整体域与高维局部域上的扭曲 K 理论及约化范数

Hisato Matsukawa*

2026年11月20日

arXiv:2611.29825v1 [math.NT] 22 Nov 2026

摘要

我们证明了关于整体域和局部域上约化范数的 Merkurjev–Suslin 猜想。此外，在这两种情形下，我们构造了截断 K 理论谱之间的映射，这些映射在次数 1 和 2 时诱导出约化范数，并证明这些映射在局部域上是等价。在整体域上，我们确立了其纤维的有限性性质，并详细描述了其结构。我们还将 Merkurjev–Suslin 猜想推广到特征序列为 (0，0，0) 和 (0，0，p) 的二维局部域和三维局部域，并证明了这些情形下的猜想。最后，我们将这些结果应用于数域上的非交换类域论，并描述了与中心单代数相关联的 Artin 映射。

关键词：代数 K理论、中心单代数、约化范数、Merkurjev–Suslin 猜想、整体域、高维局部域、分裂转移、局部紧模。**2020年数学主题分类：**主要类别 19C30、16K50；次要类别 19D50、19F05、11S70、11R70。

目录

引言 **3**

致谢 6

人工智能的使用 6

约定 **6**

1 局部域上的扭曲 K-理论 **7**

1.1 étale 下降与约化范数.7 1.2 正次数谱的归一化等价.13

2 分　裂域转移与局部–整体原理 21

2.1 分裂转移与刚化皮卡范数.21 2.2 分裂传递商的局部–整体单射性.25 2.3 扭曲高阶 Chow 群与约化范数的像.28

*北海道大学理学院数学系，北海道札幌市北区北10条西8丁目，邮编 060-0810，日本。电子邮件：matsukawa.hisato.f4@elms.hokudai.ac.jp, hmnr0211@gmail.com

3 扭曲　论 K理论与全局域 3 **2**

3.1 结构推前与扭曲高阶 Chow 群.32 结构推前与约化秩.32 对角线及下一行上的约化范数.34 相对于实位的迹.35 3.2 正次数比较及其在整体域上的纤维.37 正次数比较的构造.37 数域上的导出范数与分裂.40 通过常数域转移在全局函数域上的分裂.44 第三个 K 群与实符号.46 素数指标下的基本比较.48 比较纤维的素数分解与次数界.50 纤维在布劳尔类幂下的不变性.52 任意指标下比较纤维消失的例子.55 数域上的 Eilenberg–Mac Lane分解.55 Bott 元与 2-主分解.57 从有限系数分解到整数分解.58 第一个剩余群.59

4 约化范数　　二维局部域上的范数　　s　　60

4.1 来自分裂域的范数与驯分歧局部化.60 4.2 野分歧中的整性归纳.67 非分歧下降与最小指标.67 两个降低指标的循环覆盖.71 零次数相对迹.73 来自序的整转移与消失.80

5　约化范　　数在三维局部域上的　　s　　84

5.1 约化范数的余核.84 5.2 第一剩余特征零时核的消失.93 5.3 特殊情形、进一步结果与开放问题.93

6 局部紧模与阿廷映射 95

6.1 正次数中的局部紧模与局部化 . . . . . 95 6.2 基于公共整模型的局部—整体比较.98 6.3 比较纤维的悬挂与至少二次的次数中的分裂 . 107 6.4 塞尔默 K-同调与阿代尔类.108

A 弗罗贝尼乌斯与有限系数比较 11 **1**

B 相对拓扑循环同调**与整提升 114**

B.1 支撑与同余塔.114 B.2 固定分裂域的同余分离.116 B.3 深层主单位与有限截断上的相对类.117 B.4 相对有限群轨道的稳定像.118 B.5 交换赋值环上的整代表元.119

C　Co带系数零循环和分裂转移的共同输入 119

引言

设 A 是域 F 上的中心单代数。在次数 $i = 1, 2$ 时，通过约化范数 $\mathrm{Nrd}_i\colon K_i(A) \to K_i(F)$ [55, 80] 对群 $K_i(A)$ 与 $K_i(F)$ 进行比较。我们研究这些映射在非阿基米德局部域、整体域以及二维和三维局部域上的情形。

背景

设 F 是一个局部域或整体域。Merkurjev 和 Suslin 猜想序列

$$0 \longrightarrow K_2(A) \xrightarrow{\mathrm{Nrd}_2} K_2(F) \xrightarrow{(s_v)_v} (\mathbb{Z}/2)^{S_{\mathbb{R}}} \longrightarrow 0 \tag{1}$$

是正合的，其中 $S_{\mathbb{R}}$ 是 F 的实位集合，在这些实位上 A 分歧，而 s_v 是 v [55, 处的希尔伯特符号（注 17）。他们证明了当 A 的指标无平方因子且与 F [55, 的特征互素时，(1) 成立（定理 17）。Merkurjev 和 Suslin 以及 Kahn 和 Levine 独立证明了：对于任意特征零域上指标无平方因子的 A，Nrd_2 是单射（定理 2，推论 2]）。对于整体域，Bak 和 Rehmann 将 Nrd_2 的像确定为 (s_v) 的核（§2，定理 3], ），因此 (1) 的关键在于 Nrd_2 的单射性。这种关于整体域的单射性有时被归功于 [4]；然而，正如 [15, （注 10.4(3)）所指出的， [4] 并未声称这一点。

一次情形中的相应陈述是经典结果 [60, 87], [31, 推论 4.10(iii)][69, 定理 33.15], [90,推论 2]。

设 F 是剩余特征为 p 的非阿基米德局部域，并设 D 是 A 的布劳尔类中的除代数。Suslin 和 Yufryakov 证明，若 $\deg D$ 与 p 互素，则对每个素数 $\ell \neq p$ 和每个 $j \geq 1$，都存在同构 $\pi_j K(D)^\wedge_\ell \cong \pi_j K(F)^\wedge_\ell$，其与 $\deg D$ 的乘积由范数 $N_{D/F}$ [82, 诱导 3], 定理 $\ell = p$ 。Hesselholt、Larsen 和 Lindenstrauss 证明了当 p 为奇数时，关于 [32, 的类似陈述]定理 A。

Clausen 通过局部紧 K 模的 F-理论描述了类域论的 Artin 映射 [19]。Braunling、Henrard 和 van Roosmalen 发展了一种非交换类比，将 A 的幂等元与局部紧 A 模范畴 LCA_A 的 K_1 联系起来 [15]。约化范数与非交换 K 理论类域论密切相关；例如，Merkurjev–Suslin 猜想蕴含同构 $K_2(\mathrm{LCA}_A) \cong K_2(\mathrm{LCA}_F)$，见 [15, 猜想 10.2] [15, 定理 10.5]。

主要结果

定理 A (Merkurjev–Suslin 猜想，定理 1.1.1 和 2.3.2)。 设 F 为非阿基米德局部域或整体域， A 为 F上的中心单代数。那么 Nrd_2 是单射。特别地，序列

$$0 \longrightarrow K_2(A) \xrightarrow{\mathrm{Nrd}_2} K_2(F) \xrightarrow{(s_v)_v} (\mathbb{Z}/2)^{S_{\mathbb{R}}} \longrightarrow 0$$

是正合的。

Hesselholt、Larsen 和 Lindenstrauss 指出，目前尚不清楚他们的约化范数同构是否由 E_n群-理论谱之间的映射诱导，而这种映射很可能并不存在 [32, 引言]；另见 [54, 命题 4]。我们构造了一个截断的 E_n群-理论谱之间的映射，它在次数 1 和 2 上诱导约化范数。此外，在局部域上，我们得到一个谱的等价。

定理 B (定理 1.1.1 和 1.2.1)。设 F 是一个非阿基米德局部域，A 是 F上的一个中心单代数。存在一个谱的等价

$$\nu\colon \tau_{\geq 1}K(A) \xrightarrow{\sim} \tau_{\geq 1}K(F).$$

在 π_j 上，它对 $j=1$ 诱导出 Nrd^j 、2。

定理 C (定理 3.2.4、3.2.11、3.2.13、3.2.20 和 3.2.30，推论 3.2.16 和 3.2.22)。设 F 是一个整体域，A 是 F 上的一个中心单代数。如果 A 在 F 的每个实位处分裂，则所有陈述都是整系数的；如果 A 在某个实位分歧，则所有谱和群都取 $\mathbb{Z}[1/2]$ 系数，并且排除素数 $\ell=2$ 。

1. 存在一个谱之间的映射

$$g\colon \tau_{\geq 1}K(A) \longrightarrow \tau_{\geq 1}K(F)$$

它在次数一和二上与 Nrd_1 和 Nrd_2 一致。

2. 设 $Z=\mathrm{fib}(g)$。存在一个等价

$$\tau_{\geq 2}K(A) \simeq \tau_{\geq 2}K(F) \oplus Z$$

其第一个分量为 $\tau_{\geq 2}g$，且 $Z\in \mathrm{Sp}^{\geq 4}$。因此，对于 $j\geq 2$，映射 $g_j=\pi_j g$ 是分裂满射，其核为 $\pi_j Z$，而 g_2 和 g_3 是同构。

3. 对于一个满足 $\ell\neq$特征 F 的素数 $\ell\,|\,\mathrm{ind}\,A$，令 $e_\ell=\ell^{v_\ell(\mathrm{ind}\,A)}$，并令 $B_\ell(A)$ 为局部化 $K(A)_{(\ell)}\to L_{E(1),\,\ell}K(A)$ 的纤维。那么

$$Z\simeq \prod_{\ell}\tau_{\geq 2}B_\ell(A), \qquad e_\ell\,\pi_j B_\ell(A)=0 \ \ (j\geq 1), \qquad B_\ell(A)\in \mathrm{Sp}_{\leq e_\ell-3},$$

以及当 $e_\ell=\ell$ 时的 $\tau_{\geq 2}B_\ell(A)=0$ 。

4. 若 F 是全局函数域，则对于 $j\geq 2$

$$\pi_j Z\cong K_j(A)\Big/\sum_{L}\theta_L K_j(L),$$

其中 L 遍历分裂 A 的 F 的有限可分扩张，并且 θ_L: $K(L)\to K(A)$ 是分裂转移。

5. 若 F 是数域，则存在一个非典范等价

$$Z\simeq \bigoplus_{\ell|\mathrm{ind}\,A}\ \bigoplus_{j=4}^{e_\ell-3}\Sigma^j H\big(\pi_j Z_{(\ell)}\big),$$

wh其中每个 $\pi_j Z_{(\ell)}$ 都是有限的 ℓ-群，即$(g_j)_{(\ell)}$: $K_j(A)_{(\ell)}\to K_j(F)_{(\ell)}$ 的核 .

因此，$\pi_j Z$ 的 ℓ主部分仅在 $4\leq j\leq e_\ell-3$ 和 $e_\ell\neq\ell$时才可能非零。特别地，对于每个满足 $\ell\neq\mathrm{char}\ F$ 的素数 $\ell\,|\,\mathrm{ind}\ A$，当 $e_\ell\in\{\ell,\ 4\}$ 时，g是一个等价。

将 2 置可逆是必要的：例 3.2.18 给出了一个明确的反例。

在三次情形下，比较映射是显式的；以下描述是整的，即使存在实分歧（定理 3.2.14 和推论 3.2.15）也是如此。如果 F 是常数域为 $\mathbb{F}_q$的全局函数域，则 $K_3(A)\cong K_3(F)\cong \mathbb{Z}/(q^2-1)$。如果 F是数域，则 $K_3(A)\cong K_3(F)/J_{\text{分歧}F}$，其中 J_F^{ram}是 $K_3^M(F)\to K_3(F)$ 的像中支撑在 A发生分歧的实位上的部分。具体而言，令 r_2为 F的复位数，令 r_{sp}为 A 分裂的实位数，并令 $w_2=|H^0(F,\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))|$；则 $K_3(A)$的自由秩为 r_2，且其挠子群在 $r_{\mathrm{sp}}=0$ 时为 $\mathbb{Z}/w_2$，在 $r_{\mathrm{sp}}>0$时为 $\mathbb{Z}/2w_2\oplus(\mathbb{Z}/2)^{r_{\mathrm{sp}}-1}$ 。

在等价意义下，纤维 Z 仅取决于由 $[A]$生成的 F的循环子群。

定理 D（命题 3.2.24）。设 F 是一个整体域，A 是其上的中心单代数，采用定理 *C* 的系数约定，并将定理 *C* 中针对 A 的比较映射 g 的纤维记为 Z_A。若 $a \geq 1$ 且最大公因数$(a、\operatorname{per} A) = 1$，则对于任意满足 $[A'] = a[A]$ 属于 $\mathrm{Br}(F)$ 的、定义在 F 上的中心单代数 A'，存在一个非典范等价 $Z_A \simeq Z_{A'}$。

定理 E (Merkurjev–Suslin 高维局部域猜想，定理 4.1.1、4.2.1 和 5.1.4，推论 4.1.3 和 5.2.1)。设 F 是二维或三维局部域，A 是 F上的中心单代数，令 $\alpha = [A] \in \mathrm{Br}(F)$，并令 $N_2(\alpha) \subseteq K_2(F)$ 为由所有分裂 α的有限扩张 E/F 的范数 $N_{E/F}K_2(E)$ 生成的子群。

1. 若 F是二维的，则 Nrd_1 是单射，$N_2(\alpha) = K_2(F)$，且 $\mathrm{Nrd}_2 \colon K_2(A) \to K_2(F)$ 是同构。

2. 若 F 是三维的，则

$$N_2(\alpha) = \mathrm{Nrd}_2\, K_2(A) = \ker\bigl(\alpha \cup - \colon K_2(F) \to H^4(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(3))\bigr),$$

且 $\mathrm{inv}_F(\alpha \cup -)$ 诱导出同构 $\mathrm{coker}(\mathrm{Nrd}_2) \cong {}^{1}\text{每 }\alpha\,\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$。此外，若 F 的第一剩余域的特征为零，则 Nrd_2 是单射。

结合定理 A，定理 E 表明，在维数至多为二的每个局部域上，$\mathrm{SK}_2(A) = \ker(\mathrm{Nrd}_2)$ 都为零（维数为零时，A 由 Wedderburn 定理可知是分裂的）。在维数四及以上时，这种消失现象不再成立（注 5.3.3）。这与 $\mathrm{SK}_1(A) = \ker(\mathrm{Nrd}_1)$ 的情形类似：它在维数至多为二的局部域上为零（[60, 31] 以及定理 E(1)），但在维数三时不为零 [65]。我们猜想，在每个三维局部域（猜想 5.3.1）以及二维和三维整体域（猜想 5.3.5）上，$\mathrm{SK}_2(A) = 0$ 都为零。

