arXiv:2611.29806v1 [math.CA] 22 Nov 2026

关于四维 Bourgain–Rudnick 特征函数限制算子猜想

CIPRIAN DEMETER

摘要。我们证明了四维平坦环面上的特征函数在紧抛物面 $\mathbb{P}^3$ 上满足一个一致上界 L^2 。本文的主要新意在于使用傅里叶限制估计。我们将球面格点统计解释为满足所需强度的非集中不等式，从而可以应用 Du–Zhang 分形限制定理。我们将他们的结果应用于 $\mathbb{P}^3$的二维截面。文末还讨论了其他可能的推广。

1. 引言与证明概述

Bourgain 和 Rudnick 提出了如下 L^2 限制不等式[1, 猜想 1.9, （1.26）]。他们还在对 Σ作出曲率假设的条件下提出了一个反向不等式。本文不讨论该不等式。对于 $R \geq 1$ 和 $n \geq 2$，记

$$\mathcal{E}_R^{(n)} = \mathbb{Z}^n \cap RS^{n-1}, \qquad \mathrm{e}(t) = e^{2\pi i t}.$$

猜想 1.1 (Bourgain–Rudnick)。对于每个 $n \geq 2$ ，以及任意固定的紧实解析超曲面 $\Sigma \subset \mathbb{T}^n$ 及其曲面测度 $d\sigma_\Sigma$，存在一个常数 C_Σ ，使得每个环面拉普拉斯特征函数

$$u(X) = \sum_{k \in \mathcal{E}_R^{(n)}} c_k \mathrm{e}(k \cdot X)$$

都满足

$$\|u\|_{L^2(\Sigma)} \leq C_\Sigma \|u\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}. \tag{1.1}$$

该常数与 R 无关。

对 Σ 不作曲率假设。对 Σ 的依赖不可避免，因为将 (1.1) 应用于单个傅里叶模态可得 $C_\Sigma \geq (\sigma_\Sigma(\Sigma))^{1/2}$。

在 [1] Bourgain–Rudnick证明了二维和三维情形下，对于具有非零高斯曲率（等价于第二基本形式非退化）的实解析超曲面，不等式（1.1）成立。他们还指出，在没有曲率的情况下，即使 $n = 2$ 和 Σ 是测地线段，所猜想的不等式也会带来与小帽中格点分布相关的重大额外困难。另一方面，曲率

作者获得了 NSF 项目 DMS-2349828 的部分资助。1

使得人们可以使用较弱的算术输入。他们通过$\widehat{\ }$驻相展开的详细振荡结构来利用曲率 $d\sigma_\Sigma$。

在三维中，Bourgain–Rudnick 将 T^*T 方法应用于限制算子。驻相法将所得矩阵元素$\widehat{d\sigma_\Sigma}(k-l)$表示为带有 $|k-l|^{-1}$ 衰减的振荡项，误差项则更小。算术帽估计控制相近的频率对及这些误差，而双重指数和的界则利用较远频率对之间的抵消。

(1.1) 的等价对偶表述为

$$\left(\sum_{k\in\mathcal{E}_R^{(n)}} |\widehat{g\,d\sigma_\Sigma}(k)|^2\right)^{1/2} \lesssim_\Sigma \|g\|_{L^2(\Sigma,d\sigma_\Sigma)}. \tag{1.2}$$

其中 $g\in L^2(\Sigma,\ d\sigma_\Sigma)$ 和 $\widehat{g\,d\sigma_\Sigma}(\xi) = \int_\Sigma g(X)\mathrm{e}(-\xi\cdot X)\,d\sigma_\Sigma(X)$。

他们在第 11 节提取了频率点所用的统计性质。他们的论证证明，对满足这些统计性质的任意点集，(1.2) 均成立，其中以 Λ_R 取代 RS^2 上的 $\mathcal{E}_R^{(3)}$。整数坐标仅在验证所需统计性质时才会用到。特别地，他们的结果适用于由 $R^{1/2}$-分离点构成、位于 RS^2 上的理想化模型 $\mathcal{E}_R^{(3)}$，因为此时每个帽上的所需上界（事实上强得多）显然成立。该分离条件 $R^{1/2}$ 允许包含 $\sim R$ 个点，这与典型半径下 $\#\mathcal{E}_R^{(3)}$ 的预期数量级相符。一般而言，RS^{n-1} 上理想化模型的分离条件为 $R^{\frac{1}{n-1}}$。在第 11 节中，他们证明当 $n\geq 8$ 时，该模型不满足 (1.2)，即使 Σ 本身是 S^{n-1}。

1.1. 新定理。 设 $\mathbb{T}^4=\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4$ 带有归一化 Haar 测度，并省略上标，记为

$$\mathcal{E}_R = \mathbb{Z}^4\cap RS^3.$$

$-\Delta$ 的特征值为 $4\pi^2R^2$ 的特征函数具有如下形式

$$u(X)=\sum_{k\in\mathcal{E}_R} c_k\mathrm{e}(k\cdot X), \qquad \|u\|_{L^2(\mathbb{T}^4)}^2=\sum_{k\in\mathcal{E}_R}|c_k|^2. \tag{1.3}$$

我们在物理抛物面上使用其周期提升

$$\mathbb{P}^3=\{X(x): x\in[-1,1]^3\}, \qquad X(x)=(x,|x|^2/2).$$

我们将证明以下结果。

定理 1.2. 存在一个常数 C，与 R 及系数无关，使得

$$\left(\int_{[-1,1]^3}|u(X(x))|^2\,dx\right)^{1/2}\leq C\|u\|_{L^2(\mathbb{T}^4)}. \tag{1.4}$$

定理 1.2 给出了四维情况下 $\mathbb{P}^3$的上界 (1.1)。事实上，其曲面测度为 $d\sigma_{\mathbb{P}^3} = \sqrt{1+|x|^2}\,dx$，其密度在 $[-1,1]^3$上介于 1 和 2 之间。

Bourgain–Rudnick解析工具箱将 $n=3$ 的驻相展开与经典的 $\widehat{d\sigma_\Sigma}$ 方法相结合，其中包括 Schur 检验，以及相当引人入胜的、基于Plancherel的振荡和估计 L^2 。

我们的论证在方法上的主要区别，是使用带算子 T_a ，并借助现代的加权傅里叶限制估计 ，为每个局部化算子取得增益。更准确地说，我们将 Du–Zhang [3] 关于两个频率变量的分形 L^2 限制估计作为黑箱，应用于 $\mathbb{P}^3$ 的二维抛物面切片。他们定理的证明整合了 ℓ^2 解耦定理 [13], 、宽窄分析，以及基于多线性Kakeya的多线性精细Strichartz估计。我们能够进行这种应用，是因为我们将（频率侧的）格点帽统计解释为（空间侧的）多尺度非集中不等式，而这正是 Du–Zhang 定理所需的。这是通过对偶性实现的。与 Bourgain–Rudnick 不同，我们从不显式使用 $\widehat{\ }$ 的衰减或 $d\sigma_\Sigma$ 的振荡轮廓。

与 Bourgain–Rudnick 的方法一样，我们的分析论证不需要格点结构。它适用于任何满足 (1.6) 的有限 $\Lambda_R \subset RS^3$ ，其中 $\mathcal{E}_R$ 由 Λ_R 替代。整数坐标在证明这些计数结果以及环面解释中发挥作用。(1.6) 的复杂度大致与 Bourgain–Rudnick 所使用的估计相当。

我们针对 $\Sigma = \mathbb{P}^3$ 给出论证。很方便的是，其竖直切片是二维抛物面，因此 Du–Zhang 定理可以直接应用。见 (1.7)。对于 $\Sigma = S^3$，相应的切片是二维球面，Kim 的推广 [4] 提供了类似的加权估计。相同的数论输入以及本文的总体方法表明，可以将这一思路推广到具有正定第二基本形式的光滑超曲面。Kim 的加权解耦定理 [4] 将 Du–Zhang 定理推广到了严格凸超曲面。然而，对一般的正定超曲面进行切片会引入额外的相位，这些相位非线性地依赖于投影频率，并且沿切片发生变化。由此得到的算子是傅里叶积分型的变相位振荡积分算子，Kim 的固定曲面估计无法直接适用于这些算子。需要将基本的解耦与重标度论证调整到这些相位，同时保留其对两个格点帽统计量的依赖。这样的修改或许可以利用本文所发展的算术估计以及局部化与求和策略，处理正定情形。

