 R_{ξ_a} 内，其垂直维数为 2^{-k}，方向为（$n-1$）维水平超平面内的 ξ_a，且这些方向按（$n-1$）维弱贝西科维奇–克克亚重叠猜想中的方式两两相隔至少 2^{-k}。接着对垂直变量和水平变量同时积分可知，不等式 (3) 中的积分受相应积分控制

$$\int \left| \sum_{\xi_a \in \mathcal{A}} \chi_{R_{\xi_a}} \right|^{\frac{n-1}{n-2}}. \tag{4}$$

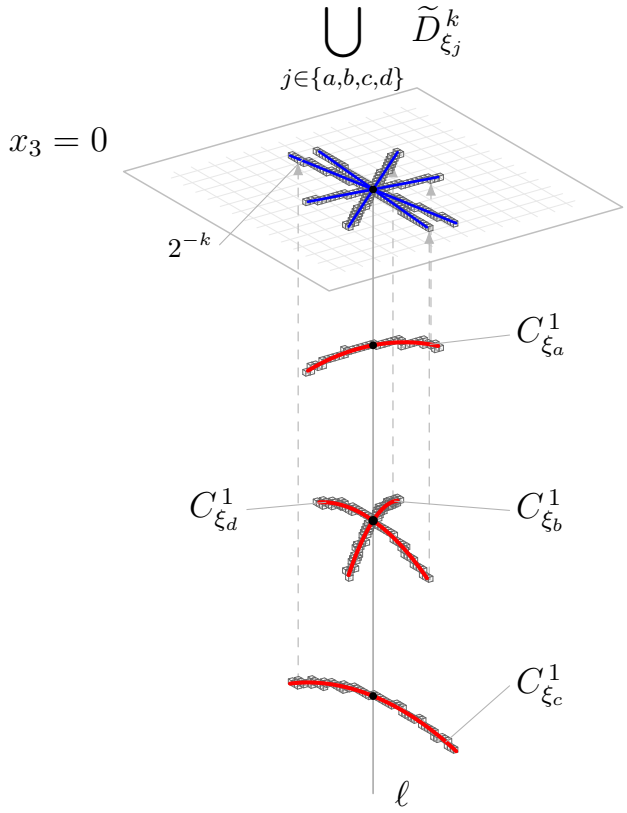


图 1. 三维情形

为此，记 $Q_{\omega,\,j}$ 为覆盖 $\{Q^k_\sigma\}$ 中与至少一个类别 $C^1_{\xi_a}$ 有非空交集的立方体，其中 ω 是 $Q_{\omega,\,j}$ 的水平坐标在网格 $\Gamma_{k,\,j}$ 中的指标，而 j 也描述 Γ_k中的垂直位置。将积分 (3) 限制在由 ω 描述的 Γ_k 的垂直带上，所得结果等于一个和$2^{-kn}\sum_\ell \nu_\ell^{n-1}$，其中指标 ℓ 表示该带内与该族 $\{C^1_{\xi_a}\}$ 的 ν_ℓ 条弧相交的立方体。另一方面，对积分 (4) 作相应的水平-垂直分解，可得同一垂直带上的 $2^{-kn}\left(\sum_\ell \nu_\ell\right)^{\frac{n-1}{n-2}}$，并且有如下不等式

$$\left(\sum_\ell \nu_\ell\right)^{\frac{n-1}{n-2}} \geq \sum_\ell \nu_\ell^{\frac{n-1}{n-2}}.$$

因此，不等式 (2) 和 (3) 得出

$$\lambda_\beta^2 2^{-k} 2^{-2k\beta} \lesssim |E_k|^{\frac{1}{n-1}} \left[\int \left|\sum_{\xi_a\in\mathcal{A}} \chi_{R_{\xi_a}}\right|^{\frac{n-1}{n-2}}\right]^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