我们将这些结果应用于非交换类域论。

定理 F (定理 6.2.2、6.3.1 和 6.4.1，推论 6.3.2)。设 F 是一个数域，设A 是 F 上的中心单代数，并采用定理 *C* 的系数约定。

1. 定理 *B* 和 *C* 的比较映射诱导出映射 $c_A^{\mathrm{lc}}\colon \ \tau_{\geq 1}K(\mathrm{LCA}_A) \to \tau_{\geq 1}K(\mathrm{LCA}_F)$，且与 *[15],* 的局部化序列相容，使得 $\mathrm{fib}(c_A^{\mathrm{lc}}) \simeq \Sigma Z$。存在一个非典范等价

$$\tau_{\geq 2}K(\mathrm{LCA}_A) \simeq \tau_{\geq 2}K(\mathrm{LCA}_F) \oplus \Sigma Z.$$

特别地，c_A^{lc} 在次数 $1 \leq n \leq 4$ 上是同构。

2. 对于每个素数 p，若 A 在实位处分歧，则该素数为奇数；比较映射 c_A^{lc} 与 *Clausen* 的 *pro-p Artin* 映射 *[19],* 相容，而 A 的 *Artin* 映射在 $\mathrm{fib}(c_A^{\mathrm{lc}})$ 上为零。在 A 的阿代尔上，所得的 *Artin* 映射将 $(a_v)_v$ 送到 $\mathrm{rec}_{F,p}\bigl((\mathrm{Nrd}_{A_v/F_v}(a_v))_v\bigr)$，其中$\mathrm{rec}_{F,p}$ 是全局 *Artin* 映射复合到最大 *pro-p* 商的投影所得。

注意，Merkurjev–Suslin 猜想蕴含同构 $K_2(\mathrm{LCA}_A) \cong K_2(\mathrm{LCA}_F)$ [15, 定理 10.5] (定理 6.3.3)。

组织结构

第 1 节讨论非阿基米德局部域，运用 Clausen 和 Mathew [20], 的方法，并结合 [82], [32], 的成果以及扭曲循环复形的弗罗贝尼乌斯比较（附录 A），将 $K(D)$与其 étale 超层化进行比较。第 2 节利用 Bak 和 Rehmann [4], 的范数定理、针对 K_2 [55,的循环 Hilbert 90（定理 14）1], ，以及关于 $K_2(D)$模去分裂转移的局部–整体原理（由.....证明），证明整体域上的定理 A。

曲线上的皮卡范数。第 3 节运用 Kahn 和 Levine [39], 的扭曲动机谱序列、算术方块、来自同伦轨道的转移、塞尔默 K-理论 [20], , 以及 Quillen 对塞韦里–布劳尔簇的 K-理论的分解，构造整体比较。第 4 节和第 5 节运用 Kato 的高阶局部类域论 [44, 42, 48] ; 对于野分歧，则运用分次覆盖的相对拓扑循环同调（附录 B）。第 6 节运用 [15] 的局部化序列以及 Clausen 的塞尔默 K-同调[19], 讨论局部紧模。附录 A 讨论 F 的特征为 p 且具有 $[F$ 的域: $F^p] = p$: 它比较扭曲循环复形与普通循环复形（当周期为 p 的幂时）, 并证明 $K_i(D; \mathbb{Z}/p^a)$ $= 0$ for$i \geq 2$; 这是第 1–3 节在特征素数处所需的输入。附录 B 比较极大阶的相对 K- 理论与有限截断处的相对 TC, 并将所得类表示为整类，这是第 4 节处理野分歧以及第 5 节处理深层主单位所需的结果。附录 C 汇集带系数零循环的相关事实。

致谢

我衷心感谢 Seidai Yasuda 在本文准备过程中给予的宝贵支持。也感谢 Ryunosuke Nakano 帮助校对。本文得到日本学术振兴会科研费资助，项目编号为 JP26KJ0476。

人工智能的使用

本文中的所有证明均由 OpenAI 的 ChatGPT（GPT-6.1 Sol）给出。本稿在 Anthropic 的 Claude（Claude Opus 5.5）和 OpenAI 的 ChatGPT（GPT-6.1 Sol 和 GPT-6.2 Sol）的协助下撰写。作者对本稿的全部内容承担全部责任。

约定

扭曲的 K-理论。 我们使用非连通的 K-理论。对于中心单代数 A over$F$, 我们用 $K(A)$ 表示有限生成投射右 A-模的 K-理论谱。我们用 per A 和 ind A 分别表示其周期和指标, 即 $[A]$ 在 Br(F) 中的阶，以及属于其类的除代数 D 的次数；因此 ind $A = \deg D$。Morita 等价将 $K(A)$ 与 $K(D)$ 等同，其中 D 是 A的布劳尔类中的除代数；我们的所有陈述在此等同下均保持不变。因此，从现在起，我们按此方式将 A与 D 等同，并对除代数 D陈述所有结果。

约化秩 Nrd_0 将 $K_0(D)$与 $K_0(F) = \mathbb{Z}$中的子群 $\deg D \cdot \mathbb{Z}$ 对应起来；约化范数 Nrd_1 将 $x \in D^\times$ 的类映射为在分裂域 L上, $x \otimes 1$ 在$D \otimes_F L \simeq M_{\deg D}(L)$作用下的行列式；而 Nrd_2 则通过 D [55, 80] 的塞韦里 – 布劳尔簇的 K- 上同调来定义。对于 F 的实位 v , 我们将希尔伯特符号s_v: $K_2(F) \to \mathbb{Z}/2$ 记作加法形式: 若 a 和 b 在 v处均为负, 则 $s_v\{a, b\}$ $= 1$; 否则为 $s_v\{a, b\} = 0$。

局部域。 h维局部域 是一个域 $F = F_h$, 存在一些域F_{h-1}、……、F_0 使得 F_0 是有限域, 并且对于 $1 \leq i \leq h$, 域 F_i 是完备离散赋值域，其剩余域为 F_{i-1}。我们称 F_{h-1} 为 F的第一剩余域 , 称 F_0 为其最后剩余域 , 并将（char F_h, ……, char F_1）称为其特征序列。对于三维局部域 F, 我们将 inv_F: $H^4(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(3)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 记作加藤同构 [44, 定理 2]。对于特征为 p的域F , 我们令

$$H^{a+1}(F, \mathbb{Z}/p^r(a)) = H^1(F, W_r\Omega^a_{\log}),$$

其中 $W_r\Omega^a_{\log}$ 是对数德拉姆–维特层。

谱。我们用 Sp 表示谱范畴，用 $\mathbb{S}$ 表示球谱，用 $\otimes = \wedge$ 表示楔积，用 Σ 表示悬挂。全子范畴 $\mathrm{Sp}^{\geq a}$ 和 $\mathrm{Sp}^{\leq b}$ 分别由其同伦群在 a 以下和 b以上消失的谱组成，而 $\tau_{\geq a}$ 和 $\tau_{\leq b}$分别表示（$a-1$）连通覆盖和第 b 阶 Postnikov 截断。对于阿贝尔群M，我们用 HM 表示其 Eilenberg–Mac Lane 谱。对于谱 T、素数 ℓ 和整数 $n \geq 1$，我们用 $T_{\mathbb{Q}} = T \otimes H\mathbb{Q}$、$T_{(\ell)} = T \otimes \mathbb{S}_{(\ell)}$、$T[1/n]$ 分别表示有理化、在 ℓ 处的局部化以及对 n 求逆，并用 $T^{\wedge}_{\ell} = \operatorname{holim}_r T/\ell^r$ 表示导出 ℓ-完备化，其中 T/ℓ^r 是乘以 ℓ^r所得映射的余纤维。我们区分 $\pi_j(T^{\wedge}_{\ell})$ 与群 $\pi_j(T)$ 的 ℓ- 进完备化 $\varprojlim_r \pi_j(T)/\ell^r$。函子 $L_{K(1),\ell}$ 是关于高度一 Morava K 理论在 ℓ 处的 Bousfield 局部化，而 $L_{E(1),\ell}$ 是关于高度一 Johnson–Wilson 理论的相应局部化。对于作用于 T 上的有限群 G，我们记

$$T_{hG} = \operatorname*{colim}_{BG} T, \qquad T^{hG} = \lim_{BG} T$$

对于同伦轨道和同伦不动点，对于一个 G-模 M，我们用 M_G 表示普通的余不变元。

1 局部域上的扭曲 K理论

本节主要研究非阿基米德局部域。我们首先证明中心除法代数的正次数K-群与其中心的正次数K-群相同（第 1.1 节）。随后，我们将这些同构提升为正次数谱之间的等价（第1.2节）。

1.1 Étale 下降与约化范数

本小节的主要结果是定理 1.1.1。该定理表明，非阿基米德局部域上的中心除法代数的正次数K-群与该域的正次数K-群相同，并且与分裂转移和域范数相容。我们首先约定本文其余部分所使用的范数和代数。设 $R \to S$ 是环的一个同态，使得 S 作为右 R-模是完美的。标量限制 $\mathrm{Perf}(S) \to \mathrm{Perf}(R)$诱导出范数

$$N_{S/R} \colon K(S) \longrightarrow K(R).$$

范数与平坦基变换相容：若 $R \to S$ 是交换环 k 上的代数同态，且 k' 是平坦的交换 k-代数，则 $N_{S\otimes_k k'/R\otimes_k k'} \circ (- \otimes_k k') = (- \otimes_k k') \circ N_{S/R}$。对于可复合的映射 $R \to S \to T$，若 S 作为右 R-模是完美的，且 T 作为右 S-模是完美的，则有 $N_{T/R} = N_{S/R} \circ N_{T/S}$。

设 F 是一个域，A 是 F上的中心单代数，D 是 A的布劳尔类中的除代数。由于 Morita 等价将 $K(A)$ 与 $K(D)$ 等同，从现在起我们用 D 代替 A。对于标量扩张，我们记 $i_D \colon K(F) \to K(D)$。约化范数记为 $\mathrm{Nrd}_i \colon K_i(D) \to K_i(F)$（范数，2）。我们用 F^{sep} 表示 F的可分闭包。对于域扩张 E/F，令 $D_E = D \otimes_F E$为一个中心单 E-代数，它不一定是除代数；令 D' 为其布劳尔类中的除代数。当将针对中心除代数陈述的结果应用于 D_E时，我们通过一个具有相容 E-作用的单 (D', D_E)-双模所给出的 Morita 等价，将 $K(D_E)$ 与 $K(D')$ 等同。范数仍针对 D_E 本身计算：若 $D_E \simeq M_r(D')$，则在此等同下有 $N_{D_E/E} = r\, N_{D'/E}$。若 E/F 有限且分裂 D，我们通过一个单 (E, D_E)-双模所给出的 Morita 等价，将 $K(E)$ 与 $K(D_E)$ 等同，其中 E 的两个作用彼此一致；此

等同不依赖于单双模的选取。分裂转移是以下复合映射

$$\theta_E\colon K(E)\simeq K(D_E)\xrightarrow{N_{D_E/D}}K(D).$$

一个简单的（E, D_E）-双模的维数为 deg D over E，因此在此同构下 $N_{D_E/E}=\deg D$，而范数的传递性给出

$$N_{D/F}\circ\theta_E=\deg D\cdot N_{E/F}.$$

在本小节中， F 是一个非阿基米德局部域，其剩余域 k 的特征为 p。

定理 1.1.1. 设 F 是一个非阿基米德局部域， D 是 F上的中心除法代数。对于每个 $j\geq 1$，存在一个同构

$$\nu_{j,D}\colon K_j(D)\xrightarrow{\sim}K_j(F)$$

对于 D的每个有限分裂域 E/F，它都满足$\nu_{j,D}\theta_E=N_{E/F}$。对于有限可分扩张 $F\prime/F$，它满足$\nu_{j,D_{F'}}$。限制$_{F'/F}$ =限制$_{F'/F}\circ\nu_{j,D}$，以及$\nu_{j,D}\circ N_{D_{F'}/D}=N_{F'/F}\circ\nu_{j,D_{F'}}$；对于 $D_{F\prime}$，采用上述约定；并且 次数 $D\cdot\nu_{j,D}=\pi_j N_{D/F}$。在次数为1和2时，它分别是约化范数$_1$和约化范数$_2$，。

定理 1.1.1 的证明见本小节末尾。

设 $K^{\text{ét}}(D)$ 为 F 的小 étale site 上 $L\mapsto K(D_L)$ 超层化的整体截面谱，并设

$$c_D\colon K(D)\longrightarrow K^{\text{ét}}(D)$$

为 étale 比较映射。对于有限可分扩张 E/F，交换图中的 étale 比较映射 c_E: $K(E)\to K^{\text{ét}}(E)$ 在 $i\geq 0$ [20, 时诱导 π_i 上的同构（定理 7.12(2) 和 7.13]）。在每个素数 ℓ 处，该定理中的维数上界至多为二：当 $\ell\neq$ char E 时为 vcd$_\ell(E)$；当 $\ell=p=$ char E 时为 $1+\log_p[E\colon E^p]=2$。记 $G_F=$Gal(F^{sep}/F) 和$G_k=$Gal(k^{sep}/k)。定理 1.1.1 的证明将 $K(D)$ 与其 étale 层化进行比较；二者的几何茎由 Morita 等价可知相同。引理 1.1.2 表明，在次数至少为二时，经过完备化后该比较是一个同构。引理 1.1.3 给出了参与整下降的伽罗瓦上同调的消失范围；引理 1.1.4 利用这一结果证明，étale 理论的 π_0 无挠，且 π_1上的比较映射为 Nrd$_1$。引理 1.1.5 将引理 1.1.2 和引理 1.1.4 合并为一个整比较；引理 1.1.6 则用余不变元描述偶数次数。

引理 1.1.2. 对于每个素数 ℓ，映射

$$(c_D)^\wedge_\ell\colon K(D)^\wedge_\ell\longrightarrow K^{\text{ét}}(D)^\wedge_\ell$$

对每个 $j\geq 2$，都在 π_j 上诱导一个同构。如果 $\ell\neq$特征 F，局部化单位

$$K(D)^\wedge_\ell\longrightarrow L_{K(1),\ell}K(D)$$

对每个 $j\geq 2$，都在 π_j 上诱导一个同构。

证明。 我们首先计算导出 ℓ-完备化后的目标。令 $\ell\neq$ char F and $a\geq 1$。由 Morita 等价，几何茎为

$$\pi_t\big(K(D_{F^{\text{sep}}})/\ell^a\big)\simeq\pi_t\big(K(F^{\text{sep}})/\ell^a\big)\simeq\begin{cases}\mathbb{Z}/\ell^a(b), & t=2b\geq 0,\\ 0, & \text{otherwise},\end{cases}$$

由 Gabber–Suslin 刚性以及 $K(F_{\mathrm{sep}})/\ell^a$ [79] 的计算可得；对于 $L_{K(1),\ell}K(D_{F^{\mathrm{sep}}})/\ell^a$，每个偶数次数 $t=2b\in\mathbb{Z}$ 都有相同公式，其中 $\mathbb{Z}/\ell^a(b)$。高度一局部化满足 étale 超下降，因为它是具有张量系数的弱局部化不变量 $\mathrm{Perf}(D)$ [20, Example 5.12 and Theorem 7.14] 的取值。因此，下降谱序列具有

$$E_2^{s,2b}=H^s(F,\mathbb{Z}/\ell^a(b)),\qquad E_2^{s,t}=0\quad(t\ \text{odd}).$$