对于一般非退化超曲面，第二基本形式是可逆的，但可能具有混合符号。此时，投影切片可能具有不定曲率，甚至退化曲率，因此 Kim 定理中的椭圆性条件不再适用。这使得无法将本文的论证直接推广到这一情形。

零曲率情形似乎更具挑战性。作为比较，Zhang–Zhu [5, 定理 1.3(i)] 在 $\mathbb{T}^4$ 中获得了全测地超曲面片的 $R^{1/8+\varepsilon}$ 限制估计，并且对其方向是一致的。

1.2. 证明的主要步骤。 取一个径向的 $\eta \in C_c^\infty(B(0,\ 2))$，满足$0 \le \eta \le 1$，并在 $[-1,1]^3$ 上等于 1，定义

$$T : \ell^2(\mathcal{E}_R) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^3, dx), \qquad Tc(x) = \eta(x) \sum_{k \in \mathcal{E}_R} c_k \mathrm{e}(k \cdot X(x)). \tag{1.5}$$

仿射法向量 $N(x) = (x,\ -1)$ 将便于进行带分解。下面介绍我们论证的主要步骤。

帽上格点的上界。第 2 节证明，对于 $1 \le D \le R^{2/3}$，

$$\begin{aligned} \#(\mathcal{E}_R \cap B(z,r)) &\lesssim_\varepsilon D^\varepsilon r^{7/4} \quad (1 \le r \le CD), \\ \#(\mathcal{E}_R \cap B(z, C\sqrt{D})) &\lesssim_\varepsilon D^{1/2+\varepsilon}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

特别地，可以很容易看出，具有 $R^{1/3}$分离点的 RS^3 理想化模型满足这些统计性质。证明使用了二次同余、行列式界、因子估计以及闵可夫斯基第二定理。

主要的解析工具。第 3 节陈述 Du–Zhang 的结果，并证明其离散限制推论——命题 3.2。

法向带与精确切片。第 4 节将 T分解为带算子

$$T = T_0 + \sum_{a \ge a_0} (T_{a,+} + T_{a,-})$$

$$T_a c(x) = \eta(x) \sum_{k \in \mathcal{E}_R} c_k \mathrm{e}(k \cdot X(x)) \chi\Big(\frac{N(x) \cdot k}{Ra}\Big)$$

一直细化到 $a_0 = R^{-1/3}$。我们进一步将 T_a 分解为局部化算子

$$T_a = \sum_j T_a P_{Q_j},$$

其中 Q_j 是划分 $\mathbb{R}^4$的立方体，边长为 $D = a^{-2}$。

P_Q的作用如下。若 $(T_a P_Q c)(s,\ y) \ne 0$ 对某个系数族c成立，那么，经过依赖于 Q的水平旋转后，坐标 s 落在一个长度为 $O(a)$的公共区间 I 内。我们对每个切片进行一致估计，然后对 I积分。无需利用 s 中的抵消。下面给出一些细节。

傅里叶反演将频带截断函数表示为相位平移的平均。然后我们使用恒等式

$$X(x) + hN(x) = ((1+h)x, |x|^2/2 - h). \tag{1.7}$$

固定 x 的 s 坐标后会留下一个二维抛物面。这是证明中使用 $\Sigma = \mathbb{P}^3$ 会使问题更容易处理的部分。对于每个这样的切片，我们应用命题 3.2 中的离散分形估计。频率点是投影到 $\mathbb{R}^3$ 上的、位于一个固定帽上的格点。(1.6) 为离散限制算子提供了非集中假设

结果。在 s 中使用 Fubini，并结合切片估计，可以得到 $T_a P_Q$的算子范数的一个良好上界。

Schur 检验与最终求和。第 5 节通过$\|T_a\| = \|T_a^* T_a\|^{1/2}$的分解估计 T_a 的范数，

$$T_a^* T_a = \sum_{i,j} (T_a P_{Q_i})^* (T_a P_{Q_j}) = \sum_{i,j} K_{ij},$$

这两个界

$$\|K_{ij}\| \lesssim_L a^{1/16} \min\{1, a^{-6}(1+|i-j|)^{-L}\},$$

并最终应用 Schur 检验。第一个界由切片和 Du–Zhang 定理得到。第二个界由核衰减得到，而核衰减通过反复分部积分证明。

注 1.3 ($n = 3$)。 在三维中，可以利用法向带，以更简单的解析方法证明 Bourgain–Rudnick 对非退化曲面的统一上界 (1.1)。在这种情况下，无需应用 Du–Zhang。

注 1.4 ($n \geq 5$)。 同一解析框架也可用于证明五维情形下的 (1.1)，其中 $\mathbb{P}^4$，但这需要对格点集进行复杂得多的数论分析。新特点在于，这一输入迫使 RS^4 上每个足够密集的帽中的点都落在某个仿射超平面内。切片之后，它们的贡献可由我们$n = 4$ 结果的一个版本加以控制。Du–Zhang（这次针对三维抛物面切片）则处理其余较不密集的帽，与我们证明 $n = 4$ 时的论证相同。

这可以看作宽窄分解论证的一种算术类比，其中窄部分通过降维处理，例如低维解耦。迫使点集中于低维结构的额外结构性条件，关键依赖于格点结构，因为理想化模型缺乏这种刚性。另一方面，五维中理想化的 $R^{1/4}$-分离模型已经具有足够小的帽计数，也可以通过解析论证处理。这与前述 Bourgain 和 Rudnick 的构造相符；当 $n \geq 8$ 时，该构造为理想化模型给出了反例。

在六维空间中，拥挤的五维截面以及临界帽占据率下的弥散贡献带来了更多障碍。我们的尝试尚未解决这些困难，目前也无法通过这一方法找到通向一般维数情形下该猜想的途径。

1.3.三维中的傅里叶衰减。 带有 R^ε 损失的初等三维类比说明了仅凭傅里叶衰减能够达到什么效果。若 $\Sigma \subset \mathbb{T}^3$ 是一个固定的、具有非零高斯曲率的紧致光滑曲面，那么每个频率空间为 R 的特征函数都满足

$$\|u\|_{L^2(\Sigma)} \lesssim_{\Sigma,\varepsilon} R^\varepsilon \|u\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \qquad (\varepsilon > 0). \tag{1.8}$$

Bourgain–Rudnick 在引言中指出了这个初等界，随后解释了为实现一致性所需的额外抵消，见第 1 节命题 1.4] 之前的部分 [1, 。

我们给出这一论证，以说明四维中的额外困难，并为带分解提供动机。在三维中，初等估计已经将问题归结为消除任意小的幂损失。

令 $\mathcal{E}_R^{(3)} = \mathbb{Z}^3 \cap RS^2$，并假设 $R \geq 2$。唯一的算术输入是

$$\#(\mathcal{E}_R^{(3)} \cap B(z,r)) \lesssim_\delta R^\delta r \qquad (r \geq 1,\ \delta > 0). \tag{1.9}$$

事实上，第一个坐标在球中取 $O(r)$ 个整数值。对于每个值 $k_1 = m$，另外两个坐标满足 $k_2^2 + k_3^2 = R^2 - m^2$。当 $1 \leq N \leq R^2$ 时，两平方和公式和因子界给出 $r_2(N) \leq 4\tau(N) \lesssim_\delta R^\delta$；当 $N = 0$ 时，只有一个点。对 m 求和即可证明 (1.9)。

经过有限次光滑局部化，令 $d\mu$ 为 Σ 的一个片上的非负光滑曲面密度。驻相法给出

$$|\widehat{\mu}(\xi)| \lesssim_\Sigma (1+|\xi|)^{-1}.$$

对于 $u(x) = \sum_{k \in \mathcal{E}_R^{(3)}} c_k \mathbf{e}(k \cdot x)$，展开平方得到格拉姆型

$$\int |u|^2 \, d\mu = \sum_{k,l \in \mathcal{E}_R^{(3)}} c_k \overline{c_l} \, \widehat{\mu}(l-k).$$

由于不同格点之间的距离至少为 1，二进壳层并给出 (1.9)

$$\begin{aligned} \sup_{k \in \mathcal{E}_R^{(3)}} \sum_{l \in \mathcal{E}_R^{(3)}} |\widehat{\mu}(l-k)| &\lesssim 1 + \sup_k \sum_{j=0}^{\lceil \log_2(2R) \rceil} 2^{-j} \#(\mathcal{E}_R^{(3)} \cap B(k, 2^{j+1})) \\ &\lesssim_\delta R^\delta \log(2R). \end{aligned}$$