对于任意 $\gamma > 0$，由弱Besicovitch-Kakeya重叠估计可知

$$|E_k| \geq 2^{-k\gamma} 2^{-k} 2^{-\mu k\beta},$$

对于某个通用常数 μ。也就是说

$$N_k 2^{-k\alpha} \geq 2^{k[n-1-\alpha-\mu\beta-\gamma]} \geq \lambda > 0,$$

对于 $\alpha < n-1$，若 β 和 γ 足够小。 □

3. 偶极Kakeya集

考虑集合 $K \subset \mathbb{R}^n$、 $n \geq 2$，使得 $S^{n-1} \subset K - K$。也就是说，对每个 $\theta \in S^{n-1}$，都存在两点 $z(\theta)$ $w(\theta) \in K$，使得 $z(\theta) - w(\theta) = \theta$。集合 K在每个方向上都包含一条单位线段的两个端点，而不是整条线段。我们称这样的集合 K 为偶极Besicovitch–Kakeya集。

定理3. 设 $K \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ 是一个有界偶极*Besicovitch-Kakeya*集。该 n

$$\underline{\dim}_B(K) \geq \frac{n(n-1)}{2n-1}.$$

此外，下界是尖锐的。

注5. 如果允许两点之间的距离随方向变化，也就是说，对每个 $\theta \in S^{n-1}$，存在 $z(\theta)$ $w(\theta) \in K$满足 $z(\theta) - w(\theta) = r(\theta)\theta$，且$1 \leq r(\theta) \leq 2$，那么 维数$_B K \geq (n-1)/2$。关于 [3] 情形，~~见命题5~~；同样的覆盖论证适用于所有维数。

证明。 设 $E_k = \{Q_\sigma\}$ 是用网格 Γ_k 中边长为 2^{-k} 的正方形对 K 的覆盖，即

$$\ell(Q_\sigma) = 2^{-k}, \quad K \subset \bigcup Q_\sigma,$$

并定义 $N_k = \mathrm{card}(E_k)$。

我们固定一组方向

$$A_k = \{\theta_j\}_{j=1,2,\cdots,2^{k(n-1)}} \subset S^{n-1},$$

它们在单位球面上的距离介于 2^{-k} 和 2^{-k+1} 之间。定义

$$z(\theta_j) \in Q^z(\theta_j) \in E_k \quad \text{and} \quad w(\theta_j) \in Q^w(\theta_j) \in E_k,$$

with

$$z(\theta_j) - w(\theta_j) = \theta_j.$$

Let

$$D(\theta_j) = Q^z(\theta_j) \cup Q^w(\theta_j).$$

$$\mathcal{F} = \{\{Q^z(\theta_j), Q^w(\theta_j)\} : 1 \leq j \leq 2^{k(n-1)}\}.$$

$$\mathcal{R}(Q) = \{Q_\sigma \in E_k : \{Q, Q_\sigma\} \in \mathcal{F}\}.$$

$$M(Q) = \mathrm{card}\{\mathcal{R}(Q)\} = \text{the number of directions } \theta_j \in A_k, \text{ so that } D(\theta_j) \supset Q.$$

接下来，我们选择 Q_1，使得 $M(Q_1)$ 最大。选定 $Q_1, Q_2, \cdots$ Q_τ 后，我们依据相同的标准选取 $Q_{\tau+1}$，即 $M(Q_{\tau+1})$ 在 $E_k \backslash \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_\tau\}$ 中最大。我们继续这一选择过程，直到 A_k 中的所有方向都在这些集合内得到

$$\{Q_1, \cdots, Q_T\} \cup \bigcup_{j=1}^{T} \{Q_\sigma : Q_\sigma \in \mathcal{R}(Q_j)\}.$$