由于几何次数均为偶数，且 $\mathrm{cd}_\ell(F)\le 2$，所以微分均为零；又由于这些群是有限群，其逆系统满足 Mittag–Leffler 条件。根据高度一局部化的超下降，局部化单位可分解为 $K(D)\xrightarrow{\wedge_\ell(c_D\wedge_\ell)}K^{\text{ét}}(D)^\wedge_\ell\to L_{K(1),\ell}K(D)$。$K^{\text{ét}}(D)/\ell^a$ 与 $L_{K(1),\ell}K(D)/\ell^a$ 的下降计算在正次数上相同，因此取逆极限后，第二个映射对 $j\ge1$ 的 π_j 诱导同构。由此，该引理的两个断言在 $\ell\neq\mathrm{char}\ F$ 时等价。对 a 取逆极限后，对于 $m\ge1$，

$$\pi_{2m-1}\big(K^{\text{ét}}(D)^\wedge_\ell\big)\simeq H^1(F,\mathbb{Z}_\ell(m)),\qquad \pi_{2m}\big(K^{\text{ét}}(D)^\wedge_\ell\big)\simeq H^2(F,\mathbb{Z}_\ell(m+1));$$

次数 $2m$ 的另一项，即 $H^0(F,\mathbb{Z}_\ell(m))$，为零，因为 F 的 ℓ-进圆分特征像是无限的。在几何 Morita 等价下，$N_{D/F}$ 在这些群上的作用为乘以 $\deg D$，而 θ_E 的作用为 $\mathrm{cor}_{E/F}$。

情形 $\ell\neq p$。设 E/F 是次数为 $\deg D$ 的非分歧扩张，且其分裂 D。我们首先证明

$$\mathrm{cor}_{E/F}\colon \pi_j\big(K^{\text{ét}}(D_E)^\wedge_\ell\big)\longrightarrow\pi_j\big(K^{\text{ét}}(D)^\wedge_\ell\big)$$

对 $j\ge2$ 是满射的。设 $I_F\subset G_F$ 为惯性子群，于是 $G_F/I_F\simeq G_k$ 且 $\mathrm{cd}(G_k)=1$。由于 $\ell\neq p$，我们有 $H^1(I_F,\ \mathbb{Z}_\ell(m))\simeq\mathbb{Z}_\ell(m-1)$ 作为 G_k-模。对于 $m\ge2$，我们有 $H^0(k,\ H^1(I_F,\ \mathbb{Z}_\ell(m)))=H^0(k,\ \mathbb{Z}_\ell(m-1))=0$，因此

$$H^1(F,\ \mathbb{Z}_\ell(m))\simeq H^1(k,\mathbb{Z}_\ell(m))\quad(m\ge2),\qquad H^2(F,\mathbb{Z}_\ell(m+1))\simeq H^1(k,\mathbb{Z}_\ell(m))\quad(m\ge1).$$

在 $H^1(k,\ \mathbb{Z}_\ell(m))$ 上，沿非分歧扩张 E/F 的余限制是到弗罗贝尼乌斯余不变量上的商映射，因而是满射的。为了推出对 $j\ge2$ 而言 $\pi_j((c_D)^\wedge_\ell)$ 的满射性，我们沿同构 $\pi_j((c_E)^\wedge_\ell)$ 提升一个类，其中根据 Morita 等价，$K(D_E)\simeq K(E)$，并使用

$$c_D\circ\theta_E=\mathrm{cor}_{E/F}\circ c_E.$$

对于单射性，先假设 $p\nmid\deg D$。Suslin 和 Yufryakov 通过极大阶的约化与局部化 [82, 引理 2 和定理 3] 计算出 $K_*(D)$。由此可得，对于 $j\ge2$，

$$\#\varprojlim_a K_j(D)/\ell^a=\#\pi_j\big(K^{\text{ét}}(D)^\wedge_\ell\big)<\infty.$$

他们的分解以及对 $K_1(D)$ 的描述表明，$K_{j-1}(D)[\ell^\infty]$ 是有限的，因此 Bockstein 正合列中的 Tate 模 $\varprojlim_a K_{j-1}(D)[\ell^a]$ 消失。由于有限系数群是有限的，Moore 塔满足 Mittag–Leffler 条件，Milnor $\varprojlim^1$ 项也随之消失；因此，前一段中的满射是同阶有限群之间的满射，故为同构。对于一般的 D，令 F'/F 为次数 $p^{v_p(\deg D)}$ 的非分歧扩张，这样 $D_{F'}$ 的指标与 p 互素。由于 $\mathrm{cor}^{F'/F}\circ\mathrm{res}_{F'/F}=[F'\colon F]\in\mathbb{Z}_\ell^\times$，限制映射在 $\pi_j(K(D)^\wedge_\ell)$ 上是单射，因此，在 F' 上的情形表明，由 $(c_D)^\wedge_\ell$ 诱导的映射的核在 F 上消失。

情形 $\mathrm{char}\,F=0$ 和 $\ell=p$。在此情形下，我们使用 Hesselholt–Larsen–Lindenstrauss [32, 定理 B(1) 和定理 2.5], 中的闭支撑迹比较，这给出

$$\tau_{\ge2}K(D)^\wedge_p\simeq\tau_{\ge2}K(F)^\wedge_p,$$

在剩余特征为二时，根据 [32, 定理 B]之后的段落，该结论同样成立。由于$L_{K(1),\ p}HM \simeq 0$ 对于每个阿贝尔群 M，连通谱 T 满足 $L_{K(1),\ p}\tau_{\geq 2}T \simeq L_{K(1),\ p}T$。因此，对于连通 T，局部化单位在 π_j 上的映射对$j \geq 2$ 是同构，当且仅当它对 $\tau_{\geq 2}T$也是同构。根据关于 F [20,的 Quillen–Lichtenbaum 比较、定理 6.13(1) 以及 7.13–7.14],，映射 $K(F)^\wedge_p \to L_{K(1),\ p}K(F)$ 在 π_j 上对 $j \geq 2$诱导同构。根据局部化单位的自然性以及上述等价性， D 的结果随即得到。根据上文局部化单位的分解，该分解在特征零的$\ell = p$ 情形下也成立， [20, 例 6.3], $(c_D)^\wedge_p$在 π_j 上对 $j \geq 2$诱导同构。

情形 char $F = \ell = p$。于是 $[F\colon\ F^p] = p$，而命题 A.3(2)给出

$$\pi_j(K(D)/p^a) = 0 \qquad (j \geq 2).$$

由于 $[F_{\mathrm{sep}}\colon\ (F_{\mathrm{sep}})^p] = p$同样成立，在分裂莫里田等价下， $K(D_{F^{\mathrm{sep}}})/p^a$ 也满足相同的消失。这一上界在 étale 超层的整体截面以及逆极限下保持不变。

□

引理 1.1.3。对于 $t \geq 2$ 和 $s \geq 1$，我们有

$$H^s\big(F, K_t(F^{\mathrm{sep}})\big) = 0$$

除非 $s = 1$ 和 t 为奇数。

证明。对于 $t \geq 2$，群 $K_t(F^{\mathrm{sep}})$是可整除的，而对于 $b \geq 1$

$$K_{2b}(F^{\mathrm{sep}}) \otimes \mathbb{Q} \simeq K_{2b}(F^{\mathrm{sep}}), \qquad K_{2b+1}(F^{\mathrm{sep}})_{\mathrm{tors}} \simeq \bigoplus_{\ell \neq \mathrm{char}\, F} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(b+1),$$

其中在混合特征情形下，和包括 $\ell = p$，并且 $K_{2b+1}(F^{\mathrm{sep}})/K_{2b+1}(F^{\mathrm{sep}})_{\mathrm{tors}}$ 是一个有理向量空间。对于 F 的代数闭包，这是 Suslin 定理 [79], ；在特征零下， F_{sep}是代数闭的。在特征 p下，从 F^{sep}到其代数闭包的限制在将 p取逆后是同构，因为对于每个有限纯不可分扩张 $F\prime/F^{\mathrm{sep}}$

$$N_{F'/F^{\mathrm{sep}}} \operatorname{res}_{F'/F^{\mathrm{sep}}} = \operatorname{res}_{F'/F^{\mathrm{sep}}} N_{F'/F^{\mathrm{sep}}} = [F' : F^{\mathrm{sep}}].$$

对于 p部分， $F_{\text{可分}}$及其有限纯不可分扩张 F'满足 $[F'\colon\ F'^p] = p$，因此$K^M_t(F')/p = 0$ 对 $t \geq 2$ 由对数微分给出；此外，Geisser 和 Levine 的计算连同次数 t 和 $t+1$ 中的 Bockstein 正合列表明， $K_t(F^{\mathrm{sep}})$ 对于 $t \geq 2$ [27]是唯一 p-可整除的。

离散有理系数的正次数上同调通过平均化而消失，这证明了 t 偶数情形的断言。对于 $t = 2b+1$ 奇数情形和 $s \geq 2$，挠子群与有理商的长正合列将该断言归约为挠子群的情形。在那里，对于 $s \geq 3$， H^s 因 $\mathrm{cd}_\ell(F) \leq 2$而消失；而对于 $s = 2$，局部 Tate 对偶 [84] 以及$H^0(F,\ \mathbb{Z}_\ell(-b)) = 0$ 给出

$$H^2\big(F, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(b+1)\big) = 0.$$

□

对于域 F 上的中心单代数 B， $\pi_0K^{\text{ét}}(B)$ 中一个类的几何秩 是它在 $\pi_0K^{\text{ét}}(B_{F^{\mathrm{sep}}}) \simeq \pi_0K(F_{\mathrm{sep}}) = \mathbb{Z}$中的像，其中映射由 Morita 等价给出；类似地，对于$\ell \neq \mathrm{char}\ F$, $\pi_0L_{K(1),\ell}K(B)$ 中一个类的几何秩是它在 $\pi_0L_{K(1),\ell}K(B_{F^{\mathrm{sep}}}) \simeq \pi_0L_{K(1),\ell}K(F^{\mathrm{sep}}) = \mathbb{Z}_\ell$中的像。几何秩为 1 的类是第 1.2 节和第 3.2 节比较映射的基本输入。

引理 1.1.4。 群 $\pi_0 K^{\text{ét}}(D)$ 是无挠的；在由边缘映射给出的同构 $\pi_1 K^{\text{ét}}(D) \simeq F^\times$ 下，映射 $\pi_1(c_D)$ 是约化范数同构

$$\mathrm{Nrd}_1 \colon K_1(D) \xrightarrow{\sim} F^\times.$$

此外，$(c_D)^\wedge_\ell$对每个素数 ℓ都在 π_1 上诱导一个同构。若 $\ell \neq$特征 F，则局部化单位 $K(D) \xrightarrow{\wedge}_\ell \to L_{K(1),\ \ell} K(D)$ 也在 π_1上诱导一个同构。

证明。 我们使用整数下降谱序列

$$E_2^{s,t} = H^s\big(F, K_t(F^{\mathrm{sep}})\big) \Longrightarrow \pi_{t-s} K^{\text{ét}}(D),$$

其系数通过 Morita 等价与 F 的系数相识别。对于任意离散模 W，我们先分离出其挠子群，再将无挠商有理化；由于对于挠系数，$\mathrm{cd}_\ell(F) \le 2$，我们得到 $H^s(F, W) = 0$（对于 $s > 3$），因此谱序列收敛。由引理 1.1.3，在行 $t \ge 2$ 中，含有 $s \ge 1$ 的项里唯一可能非零的是 $H^1(F, K_t(F^{\mathrm{sep}}))$，其中 t 为奇数。在总次数一中，$H^1(F, K_2(F^{\mathrm{sep}}))$ 和 $H^2(F, K_3(F^{\mathrm{sep}}))$ 因而为零，离开 $E_r^{0,\,1}$ 的微分的目标 $E_r^{r,\,r}$ 也为零。因此，边缘映射给出 $\pi_1 K^{\text{ét}}(D) \simeq F^\times$。将 $\pi_1(c_D)$ 与该边缘映射复合后，先将标量扩张到 $D_{F^{\mathrm{sep}}} \simeq M_{\deg D}(F^{\mathrm{sep}})$，再取行列式，故其为 Nrd_1。映射 $\mathrm{Nrd}_1 \colon K_1(D) \to F^\times$ 是满射： D 在 F 上的分歧指数为 $\deg D$，且包含一个非分歧极大子域，因此 Nrd_1 取遍所有赋值；从该非分歧极大子域出发的范数在单位上满射 [76, V, §2, 命题 3(b) 及其推论；XII, §2, 命题 1–2 及习题 2–3]。它是单射，因为 $\mathrm{SK}_1(D) = 0$[31, 推论 4.10(iii)]；此处的假设成立，因为 D 是温和且半分歧的，其剩余域是 k 上的一个循环扩张，次数为 $\deg D$，而其中出现的循环剩余伽罗瓦群的 Tate群 $\widehat{H}^{-1}$ 由希尔伯特90知为零。在总次数零中，

$$H^1\big(F, (F^{\mathrm{sep}})^\times\big) = 0, \qquad H^2\big(F, K_2(F^{\mathrm{sep}})\big) = 0,$$

分别由希尔伯特90和引理 1.1.3 得出。因此，几何秩映射 $\pi_0 K^{\text{ét}}(D) \to H^0(F,\ \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ 是单射，且 $\pi_0 K^{\text{ét}}(D)$ 无挠。

设 T 为 $K(D)$ 或 $K^{\text{ét}}(D)$。由于 $\pi_0 T$ 无挠，Bockstein 正合列给出 $\pi_1(T/\ell^a) \simeq \pi_1(T)/\ell^a$。导出完备化的 Milnor 列为

$$0 \to \varprojlim{}^1_a\, \pi_2(T/\ell^a) \to \pi_1(T^\wedge_\ell) \to \varprojlim_a \pi_1(T/\ell^a) \to 0.$$

$\{\pi_2(T)/\ell^a\}_a$ 的过渡映射是满射，因此二次 Bockstein 正合列的导出逆极限给出

$$\varprojlim{}^1_a\, \pi_2(T/\ell^a) \simeq \varprojlim{}^1_a\, \pi_1(T)[\ell^a].$$

同构 $\pi_1(c_D)$ 在两个外项上诱导同构，由此证明了一次情形下的结论。

设 $\ell \neq$特征为 F。则 $\pi_1 L_{K(1),\ \ell} K(D) \simeq H^1(F,\ \mathbb{Z}_\ell(1))$，而 Kummer 理论和希尔伯特90给出 $H^1(F,\ \mu_{\ell^a}) \simeq F^\times/(F^\times)^{\ell^a}$。由于 $F^\times[\ell^\infty]$ 是有限的，ℓ次单位根的逆系统 $\{F^\times[\ell^a]\}_a$ 满足 Mittag–Leffler 条件，且 $\varprojlim{}^1_a F^\times[\ell^a] = 0$。因此

$$H^1(F, \mathbb{Z}_\ell(1)) \simeq \varprojlim_a F^\times/(F^\times)^{\ell^a}.$$