由对称性可得相同的列界。因此，标量 Schur（下文引理 5.2）给出

$$\int |u|^2 \, d\mu \lesssim_{\Sigma,\delta} R^\delta \log(2R) \sum_k |c_k|^2.$$

令 $\delta > 0$ 相对于 ε 足够小，吸收对数项，并取平方根，即可证明 (1.8)。

在四维中，同样的取绝对值的格拉姆–Schur 论证会产生 $R^{1/4}$ 损失。

1.4. 该方法的先例。 在研究大球面上的傅里叶延拓及相关振荡积分算子时，Bennett–Seeger [12,第 4–5] 节在模型情形中，将折叠附近的二进局部化与输入切片上的低维限制估计结合起来。这为结合带与切片提供了方法论上的先例。

法向分量分解在半经典限制问题中也有先例。对于半经典参数 h，Tacy [6, 命题 3.1]使用正、负法向带以及一个中央 $h^{1/3}$ 区域。另见 Galkowski [7, 第 3]节。我们的显式傅里叶截断函数将这类分解与算术球冠统计以及精确切片上的 Du–Zhang 估计结合起来。

通过精心选择的整数法向切片进行算术帽计数，已经出现在 Bourgain–Rudnick [1, 引理 2.3 和第 2 节6]中。下面使用的逐次极小值论证遵循与 Zhang–Zhu [5, 命题 3.4]相同的整数线性形式切片原理：选取宽度最小的形式，并固定其整数层，从而得到仿射二维平面。这里我们利用球面球冠的窄法向宽度和一致局部圆计数，因此最终损失仅取决于局部半径。第 2.1 节的内容源于已知结果：Oravecz–Rudnick–Wigman [8, (7.5)]给出了二次计数，Huang–Zhang [9, 引理 4]给出了圆计数；半径为 r 内的三个不同格点 O迫使它们所在圆的半径为 r^3(r^3)。为完整起见，我们给出初等证明。

估计式 (2.4) 也可由 Balko–Cibulka–Valtr 的仿射覆盖定理 [10, 定理 5],闵可夫斯基第二定理以及一致的局部圆界简短推出。对于一个满维帽，覆盖定理给出仿射二维平面，闵可夫斯基不等式界定其数量，而局部圆界将损失控制在 r，且与 R 无关。据我们所知，尚无文献明确记录过损失仅依赖于局部半径的这一结果。

2. 算术球冠估计

我们证明加权定理所需的两个计数结果。一个初等的二次同余论证可用于计数圆上的点，而两个宽度较小的整数线性形式可将球冠切片中的满维帽切分为圆。帽的法向宽度较薄，因此切片数量较少。

2.1. 损失仅依赖于局部半径的圆计数。 Oravecz– Rudnick–Wigman [8, (7.5)] 给出了下述二次计数的一个更强形式。我们给出一个初等的同余证明。

引理2.1 （初等二次计数）。 对于正整数 $d,\ N,$

$$\#\{(X,Y)\in\mathbb{Z}^2 : Y^2+dX^2=N\}\le 16\tau(N)^2\lesssim_\delta N^\delta \qquad (\delta>0),$$

关于 d 一致成立。这里 τ（N）表示 N 的正因数个数。

证明。将 $d=s^2d_0$ 写成 d_0 无平方因子的形式。单射 $(X,Y)\mapsto(sX,Y)$ 可归结为无平方因子的 d。将 $(X,Y)=g(x,y)$ 写成 $\gcd(x,y)=1$，可得 $g^2\mid N$ 以及 $y^2+dx^2=n:=N/g^2$。对于 $n=1$，至多有四个解。对于 $n>1$，$\gcd(x,n)=1$，因为若有素数同时整除 x 和 n，它就会整除 y。因此，每个本原解唯一确定 $t=yx^{-1}$ (模 n)，其中 $t^2\equiv -d$(模 n)。

可能的剩余类 t 至多有 $4\cdot 2^{\omega(n)}$ 个，其中 $\omega(n)$ 表示 n 的不同素因子个数。若 $p\mid \gcd(d,n)$，则由本原性可得 $p\nmid x, p\mid y$；无平方因子性要求 p 恰好整除 n 一次，且模 p 的唯一根为 0。对于奇数 $p\nmid d$，模 p^h 至多有两个根：两个根的平方之差可分解为 $(t-u)(t+u)$，且至多一个因子能被 p 整除。对于 d 为奇数的 2 的幂，至多有四个根，因为 $t-u, t+u$ 中有一个恰好含有一个因子 2。由中国剩余定理可得所述上界。

每个剩余类至多对应四个本原解。对于具有相同剩余类的两个解，$xy'-x'y$ 是 n的倍数。向量 $(y,\ \sqrt{d}\,x)$ 和 $(y',\ \sqrt{d}\,x')$ 的长度均为 $\sqrt{n}$，因此

$$|xy'-x'y|\le n/\sqrt{d}.$$

如果 $d>1$，则该行列式为零，两个向量仅相差一个符号。如果$d=1$，其可能取值为 $0,\ \pm n$；相对于一个固定向量，另一个向量要么与其平行，要么与其垂直，因此至多有四种选择。因此，本原解的数量至多为 $16\cdot 2^{\omega(n)}\le 16\tau(n)$。对 $g^2\mid N$求和可得 $16\tau(N)^2$。标准的因子估计 $\tau(N)\lesssim_\rho N^\rho$，其中 $2\rho\le\delta$，从而完成证明。□

下面是 Huang–Zhang [9, 引理 4], 的一个局部形式，正如第 1.4 节所述。我们再次给出直接证明。

引理 2.2 (一致局部圆计数)。对于半径为 $r\ge 1$ 的球 B 中、位于 $\mathbb{R}^4$ 内仿射二维平面上的圆 C，以下结论一致成立：

$$\#(C\cap B\cap\mathbb{Z}^4)\lesssim_\varepsilon r^\varepsilon. \tag{2.1}$$

证明。如果至多有两个点，则结论显然成立；这也涵盖了点以及直线与球面的交点。否则，取 $C\cap B$ 中三个互不相同的整数点 $p_0,\ p_0+u,\ p_0+v$。它们不共线，且$|u|,\ |v|\le 2r$。将 p_0 平移至原点后，相对圆心 w 位于 u, v 的张成空间内，并满足 $2w\cdot u=|u|^2, 2w\cdot v=|v|^2$。选取坐标 $i,\ j$，使得 $\Delta=u_iv_j-u_jv_i\ne 0$，并令

$$a=v_ju-u_jv,\qquad b=-v_iu+u_iv.$$

平移后的圆上的一个整数点 z 由 $s=z_i,\ t=z_j$ 确定，因为 $z=(sa+tb)/\Delta$。方程 $|z|^2-2w\cdot z=0$ 化为

$$As^2+2Bst+Ct^2+Ds+Et=0,\qquad A>0,\quad d:=AC-B^2>0.$$

乘以 Δ^2后，这些系数为 $A=|a|^2, B=a\cdot b, C=|b|^2, D=-2\Delta w\cdot a$，以及 $E=-2\Delta w\cdot b$。它们都是大小为 $O(r^{C_0})$ 的整数，其中 C_0 为绝对常数：特别地，$2w\cdot a=v_j|u|^2-u_j|v|^2$，$b$ 也类似。配方得到一个到.....的单射

$$X=2As+2Bt+D,\quad Y=2dt+AE-BD,$$
$$Y^2+dX^2=N:=dD^2+(AE-BD)^2.$$

d 和 N 的规模都是关于 r 的多项式规模。若 $N = 0$，则至多有一个解。否则，引理2.1给出 $O_\delta(N^\delta)$ 种可能性。选择 δ 相对于 ε 足够小，即可得到 (2.1)。□

将三个相近的整数点作为锚点的意义在于，系数关于 r 呈多项式依赖，即使原始圆的半径非常大，或圆远离原点也是如此。因此，在此引理中不会产生涉及 R 的损失。

2.2. **两个切片方向和两种格点计数**。

命题 2.3（两种格点计数）。 固定 $C \geq 1$。一致地，对于 $1 \leq D \leq R^{2/3}$，

$$\#(\mathcal{E}_R \cap B(z,r)) \lesssim_{\varepsilon,C} D^{\varepsilon} r^{7/4}, \qquad 1 \leq r \leq CD, \tag{2.2}$$

$$\#(\mathcal{E}_R \cap B(z, C\sqrt{D})) \lesssim_{\varepsilon,C} D^{1/2+\varepsilon}. \tag{2.3}$$