我们有

$$\sum_{j=1}^{T} M(Q_j) \simeq 2^{k(n-1)},$$

由此我们可以得出存在 $\nu \in \{1, 2, \cdots \quad k(n-1)\}$，使得

$$\frac{2^{k(n-1)}}{k(n-1)} \leq M_\nu \, 2^\nu \leq 2^{k(n-1)}, \tag{5}$$

其中

$$M_\nu = \mathrm{card}\{Q_j : 2^{\nu-1} \leq M(Q_j) < 2^\nu\}.$$

~ ~我们将族 $\{Q_1,\cdots\ Q_T\}$ 中满足该估计的正方形记为 $Q_1,\cdots Q_{M_v}$

$$2^{v-1} \le \mathrm{card}(\mathcal{R}(\widetilde{Q}_j)) < 2^v.$$

我们有

$$\frac{2^{-k}}{(n-1)k} \lesssim M_v\, 2^v 2^{-kn} \lesssim \sum_{j=1}^{M_v}\left(\sum_{Q\in\mathcal{R}(\widetilde{Q}_j)}|Q|\right). \tag{6}$$

如果 $M_v \ge 2^{\frac{n(n-1)}{2n-1}k}$，那么

$$|E_k| = N_k 2^{-kn} \ge M_v 2^{-kn} \ge 2^{\frac{n(n-1)}{2n-1}k} 2^{-kn},$$

这意味着

$$N_k \ge 2^{\frac{n(n-1)}{2n-1}k},$$

Then

$$\underline{\dim}_B(K) = \liminf_{k\to\infty}\frac{\log N_k}{|\log 2^{-k}|} \ge \liminf_{k\to\infty}\frac{\frac{n(n-1)}{2n-1}k}{k} = \frac{n(n-1)}{2n-1}. \tag{7}$$

如果 $M_v < 2^{\frac{n(n-1)}{2n-1}k}$，我们利用 Hölder 不等式估计（6）中的和，

$$\sum_{j=1}^{M_v}\left(\sum_{Q\in\mathcal{R}(\widetilde{Q}_j)}|Q|\right) = \int\sum_{j=1}^{M_v}\sum_{Q\in\mathcal{R}(\widetilde{Q}_j)}\chi_Q \le |E_k|^{\frac{n-1}{n}}\left(\int\left[\sum_{j=1}^{M_v}\sum_{Q\in\mathcal{R}(\widetilde{Q}_j)}\chi_Q\right]^n\right)^{\frac{1}{n}}.$$

我们可以将内层求和拆分为 9^n 个部分，使得在每个部分中，相应的立方体 $\widetilde{Q}_j$ 之间的距离都大于 8×2^{-k}。然后，利用 Minkowski 不等式，我们可以在这一距离假设下估计上述积分，其中 $\sim Q_j$。因此我们得到

$$\left(\int\left[\sum_{j=1}^{M_v}\sum_{Q\in\mathcal{R}(\widetilde{Q}_j)}\chi_Q\right]^n\right)^{\frac{1}{n}} \le \sum_{\sigma=1}^{9^n}\left(\int\left[\sum_{j_\sigma=1}^{M_v^\sigma}\sum_{Q\in\mathcal{R}(\widetilde{Q}_{j_\sigma})}\chi_Q\right]^n\right)^{\frac{1}{n}},$$

~ ~其中 $M_v^\sigma \le M_v$，并且对于任意 $1\le j_\sigma,\ j'_\sigma \le M_v^\sigma, j_\sigma \ne j'_\sigma$，$Q_{j_\sigma}$与 $Q_{j'_\sigma}$ 之间的距离大于 8×2^{-k}。

对于每个 σ，我们有

$$\int\left[\sum_{j_\sigma=1}^{M_v^\sigma}\sum_{Q\in\mathcal{R}(\widetilde{Q}_{j_\sigma})}\chi_Q\right]^n \le \sum_{j_{\sigma_1},j_{\sigma_2},\ldots,j_{\sigma_n}=1}^{M_v}\int\sum_{\substack{Q^1\in\mathcal{R}(\widetilde{Q}_{j_{\sigma_1}})\\ Q^2\in\mathcal{R}(\widetilde{Q}_{j_{\sigma_2}})\\ \vdots\\ Q^n\in\mathcal{R}(\widetilde{Q}_{j_{\sigma_n}})}}\chi_{Q^1}\chi_{Q^2}\cdots\chi_{Q^n},$$