结合 $\pi_1(c_D) = \mathrm{Nrd}_1$, ，这些同构表明 $K(D)^\wedge_\ell \to L_{K(1),\ \ell} K(D)$ 在 π_1 上也诱导出一个同构。 □

引理 1.1.5。 *étale* 比较映射 $c_D\colon\ K(D) \to K^{\text{ét}}(D)$ 对每个 $j \geq 1$ 在 π_j 上诱导出一个同构。对于 $\ell \neq$ 特征 F，局部化单位 $K(D)^{\wedge}_{\ell} \to L_{K(1),\,\ell}K(D)$ 也对每个 $j \geq 1$ 在 π_j 上诱导出一个同构。

证明。令 $Y = \mathrm{cofib}(c_D)$。设 E/F 为一个有限可分裂域，且 $Y_E = \mathrm{cofib}(c_{D_E})$。由 Morita 等价及上述关于域的比较映射，$\pi_i Y_E = 0$ 对 $i \geq 1$成立。由于 $\mathrm{cor}^{E/F} \circ \mathrm{res}_{E/F} = [E\colon F]$ 在 $\pi_i Y$ 上，我们得到

$$[E : F] \cdot \pi_i Y = 0 \qquad (i \geq 1).$$

由引理 1.1.2 和 1.1.4，$\pi_i(Y_\ell^{\wedge}) = 0$ 对 $i \geq 2$ 成立，且 $\pi_1(c_D) = \mathrm{Nrd}_1$ 是一个同构。于是，$Y/\ell \simeq Y_\ell^{\wedge}/\ell$ 的 Bockstein 正合列给出 $\pi_i(Y)[\ell] = 0$ 对 $i \geq 2$成立，而有界指数意味着 $\pi_i Y = 0$ 对 $i \geq 2$成立。对于 $\ell \neq$ 特征为 char F的情形，这两个引理分别给出 π_j 上针对 $j \geq 2$ 的高度一比较，以及 π_1上的高度一比较。 □

为了定义定理 1.1.1 中的偶次数同构，我们用余不变元来描述伽罗瓦扩张所给出的分裂转移。

引理 1.1.6. 设 L/F 是一个伽罗瓦群为 G 的有限伽罗瓦扩张，且 $m \geq 1$。那么范数 $N_{D_L/D}$ 诱导出一个同构

$$K_{2m}(D_L)_G \xrightarrow{\sim} K_{2m}(D).$$

此外，$K_{2m}(D)/K_{2m}(D)_{\mathrm{tors}}$ 是一个有理向量空间，并且 $N_{D_L/D}$ 将 $(K_{2m}(D_L)_{\mathrm{tors}})_G$ 映到 $K_{2m}(D)_{\mathrm{tors}}$ 上。将 D 替换为 F 后，以上断言仍然成立。

证明。令

$$M = K_{2m+1}(F^{\mathrm{sep}}), \qquad P = K_{2m}(F^{\mathrm{sep}}).$$

由整数下降、L 上的引理 1.1.5 以及引理 1.1.3，可得一个自然的正合序列

$$0 \longrightarrow H^1(L, M) \longrightarrow K_{2m}(D_L) \longrightarrow H^0(L, P) \longrightarrow 0.$$

右侧项是有理向量空间，左侧项是挠群，因此 $H^1(L,\ M)$ 是 $K_{2m}(D_L)$ 的挠子群。对于 $L = F$，这表明 $K_{2m}(D)/K_{2m}(D)_{\mathrm{tors}}$ 是有理向量空间。限制与转移与这些正合序列相容，并且在外侧项上分别通过伽罗瓦限制与余限制作用，因为在几何点上，它们分别是对角映射，以及对可分基变换的各个因子求和。在局部 Tate 对偶下，余限制的对偶

$$H^1(L, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m+1))_G \longrightarrow H^1(F, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m+1))$$

是限制 [84]。由于对偶系数是 $\mathbb{Z}_\ell(-m)$ 和 $H^0(L,\ \mathbb{Z}_\ell(-m)) = 0$，通胀–限制将此限制映射识别为一个到不变元上的同构。对于M/M_{tors} 和 P，我们对有理系数进行平均化：在带有 G-作用的有理向量空间上，范数给出从余不变元到不变元的同构。我们有

$$H^1(L, M) \simeq \mathrm{coker}\big(H^0(L, M/M_{\mathrm{tors}}) \to H^1(L, M_{\mathrm{tors}})\big), \qquad H_1(G, H^0(L, P)) = 0,$$

因此，余限制在两个外项的余不变元上诱导出同构，进而在 $K_{2m}(D_L)_G$ 上也诱导出同构。由于左侧各项是挠子群，它们在余不变元上的同构 $(K_{2m}(D_L)_{\mathrm{tors}})_G \xrightarrow[\sim]{N_{D_L/D}} K_{2m}(D)_{\mathrm{tors}}$ 即为第二个断言。同样的计算也适用于 F。

□

定理 *1.1.1* 的证明。我们先讨论奇数次数 $j = 2m-1 \geq 3$。由引理 1.1.3 可知，下降中对总次数 j 唯一有贡献的是 $H^0(F,\ K_j(F^{\mathrm{sep}}))$，而从该项出发的微分都落在零群中。将引理 1.1.5 应用于 D 和 F，étale 比较映射给出 $K_j(D) \simeq \pi_j K^{\text{ét}}(D)$ 和 $K_j(F) \simeq \pi_j K^{\text{ét}}(F)$。边缘映射

$$e_D \colon \pi_j K^{\text{ét}}(D) \longrightarrow H^0(F, K_j(F^{\mathrm{sep}})), \qquad e_F \colon \pi_j K^{\text{ét}}(F) \longrightarrow H^0(F, K_j(F^{\mathrm{sep}}))$$

识别这些群，并且与限制和转移相容。我们将$\nu_{j,\ D}$ 定义为复合映射

$$K_j(D) \xrightarrow{\pi_j(c_D)} \pi_j K^{\text{ét}}(D) \xrightarrow{e_D} H^0(F, K_j(F^{\mathrm{sep}})) \xrightarrow{e_F^{-1}} \pi_j K^{\text{ét}}(F) \xrightarrow{\pi_j(c_F)^{-1}} K_j(F).$$

对于正规化$\nu_{j,\ D}\theta_E = N_{E/F}$，分裂域 E 不一定是可分的。令 E_s为其最大可分子扩张。代数 $E \otimes_F F^{\mathrm{sep}}$ 是一个乘积，其指标由 E_s的嵌入给出；每个因子都是 F^{sep}的纯不可分域扩张，并且 D在每个扩张上都分裂。在共同的几何 Morita 识别下， θ_E 在每个因子上的分量就是相应的域范数。因此，平坦基变换和边缘映射的单射性给出$\nu_{j,\ D}\theta_E = N_{E/F}$。在 e_D和 e_F的共同几何 Morita 识别下，几何点处的标量限制就是乘以 deg D，因此$e_F \circ \pi_j(c_F)$的单射性给出 deg $D \cdot \nu_{j,\ D} = \pi_j N_{D/F}$，其中次数为奇数。

接下来令 $j = 2m \geq 2$ 为偶数，并令 L/F 为伽罗瓦群为 G的有限伽罗瓦分裂域。根据引理 1.1.6，映射 θ_L 和 $N_{L/F}$ 诱导出同构

$$K_{2m}(D) \xleftarrow[\sim]{\theta_L} K_{2m}(L)_G \xrightarrow[\sim]{N_{L/F}} K_{2m}(F),$$

并定义 $\nu_{2m,D} = N_{L/F} \circ \theta_L^{-1}$，其中 θ_L 和 $N_{L/F}$ 表示 coinvariant 上诱导的映射。诱导的识别 $K_{2m}(L) \simeq K_{2m}(D_L)$是 G-等变的，因为共轭会将定义中的单单双模映到一个与之同构的单双模。此定义与 L无关：两个伽罗瓦分裂域可通过它们的合成域进行比较，利用从合成域出发的域范数的满射性以及转移的传递性。对于任意有限分裂域E/F，扩张 LE/E 是伽罗瓦扩张，因此其偶次域范数由应用于 E上的引理 1.1.6 可知是满射的，而转移的传递性给出 $\nu_{2m,D}\theta_E = N_{E/F}$。对于有限可分扩张 F'/F，取一个包含 F'的伽罗瓦分裂域 L/F；则 $\nu_{2m,\ D}$与沿 F'/F的限制与转移相容。事实上，张量积的限制的 Mackey 公式给出在 θ_L的像上的限制恒等式，而转移的传递性给出分裂转移 $\theta_{L/F'} \colon K(L) \to K(D_{F'})$ 在 $D_{F'}$上的像上的转移恒等式。恒等式 $N_{D/F}\theta_L =$ deg $D \cdot N_{L/F}$给出 deg $D \cdot \nu_{2m,D} = \pi_{2m} N_{D/F}$。在二次情形下，命题 6.6.1(1)中的转移公式 $\mathrm{Nrd}_2\, \theta_L = N_{L/F}$ [39,] 以及 θ_L 的满射性给出$\nu_{2,D} =$Nrd$_2$。

剩下的情形是次数为一。我们令$\nu_{1,\ D} =$ Nrd$_1$, ，由引理 1.1.4 可知这是一个同构。与限制的相容性由约化范数的基变换得到。约化范数的转移公式 [39, 命题 6.6.1(1)] 给出 $\mathrm{Nrd}_1\, \theta_E = N_{E/F}$ 以及 $\mathrm{Nrd}_1 \circ N_{D_{F'}/D} = N_{F'/F} \circ \mathrm{Nrd}_1$。对于 $x \in D^\times$， x 在F-向量空间 D 上的乘法行列式为 Nrd$_1(x)^{\deg D}$，因此

$$\pi_1 N_{D/F} = \deg D \cdot \mathrm{Nrd}_1 \quad \text{on } K_1(D).$$

□

1.2 正次数谱的规范化等价

在本小节中，我们将定理 1.1.1 的同构提升为正次数谱之间的等价。接着，我们证明，这种等价一般不能通过

将范数除以 $\deg D$ 来获得，并记录之后会用到的秩一引理以及有限伽罗瓦扩张下的自然性。

定理 1.2.1. 设 F 是一个非阿基米德局部域， D 是 F上的中心除代数。存在一个谱的等价

$$g\colon \tau_{\geq 1}K(D) \xrightarrow{\sim} \tau_{\geq 1}K(F)$$

同时诱导定理 *1.1.1* 中的所有同构。

定理 1.2.1 的证明将在下文引理 1.2.4 之后给出。

我们将有理部分上的 $N_{D/F}/\deg D$与引理 1.2.2 在特征为 $\ell \neq \operatorname{char} F$的素数处的秩一等价的逆映射粘合起来。在特征素数处，我们在p-完备因子上使用 Nrd_1，它集中在一次。然后，我们利用算术方形的边界来修正偶次数映射。

秩一的输入是下面这个引理。我们也在整体域上陈述它，因为它会在第 3.2 节再次用到。我们记录有限伽罗瓦扩张下与谱 Mackey 函子的相容性。对于有限群 G，记 $\mathscr{M}_G$ 为有限 G-集的有效 Burnside 范畴上的谱 Mackey 函子范畴；普通 Mackey 函子的阿贝尔范畴记为 $\mathcal{M}_G$。对于群为 G 的有限伽罗瓦扩张 L/F 以及 F上的中心单代数 B，函子 $G/H \mapsto K(L^H)$（配备有限 étale 代数之间的张量积和范数）是一个交换谱 Green 函子，而 $G/H \mapsto K(B_{L^H})$是其上的模。在高度一局部化之后，我们用$\mathbf{R}_\ell$ 和$\mathbf{M}_\ell$ 表示相应的、取值于$L_{K(1),\,\ell}$-局部谱的函子，并用相同记号 $N_{B_{F'}/B}$ 表示高度一局部化之后的范数。

引理 1.2.2。设 F 是一个非阿基米德局部域或整体域，设 B 是 F 上的中心单代数，并假设 $\ell \neq$特征 F。若 F 是整体域，则假设 B 在 F 的每个实位处分裂。设 $x_\ell \in \pi_0 L_{K(1),\,\ell}K(B)$ 具有几何秩 1，并且对于有限可分扩张 $F\prime/F$，令 $x_{\ell,F\prime} =$限制$^{F'/F}\, x_\ell$。

1. 乘以 x_ℓ 是 $L_{K(1),\ell}K(F)$-模的等价

$$m_{x_\ell}\colon L_{K(1),\ell}K(F) \xrightarrow{\sim} L_{K(1),\ell}K(B).$$

2. 对于群为 G 的有限伽罗瓦扩张 L/F，映射 $m_{x_{\ell,L^H}}$ 是等价 $\mathbf{R}_\ell \to \mathbf{M}_\ell$ 在轨道 G/H 处的分量，其中等价是 $\mathscr{M}_G$ 中 $\mathbf{R}_\ell$-模之间的等价。特别地，它们保持限制、共轭以及转移的投影公式。

证明。 (1) 在 F^{sep} 上的 Morita 等价下，乘以一个几何秩 1 类在 étale KU_ℓ-模上作用为单位元，因此在每个带有限系数的几何茎上都是等价。étale 超下降和导出逆极限给出等价 m_{x_ℓ} [20]。

(2) 由于 $\mathbf{R}_\ell$ 是由一个生成元生成的自由 $\mathbf{R}_\ell$-模，我们有

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{Mod}_{\mathbf{R}_\ell}}(\mathbf{R}_\ell, \mathbf{M}_\ell) \simeq \Omega^\infty \mathbf{M}_\ell(G/G).$$

x_ℓ 的一个代表元因而定义了一个映射 $m_{x_\ell}\colon \mathbf{R}_\ell \to \mathbf{M}_\ell$，其为 $\mathbf{R}_\ell$-模的映射，在G/H 处的分量是乘以 $x_{\ell,\,L^H} = \mathrm{res}^{L^H/F}\, x_\ell$。特别地，对于每个中间域 F'，

$$N_{B_{F'}/B} \circ m_{x_{\ell,F'}} \simeq m_{x_\ell} \circ N_{F'/F}.$$

同伦是模映射结构的一部分。由于该映射在每个轨道上都是等价，其在同一范畴中的逆映射即使对于虚拟秩 1 类，也保留了与限制、转移、共轭及其复合映射的相容性 [6]，[7，第 3–5 节，构造 9。7]。

□

引理 1.2.3。 设 F 为非阿基米德局部域或全局域，设 $\ell \neq$ 特征 F 为素数，并设 $a \in \pi_0 L_{K(1),\ell} K(F)$ 具有几何秩 0。如果 $\ell = 2$ 且 F 具有实位，则进一步假设 a 在每个实位的代数实闭包 F_v^{rc} 处限制为零 v。那么对于每个 $y \in \pi_j L_{K(1),\ell} K(F)$，均有 $a \cdot y = 0$，其中 $j \geq 1$。