这些估计对每个中心 z 以及频率的所有子集都成立。

证明。 我们首先证明帽集界

$$\#(\mathcal{E}_R \cap B(z,r)) \lesssim_{\varepsilon} r^{\varepsilon}\left(r + \frac{r^{5/2}}{\sqrt{R}}\right) \qquad (1 \leq r \leq 2R). \tag{2.4}$$

设 $A = \mathcal{E}_R \cap B(z,\ r)$，并在 A 非空时选取 $k_0 \in A$。所有差向量$k - k_0$ 的长度都不超过 $2r$。首先假设 A 的仿射维数为四。由 $\nu_0 = k_0/R$，恒等式

$$\nu_0 \cdot (k - k_0) = -\frac{|k - k_0|^2}{2R}$$

将这些差向量置于一个对称盒 K 中，该盒有三个切向宽度Cr 和一个法向宽度 Cr^2/R。特别地，

$$V := \mathrm{vol}_4(K) \asymp r^5/R. \tag{2.5}$$

定义宽度和极体如下：

$$w(\xi) = \sup_{z \in K} |\xi \cdot z|, \qquad K^\circ = \{\xi : w(\xi) \leq 1\}.$$

第 j 个逐次极小值是使得 tK° 包含 j 个线性无关整数向量的最小 $t > 0$。闵可夫斯基第二定理 [2,（第 VIII 章，定理 V）] 将这些极小值的乘积限制在 $2^4/\mathrm{vol}_4(K^\circ)$ 以内。由于对于盒子有 $\mathrm{vol}_4(K^\circ) \asymp V^{-1}$，因此存在线性无关的 $\xi_j \in \mathbb{Z}^4$，其宽度按序排列为

$$w_1 \leq w_2 \leq w_3 \leq w_4, \qquad \prod_{j=1}^{4} w_j \lesssim V.$$

每个非零整数向量的宽度至少为一。否则，它与张成差向量 $k - k_0$ 的所有整数配对都会为零，这将与这些向量的线性无关性相矛盾。因此，

$$1 \leq w_1 \leq w_2, \qquad w_1 w_2 \lesssim V^{1/2}. \tag{2.6}$$

沿两个整数层 A 对其进行切片

$$\xi_1 \cdot (k-k_0) = h_1, \qquad \xi_2 \cdot (k-k_0) = h_2, \qquad h_1, h_2 \in \mathbb{Z}.$$

共有 $O(w_1 w_2)$ 对可能的层级组合。每个公共层级都是一个仿射二维平面；它与 RS^3 的交集是一个圆、一个点，或为空。在原半径为 r 的球内应用引理 2.2。切片向量的系数可能很大；圆引理与这些系数无关，因此不会造成额外损失。由方程 (2.5)–(2.6) 可得

$$\#A \lesssim_\varepsilon r^\varepsilon V^{1/2} \lesssim_\varepsilon r^\varepsilon r^{5/2} R^{-1/2}.$$

如果 A 的仿射维数为三，则选择一个在其仿射包上不恒定的坐标 k_j。由于 A 位于半径为 r 的球内，坐标 k_j 在 A 上只取 $O(r)$ 个不同的整数值。每个相应的超平面 $x_j = m$ 都与 A 的仿射包相交成一个仿射二维平面。圆引理给出 $\#A \lesssim_\varepsilon r^{1+\varepsilon}$。对于仿射维数至多为二的情形，圆引理可直接应用（或者球面与仿射包的交集至多包含两个点）。结合这些情形即可证明 (2.4)。

最后，$R \geq D^{3/2}$ 给出

$$\frac{r^{5/2}}{\sqrt{R}} \lesssim_C r^{7/4} \quad (1 \leq r \leq CD), \qquad \frac{(C\sqrt{D})^{5/2}}{\sqrt{R}} \lesssim_C D^{1/2}.$$

将这些代入（2.4），并通过选取 δ 足够小，将 r^δ 吸收到 D^ε 中。这就证明了两个断言。固定半径扩张和有界的 R 只会改变常数；取子集时计数会减少。□

3. Du–Zhang 与离散限制估计

我们陈述加权延拓定理，并通过一个简短的平滑恒等式，将积分转化为点采样。取伴随算子可得到在一个固定抛物面 $\mathbb{P}^2$上的离散估计。

3.1. **加权估计**。定义

$$Z(y) = (y_1, y_2, |y|^2/2), \qquad Ef(p) = \int_{[-2,2]^2} f(y) \mathrm{e}(-p \cdot Z(y))\, dy.$$

设 $D \geq 2$，并设 $Y \subset B(0,\ CD) \subset \mathbb{R}^3$ 是来自固定晶格网格的若干个互不相同的单位立方体的并。假设对于 $1 \leq \alpha \leq 3$,

$$|Y \cap B(z,r)| \lesssim \gamma r^\alpha \quad (1 \leq r \leq CD), \qquad |Y \cap B(z, C_1\sqrt{D})| \lesssim \lambda. \tag{3.1}$$

对于非空的 Y，取 $\gamma,\ \lambda \geq 1$。固定半径扩张只会改变常数。

定理 3.1 (Du–Zhang, [3, 定理 1.6])。 在 (3.1)的条件下，对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\|Ef\|^2_{L^2(Y)} \lesssim_{\varepsilon,\alpha,C,C_1} D^{\alpha/6+\varepsilon} \gamma^{1/3} \lambda^{1/3} \|f\|_2^2. \tag{3.2}$$

3.2. **采样与对偶性**。 我们将用到以下离散推论。

命题 3.2 （离散限制估计）。 设 $A \subset B(0, CD) \subset \mathbb{R}^3$为有限集。假设对每个 $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} \#(A \cap B(z,r)) &\lesssim_\delta D^\delta r^{7/4} \quad (1 \le r \le CD), \\ \#(A \cap B(z, C_1\sqrt{D})) &\lesssim_\delta D^{1/2+\delta}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Then

$$\int_{[-2,2]^2} \left| \sum_{p \in A} d_p \mathrm{e}(p \cdot Z(y)) \right|^2 dy \lesssim D^{15/32} \sum_{p \in A} |d_p|^2. \tag{3.4}$$

A 中的点不必具有整数坐标。

命题 3.2 体现了原问题两侧从 $\mathbb{R}^4$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的约化。在空间上，沿竖直超平面对 $\mathbb{P}^3$ 进行切片，可得到二维抛物面，而 Fubini 定理将各切片估计合并起来。在频率空间中，我们将 RS^3 小帽内的球面格点投影到$\mathbb{R}^3$上。这些投影经过受控的仿射变换后，构成 A。

证明。 设 $S_A\colon \ell^2(A) \to L^2([-2,2]^2, dy)$ 表示左侧的指数和算子。于是

$$(S_A^* f)(p) = Ef(p),$$

并且 $\|S_A\| = \|S_A^*\|$。取一个定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的非负光滑 w ，积分为一，且支集包含于一个足够小的固定球内。其傅里叶变换$\widehat{w}(z) = \int w(v)\mathrm{e}(-v\cdot z)\,dv$满足 $|\widehat{w}(Z(y))| \ge 1/2$，其中 $y \in [-2,2]^2$。对于$g(y) = f(y)/\widehat{w}(Z(y))$，由 Fubini 定理可得

$$Ef(p) = \int w(v) Eg(p+v)\,dv, \qquad \|g\|_2 \le 2\|f\|_2.$$

式 (3.3) 在半径为一的情形下，给出了覆盖任意一点的、以 A 为中心的小球数量上界 $O_\delta(D^\delta)$。因此，对前一个恒等式应用柯西–施瓦茨不等式可得

$$\sum_{p \in A} |Ef(p)|^2 \lesssim_\delta D^\delta \int_Y |Eg(z)|^2\,dz, \tag{3.5}$$

其中 Y 是与以 A 为中心的小球相交的单位立方体的并集。每个点至多属于有界多个立方体，因此由式 (3.3) 可得式 (3.1)，其中 $\alpha = 7/4$、 $\gamma \lesssim_\delta D^\delta$ 和 $\lambda \lesssim_\delta D^{1/2+\delta}$。Du–Zhang 的估计带有损失 D^δ，将式 (3.5) 上界为

$$D^\delta D^{7/24+\delta} D^{\delta/3} D^{1/6+\delta/3} \|f\|_2^2 = D^{11/24+8\delta/3}\|f\|_2^2.$$