并注意到，由于族 R(Q) 互不相交，我们有

$$\left(\sum_{Q^1\in\mathcal{R}(Q)}\chi_{Q^1}\right)^\ell = \sum_{Q^1\in\mathcal{R}(Q)}\chi_{Q^1}.$$

记 $X_m = ¶\{\ j_{\sigma_1}, j_{\sigma_2},\ldots, j_{\sigma_n}\} : \mathrm{card}\{j_{\sigma_1}, j_{\sigma_2},\ldots, j_{\sigma_n}\} = m©$，则

$$\mathrm{card}\{X_m\} \le M_v^m,$$

and

(8)

$$\sum_{\{j_{\sigma_1},j_{\sigma_2},\dots,j_{\sigma_n}\}\in X_m}\int \sum_{Q^1\in\mathcal{R}(\widetilde{Q}_{j_{\sigma_1}})}\cdots\sum_{Q^n\in\mathcal{R}(\widetilde{Q}_{j_{\sigma_n}})}\chi_{Q_1}\cdots\chi_{Q_n}\lesssim M_v^m 2^{k(n-m)}2^{-kn}=(M_v2^{-k})^m\le 2^{\left[\frac{(n^2-3n+1)m}{2n-1}\right]k},$$

因为对于 $\{Q_{j_{\sigma_1}},Q_{j_{\sigma_2}},\dots,Q_{j_{\sigma_n}}\}$ 中任意 m 个不同立方体，$2\le m\le n$，与它们的中心距离为单位距离的点都位于一个球面 S^{n-m} 上，而满足 $Q\in\bigcap_{i=1}^n \mathrm{R}(Q_{j_{\sigma_i}})$ 的立方体 Q 至多有 $C_{n,m}2^{k(n-m)}$ 个。

此外，当 $j_{\sigma_1}=j_{\sigma_2}=\dots=j_{\sigma_n}=j$ 时，利用条件 (5) 可得估计

$$\sum_{j=1}^{M_v}\int \sum_{\substack{Q^1\in\mathcal{R}(\widetilde{Q}_j)\\ Q^2\in\mathcal{R}(\widetilde{Q}_j)\\ \vdots\\ Q^n\in\mathcal{R}(\widetilde{Q}_j)}}\chi_{Q^1}\chi_{Q^2}\cdots\chi_{Q^n}\lesssim M_v2^{\nu}2^{-kn}\lesssim 2^{-k}\le 2^{\frac{(n^2-3n+1)n}{2n-1}k}. \tag{9}$$

上面的最后一个不等式由以下估计得到

$$\frac{(n^2-3n+1)n}{2n-1}\ge -\frac{2}{3}>-1,\quad \text{for } n\ge 2.$$

对于 $n\ge 3$，由于 $m\le n$，(8) 中的指数满足

$$\frac{(n^2-3n+1)m}{2n-1}k\le\frac{(n^2-3n+1)n}{2n-1}k.$$

因此我们得到估计

$$\frac{2^{-k}}{(n-1)k}\lesssim |E_k|^{\frac{n-1}{n}}2^{\frac{n^2-3n+1}{2n-1}k},$$

这意味着

$$|E_k|\gtrsim\frac{2^{-\frac{n^2}{2n-1}k}}{[(n-1)k]^{\frac{n}{n-1}}}.$$

因此我们有

$$\underline{\dim}_B(K)\ge n-\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{\log|E_k|}{\log 2^{-k}}\right|\ge n-\limsup_{k\to\infty}\frac{\frac{n^2}{2n-1}k+\frac{n}{n-1}\log[(n-1)k]}{k}=\frac{n(n-1)}{2n-1}.$$