证明。 我们将 $\ell = 2$ 和 F 具有实位的情形称为实相对情形；在这种情形下，我们用 H^i_{rel} 表示在所有实位处限制到代数实闭包的纤维的上同调。在绝对情形下，令 $\star$ 为空；在实相对情形下，令 $\star =$ 为 rel。在绝对情形下，有限 ℓ-主系数的上同调在二次以上消失，因为 $\mathrm{cd}_\ell(F) \leq 2$。在实相对情形下，对于有限系数，限制到实位的映射在 H^2 上是满射，在 $H^{\geq 3}$ [59, I 上是同构（定理 4.10(c) 和推论 4.16], ），因此纤维的长正合列给出 $H^i_{\mathrm{rel}} = 0$，其中 $i > 2$。

令实数域 r 为模 ℓ^r 的周期性 étale K 理论超层。由于 $F(\mu_{\ell^\infty})/F$ 是无限扩张，F 的 ℓ- 进圆分特征具有无限像（当 ℓ 不等于剩余特征或常数特征时，这可从弗罗贝尼乌斯上看出；对于 ℓ 等于剩余特征的混合特征局部域，$F/\mathbb{Q}_\ell$ 有限且 $[\mathbb{Q}_\ell(\mu_{\ell^r}) : \mathbb{Q}_\ell]$ 无界），因此

$$H^0(F, \mathbb{Z}_\ell(n)) = 0 \qquad (n > 0).$$

因此，每个带有 $y \in \pi_j L_{K(1),\ell} K(F)$ 且具有 $j > 0$ 的对象都沿着该映射提升

$$\pi_j \varprojlim_r R\Gamma(F, \tau_{\geq j+1} \mathcal{R}_r) \longrightarrow \pi_j L_{K(1),\ell} K(F).$$

事实上，截断余纤维 $\tau_{\leq j} \mathcal{R}_r$ 的整体截面具有零 π_{j+1}，其 π_j 在 j 为偶数时是 $H^0(F, \mathbb{Z}/\ell^r(j/2))$，在 j 为奇数时为零；这些群关于 r 的逆极限为零。同样，根据几何茎的描述以及其几何秩的消失，a 可提升为 $\tau_{\geq 2} \mathcal{R}_r$ 的截面。在实相对情形中，a 可提升为相对截面，而 $\tau_{\leq 1} \mathcal{R}_r$ 的相对截面具有零 π_0，因为 $H^0_{\mathrm{rel}}(F, \mathbb{Z}/\ell^r) = 0$，且不存在奇数几何层。

为了将这两个提升相乘，我们使用 Moore塔的对偶的直极限，

$$\varinjlim_r (\mathbb{S}/\ell^r)^\vee \simeq \mathrm{fib}(\mathbb{S} \to \mathbb{S}[1/\ell]).$$

它由映到 ℓ-primary 挠的 smashing余局部化的余单位赋予余代数结构。由于有限 Moore 谱的紧性，在每个有限阶段，余乘法都经过两个充分靠后的阶段的张量积。取对偶后，便在逆系统上得到乘积；而连通性的可加性将 $\tau_{\geq 2}$ 阶段与 $\tau_{\geq j+1}$阶段的乘积送到 $\tau_{\geq j+3}$。这种乘法定义在塔上，而无需在每个有限 Moore 谱上赋予环结构。在实相对情形中，实限制的纤维是绝对截面的一个模，因此同一个乘积使用一个相对阶段和一个绝对阶段。

这一阶段的 $\star$-截面的几何次数满足 $t \geq j+3$，上同调次数满足 $s \leq 2$，因此总次数满足 $t - s \geq j + 1$。于是，π_j 模 ℓ^r 消失，而 π_{j+1} 中唯一可能出现的项是在 $t - s = j + 1$ 时的 $H^2_\star(F, \mathbb{Z}/\ell^r(n))$，其中 $2n = j + 3$。这些群的过渡映射是满射，因为 $H^3_\star = 0$，所以 Milnor 列中的 $\varprojlim^1$ 消失，而 $a \cdot y = 0$ 位于完备群中。 □

修正步骤用到以下一般引理，该引理也用于命题 1.2.6 和第 6.2 节。

引理 1.2.4. 设 $Y \simeq Y_1 \times_W Y_2$ 是一个谱的拉回，其中 W 是有理的，并设 $\partial\colon \Omega W \to Y$ 是其边界。对于 $j \geq 1$，令 $V_j = \pi_{j+1} W$ 且令 $P_j =$ 像 $(\pi_{j+1} Y_1 \oplus \pi_{j+1} Y_2 \to V_j)$，于是 ∂ 诱导一个单射 V_j/P_j，$\to \pi_j Y$。设 X 是一个谱，其有理化

$q_X\colon X \to X_{\mathbb{Q}}$，令 $g^0\colon X \to Y$，并令 $\nu_j\colon \pi_j X \to \pi_j Y (j \geq 1)$ 是同态，使得 $\nu_j = \pi_j g^0$ 对于奇数 j 成立；而对于偶数 j，差 $\nu_j - \pi_j g^0$ 可分解为

$$\pi_j X \longrightarrow \pi_j X \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow V_j/P_j \longrightarrow \pi_j Y.$$

1. 若对每个偶数 $j \geq 2$ 都有 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, P_j) = 0$，则存在 $b\colon X_{\mathbb{Q}} \to \Omega W$，使得 $g = g^0 + \partial\, b\, q_X$ 对所有 $j \geq 1$ 都满足 $\pi_j g = \nu_j$，并且 g 与 g^0 和 $Y \to Y_1$、$Y \to Y_2$ 的复合映射相同。

2. 对有限群的谱 *Mackey* 函子也有同样的结论：将同伦群替换为同伦 *Mackey* 函子，前提是这些分解是 *Mackey* 函子的映射，并且在每个轨道上都有 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, P_j) = 0$。

3. 设 M 是有限生成的 $\mathbb{Z}_p$-模，令 $V = M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$，令 Λ 为 $M \to V$ 的像，并令 $\Gamma \subseteq V$ 为 p-可除子群。则 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \Gamma + \Lambda) = 0$。

证明。 (1) 令 $U_j = \pi_j X \otimes \mathbb{Q}$。由于 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(-, P_j)$ 将直和变为乘积，$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(U_j, P_j) = 0$，所以 $U_j \to V_j/P_j$ 可提升为同态 $U_j \to V_j$。由于两个群都是有理的，该同态是 $\mathbb{Q}$-线性的。有理谱由其同伦群决定，因此，这些偶数次数上的提升与其他所有次数上的零映射一起，可由映射 $b\colon X_{\mathbb{Q}} \to \Omega W$ 实现。于是，对每个 $j \geq 1$，$\pi_j(\partial\, b\, q_X) = \nu_j - \pi_j g^0$。边界 ∂ 与 $Y \to Y_1$ 和 $Y \to Y_2$ 复合后变为零映射，因此修正不会改变这些复合映射。

(2) 令 $\mathcal{M}_{G,\mathbb{Q}}$ 为 $\mathcal{M}_G$的有理对应物。正合遗忘函子 $\mathcal{M}_{G,\mathbb{Q}} \to \mathcal{M}_G$ 有一个右伴随，按轨道由 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, -)$ 给出。对一个轨道求值会保留单射性，因为其左伴随是与可表 Mackey 函子作张量积，而该函子的 Burnside 群是有限自由群。因此，导出右伴随按轨道由$R\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, -)$ 计算。导出伴随以及 $\mathcal{M}_{G,\mathbb{Q}}$ 的半单性表明，对于有理的 U，

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}_G}(U, P_j) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{G,\mathbb{Q}}}(U, \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, P_j)) = 0,$$

其中右侧的 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}$ 是按轨道取的。因此，$U_j \to V_j/P_j$ 可提升为麦基函子之间的映射 $U_j \to V_j$。有理谱范畴中的半单性使所有这些提升，以及其他次数上的零映射，都可由单个映射 b [5]实现，其余论证与 (1) 相同。

(3) 群 Λ 是有限秩自由 $\mathbb{Z}_p$-模，因此是导出 p-完备的；而 p 在 $\mathbb{Q}$上可逆，所以 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \Lambda) = 0$ [78, 标签 091N]。商 $(\Gamma + \Lambda)/\Lambda$ 是 p-主挠群 V/Λ的 p-可除子群；由于除 p 以外的素数在其上作用可逆，它是可除的，因而是单射的。由于 $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}} = 0$，$0 \to \Lambda \to \Gamma + \Lambda \to (\Gamma + \Lambda)/\Lambda \to 0$ 的长正合列给出所述结论。 □

定理 *1.2.1* 的证明。我们先构造完备化比较映射。令

$$X = \tau_{\geq 1} K(D), \qquad Y = \tau_{\geq 1} K(F).$$

对于 $\ell \neq \mathrm{char}\ F$，令

$$R_F = L_{K(1),\ell} K(F), \qquad R_D = L_{K(1),\ell} K(D).$$

模 ℓ^a 的零次下降给出

$$0 \longrightarrow H^2(F, \mathbb{Z}/\ell^a(1)) \longrightarrow \pi_0(R_D/\ell^a) \xrightarrow{\mathrm{rk}_{\mathrm{geom}}} \mathbb{Z}/\ell^a \longrightarrow 0.$$

由于系数约化在 H^2上是满射，我们可以选取相容的秩 1 有限系数类，而 Milnor 列的满射 $\pi_0 R_D \to \varprojlim_a \pi_0(R_D/\ell^a)$ 将它们提升为一个类 $x \in \pi_0 R_D$。根据引理 1.2.2，乘以 x 是一个等价

$$m_x\colon R_F \xrightarrow{\sim} R_D.$$

投影公式给出 $N_{D/F}\circ m_x \simeq m_{N_{D/F}(x)}$，其中 $m_{N_{D/F}(x)}$ 是乘以$N_{D/F}(x)\in \pi_0 R_F$。元素 $N_{D/F}(x)$ −的几何秩为 0，因此引理 1.2.3 给出

$$\big(N_{D/F}(x)-\deg D\big)\cdot y=0 \qquad \text{for } y\in \pi_i R_F,\ i\geq 1.$$

令 $u_\ell\colon X_\ell^\wedge \to Y_\ell^\wedge$为由 m_x^{-1}和引理 1.1.5 得到的完备等价。那么

$$\pi_i\big((N_{D/F})_\ell^\wedge\big)=\deg D\cdot \pi_i u_\ell \qquad (i\geq 1).$$

对于 $\ell=$特征 F，由命题 A.3(2)，完备正次数谱集中在一次；此处我们取约化范数 Nrd_1。

接下来我们拼接完备比较映射。对于标量扩张 $i_D\colon K(F)\to K(D)$，有 $N_{D/F}\circ i_D =$(次数 D)^2，因为 D的维数为 (次数 D)^2。复合映射 $i_D\circ N_{D/F}$是与双模 $D\otimes_F D$作张量积；由于 $D\otimes_F D^{\mathrm{op}}\simeq \mathrm{End}_F(D)$，该双模是 (次数 D)^2 个 D的和，因此由可加性也有 $i_D\circ N_{D/F}=$(次数 D)^2。因此，在将次数 D取逆后，我们可以取 $N_{D/F}/$ 次数 D。对于 $S=X, Y$，令 $S^\wedge=\prod_\ell S_\ell^\wedge$和 $Z_S=(S^\wedge)_\mathbb{Q}$。 S 的算术方块给出一个纤维序列

$$\Omega Z_S \xrightarrow{\partial_S} S \longrightarrow S_\mathbb{Q}\oplus S^\wedge \longrightarrow Z_S.$$

该方块是拉回这一点，可以通过有理化以及模每个素数的比较映射来验证。在同伦群上，$N_{D/F}/$ 次数 D 与完备等价之积的有理化 g^0一致。两个从有理谱出发的映射，如果它们在同伦群上的作用相同，则它们是同伦的，因此粘合给出一个等价 $X\to Y$。

在奇数次数 $j=2m-1$ 中，我们有 $\pi_j g^0=\nu_{j,\ D}$。事实上，完备因子上的一致性由以下事实得到：将 $H^1(F,\ \mathbb{Z}_\ell(m))$ 限制到分裂域的限制映射具有单射性；这可由膨胀–限制以及 $H^0(E,\ \mathbb{Z}_\ell(m))=0$ 得出。算术方形的边界不会引入歧义，因为 $\pi_{j+1}Z_Y=0$：正偶数次完备群是有限的，并且在任意固定次数中只有有限多个素数作出贡献。

对于偶数 $j=2m\geq 2$，我们首先在整数挠元上进行比较。根据引理 1.1.6 的第二个断言，θ_E 从伽罗瓦分裂域 E/F 出发的映射在挠上是满射的。结合 $x_E=\mathrm{res}^{E/F}x$，投影公式给出

$$m_x^{-1}\theta_E = N_{E/F}\, m_{x_E}^{-1}$$

在高度一处。在次数 $j+1$ 中模 ℓ^a 的下降只有一项 $H^1(E,\ \mathbb{Z}/\ell^a(m+1))$，秩一类 x_E 的乘法在其上作用为单位元。由有限系数比较和整数 Bockstein 序列的自然性，$\pi_j g^0\circ \theta_E = N_{E/F}$ 在$K_j(E)[\ell^a]$。根据命题 A.3(2)，特征素数处的挠消失。因此

$$\pi_j g^0=\nu_{j,D} \quad \text{on } K_j(D)_{\mathrm{tors}}.$$

差 $\nu_{j,\ D}-\pi_j g^0$ 经过由 $K_j(D)$的无挠商给出的有理向量空间分解。由于每个偶数完备群都是有限群，该差在完备因子中的像为零。有理分量由构造相同。

我们应用引理 1.2.4 于算术方块 $Y\simeq Y_\mathbb{Q}\times_{Z_Y} Y^\wedge$，以修正这个差。记

$$V_j=\pi_{j+1}Z_Y, \qquad \Gamma_j=\mathrm{im}\big(\pi_{j+1}Y_\mathbb{Q}\to V_j\big), \qquad \Lambda_j=\mathrm{im}\big(\pi_{j+1}Y^\wedge\to V_j\big).$$

差给出一个映射 $K_j(D)\otimes\mathbb{Q}\to V_j/(\Gamma_j+\Lambda_j)$。这里 Γ_j 是一个有理子空间。在等特征 $V_j=0$ 的情况下，因此 $\Gamma_j+\Lambda_j=0$；在混合特征 V_j 的情况下，Λ_j 源自有限生成的 $\mathbb{Z}_p$-模 $\pi_{j+1}Y_p^\wedge$，如引理 1.2.4(3) 所述。在这两种情况下，$\mathrm{Ext}^1_\mathbb{Z}(\mathbb{Q},\ \Gamma_j+\Lambda_j)=0$。因此，引理 1.2.4 给出 $b\colon\ X_\mathbb{Q}\to\Omega Z_Y$，并借助有理化 $q_X\colon\ X\to X_\mathbb{Q}$，我们定义

$$g=g^0+\partial_Y\, b\, q_X.$$

□

一般而言，范数 $N_{D/F}$ 无法在谱的层面除以 $\deg D$；这就是上述证明拼接完备比较映射的原因。

命题 1.2.5. 设 F 和 D 如定理 *1.2.1* 中所述。

1. 若某个素数 $\ell \mid \deg D$ 满足 $\ell \neq$ 特征 F，则对每个 $J \geq 1$，映射 $\tau_{\geq J} N_{D/F}$ 都不是 $\deg D$ 倍的任何谱之间的映射 $\tau_{\geq J} K(D) \to \tau_{\geq J} K(F)$。