选取 $\delta = 1/256$；于是 $11/24 + 8\delta/3 = 15/32$。取伴随算子即可证明该断言。这个固定指数留下了下文所需的正间隔 $1/2 - 15/32 = 1/32$□

4. 法向带与精确抛物面切片

我们将频率空间限制在频率球面 RS^3上的一个帽内。证明法向带将物理抛物面$\mathbb{P}^3$ 的一个坐标限制在长度为 $O(a)$ 的区间内。投影后，这些频率构成 $\mathbb{R}^3$ 中的一个点集，因而可应用离散切片估计。在证明余下部分中，我们可以始终假设 R 大于一个固定的充分大常数。对于有界的 R，由柯西–施瓦茨不等式以及格点频率的数量有界，可直接得到该定理。

4.1. 带。 取一个偶的光滑 ψ_0，使其在 $[-1,1]$ 上等于 1，且支集包含于 $[-2,2]$。令 $\chi(t) = \psi_0(t/2) - \psi_0(t)$，并令 $\chi_\pm$为其在正、负半轴上的限制，并延拓为零。它们的支集分别包含于 $[1,4]$ 和 $[-4,-1]$。

回顾相对于 $\mathbb{P}^3$的法向量 $N(x) = (x, -1)$。参数 a 记录法向分量 $N(x) \cdot k/R$ 的大小。我们使用二进尺度 $a = 2^j a_0$、 $j \geq 0$，其中

$$a_0 = R^{-1/3}. \tag{4.1}$$

带算子为

$$T_a c(x) = \eta(x) \sum_{k \in \mathcal{E}_R} c_k \mathrm{e}(k \cdot X(x)) \chi\Big(\frac{N(x)\cdot k}{Ra}\Big). \tag{4.2}$$

这里， $\chi = \chi_+$ 或 χ_- 给出 $T_{a,+}$ 或 $T_{a,-}$；在 $a = a_0$ 处使用 ψ_0 得到中心算子 T_0。精确分解为

$$T = T_0 + \sum_{j \geq 0} (T_{2^j a_0, +} + T_{2^j a_0, -}).$$

事实上， χ 的定义是望远镜式的，并且对于所有充分大的 j，都有 $\psi_0(t/(2^j a_0)) = 1$。只会出现有限多个项：在 η 的支集上， $|N(x) \cdot k/R| \leq \sqrt{5} < 3$，因此 $a > 3$ 的带均为零。

带符号截断函数确定了每个频率的法向分量的符号和大小。在第 5 节中，该符号将排除不同频率对之间的驻相法。该大小将帽的贡献限制在厚度为 $O(a)$ 的薄层内。

我们称 $a_0 \leq a \leq a_* := 1/100$ 为小带 尺度，将 $a_* < a \leq 3$ 称为大带 尺度。大带由命题 5.1 处理。这样的二进尺度只有 $O(1)$ 个。现在固定一个小带尺度，并将T_a 分解为局部化算子。

4.2. **局部化算子。**对于 $Q \subset \mathbb{R}^4$，定义

$$P_Q : \ell^2(\mathcal{E}_R) \to \ell^2(\mathcal{E}_R), \qquad (P_Q c)_k = c_k \mathbf{1}_Q(k).$$

固定 a，并令 $D = a^{-2}$。将 $\mathbb{R}^4$ 划分为立方体 $Q_i = D(i + [0,1)^4)$， $i \in \mathbb{Z}^4$。通过选取 $Re_i \in \mathcal{E}_R \cap Q_i$，每个占据立方体都包含在球 $B(Re_i, 4D)$ 中。

写作

$$T_a = \sum_j T_a P_{Q_j}.$$

我们将先估计局部算子 $T_a P_{Q_j}$ 的范数，然后估计 T_a 的范数。局部算子的范数甚至是 $\lesssim 1$，这远非显而易见。我们需要稍微强一些的结果，这将在 (4.8) 中证明。

固定一个占据立方体 Q，并选取 $Re \in \mathcal{E}_R \cap Q$，使得 $Q \subset B(Re, 4D)$。注意

$$T_a P_Q c(x) = \eta(x) \sum_{k \in \mathcal{E}_R \cap Q} c_k \mathrm{e}(k \cdot X(x)) \chi\Big(\frac{N(x)\cdot k}{Ra}\Big).$$

4.3. 公共区间 I。将 $e = (e', c)$ 写作 $e' \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}$，并令 $b = |e'|$。如果以 $k \in \mathcal{E}_R \cap Q$ 为指标的求和项在某个 x 处非零，那么 $|x| \le 2$, $|N(x)\cdot k| \le 4Ra$，且 $|k - Re| \le 4D$。因此

$$\begin{aligned} |x\cdot e' - c| = |N(x)\cdot e| &\le |N(x)\cdot k|/R + |N(x)|\,|Re-k|/R \\ &\le 4a + 4\sqrt{5}\, D/R \le 16a, \qquad \text{since } D \le Ra. \end{aligned} \tag{4.3}$$

回忆一下 $a \ge R^{-1/3}$。由于 $1 \le b + |c| \le 3b + 16a$ 和 $16a \le 16a_* < 1/2$，每个贡献非零的 Q 都满足 $b \ge b_0 := 1/6$。

此后我们只考虑这样的帽。旋转水平坐标，使得 $e = (b, 0, 0, c)$，并记 $x = (s, y)$, $y \in \mathbb{R}^2$。这保持抛物面和径向截断函数 η不变。除非满足以下条件，否则每个求和项都为零:

$$s \in I := \Big[\frac{c-16a}{b}, \frac{c+16a}{b}\Big], \qquad |I| = 32a/b \lesssim a. \tag{4.4}$$

这个区间与 k无关，因此整个 Q-帽的贡献都支集于公共带状区域 $I \times \mathbb{R}^2$。在 η的支集上，其余坐标满足 $y \in [-2,2]^2$。

4.4. **投影与约化为离散切片估计**。在这些旋转后的坐标中，定义投影

$$\pi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \pi(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = (\xi_2,\xi_3,\xi_4).$$

由于 $Re = (Rb, 0, 0, Rc)$，其像为 $p_0 := \pi(Re) = (0, 0, Rc)$。对于 k, $l \in \mathrm{E}_R \cap Q$，在这些坐标中记 $k = (k_1, k_2, k_3, k_4)$和 $l = (l_1, l_2, l_3, l_4)$: k_1, l_1恰为投影 π所舍弃的坐标。对于较大的 R，由于 $D/R \le R^{-1/3}$,

$$k_1, l_1 \ge Rb - 4D \ge Rb_0/2.$$

相减后得到 $k_1^2 + |\pi k|^2 = l_1^2 + |\pi l|^2 = R^2$

$$(k_1 - l_1)(k_1 + l_1) = -(\pi k - \pi l)\cdot(\pi k + \pi l).$$

因此,

$$|k_1 - l_1| \le \frac{|\pi k| + |\pi l|}{k_1 + l_1} |\pi k - \pi l| \le \frac{2}{b_0} |\pi k - \pi l|,$$

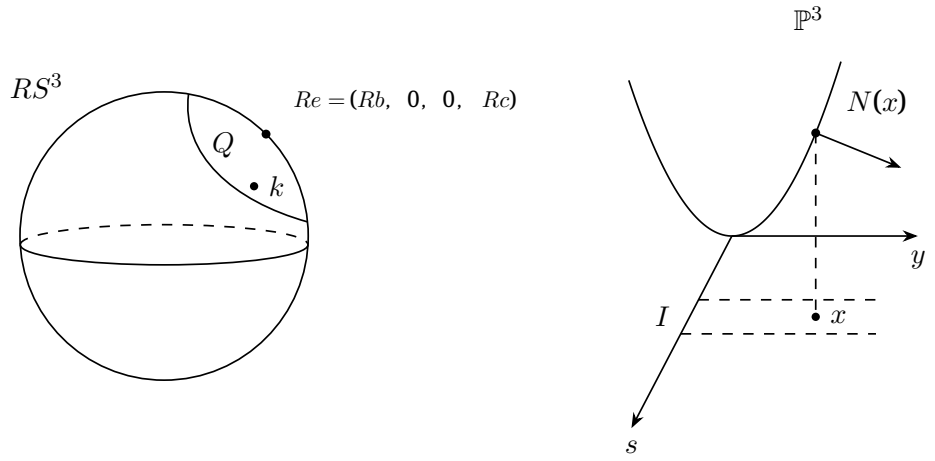

图 1。频率帽 $Q \cap RS^3$ 和物理抛物面 $\mathbb{P}^3$，以及 s 坐标中的公共区间 I。

由此利用勾股定理可得

$$|\pi k - \pi l| \le |k-l| \le \sqrt{1+4/b_0^2}\,|\pi k - \pi l| \lesssim |\pi k - \pi l|.$$