对于情形 $n=2$，我们得到

$$|E_k|\gtrsim\frac{2^{-\frac{4}{3}k}}{k^2},$$

这意味着

$$\underline{\dim}_B(K)\ge\frac{2}{3}.$$

为证明下界是尖锐的，我们需要以下命题：

命题1。 [6, 第4节。1] 对于每个整数 $n\ge 2$，存在一个紧集 $K\subset\mathbb{R}^n$满足 $S^{n-1}\subset K-K$，使得

$$\underline{\dim}_B(K)\le\frac{n(n-1)}{2n-1}.$$

对于 $n=2$，命题1的详细证明见 [6], 第4.1节。为完整起见，下面讨论一般的 n 维情形。

证明。 我们构造一列有限点集及球冠族。在每一步中，我们都用更小的球冠替换每个球冠，并将这些小球冠聚簇在其支撑球的中心附近，同时保留原球冠所有方向的正负方向。这种聚簇方式将使我们能够在一系列适当的尺度上实现高效覆盖。

将以 $e \in \mathbb{R}^n$ 为中心的单位球面记为

$$S(e,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - e| = 1\}.$$

将以 $e \in \mathbb{R}^n$ 为中心、半径为 r 的闭球记为

$$B(e,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - e| \le r\}.$$

对于集合 $F \subset \mathbb{R}^n$，将其闭 ρ邻域记为

$$F^{(\rho)} = \{x : \operatorname{dist}(x,F) \le \rho\}.$$

设 $E \subset S(e,1)$ 为一个球冠，并设 $\delta > 0$。选取一个有限的极大 δ-分离集

$$\mathcal{P}(E,\delta) \subset E.$$

$\mathrm{P}(E,\delta)$ 中的点两两之间的距离至少为 δ，而极大性确保 E 中的每一点都在某个 $\mathrm{P}(E,\delta)$ 中的点的 δ 距离以内。

对于每个 $p \in \mathrm{P}(E,\ \delta)$，令

$$E'_p = B(p,2\delta) \cap S(e,1).$$

E'_p 是支撑球面中与 p的距离在 2δ 以内的部分。

将E'_p 关于连接 e 与 p的线段中点作反射，并将反射后的帽记为

$$E_p = e + p - E'_p = \{e + p - z : z \in E'_p\}.$$

映射 $z \mapsto e + p - z$ 将以 e 为中心的单位球面反射到以 p为中心的单位球面，并将以 p 为中心的球反射到以 e为中心的球。因此

$$E_p = B(e,2\delta) \cap S(p,1).$$

特别地，新帽 E_p 的支撑球面以 p为中心，并且

$$E_p \subset B(e,2\delta).$$

这种反射保持相关单位方向不变。事实上，如果 $z \in E'_p$ 且 $q = e + p - z \in E_p$，那么

$$p - q = z - e. \tag{10}$$

因此，由旧点对（$e,\ z$）确定的单位向量也由新点对（$q,\ p$）确定。此外，所有点 $p \in \mathrm{P}(E,\ \delta)$ 构成 E 的一个 δ-网，因此旧帽及其中心所表示的每个方向都得以保留。令 $\mathrm{A}(E,\ \delta)$ 表示帽集E_p。

选择快速衰减的尺度

$$\delta_k = 2^{-2^{k^2}}, \qquad k \ge 1.$$

δ_k 的快速衰减确保，在用于估计维数的尺度上，后续各代的影响较小。

从以下内容开始

$$P_0 = \{0\}, \qquad A_0 = \{S^{n-1}\}.$$

归纳地定义

$$P_k = \bigcup_{E \in A_{k-1}} \mathcal{P}(E,\delta_k),$$

and

$$A_k = \bigcup_{E\in A_{k-1}} \mathcal{A}(E,\delta_k).$$

A_k 中的每个帽都位于一个支撑球面上，该球面的中心是 P_k中的一点。它也包含在其父帽中心的 $2\delta_k$-邻域内，而该中心属于 P_{k-1}。因此