2. 在等特征 p 下，若 $\deg D$ 是 p 的幂，则映射 $\tau_{\geq 1} N_{D/F}$ 是 $\deg D$ 倍的等价 $\tau_{\geq 1} K(D) \to \tau_{\geq 1} K(F)$。

证明。对于 (1)，取满足 $\ell \neq$ 特征 F 的 $\ell \mid \deg D$，令

$$R_F = L_{K(1),\ell} K(F), \qquad R_D = L_{K(1),\ell} K(D),$$

并按照定理 1.2.1 的证明选取一个几何秩 1 的类 $x \in \pi_0 R_D$。由引理 1.2.2，乘以 x 是一个等价 $m_x \colon R_F \to R_D$；由投影公式，$N_{D/F} \circ m_x \simeq m_{N_{D/F}(x)}$。在整数 étale 下降中，几何秩 1 的边界是通过粘合分裂的 Morita 模得到的标量 2-余循环 $[D]$（比较[39, 命题 6.9.1]的证明）；由于根据局部不变量，$[D]$ 在 $\mathrm{Br}(F)$ 中的阶为 $\deg D$，我们得到

$$\pi_0 K^{\text{ét}}(D) = \deg D \cdot \mathbb{Z}, \qquad \pi_{-1} K^{\text{ét}}(D) = \mathrm{Br}(F)/\langle [D] \rangle.$$

由 $N_{D/F}$ 诱导的映射 $\mathrm{Br}(F)/\langle [D] \rangle \to \mathrm{Br}(F)$ 是乘以 $\deg D$，根据局部不变量，它是一个同构。局部化单位诱导一个同构 $\pi_0(K^{\text{ét}}(D)/\ell^a) \simeq \pi_0(R_D/\ell^a)$：在有限系数下降谱序列中，只有茎次数 0 和 2 对总次数零有贡献；局部化单位在这两者上都是同构。又由于 $\mathrm{cd}_\ell F \leq 2$，且奇数茎次数消失，因此没有微分进出。于是，次数零和一次的模 ℓ^a 比较映射给出正合序列

$$0 \longrightarrow \deg D \cdot \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow \pi_0 R_D \longrightarrow T_\ell\big(\mathrm{Br}(F)/\langle [D] \rangle\big) \longrightarrow 0.$$

若 $\ell \mid \deg D$，则右侧群中的秩一类 x 的像不能被 ℓ 整除，因为若能提升这种整除性，x 的秩就会是 ℓ 的倍数。对于 F，同一正合序列为 $0 \to \mathbb{Z}_\ell \to \pi_0 R_F \to T_\ell \mathrm{Br}(F) \to 0$，其几何秩的核为 $H^2(F, \mathbb{Z}_\ell(1))$；并且 $N_{D/F}$ 将这两个正合序列相互映射，在同构 $\mathrm{Br}(F)/\langle [D] \rangle \xrightarrow{\deg D} \mathrm{Br}(F)$ 的右侧诱导出 T_ℓ。因此

$$\beta = N_{D/F}(x) - \deg D \in H^2(F, \mathbb{Z}_\ell(1))$$

不能被 ℓ 整除。

对于奇数 ℓ，我们取 $n = \ell$；对于 $\ell = 2$，取 $n = 4$，因此 $n \not\equiv 2 \bmod 4$，且 Moore 谱 $\mathbb{S}/n$ 的单位元具有加法阶 n [63, p。 257]。选取 $\varphi(n)$ 的一个充分大的倍数 m，使得 $\mathbb{Z}/n(m)$ 具有平凡作用。在次数为 $2m$ 的模 n 下降中，外项为

$$H^2(F, \mathbb{Z}/n(m+1)) \qquad \text{and} \qquad H^0(F, \mathbb{Z}/n(m)),$$

二者都是序为 n 的循环群。由于中间项被 n 湮灭，该序列作为阿贝尔群的序列是分裂的，因此左端项中不能被 ℓ 整除的元素，在中间项中也不能被 ℓ 整除。若 y 提升了右端项的一个生成元，那么 βy 在左端项中不能被 ℓ 整除，因为它是 β 在局部不变量下的系数约化与该生成元的杯积。因此

$$N_{D/F}\, m_x(y) = \deg D \cdot y + \beta y$$

在中间项中不能被 ℓ 整除。根据引理 1.1.5，对于 $2m-1 \geq J$，群 $\pi_{2m}(\tau_{\geq J}K(D)/n)$ 与 $\pi_{2m}(R_D/n)$ 相同，对于 F 也同样如此；若 $\deg D \cdot u = \tau_{\geq J}N_{D/F}$ 对某个映射 u 成立，则 $N_{D/F}(m_x y)$ 将可被 ℓ 整除，这与所显示的公式矛盾。

对于 (2)，令 $p = \mathrm{char}\ F$，假设 $\deg D$ 是 p的幂，并令 $X = \tau_{\geq 1}K(D)$。在 p 处的完备正次数谱集中于一次。我们使用 p处的约化范数 Nrd_1，以及在将 p求逆后得到的 $N_{D/F}/\deg D$。它们的交叠也集中于一次，并且两个映射在此处一致，因为 $\pi_1 N_{D/F} = \deg D \cdot \mathrm{Nrd}_1$ 在 $K_1(D)$上成立。每个从 X 到交叠的环谱的映射都为零，因此两部分可以粘合成一个映射 u；而在两部分上成立的恒等式 $\deg D \cdot u = \tau_{\geq 1}N_{D/F}$，在整数同伦范畴中也成立。映射 u 是一个等价：在 p-完备部分，它是一次时的同构 Nrd_1；而在将 p 求逆后，映射 $N_{D/F}/\deg D$的逆为 $i_D/\deg D$，因为 $N_{D/F}i_D$和 $i_D N_{D/F}$是乘以 $(\deg D)^2$的映射。□

此外，定理 1.2.1 的比较映射可以在有限伽罗瓦扩张的中间域上相干地选取。

命题 1.2.6. 设 F 是一个非阿基米德局部域，D 是 F 上的中心除法代数，L/F 是一个有限伽罗瓦扩张。比较映射

$$g_{F'} \colon \tau_{\geq 1}K(D_{F'}) \longrightarrow \tau_{\geq 1}K(F')$$

对于 L/F 的中间域 F'，可以同时选取，并且与限制、转移、共轭及其复合映射相容。每个 $g_{F'}$ 都是一个等价，并诱导出定理 *1.1.1* 中的同构。

证明。设 $G = \mathrm{Gal}(L/F)$。我们对引理 1.2.2 之前引入的麦基函子取正连通覆盖，从而得到 $\mathscr{M}_G$ 中的对象，

$$X(G/H) = \tau_{\geq 1}K(D_{L^H}), \qquad Y(G/H) = \tau_{\geq 1}K(L^H).$$

连通覆盖保持有限直和，因此这些对象仍是谱麦基函子。我们使用代数 $D_{F'}$ 的范数 $N_{D_{F'}/F'}$，其次数为 $\deg D$，即使指标在 F' 上下降也是如此。

对于 $S \in \mathscr{M}_G$，令

$$S^\wedge_{\deg D} = \prod_{\ell \mid \deg D} S^\wedge_\ell.$$

有理化、导出完备化、乘积和拉回均按轨道计算。对于整除 $\deg D$ 的素数，其算术方块给出

$$S \simeq S[1/\deg D] \underset{S^\wedge_{\deg D}[1/\deg D]}{\times} S^\wedge_{\deg D}.$$

这可以通过有理化以及模每个素数约化，按轨道逐一验证。除 ℓ 以外的素数在 ℓ-完备对象中均可逆，因此 $S^\wedge_{\deg D}[1/\deg D]$ 是有理的。

对于每个不同于 $\mathrm{char}\ F$ 的 $\ell \mid \deg D$，按照定理 1.2.1 的证明，在 F 上选取一个几何秩 1 的类 x_ℓ，并将其限制到每个中间域。由引理 1.2.2 的逆 $m_{x_\ell}^{-1}$ 以及自然的 étale 比较映射，我们得到一个映射

$$u_\ell \colon X^\wedge_\ell \longrightarrow Y^\wedge_\ell \quad \text{in } \mathscr{M}_G.$$

在特征为 p 的情况下，p-完备化的 X 和 Y 都集中在一次，因此我们使用由约化范数 Nrd_1给出的麦基函子映射。将 $\deg D$求逆后，我们取

$$u_{\deg D} = N/\deg D \colon X[1/\deg D] \longrightarrow Y[1/\deg D],$$

其中 N 是由范数 $N_{D_{F'}/F'}$ 及其限制与转移结构给出的麦基函子映射。

我们在 $\mathscr{M}_G$中算术方块的有理重叠部分上粘合这些映射。定理 1.2.1 证明中的乘积计算表明，在每个中间域上，有理化后的 u_ℓ 与 N/度 D在正同伦群上相同。谱 Mackey 函子等价于真正的 G-谱 [6], ，而有理谱 Mackey 函子则由按子群共轭类 $H \le G$ [5]索引的有理Wey尔群代数 $\mathbb{Q}[W_G H]$上的复形范畴之积描述。这些代数是半单的，因此，诱导相同分次 Mackey 同伦群映射的有理映射彼此同伦。在重叠部分选取一个同伦后，我们从拉回中得到 $g^0\colon\ X \to Y$；它是等价，因为两个算术分量都是等价。

我们修正 g^0 以得到指定的映射 $\nu_{j,\ D_{F'}}$，统称为ν_j，同时保留算术分量。定理 1.2.1 证明中的投影公式计算表明，这些映射在奇数次数上以及挠部分上一致；该计算也适用于整除 $\deg\ D$ 的素数集合。将 $\deg\ D$ 求逆后得到的分量一致，因为 $\deg\ D\cdot\ \nu_j = \pi_j N$。因此，差异 $\nu_j - \pi_j g^0$ 仅限于偶数次数 $j \ge 2$，且在两个算术分量中的像均为零。

在普通麦基函子的阿贝尔范畴中，像、核和商均按轨道计算。定义

$$\begin{aligned} V_j &= \pi_{j+1}\big(Y^{\wedge}_{\deg D}[1/\deg D]\big),\\ \Gamma_j &= \operatorname{im}\big(\pi_{j+1}Y[1/\deg D] \to V_j\big),\\ \Lambda_j &= \operatorname{im}\big(\pi_{j+1}Y^{\wedge}_{\deg D} \to V_j\big), \qquad P_j = \Gamma_j + \Lambda_j. \end{aligned}$$

算术纤维序列给出自然的正合序列

$$0 \longrightarrow V_j/P_j \xrightarrow{\bar\partial} \pi_j Y \longrightarrow \pi_j Y[1/\deg D] \oplus \pi_j Y^{\wedge}_{\deg D}.$$

因此，$\nu_j - \pi_j g^0$ 定义了一个映入 V_j/P_j的唯一麦基函子映射。它经由有理 Mackey 函子 $U_j = \pi_j X \otimes \mathbb{Q}$分解，因为它在挠元上为零；并且对于局部域，正偶数次的 a K-群的无挠商是一个有理向量空间。

现在我们计算在每个中间域处提升的障碍。令 p 为共同的剩余特征。在等特征情形下，或在满足 $p \nmid \deg D$的混合特征情形下，次数 $j+1 \ge 3$ 的完备化群给出 $V_j = 0$。在满足 $p \mid \deg D$的混合特征情形下，令

$$M_j(F') = \pi_{j+1}\big(Y(F')^{\wedge}_p\big).$$

这是一个有限生成的 $\mathbb{Z}_p$-模，而 $\ell \ne p$ 对应的完备化是有限的。因此

$$V_j(F') = M_j(F') \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p, \qquad \Lambda_j(F') = M_j(F')/M_j(F')_{\mathrm{tors}}.$$

由于 $\Gamma_j(F')$（一个 $\mathbb{Z}[1/\deg\ D]$-模）的像是 p-可整除的，引理 1.2.4(3) 给出 $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\ P_j(F')) = 0$。

将引理 1.2.4(2) 应用于 $\mathscr{M}_G$ 中的算术方块，现在得到一个映射

$$b\colon X_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \Omega\big(Y^{\wedge}_{\deg D}[1/\deg D]\big)$$

使得，取算术边界 ∂ 和有理化 $q_X\colon\ X \to X_{\mathbb{Q}}$，映射

$$g = g^0 + \partial\, b\, q_X$$

在每个轨道上都满足 $\pi_j g = \nu_j$。由引理 1.2.4(2)，该修正同时保持两个算术分量，并且由于它是在 $\mathscr{M}_G$中构造的，因而它是相容的。 □

注记 1.2.7。 设 E 为命题 1.2.6（及其在第 3.2 节中的整体类似物）的伽罗瓦扩张 L/F 的一个中间域，它使 D分裂，并设 ℓ 为一个素数，在该素数处选取了一个几何秩 1 的类，从而 $\ell \mid \deg\ D$， $\ell \neq \mathrm{char}\ F$，并且 $\ell \neq 2$ 在实分歧下成立。在 ℓ-完备化因子处，在标准 Morita 等价下记 $x_{\ell,\ E} = 1 + \alpha_{\ell,\ E}$，并把 $g^{\wedge}_{F,\ \ell}$ 记为该命题的映射 g 在 F 上的分量 g_F 的 ℓ-进完备化。在 ℓ-完备化的正次数部分上，分裂转移于是满足

$$g^{\wedge}_{F,\ell} \circ \theta_E \simeq N_{E/F} \circ m^{-1}_{x_{\ell,E}}.$$

元素 $\alpha_{\ell,E}$ 的几何秩为 0；若 $\ell = 2$ 和 E 具有实位，则它在实闭包上的限制也为零，因为在此处， $\pi_0(KO^{\wedge}_2) = \mathbb{Z}_2$ 可由秩检测。因此，根据引理 1.2.3，它在 ℓ完备化因子的正次数同伦群上作用平凡，由此得到群上的转移恒等式。对于有限系数，显示公式中必须保留 $\alpha_{\ell,E}$ 的作用。

这些选择是针对每个有限伽罗瓦扩张分别作出的。

问题 1.2.8。 命题 1.2.6 中的选择（以及第 3.2 节中的整体域对应版本）能否在所有有限扩张上同时一致地作出，并且与中心单代数的张量积相容?