因此，投影是一一对应的，并且以固定因子改变距离。水平旋转不一定保持整数坐标，但它保持距离不变，因而也保持所有帽计数不变。对于 $|h| \le 1/2$，以下结论同样成立：

$$p_h(k) = ((1+h)k_2, (1+h)k_3, k_4) - p_0, \quad A_h = \{p_h(k) : k \in \mathcal{E}_R \cap Q\}. \tag{4.5}$$

集合 A_h 位于 $B(0,\ CD)$ 中。与 A_h 相交的半径为 r 的球，会提升为一个以其某个原像为中心、半径约为 Cr 的球。因此，命题 2.3 给出了 A_h 的 (3.3)，并且对 h一致成立。

对于 $F_Q(z) = \sum_{k \in \mathcal{E}_R \cap Q} c_k \mathrm{e}(k \cdot z)$，恒等式

$$X(x) + hN(x) = ((1+h)x, |x|^2/2 - h)$$

给出 $x = (s, y)$

$$k \cdot (X + hN) = (1+h)k_1 s + k_4(s^2/2 - h) + (p_h(k) + p_0) \cdot Z(y). \tag{4.6}$$

这些平移后的取值受到下文傅里叶反演公式 (4.9) 的启发，该公式将带算子表示为它们的加权平均，其中 $h = t/(Ra)$。固定 $s,\ h$ 时，令

$$d_k = c_k \mathrm{e}((1+h)k_1 s + k_4(s^2/2 - h)), \qquad |d_k| = |c_k|.$$

p_0 项给出一个绝对值为一的公因子。因此，由命题 3.2 可得

$$\begin{aligned}&\int_{[-2,2]^2} |F_Q(X(s,y)+hN(s,y))|^2\,dy\\&\quad=\int_{[-2,2]^2}\Big|\sum_{k\in\mathcal{E}_R\cap Q} d_k \mathrm{e}(p_h(k)\cdot Z(y))\Big|^2\,dy\\&\quad\lesssim D^{15/32}\sum_{k\in\mathcal{E}_R\cap Q}|c_k|^2 = D^{15/32}\|P_Q c\|_2^2.\end{aligned}$$

对 $s\in I$ 积分并利用 $|I|\lesssim a=D^{-1/2}$，可得对每个 $|h|\le 1/2$,

$$\|\mathbf{1}_I(s)\eta(s,y)F_Q(X+hN)\|^2_{L^2(ds\,dy)}\lesssim D^{-\kappa}\|P_Q c\|_2^2,\quad \kappa=1/32. \tag{4.7}$$

4.5. 的范数在小带尺度 a下。傅里叶反演将截断函数 $\chi(N(x)\cdot k/(Ra))$ 写成指数函数的平均，从而可以应用 (4.6)，再应用 (4.7)。

命题 4.1（局部帽集节省）。对于上述每个占据立方体 $Q\subset B(Re,4D)$以及每个小的有符号带或中心带，

$$\|T_a P_Q\|^2_{\ell^2(\mathcal{E}_R)\to L^2(\mathbb{R}^3)}\lesssim D^{-\kappa},\qquad \kappa=1/32. \tag{4.8}$$

证明。令 $\widehat{\chi}(t)=\int\chi(v)\mathrm{e}(-tv)\,dv$，傅里叶反演给出

$$\begin{aligned}T_aP_Qc(x)&=\eta(x)\sum_{k\in\mathcal{E}_R\cap Q}c_k\mathrm{e}(k\cdot X(x))\chi\Big(\frac{N(x)\cdot k}{Ra}\Big)\\&=\eta(x)\int_{\mathbb{R}}\widehat{\chi}(t)F_Q\Big(X(x)+\frac{t}{Ra}N(x)\Big)\,dt.\end{aligned} \tag{4.9}$$

回忆一下，我们将 $x=(s,\ y)$ 记作。左侧的支集包含于 $I\times\mathbb{R}^2$，因此在右侧插入 $\mathbf{1}_I(s)$，并在下面的分拆所得两部分中都保留这一因子。对于 $|t|\le Ra/2$，位移 $h=t/(Ra)$ 满足 $|h|\le 1/2$。由闵可夫斯基不等式和 (4.7) 得

$$\begin{aligned}&\Big\|\mathbf{1}_I(s)\eta(x)\int_{|t|\le Ra/2}\widehat{\chi}(t)F_Q\Big(X+\frac{t}{Ra}N\Big)\,dt\Big\|_{L^2(dx)}\\&\quad\le\int_{|t|\le Ra/2}|\widehat{\chi}(t)|\,\Big\|\mathbf{1}_I\eta F_Q\Big(X+\frac{t}{Ra}N\Big)\Big\|_{L^2(dx)}\,dt\lesssim D^{-\kappa/2}\|P_Qc\|_2\|\widehat{\chi}\|_1.\end{aligned}$$

剩余部分是尾项

$$E_{a,Q}c(x):=\mathbf{1}_I(s)\eta(x)\int_{|t|>Ra/2}\widehat{\chi}(t)F_Q\Big(X(x)+\frac{t}{Ra}N(x)\Big)\,dt.$$

这里 $|h|=|t|/(Ra)>1/2$，因此前面的切片估计不适用。我们改为利用 $\widehat{\chi}$ 的快速衰减，以及对 $\mathbb{R}^4$ 中每一点都成立的 F_Q 界。对频率求和应用柯西–施瓦茨不等式可得

$$|F_Q(z)|\le\#(\mathcal{E}_R\cap Q)^{1/2}\|P_Qc\|_2\lesssim D^2\|P_Qc\|_2.$$

由于 $|I| \lesssim a$ 和 η 具有固定的有界支撑，$\|\mathbf{1}_I \eta\|_2 \lesssim a^{1/2}$。因此，在尾积分内取绝对值得到

$$\begin{aligned}\|E_{a,Q}c\|_2 &\le \|\mathbf{1}_I\eta\|_2 \sup_{z\in\mathbb{R}^4} |F_Q(z)| \int_{|t|>Ra/2} |\widehat{\chi}(t)|\,dt \\ &\lesssim a^{1/2} D^2 \|P_Q c\|_2 \int_{|t|>Ra/2} |\widehat{\chi}(t)|\,dt.\end{aligned}$$

χ 的光滑性和紧支撑带来 $\widehat{\chi}$的快速衰减，因此对每个 $B>0$，都有 $\int_{|t|>Ra/2} |\widehat{\chi}(t)|\,dt \lesssim_B (Ra)^{-B}$。代入这个界可得

$$\|E_{a,Q}c\|_2 \lesssim_B a^{1/2} D^2 (Ra)^{-B} \|P_Q c\|_2 \le D^{7/4-B}\|P_Q c\|_2.$$

这里 $a^{1/2} = D^{-1/4}$ 且 $Ra \ge D$。取 $B=2$，使尾部范数$O(D^{-1/4})\|P_Q c\|_2$小于所需的 $D^{-\kappa/2}\|P_Q c\|_2$。利用三角不等式合并这两部分，再将结果平方，即可证明所述结论。

□

5. Gram衰减与Schur求和

Gram矩阵将合并各帽的问题转化为频率系数上的算子估计。我们证明距离超过$D = a^{-2}$时的衰减，陈述并证明Schur检验，再将这种衰减与局部增益结合。对法向带求和后，证明即告完成。

5.1. Gram矩阵控制限制算子。记$T_a c = \sum_k c_k f_{a,\ k}$，其中

$$f_{a,k}(x) = \eta(x)\mathrm{e}(k\cdot X(x))\chi\Big(\frac{N(x)\cdot k}{Ra}\Big).$$

由于内积对第一个变量线性，伴随算子为 $(T_a^* g)_k = \langle g, f_{a,k}\rangle$。因此，$K_a = T_a^* T_a$是作用于 $\ell^2(\mathcal{E}_R)$上的线性算子，与这些函数的*Gram*矩阵 相关。其矩阵元是这些函数两两之间的内积，

$$K_a(k,l) = \langle f_{a,l}, f_{a,k}\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} A_{a,k,l}(x)\mathrm{e}((l-k)\cdot X(x))\,dx, \tag{5.1}$$