$$P_{k+1} \subset P_{k-1}^{(2\delta_k)}. \tag{11}$$

这是该构造的主要几何特征：每一代都聚集在前面两代附近。

由于 $\sum_k \delta_k < \infty$，分别沿偶数代和奇数代反复应用（11）表明，所有集合 P_k 都位于一个固定的有界区域内。因此

$$P = \bigcup_{k\geq 0} P_k$$

是有界的。令

$$K = \overline{P}.$$

那么 K 是紧集。

接下来我们验证 $S^{n-1} \subset K - K$。对于每个帽 E，记 $e(E)$ 为其支撑单位球面的中心。那么 $E - e(E)$ 是帽上的一组单位方向。定义

$$D_k = \bigcup_{E\in A_k} \big(E - e(E)\big).$$

由 (10)，可知

$$D_k \supset -D_{k-1}.$$

由于 $D_0 = S^{n-1}$，每个 D_k 都包含于 S^{n-1}，且 $-S^{n-1} = S^{n-1}$，我们得到

$$D_k = S^{n-1}, \qquad \text{for every } k \geq 0.$$

固定 $u \in S^{n-1}$。对每个 $k \geq 1$，选取一个帽 $E \in A_{k-1}$ 和 $z \in E$，使得

$$z - e(E) = u.$$

存在 $p \in \mathrm{P}(E,\delta_k) \subset P_k$，满足

$$|p - z| \leq \delta_k.$$

由于 $e(E)$ $p \in P$，我们有

$$u_k = p - e(E) \in P - P \subset K - K.$$

此外，

$$|u_k - u| = |p - z| \leq \delta_k \to 0.$$

因此，每个单位向量都是 $K - K$ 中点的极限。$K - K$ 是紧集，因而是闭集。因此

$$S^{n-1} \subset K - K.$$

现在我们估计下盒计数维数。令 M_k 表示 A_k中的帽集数量。由于 P_k中的每个点都会产生一个新的帽集，因此我们有 $\#P_k \leq M_k$。

初始球面满足

$$M_1 \lesssim \delta_1^{-(n-1)}.$$

对于 $k \geq 2$，A_{k-1} 中的每个帽的半径都是 $2\delta_{k-1}$，因此它至多包含

$$C\left(\frac{\delta_{k-1}}{\delta_k}\right)^{n-1}$$

个彼此距离为 δ_k的点。因此

$$M_k \lesssim M_{k-1}\left(\frac{\delta_{k-1}}{\delta_k}\right)^{n-1}.$$

于是我们有

$$\#P_k \le M_k \lesssim \delta_k^{-(n-1)}. \tag{12}$$

我们估计下列集合的覆盖数

$$P = \bigcup_{j\ge 0} P_j = \left(\bigcup_{j=0}^{k} P_j\right) \bigcup P_{k+1} \bigcup \left(\bigcup_{j\ge k+2} P_j\right)$$

用边长为 $r_k = \delta_k^{\alpha}$ 的立方体进行覆盖，其中 $\alpha > 1$ 将在下文中选取。

我们通过计算前 k 代中的点来覆盖这些代，并利用 P_{k-1} 附近的聚簇来覆盖第 $k+1$ 代。

首先，我们解释为什么后面的代对于估计维数而言不那么重要。

根据该构造，我们有条件 (11)，这意味着 $\bigcup_{j\ge k+2} P_j$中的每个点都位于距离

$$\varepsilon_k = 2\sum_{i\ge k+1}\delta_i \le 4\delta_{k+1}$$

$\bigcup_{j=0}^{k+1} P_j$以内。因此，

$$P \subset \left(\bigcup_{j=0}^{k+1} P_j\right)^{(\varepsilon_k)}$$

δ_k的快速衰减意味着，对于任意固定的 α，

$$\frac{\varepsilon_k}{r_k} \simeq \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k^{\alpha}} \simeq \delta_k^{2k+1-\alpha} \longrightarrow 0, \text{ as } k \to \infty.$$