2 分裂转移与局部—整体原理

本节研究由分裂域转移生成的 $K_2(D)$ 子群。我们引入相应的商 $Q_F(D)$，并证明，对于关于非平凡秩一非阿基米德赋值完备的域， K_2-类的取值模去来自某个固定有限可分裂域的转移后是局部常值的（第 2.1 节）。对于整体域，我们证明 $Q_F(D)$ 可由 D 不分裂处的赋值检测（第 2.2 节）。随后我们推导出整体域上的 $\mathrm{SK}_2(D) = 0$，并确定约化范数的像（第 2.3 节）。

2.1 分裂转移与刚化皮卡范数

本小节中，我们引入分裂传递子群 $I_F(D)$ 和商$Q_F(D) = K_2(D)/I_F(D)$，它们用于衡量 $K_2(D)$ 在多大程度上并非由来自分裂域的转移生成。主要结果是命题 2.1.5：对于一个关于非平凡秩一非阿基米德赋值完备的域，光滑仿射概形上某个 K_2-类在有理点处的求值，模去来自一个固定有限可分裂域的转移后是局部常值的。我们利用曲线上的刚化皮卡范数来证明这一结果。通过推论 2.1.7，该结果应用于附录 B；备注 2.1.8 记录了另一个应用；第 2.2 节则运用曲线上的互反律以及皮卡论证的整体类比。整个小节中， F 是一个域， D 是 F上的中心除法代数。

定义 2.1.1。 对于 F 上的中心除法代数 D，我们将分裂传递子群 $I_F(D)$、分裂传递商 $Q_F(D)$ 以及范数子群 $N_2([D])$ 定义为

$$\begin{aligned} I_F(D) &= \sum_{D_E \text{ split}} \theta_E K_2(E), \\ Q_F(D) &= K_2(D)/I_F(D), \\ N_2([D]) &= \sum_{D_E \text{ split}} N_{E/F} K_2(E) \subseteq K_2(F). \end{aligned}$$

对于任意 $\alpha \in \mathrm{Br}(F)$，令 $N_2(\alpha) = \sum_{\alpha_E = 0} N_{E/F} K_2(E)$。在所有这些和中， E/F遍历有限扩张，包括不可分扩张。

对于域扩张 L/F，我们用 $\mathrm{res}^{L/F}\colon K(D) \to K(D_L)$ 表示标量扩张；若 L/F 有限，则用 $\mathrm{cor}_{L/F} = N_{D_L/D}\colon K(D_L) \to K(D)$ 表示。若 E/L 是 D_L的有限分裂域，我们用 $\theta_{E/L}\colon K(E) \to K(D_L)$ 表示 D_L的分裂转移，其归一化方式与第 1.1 节相同；因此 $\theta_E = \theta_{E/F}$and $\mathrm{cor}^{L/F} \circ \theta_{E/L} = \theta_{E/F}$。按照这些约定，对于每个域 F上的中心单代数 A， $I_F(A)$ 和 $Q_F(A)$ 均有定义。

转移公式 $\mathrm{Nrd}_2\,\theta_E = N_{E/F}$给出 $N_2([D]) = \mathrm{Nrd}_2(I_F(D))$。由 $C_2(D/F) = \mathrm{coker}(\mathrm{Nrd}_2)$, 约化范数及其限制 $I_F(D) \to N_2([D])$ 的蛇引理给出正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{SK}_2(D) \cap I_F(D) \longrightarrow \mathrm{SK}_2(D) \longrightarrow Q_F(D) \longrightarrow K_2(F)/N_2([D]) \longrightarrow C_2(D/F) \longrightarrow 0.$$

引理 2.1.2。设 $F\prime/F$是一个域扩张。则限制映射 $I_F(D)$进入 $I_{F'}(D_{F'})$，其中中心单代数 $D_{F'}$ 的分裂转移按照第 *1.1* 节中的 *Morita* 等价进行正规化；因此它诱导映射 $Q_F(D) \to Q_{F'}(D_{F'})$。此外，

$$\deg D \cdot Q_F(D) = 0.$$

证明。设 E/F 为一个有限分裂域，并记

$$E \otimes_F F' = \prod_i R_i,$$

其中 κ_i 和 $\mathfrak{m}_i$ 分别是阿廷局部环 R_i的剩余域和根基。对基变换后的标量限制按每个因子上的幂 $\mathfrak{m}_i^j$ 进行过滤，我们得到作为第 j个分次分量的从 κ_i 到 F'的复合映射：先限制到 κ_i，再从 κ_i 进行分裂转移到 F'，其重数为 $\dim_{\kappa_i}(\mathfrak{m}_i^j/\mathfrak{m}_i^{j+1})$。分裂代数的单模在基变换到 κ_i后仍为单模，因此各分次块保持 Morita 规范化。由可加性 [68]，因此得到

$$\mathrm{res}_{F'/F}\,\theta_E = \sum_i \mathrm{length}_{R_i}(R_i)\,\theta_{\kappa_i/F'}\,\mathrm{res}_{\kappa_i/E},$$

这就证明了第一个断言；当 E/F 不可分时，长度可能大于一。

对于第二个断言，设 $L \subset D$ 是一个可分极大子域，从而 $[L\colon F] = \deg D$，且 L 分裂 D。对于 $x \in K_2(D)$，我们有

$$\deg D \cdot x = N_{D_L/D}(\mathrm{res}_{L/F}\,x) \in \theta_L K_2(L) \subseteq I_F(D),$$

因为 $K(D_L)$ 与 $K(L)$ 相对应，并且在此对应下 $\theta_L = N_{D_L/D}$。 □

混合乘积转移的引理用于曲线上的互反律的第（1）部分。第（2）部分涉及沿边界剩余为一的函数，用于命题 2.1.5。

引理 2.1.3。如果 F 是无限的，那么对于每个有限扩张 L/F，到 F 的转移将混合乘积 $L^\times \cdot K_1(D_L) \subset K_2(D_L)$ 映射到 $I_F(D)$ 中。

证明。设 D' 是布劳尔类 D_L 中的除代数。根据 Morita 等价， $K_1(D_L)$ 中的一个元素可表示为 $b \in D'^\times$。由于 L 是无限的，我们可以选取 c，使得 c 和 cb 都属于由生成可分极大子域的单位组成的非空扎里斯基开集。于是， $b = c^{-1} \cdot (cb)$ 的每个因子都具有 $\theta_{E/L}(u)$ 在 $K_1(D_L)$ 中的形式，其中 $E \subset D'$ 是一个可分极大子域，且 $u \in E^\times$ 为某个元素。对于 $a \in L^\times$，投影公式和转移的传递性给出

$$\mathrm{cor}_{L/F}(\{a\} \cdot \theta_{E/L}(u)) = \mathrm{cor}_{L/F}\,\theta_{E/L}(\{a|_E, u\}) = \theta_E(\{a|_E, u\}),$$

它属于 $I_F(D)$，因为 E 分裂了 D。由双线性可知，$\{a\} \cdot b$ 的转移到 F 后属于$I_F(D)$。

□

引理 2.1.4。 设 Y/F 是一条固有几何整曲线， $V \subset Y$ 是一个光滑开子集，并设 $\alpha \in K_2(V;\ D)$，其中 $K(V;\ D)$ 是阿祖马亚代数 $O_V \otimes_F D$ 在 V上的 K-理论。设 f 是 Y 的正规化上的一个有理函数，它在边界 $Y|V$的每个分支处都是单位，并令

$$\Sigma(f) = \sum_{z \in V \text{ closed}} v_z(f)\ \mathrm{cor}_{\kappa(z)/F}(\alpha(z)) \in K_2(D).$$

1. 若 F 是无限的，则 $\Sigma(f) \in I_F(D)$。

2. 若 f 在边界的每个分支处的剩余都是 1 ，则 $\Sigma(f) = 0$。

3. 假设 F 是无限的，并设 $P, P\prime \in V(F)$ 满足正规化上的 $P - P\prime = \mathrm{div}(f) + Z$，其中 f 如上所述，而 Z 支撑在 V 的闭点上，且这些点的剩余域分裂 D。则在 $Q_F(D)$ 中， $[\alpha(P)] = [\alpha(P')]$。

证明。 在 Y 的正规化上（其在 V 上不变），我们在泛点处构造 $f \cdot \alpha$。局部化边界与适当推前的复合映射为零 [68]。在 V 的闭点 z 处，其贡献为 $v_z(f)\ \mathrm{cor}_{\kappa(z)/F}(\alpha(z))$。在边界处，各项贡献是剩余 f 与 α 的 K_1 边界的混合乘积；若 F 是无限的，根据引理 2.1.3，它们属于$I_F(D)$，这就得到 (1)；若在每个分支处 $f = 1$ ，则这些贡献均为零，这就得到 (2)。(3) 由 (1) 得出，因为分裂闭点的贡献属于 $I_F(D)$。

□

命题 2.1.5。 设 F 关于一个非平凡的秩-1 非阿基米德赋值是完备的，并设 E/F 是 D的有限可分裂域。对于光滑仿射 F-概形 X 以及$\alpha \in K_2(X; D)$，映射

$$X(F) \longrightarrow K_2(D)/\theta_E K_2(E), \qquad P \longmapsto [P^*\alpha],$$

是局部常值的。

我们一次改变一个坐标，并利用刚化皮卡范数和引理 2.1.4(2)比较曲线上的值。沿边界的刚化使边界贡献消失，从而得到模 $\theta_E K_2(E)$而不是模 $I_F(D)$的单个子群的常值性。

证明。 我们首先构造一个带有刚化皮卡空间的曲线族。在 X的一个仿射嵌入的射影闭包中，令 H_∞ 为无穷远超平面。我们取一个几何不可约曲线的射影平坦族 $Y \to B$ ，其参数化上一段末尾构造的完全交曲线，并且在每个纤维中都与 X 相交。边界 $M = Y \cap H_\infty$ 是关于 B 的有限平坦相对卡蒂埃除子。带有沿 M 的平凡化的相对皮卡空间$\mathcal{P}_M$ 的遗忘映射的核为

$$\mathrm{Res}_{M/B}\, \mathbf{G}_m/\mathbf{G}_m,$$

它是相对射影丛中单位的开子轨迹，因此是光滑的。对于曲线， $H^2(\mathcal{O})$ 消失，所以 Picard 空间是光滑的。在每个真几何整纤维上，正则函数都来自基底，因此刚化线丛的自同构群是平凡的，因为 M 是非空有限平坦边界；因此， $\mathcal{P}_M$ 的 F-点由纤维上的刚化线丛表示。

接下来，我们求解对角线附近的范数方程。沿 E 的 Picard 范数是光滑的，因为经过有限 étale 分裂后，它就变成了加法。对于光滑轨迹上的两点 P 和 P' ，线丛 $\mathcal{O}(P - P\prime)$ 沿 M 有典范平凡化。接下来

从对角线上的平凡解出发，我们利用 étale 逆函数定理得到附近的解；这里该定理可由完备秩一赋值域上的亨泽尔引理推出。设 $\mathcal{M}$ 是这样一个解：它是定义在 Y_E 上、沿 M 刚化的线丛，其范数为带有典范刚性化的 $\mathcal{O}(P - P\prime)$。由于半局部环上的线丛都是自由的，且单位可从有限边界提升，因此我们可以选择 $\mathcal{M}$ 的一个有理截面，使其在刚化下沿边界取值为 1。若 Z 是该截面的因子，那么在正规化上

$$P - P' - \mathrm{Nm}(Z) = \mathrm{div}(f), \qquad f|_M = 1.$$

我们还选择该截面，使其在仿射曲线在 F 上不光滑的点处可逆，从而 $\mathrm{Nm}(Z)$ 的支撑包含于光滑开子集内。在仿射曲线的非光滑点上方的各分支处，f 是一个单位，而 α 沿拉回延拓到正规化上，因此其 K_1 边界为零；在无穷远处分支处，刚化使 f 的剩余等于 1。因此，根据引理 2.1.4 证明中的局部化计算，边界项均消失，剩余各项是通过 E 的转移。事实上，对于支撑于 Z 中且像为 z 的闭点 w，$[w]$ 的推前贡献为 $[\kappa(w)\colon\ \kappa(z)]\cdot\mathrm{cor}_{\kappa(z)/F}\,\alpha(z) = \mathrm{cor}_{\kappa(w)/F}\,\alpha(w)$，由于 $E \subset \kappa(w)$，该式可经过 θ_E 分解。

最后，我们在任意光滑点附近应用这一计算。包含该点的 X 的连通分支是光滑的，并具有一个 F-点，因而是几何整的；我们以它替换 X。若其维数为零，则局部常值性是直接的。根据贝尔蒂尼定理，我们选择经过该点且与坐标轴相切的几何不可约完全交曲线；当指定该点和切向方向时，次数足够大的截面在该点之外仍然是自由的。对于仅在一个 étale 坐标 $t_i = r_i/s_0$ 上有所不同的两个邻近点，我们分别用 s_0 和 r_i 的倍数修正每个定义截面，使其在两个点处均为零。由于中心曲线与第 i 个坐标轴相切，该修正很小，因此平坦性、几何整性和开范数条件仍然保持。在乘积坐标邻域中，我们通过每次改变一个坐标，从一个点移动到另一个点，并在每一步应用前述计算。

□

为将局部常值性应用于 Steinberg 字，我们使用下文定义的字映射的单位纤维的光滑轨迹上的泛 K_2-类。将稳定 Steinberg 群的标准生成元记为$x_{ij}(a)$。对于在 D 上的稳定 Steinberg 字，我们为每次出现的系数分别使用一个独立的仿射变量，并在 $\mathrm{SL}_n(D)$ 中取矩阵乘积；这里的 $\mathrm{SL}_n(D)$ 是 $M_n(D)$ 中约化范数为一的元素所构成的代数群，且 n 足够大；我们将所得的态射称为字映射。

引理 2.1.6。 在 D 上的稳定 *Steinberg* 字后追加字母

$$x_{ij}(t) \qquad and \qquad x_{ij}(u)\,x_{ji}(t)\,x_{ij}(-u),$$

对所有 $i \neq j$ 以及 D 的一个包含 1 的基中的所有 u，为每个此类字母分别使用一个独立的 D-值变量 t。随后，在所有新增变量为零的点处，字映射的单位纤维均为光滑的；并且在单位纤维的光滑开轨迹上，泛 *Steinberg* 字定义了一个 K_2-类。此外，字映射在单位元附近具有一个 *étale* 局部截面，将单位元映射到原始变量系数和新增变量 t 均为零的点。

证明。 在 $t = 0$ 处，字保持不变。新增字母的微分生成非对角项以及元素 $ute_{ii} - tue_{jj}$。对于 $u = 1$ 的对角差，连同交换子 $ut - tu$ 的线性张成，给出了约化迹为零的整个子空间；这是因为由约化迹配对的非退化性可知，D 中交换子的线性张成就是 $\ker \mathrm{Trd}$，即使特征整除 $\deg D$ 也成立。因此，矩阵的微分

乘积在新增变量取零处满射，且单位纤维在该处光滑。在其光滑开轨迹上，泛 Steinberg 字的矩阵乘积为单位元，并定义一个 K_2-类。同样的满射性给出了字映射在单位元附近经过原变量系数和新增变量 t均取零的点的 étale 局部截面。在那里，固定字母$x_{ij}(u)$ 和 $x_{ij}(-u)$在 Steinberg 群中相消，因此该字是平凡的。