其中

$$A_{a,k,l}(x) = |\eta(x)|^2 \overline{\chi\Big(\frac{N(x)\cdot k}{Ra}\Big)}\chi\Big(\frac{N(x)\cdot l}{Ra}\Big).$$

矩阵 K_a 是半正定的，并且

$$\|T_a c\|_2^2 = \langle K_a c, c\rangle, \qquad \|T_a\|^2 = \|T_a^* T_a\| = \|T_a T_a^*\|. \tag{5.2}$$

5.2. **有符号带和中心带的核衰减。**

命题 5.1. 对于每个带符号频带 $a_0 \le a \le 3$，以及位于 $a = a_0$ 的中心带，

$$|K_a(k,l)| \lesssim_L a(1+a^2|k-l|)^{-L} \qquad (L = 0,1,2,\ldots). \tag{5.3}$$

证明。 我们使用法向截断和等半径条件 $|k| = |l| = R$ ，使相位远离驻点，然后进行分部积分。带符号频带和中心带需要采用不同的几何观察。

振幅界与直接估计。 记 $A = A_{a,\ k,\ l}$。在其支集上，$|x| \le 2$ 且 $|x \cdot k' - k_4| \le 4Ra$，其中 $k = (k',\ k_4)$。若 $a \le a_*$，则

$$1 = \frac{|k|}{R} \le \frac{|k'| + |k_4|}{R} \le 3\frac{|k'|}{R} + 4a, \qquad |k'| \ge R/6.$$

因此，法向量截断函数将 x 限制在厚度至多为 $8Ra/|k'| \lesssim a$的薄层内。它与 $B(0,\ 2)$的交集测度为 $O(a)$。对于 $a \ge a_*$， η 的固定支集给出相同的界，只是常数变为更大的固定常数。由于 N 是仿射的，且$k/R,\ l/R$ 是单位向量，对频带截断函数求导时每阶导数的代价至多为 a^{-1} 。因此，

$$|\operatorname{supp} A| \lesssim a, \qquad \|\partial^\beta A\|_\infty \lesssim_\beta a^{-|\beta|}. \tag{5.4}$$

特别地， $|K_a(k,\ l)| \lesssim a$。当 $k = l$ 或 $da^2 \le 8$时，这就证明了断言，其中 $d = |l - k|$。

对于剩余范围 $da^2 > 8$，通过如下设定对频率差和相位进行归一化

$$v = \frac{l-k}{d} = (v', v_4), \qquad \phi(x) = v' \cdot x + \frac{v_4}{2}|x|^2,$$
$$q(x) = \nabla\phi(x) = v' + v_4 x, \qquad K_a(k,l) = \int_{\mathbb{R}^3} A(x)\mathrm{e}(d\phi(x))\,dx.$$

设 $\nu(x) = N(x)/|N(x)|$。恒等式 $v = (q,\ 0) - v_4 N$表明，驻定性 $q = 0$ 等价于 $l-k$ 平行于法向量 $N(x)$。将同一恒等式投影到 $\nu^\perp$ 上，得到

$$|q(x)| \ge |\operatorname{proj}_{\nu^\perp} v| = \sqrt{1 - (v \cdot \nu)^2}. \tag{5.5}$$

带符号频带：符号相同排除了驻定性。在 A的支集上，两个数 $N(x) \cdot k$ 和 $N(x) \cdot l$ 符号相同，且绝对值至少为 Ra。因此

$$|N(x) \cdot (k+l)| = |N(x) \cdot k| + |N(x) \cdot l| \ge 2Ra.$$

另一方面，等半径条件给出

$$(l-k) \cdot (k+l) = |l|^2 - |k|^2 = 0.$$

因此，驻定点将迫使 $N(x) \cdot (k+l) = 0$，这就产生了矛盾。这正是要将正、负法向带分开处理的原因。

为量化这一观察，令 $m = (k+l)/|k+l|$；只要振幅支集非空，该定义就是良好的。于是 $m \perp v$，且 $|k+l| \le 2R$,$|N(x)| \le \sqrt{5}$ 给出

$$|\nu \cdot m| = \frac{|N(x) \cdot (k+l)|}{|N(x)|\,|k+l|} \ge \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

由于 m, v 是正交归一的, $|\nu\cdot m|^2+|\nu\cdot v|^2\le 1$。将其与（5.5）结合可得

$$|q(x)|\ge |\nu\cdot m|\ge a/3 \qquad \text{on } \operatorname{supp} A.$$

中心带。记 $D_0=R^{2/3}$。这里的符号可能不同，但 $a=a_0$，而截断函数给出 $|N(x)\cdot k|$, $|N(x)\cdot l|\le 2Ra$。由于 $|N(x)|\ge 1$，相减得到

$$|\nu\cdot v|\le \frac{|N(x)\cdot(l-k)|}{d}\le \frac{4Ra}{d}=\frac{4}{da^2}<\frac{1}{2}.$$

等式使用了尺度恒等式 $Ra_0=D_0=a_0^{-2}$；最后一个不等式正是当前所考虑的范围 $d>8D_0$。因此，(5.5) 给出$|q|\ge\sqrt{3}/2$。中心截断函数只允许间距为$O(D_0)$的驻定对，此时直接估计已经足够。

分部积分与尺度 da^2。由于 $a\le 3$，两种情形在振幅支集上都给出 $|q|\ge a/4$。令 V 在该支集的某个邻域内与 $q/|q|^2$ 一致，并在 $|q|\le a/8$处通过截断函数将其光滑延拓。由于q 是具有有界导数的仿射函数，

$$\|\partial^\beta V\|_\infty\lesssim_\beta a^{-1-|\beta|},\qquad \frac{1}{2\pi i d}V\cdot\nabla \mathrm{e}(d\phi)=\mathrm{e}(d\phi)$$

在 $\operatorname{supp} A$ 附近。令 $\mathcal{D}f=\operatorname{div}(Vf)=V\cdot\nabla f+(\operatorname{div} V)f$。每次分部积分都会产生 d^{-1}，并将振幅替换为作用于其上的$\mathcal{D}$。逆梯度带来 a^{-1} 的代价，而微分还会额外带来一个因子 a^{-1}，这解释了尺度 da^2。

更准确地说，利用乘积法则、 V的界以及 (5.4)，归纳可得

$$\|\partial^\beta \mathcal{D}^j A\|_\infty\lesssim_{j,\beta} a^{-2j-|\beta|},\qquad j=0,1,2,\dots.$$

这些函数的支集仍包含于 $\operatorname{supp} A$ 中。由于 A 是紧支撑的，不存在边界项。经过 L次分部积分后，

$$K_a(k,l)=\left(-\frac{1}{2\pi i d}\right)^L\int_{\mathbb{R}^3}\mathcal{D}^L A(x)\mathrm{e}(d\phi(x))\,dx,$$

因此

$$|K_a(k,l)|\lesssim_L d^{-L}\|\mathcal{D}^L A\|_1\lesssim_L d^{-L}a^{1-2L}=a(da^2)^{-L}.$$

将其与 $da^2\le 8$ 的直接估计相结合，即可证明 (5.3)。 □

5.3. **标量与块 Schur 检验。**

引理 5.2 (Schur检验)。设 $K_{ij}:H_j\to H_i$ 是希尔伯特空间之间的算子。若

$$\sup_i\sum_j\|K_{ij}\|\le A,\qquad \sup_j\sum_i\|K_{ij}\|\le B,$$

则 $K((v_i)_i)=(\sum_j K_{ij}v_j)_i$ 在希尔伯特直和 $\bigoplus_i H_i$上的范数至多为 $\sqrt{AB}$，其范数的平方为 $\sum_i\|v_i\|^2$。对于标量矩阵，取 $H_i=\mathbb{C}$，并将范数替换为绝对值。

证明。 对于向量 $v=(v_j)$ 和 $w=(w_i)$，由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}|\langle Kv,w\rangle| &\le \sum_{i,j}\|K_{ij}\|\,\|v_j\|\,\|w_i\| \\ &\le \left(\sum_{i,j}\|K_{ij}\|\|v_j\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i,j}\|K_{ij}\|\|w_i\|^2\right)^{1/2} \le \sqrt{AB}\,\|v\|\,\|w\|.\end{aligned}$$