因此，当 k， $\varepsilon_k \le r_k$充分大时，我们有

$$\bigcup_{j=0}^{k+1} P_j \subset P \subset \left(\bigcup_{j=0}^{k+1} P_j\right)^{(r_k)}.$$

将每个覆盖立方体扩大一个固定倍数后，我们有

$$N_{r_k}(P) \simeq N_{r_k}\left(\bigcup_{j=0}^{k+1} P_j\right). \tag{13}$$

对于前 k代，我们首先通过对点进行计数，直接估计 N_{r_k}Ä$\bigcup_{j=1}^{k} P_j$ä。利用 (12) 以及 δ_j的快速衰减，

$$N_{r_k}\left(\bigcup_{j=0}^{k} P_j\right) \le \sum_{j=0}^{k}\#P_j \lesssim \sum_{j=1}^{k}\delta_j^{-(n-1)} \lesssim \delta_k^{-(n-1)}.$$

对于第 $k+1$代，回顾一下，(11) 给出

$$P_{k+1} \subset \bigcup_{p\in P_{k-1}} B(p, 2\delta_k).$$

每个球 $B(p,\ 2\delta_k) \subset \mathbb{R}^n$最多可以用

$$C_n\left(\frac{\delta_k}{r_k}\right)^n$$

个边长为 r_k 的立方体覆盖。因此，

$$N_{r_k}(P_{k+1}) \lesssim (\#P_{k-1}) \left(\frac{\delta_k}{r_k}\right)^n \lesssim \delta_{k-1}^{-(n-1)} \delta_k^{n(1-\alpha)}.$$

选择

$$\alpha = \frac{2n-1}{n}.$$

于是我们有

$$N_{r_k}(P) \simeq N_{r_k}\left(\bigcup_{j=1}^{k+1} P_j\right) \lesssim \delta_k^{-(n-1)} + \delta_{k-1}^{-(n-1)} \delta_k^{n(1-\alpha)} \lesssim \delta_{k-1}^{-(n-1)} \delta_k^{-(n-1)}. \tag{14}$$

最后，根据盒维数的定义，我们有

$$\underline{\dim}_B(K) = \underline{\dim}_B(P) \le \liminf_{k\to\infty} \frac{\log N_{r_k}(P)}{|\log r_k|} \le \liminf_{k\to\infty} \frac{\log \delta_{k-1}^{-(n-1)} + \log \delta_k^{-(n-1)}}{\left|\log \delta_k^{\frac{2n-1}{n}}\right|}. \tag{15}$$

由于 $\delta_k = 2^{-2^{k^2}}$，我们有

$$\frac{\log \delta_{k-1}^{-(n-1)}}{\left|\log \delta_k^{\frac{2n-1}{n}}\right|} = \frac{(n-1)2^{(k-1)^2}}{\frac{2n-1}{n}2^{k^2}} \longrightarrow 0, \text{ as } k \to \infty,$$

and

$$\frac{\log \delta_k^{-(n-1)}}{\left|\log \delta_k^{\frac{2n-1}{n}}\right|} = \frac{(n-1)2^{k^2}}{\frac{2n-1}{n}2^{k^2}} = \frac{n(n-1)}{2n-1}$$

因此，

$$\underline{\dim}_B(K) \le \frac{n(n-1)}{2n-1}.$$

至此，构造与证明均已完成。 □

总之，$^{n}{}_{(n-1)\,2n-1}$ 是满足 $S^{n-1} \subset K - K$ 的紧集 $K \subset \mathbb{R}^n$ 的下盒维数的最佳下界。□