□

5.4. 合并频率帽。保持 $\kappa=1/32$。对于较小的带宽尺度 a，将 $\mathbb{R}^4$ 划分为半开立方体 $Q_i=D(i+[0,1)^4)$，$i\in\mathbb{Z}^4$。每个占据立方体都包含在球 $B(Re_i,\,4D)$ 中，方法是选取 $Re_i\in\mathcal{E}_R\cap Q_i$。令 $H_i=\ell^2(\mathcal{E}_R\cap Q_i)$ 和 $K_{ij}=P_{Q_i}T_a^*T_aP_{Q_j}:H_j\to H_i$。由于 $\sum_j P_{Q_j}=I$，这些块组合成格拉姆算子：

$$T_a=\sum_j T_aP_{Q_j},$$
$$T_a^*T_a=\sum_{i,j}(T_aP_{Q_i})^*(T_aP_{Q_j})=\sum_{i,j}K_{ij}.$$

等价地，令 $c_j=P_{Q_j}c$，

$$\|T_ac\|_2^2=\sum_{i,j}\langle K_{ij}c_j,c_i\rangle.$$

由于 $K_{ij}=(T_aP_{Q_i})^*(T_aP_{Q_j})$，命题 4.1 给出

$$\|K_{ij}\|\le\|T_aP_{Q_i}\|\,\|T_aP_{Q_j}\|\lesssim A_D:=D^{-\kappa}. \tag{5.6}$$

对于 $k\in Q_i$ 和 $l\in Q_j$，偏移量 $k/D-i,\ l/D-j\in[0,1)^4$ 的距离至多为 2，因此

$$|i-j|\le D^{-1}|k-l|+2=a^2|k-l|+2.$$

因此，命题 5.1 对每个 Gram矩阵元素给出了如下界

$$|K_a(k,l)|\lesssim_L a(1+|i-j|)^{-L}.$$

对于 $v\in H_j$，对内层求和应用柯西–施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}\|K_{ij}v\|_2^2&=\sum_{k\in\mathcal{E}_R\cap Q_i}\left|\sum_{l\in\mathcal{E}_R\cap Q_j}K_a(k,l)v_l\right|^2\\ &\le\left(\sum_{k\in\mathcal{E}_R\cap Q_i}\sum_{l\in\mathcal{E}_R\cap Q_j}|K_a(k,l)|^2\right)\|v\|_2^2\\ &\lesssim_L a^2D^6(1+|i-j|)^{-2L}\|v\|_2^2.\end{aligned}$$

开平方后得到

$$\|K_{ij}\|\lesssim_L aD^3(1+|i-j|)^{-L}. \tag{5.7}$$

这也涵盖了相邻的立方体。由于 $a = D^{-1/2} \le A_D$，这两个估计给出

$$\|K_{ij}\| \lesssim_L A_D \min\{1, D^3(1+|i-j|)^{-L}\}.$$

取 $\min(1, t) \le t^\theta$，其中 $\theta = \kappa/8$，并选择 L 使得 $L\theta \ge 5$。由于 $-\kappa + 3\theta = -5\kappa/8 \le -\kappa/2$，我们得到

$$\|K_{ij}\| \lesssim D^{-\kappa/2}(1+|i-j|)^{-5}.$$

由于 $\sum_{n\in\mathbb{Z}^4}(1+|n|)^{-5} < \infty$，块范数满足

$$\sup_i \sum_j \|K_{ij}\| + \sup_j \sum_i \|K_{ij}\| \lesssim D^{-\kappa/2}.$$

将块 Schur 检验、引理 5.2 应用于 $\ell^2(\mathcal{E}_R)$ 上的 $(K_{ij}) = \bigoplus_i H_i$，得到

$$\|T_a\|^2 = \|T_a^* T_a\| \lesssim D^{-\kappa/2}. \tag{5.8}$$

5.5. 对各带求和。现在我们对第 4.1 节中的分解求和 .
根据 (5.8),

$$\|T_{a,\pm}\| \lesssim D^{-\kappa/4} = a^{1/64}, \qquad \|T_0\| \lesssim D_0^{-\kappa/4} = R^{-1/192}.$$

关于 $a \le a_*$ 的二进求和是收敛的几何级数，且关于R一致。满足 $a_* < a \le 3$ 的带只有有限多个。对于这些带，命题 5.1 给出 $|K_a(k, l)| \lesssim_{L,\ a_*} (1+|k-l|)^{-L}$。取 $L > 4$，由单位球打包可得标量行和与列和的界：

$$\sup_k \sum_l |K_a(k,l)| + \sup_l \sum_k |K_a(k,l)| \lesssim \sum_{h\in\mathbb{Z}^4} (1+|h|)^{-L} < \infty.$$

因此，标量 Schur 检验（引理 5.2，其中 $H_i = \mathbb{C}$）给出 $\|T_a\|^2 = \|K_a\| \lesssim 1$。由三角不等式可证 $\|Tc\|_2 \lesssim \|c\|_2$。由于 $\eta = 1$ 在$[-1,1]^3$上，利用 (1.3) 中的帕塞瓦尔等式即可得到定理 1.2。

人工智能的使用

作者对这一问题的兴趣可追溯至2020年。当时，他探索了一种基于 Bourgain–Rudnick 方法以及与 Bourgain 合作证明的四维帽能量估计的方法[11, 第 4]节。虽然这一方法未能得到所需的限制界，但后来它成为作者与 ChatGPT 长期交流的起点；在交流过程中，作者引导论证不断改进、提升效率。最终得到的证明比本文所呈现的版本稍复杂。作者随后进一步简化了论证，并撰写了本文这一版本。

参考文献

[1] J. Bourgain 和 Z. Rudnick，环面特征函数在超曲面上的限制及节点集，Geom. Funct. Anal. 22 (2012)，第 4 期，878–937。arXiv:1105.0018。[2] J. W. S. Cassels，《数论几何导论》，数学经典丛书，Springer-Verlag，柏林，1997。doi:10.1007/978-3-642-62035-5。[3] X. Du 和 R. Zhang，高维 Schrödinger 极大函数的尖锐 L^2 估计，Ann. of Math. (2) 189 (2019)，第 3 期，837–861。doi:10.4007/annals.2019.189.3.4。[4] J. Kim，低维频率局部化的加权解耦，2026。arXiv:2605.02246。[5] C. Zhang 和 Z. Zhu，环面特征函数的限制估计与球形区域中的格点，2026。arXiv:2606.08650。[6] M. Tacy，法向速度量子化不会集中于超[7] 曲面上，Comm. Partial Differential Equations 42 (2017)，第 11 期，1749–1780。doi:10.1080/03605302.2017.1390676。 L^2 J. Galkowski，特征函数在掠射集附近的行为，Comm. Partial Differential Equations 41 (2016)，第 10 期，1619–1648。doi:10.1080/03605302.2016.1227339。[8] F. Oravecz、Z. Rudnick 和 I. Wigman，环面上随机特征函数节点集的 Leray 测度，Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 58 (2008)，第 1 期，299–335。doi:10.5802/aif.2351。[9] X. Huang 和 C. Zhang，环面特征函数在全测地子流形上的限制，Anal. PDE 14 (2021)，第 3 期，861–880。doi:10.2140/apde.2021.14.861。[10] M. Balko、J. Cibulka 和 P. Valtr，用子空间覆盖格点及计算点–超平面关联，Discrete Comput. Geom. 61 (2019)，第 2 期，325–354。doi:10.1007/s00454-018-9970-7。[11] J. Bourgain 和 C. Demeter，Siegel 质量公式的三个应用，载于《泛函分析的几何方面》，以色列研讨会（GAFA）2017–2019，第 I 卷，数学讲义第 2256 卷，Springer，Cham，2020，99–111。doi:10.1007/978-3-030- 36020-7 6。_[12] J. Bennett 和 A. Seeger，大球面上的傅里叶延拓算子及相关振荡积分，Proc. Lond. Math. Soc. (3) 98 (2009)，第 1 期，45–82。doi:10.1112/plms/pdn022。[13] J. Bourgain 和 C. Demeter， l^2 解耦猜想的证明，Ann. of Math. (2) 182 (2015)，第 1 期，351–389。doi:10.4007/annals.2015.182.1.9。

印第安纳大学数学系，831 East 3rd St., Bloom- ington, IN 47405电子邮件地址：demeterc@iu.edu