注 6. 同一构造还给出

$$\dim_H(K) = 0.$$

回顾一下，

$$P = \bigcup_{j\ge 0} P_j, \qquad K = \overline{P}.$$

每个 P_j 都是有限的，因此 P 是可数集，且豪斯多夫维数为零。接下来只需证明 $\dim_H(K \setminus P) = 0$。

固定 $k \ge 2$。反复应用聚类性质

$$P_{j+1} \subset P_{j-1}^{(2\delta_j)}$$

表明各代 P_{k+1}、P_{k+3}、……接近于 P_{k-1}，也就是说，

$$\bigcup_{\ell\ge 0} P_{k+1+2\ell} \subset P_{k-1}^{(a_k)}, \qquad a_k = 2\sum_{\ell\ge 0} \delta_{k+2\ell} \le 4\delta_k.$$

类似地，各代 $P_{k+2}, P_{k+4}, \ldots$ 都接近 P_k，也就是说

$$\bigcup_{\ell\ge 0} P_{k+2+2\ell} \subset P_k^{(b_k)}, \qquad b_k = 2\sum_{\ell\ge 0} \delta_{k+1+2\ell} \le 4\delta_{k+1}.$$

因此我们有

$$\bigcup_{j\geq k+1} P_j \subset P_{k-1}^{(4\delta_k)} \cup P_k^{(4\delta_{k+1})}. \tag{16}$$

我们声称

$$K \setminus P \subset \overline{\bigcup_{j\geq k+1} P_j}.$$

事实上，对于任意 $x \in K \setminus P$和 $k \geq 2$，由于 $x \in P$，存在一个收敛于 x的点列 $x_m \in P$。由于集合 $\bigcup_{j=0}^{k} P_j$是有限的且 $x \notin \bigcup_{j=0}^{k} P_j$，我们有

$$d_k := \min_{y\in\bigcup_{j=0}^{k} P_j} |x-y| > 0.$$

因此，对于所有充分大的 m，

$$|x_m - x| < d_k \quad \Longrightarrow \quad x_m \in P \setminus \bigcup_{j=0}^{k} P_j = \bigcup_{j\geq k+1} P_j.$$

由此可得

$$K \setminus P \subset \overline{\bigcup_{j\geq k+1} P_j}.$$

在 (16) 中取闭包，我们得到

$$K \setminus P \subset \left(\bigcup_{p\in P_{k-1}} B(p, 4\delta_k) \right) \bigcup \left(\bigcup_{p\in P_k} B(p, 4\delta_{k+1}) \right).$$

回顾$\#P_k \lesssim \delta_k^{-(n-1)}$ 以及(1)中的定义。对于任意 $\alpha > 0$，

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{8\delta_k}(K \setminus P) \lesssim \#P_{k-1}\delta_k^{\alpha} + \#P_k\delta_{k+1}^{\alpha} \lesssim \delta_{k-1}^{-(n-1)}\delta_k^{\alpha} + \delta_k^{-(n-1)}\delta_{k+1}^{\alpha}$$

对于任意 $\alpha > 0$，由于

$$\lim_{k\to\infty} \delta_k^{-(n-1)}\delta_{k+1}^{\alpha} = \infty,$$

我们得出

$$\dim_H(K) = 0.$$

参考文献

[1] Antonio Córdoba，*Kakeya*极大函数与球面求和乘子，《美国数学杂志》，99(1):1–22，1977。[2] Antonio Córdoba，胖针问题，《伦敦数学会公报》，25: 81-82，1993。[3] Antonio Córdoba，卷曲*Kakeya*：包含多个方向的圆或线段的集合的豪斯多夫维数，《数学进展》，第505卷，2026年。[4] 伯努瓦·B·曼德尔布罗特，《自然的分形几何》，W. H. Free man，旧金山，1982。[5] 肯尼斯·法尔科纳，《分形几何：数学基础与应用》，威利，奇切斯特，1990。[6] Pablo Shmerkin、于涵，关于每个方向上都包含一个单位距离的集合，《离散分析》，https://doi.org/10.19086/da.22058，2021。[7] 王宏、Joshua Zahl，凸集并集的体积估计，以及三维中的*Kakeya*集猜想，https://arxiv.org/abs/2502.17655v1，2025。