□

推论 *2.1.7.* 设 F 关于非平凡秩一非阿基米德赋值完备，且 ~ 设 E/F 是 D 的有限可分裂域。对充分大的 n，设 $G \to E_n(D)$ 是将稳定万有中心扩张沿 $K_2(D)$ 拉回到 $SL_n(D)$ 的初等子群 $E_n(D)$ 所得的扩张，并将其推出到 $K_2(D)/\theta_E K_2(E)$。对于 $\gamma > 0$，令 $J_\gamma = \{x \in D : v_D(x) > \gamma\}$，其中 v_D 是 D 的赋值。则对所有充分大的 γ，此中心扩张在 $E_n(D) \cap (1 + Mat_n(J_\gamma))$ 上分裂。在离散情形下，对于所有充分大的 m，这给出在 $E_n(D) \cap (1 + \pi_F^m Mat_n(O_D))$ 上的分裂，其中 π_F 是 F 的一致化元，O_D 是 D 的赋值环。

证明。 我们选择单位元的一个仿射 étale 邻域 $\rho: V \to \mathrm{SL}_n(D)$，使得引理 2.1.6（应用于空词）中的 étale 局部截面有定义，并将单位元映到平凡词；再利用亨泽尔引理提升单位元附近的点。该截面的乘法误差是在 V^3 的闭子概形上的一个普适 K_2-类，其中 $\rho(c) = \rho(a)\rho(b)$；该闭子概形在单位元三元组附近光滑且仿射，我们对其应用命题 2.1.5。误差在单位元三元组处消失，因此根据局部常值性，它在该三元组的某个邻域上也消失。选取 γ，使得子群$E_n(D) \cap (1 + \mathrm{Mat}_n(J_\gamma))$与自身的乘积包含于该邻域中，于是得到在此子群上的分裂，因而也得到在其对应更大 γ的子群上的分裂。

□

备注 2.1.8。 我们还证明了定理 1.1.1 在二次情形下的如下扩展；本文不使用这一结果，故略去证明。设 H 是一个^非阿基米德局部域的代数扩张，设 H 是其完备化。那么，对于 H 上的每个中心除^ ^代数 D，约化范数 $\mathrm{Nrd}_2: K_2(D) \to K_2(H)$ 是一个同构。证明^下降 D 到某个有限子扩张，并在 H上应用命题 2.1.5。

2.2 分裂传递商的局部–整体单射性

本小节通过比较单个普适 K_2-类的两种整体求值，证明整体域上分裂转移商$Q_F(D)$的局部–整体原理（定理 2.2.4）。命题 2.2.1 和引理 2.2.2 是第 2.1 节曲线论证的整体对应版本。在此处，必须同时在所有赋值 $v \in S$处求解范数方程。由于只需考虑模 $I_F(D)$的类，引理 2.1.4(1)处理了边界项，无需刚化。

在本小节中， F 是一个整体域， D 是 F上的中心除法代数。令 S 为 D 不分裂的有限赋值点集，其中包括分歧实位，并记为 $D_v = D \otimes_F F_v$。

命题 2.2.1. 设 V 是射影几何整曲线 C/F的非空光滑开子集。设 $P_D(C, V) \subset \mathrm{Pic}(C)$ 是由 V 的闭点的除子类生成的子群，这些闭点的剩余域在 F 上可分，且在 D上分裂。限制诱导出一个单射

$$\mathrm{Pic}(C)/P_D(C, V) \hookrightarrow \prod_{v \in S} \mathrm{Pic}(C_{F_v})/P_{D_v}(C_{F_v}, V_{F_v}).$$

证明. 设$\mathcal{L}$ 是 C 上的一个线丛，其类在每个局部商中都为零。对每个$v \in S$，我们将可分裂闭点提升为其剩余域上的有理点，并写作

$$\mathcal{L}_{F_v} \simeq \bigotimes_i N_{E_{v,i}/F_v}(\mathcal{M}_{v,i})$$

对于线丛 $\mathcal{M}_{v,\ i}$ 在 $C_{E_{v,\ i}}$上，其中 $E_{v,\ i}/F_v$ 是 D_v的分裂域；若此分解为空，则从一个分裂域中加入一个平凡因子。令 $n_v = \sum_i [E_{v,i} : F_v]$，选取 C上的一个非常丰沛线丛 $\mathcal{H}$ ，并选取 m n_v的一个足够大的公倍数。将每个 $\mathcal{M}_{v,\ i}$ 以及 $C_{E_{v,\ i}}$ 上的每个平凡线丛分别用 $\mathcal{H}^{\otimes m/n_v}$扭曲后，我们得到

$$\bigotimes_i N_{E_{v,i}/F_v}(\mathcal{M}_{v,i} \otimes \mathcal{H}^{\otimes m/n_v}) \simeq \mathcal{H}^{\otimes m} \otimes \mathcal{L}, \qquad \bigotimes_i N_{E_{v,i}/F_v}(\mathcal{H}^{\otimes m/n_v}) \simeq \mathcal{H}^{\otimes m}.$$

接下来，我们在局部选取分裂因子。我们取扩张 $C_{E_{v,\ i}}$上扭曲线丛的一般截面，并要求它们的零因子是几何约化的，以避开边界 $C \setminus V$，且彼此不相交，也不与其所有不同的共轭在所有指标 i 及域 $E_{v,\ i}$的所有嵌入下相交。在 F_v^{sep}上，截面空间的魏尔限制为各个共轭给出相互独立的截面空间。对于两个截面，在同一点处同时为零施加两个独立的线性条件，因此即使该点在曲线上变化，这仍然是一个真闭条件。不相交性确保推前因子的每个点的剩余域都包含相应的分裂域，因此我们在局部化完全线性系 $|\mathcal{H}^{\otimes m} \otimes \mathcal{L}|$ 和 $|\mathcal{H}^{\otimes m}|$ 中于 v处得到分裂因子。

最后，我们将结果整体化。在具有单零点的除子轨迹上，除子族是有限 étale 的。对于带有选定局部除子的同构之有限 étale 概形应用逆函数定理，可知邻近截面具有相同的局部分裂类型。在整体截面空间中应用弱逼近，可得到两个整体除子，使其在每个 $v \in S$ 处都满足所需条件。任一整体除子的闭点都有一个在 F 上有限可分的剩余域 κ ，且 D 在 κ 的每个完备化上都分裂；由布劳尔–哈斯–诺特定理， D_κ 分裂。这两个除子的差代表$\mathcal{L}$。当 S 为空时， D 分裂，一般截面便足够。

□

引理 2.2.2. 设 X/F 为光滑拟射影概形，且 $\alpha \in K_2(X; D)$。对于任意(b_v) $\in \prod_{v \in S} X(F_v)$，在$(b_v)$的某个充分小的乘积邻域内，所有整体点 y 上的求值 $[y^*\alpha] \in Q_F(D)$ 都相同。

证明。 若邻域中含有整体点，我们将其缩小，使得其中所有整体点都落在 X 的同一个连通分支内；该分支光滑且有一个 F 点，因此是几何整的，我们就在其中进行讨论。我们在 X 的一个射影闭包上固定一个非常丰沛线丛；若为曲线，则直接使用固定的射影闭包。维数为零以及 $S = \varnothing$ 的情形都是平凡的。

我们首先构造经过两个相近点的曲线。当维数至少为二时，我们取 étale 坐标

$$t_i = r_i/s_0$$

在每个 b_v 处，其中 r_i 和 s_0 是固定的非常丰沛线丛的同一个充分高次幂的截面。对于每个切向方向 u，我们选取一条经过 b_v 且与 u相切的几何不可约完全交曲线；在充分高的次数下，满足所规定点条件和一阶条件的截面在该点之外仍然自由，因此贝尔蒂尼定理适用。我们令局部曲线由同一个充分高次数的截面切出，使其构成一个以公共参数开集为基底的几何不可约曲线射影平坦族：几何非 Cohen–Macaulay 轨迹的余维至少为二，贝尔蒂尼定理使这些曲线能够避开该轨迹，而定义

截面随后沿这些曲线构成一个正则序列。对于局部范数，我们固定一个有限可分裂域。相对皮卡范数是光滑的，因为经过有限 étale 基变换后它变为加法，且 $H^2(\mathcal{O}) = 0$。由于这些曲线具有局部有理点，皮卡点可由线丛表示。由对角线上平凡解处的光滑性可知，$\mathcal{O}(y - y')$ 是范数这一条件在具有两个光滑标记点 y，y' 的曲线族中定义了对角线的一个开邻域。在通过弱逼近移动定义截面时，我们使用这个开邻域。

假设邻近点 y、y' 的割线方向接近 u_v。设 s_j, $j \geq 1$为中心曲线的定义截面，并选取 i 使得，对于某个固定常数 $c > 0$,

$$|t_i(y') - t_i(y)| \geq c \, \|t(y') - t(y)\|.$$

同时在两个点处消失的截面为

$$\beta_j = \frac{(s_j/s_0)(y') - (s_j/s_0)(y)}{t_i(y') - t_i(y)}, \qquad s'_j = s_j - ((s_j/s_0)(y) - \beta_j t_i(y))s_0 - \beta_j r_i.$$

由于 $d(s_j/s_0)(b_v)$ 消去 u，当方向和端点分别接近 u 和 b_v 时，修正项 $s'_j - s_j$ 很小；这可由实数域及非阿基米德完备化上的 étale 坐标中的解析展开得出。方向的射影空间在 F_v 上的紧致性保证存在一个与方向无关的点邻域。

现在令 y、y' 为此邻域中的整体点。对同时在这两个点处消失的整体截面空间应用弱逼近，可得一条整体曲线，它是几何整的（这是一个在逼近下保持的开条件），并且在 y 和 y'处光滑；在这条曲线上，$\mathcal{O}(y - y')$ 在每个 $v \in S$处都是某个分裂域的局部范数。与命题 2.2.1 的证明一样，通过非常丰沛线丛扭曲并推前一般截面，可知 $\mathcal{O}(y - y')$ 的局部类属于由分裂闭点生成的子群。将命题应用于整体曲线的光滑轨迹与 X的交集 V，可得一个支撑在 V的分裂闭点上的因子Z，且其在皮卡群中为 $[y - y'] = [Z]$。拉回到正规化后，得到 $y - y' = \mathrm{div}(f) + Z$，其中 f是一个有理函数。因此，$\mathrm{div}(f)$ 支撑在 V中，并且 f 在边界的每个分支处都是单位。由引理 2.1.4(3),

$$y^*\alpha - y'^*\alpha \in I_F(D).$$

□

引理 2.2.3. 设 k 是一个非阿基米德局部域， B 是k上的中心单代数；或者设 $k = \mathbb{R}$，且 B 是 $\mathbb{R}$上的非分裂中心单代数。对于 B的每个有限可分裂域 L/k，

$$I_k(B) = \theta_L K_2(L).$$

证明. 设 B的任意一个有限分裂域为 E/k，并令 $M = EL$；扩张 M/E 是可分的。对于非阿基米德的 k，域范数 $N_{M/E}$： $K_2(M) \to K_2(E)$是满射的 [8]，[4, p。 4], 因此，转移的传递性给出

$$\theta_E K_2(E) = \theta_M K_2(M) \subseteq \theta_L K_2(L).$$

对于 $k = \mathbb{R}$，每个分裂域都是 $\mathbb{C}$，且同一恒等式成立。 □

对于单位 u，我们使用第 2.1 节中的稳定 Steinberg 群的标准生成元$x_{ij}(a)$来定义

$$w_{ij}(u) = x_{ij}(u)\, x_{ji}(-u^{-1})\, x_{ij}(u), \qquad h_{ij}(u) = w_{ij}(u)\, w_{ij}(-1).$$

$h_{ij}(u)$ 的矩阵像为对角矩阵，其第 i 和 j 个位置上的元素分别为 u 和 u^{-1}，且 $h_{ij}(1) = 1$。

定理 2.2.4。 对于整体域 F 以及其上的中心除法代数 D / F，对角限制

$$Q_F(D) \longrightarrow \prod_{v\in S} Q_{F_v}(D_v)$$

是单射，其中 S 是 D 不分裂的有限赋值点集。

对于核中的一个类，我们通过某个可分极大子域的完备化提升其局部像，并比较两个整体求值；这两个求值来自一个由形状相同的 Steinberg 字构造的 K_2-类。

证明。 设 $z \in K_2(D)$ 在每个局部商中的类都为零。若 $S = \varnothing$，则 D 分裂，无需证明。

我们首先证明， z 在局部代数乘积中的像来自某个可分极大子域。设 $L \subset D$ 是一个可分极大子域，并令

$$D_S = \prod_{v\in S} D_v, \qquad L_S = L \otimes_F \prod_{v\in S} F_v = \prod_{v,\, w|v} L_w.$$

对于 $L \subset D$ 的基变换 $L_S \to D_S$ ，标量扩张 $K_2(L_S) \to K_2(D_S)$ 的 (v, w)-分量是与 (L_w, D_v)-双模 $e_w D_v$ 张量，其中 e_w 是因子 L_w 的幂等元。双模 $e_w D_v$ 是单模 D 从 $L \otimes_F D^{\mathrm{op}} \simeq M_{\deg D}(L)$ 到 L_w 的基变换，因此该分量为 θ_{L_w}。由引理 2.2.3，对每个 $v \in S$ 和 $w \mid v$，有 $I_{F_v}(D_v) = \theta_{L_w} K_2(L_w)$。因此， z 在 $K_2(D_S)$ 中的像来自 $K_2(L_S)$。

设 Z 是表示 z的一个自由约化 Steinberg 字，T 是由 Matsumoto 符号构成的一个字，表示将 z 在 $K_2(D_S)$中的像提升到 $K_2(L_S)$的一个提升。我们将一个符号$\{a,\ b\}$ 表示为 $h_{12}(a)h_{12}(b)h_{12}(ab)^{-1}$ [53]，而对于 L_S 的某个因子中的符号，则令其他因子中的单位均为 1。由于 Z = T 在 D_S上的稳定 Steinberg 群中成立，我们可以写成

$$\mathsf{Z} = \mathsf{RT}$$

在由初等生成元生成的自由群中，其中 R 是定义关系及其逆的共轭元的有限乘积。我们在一个包含所有所用指标的矩阵阶数下进行运算，固定 RT 中的指标和符号，并为每次出现的字母的系数使用一个独立变量。由于 D_S 是一个积环，这就在所有$v \in S$上给出相同的字形，而原始系数则给出局部参数点 b_v。

我们为这种字形构造两个整体点。对于第一个点，在 RT 自由约化为 Z 时相互抵消的字母对中插入共同的逼近系数，并在其余字母中使用 Z 的原始系数；该点处的值为 z。对于第二个点，先逼近定义关系的独立参数，计算逼近后的和系数与积系数，再利用 L上的弱逼近，同时在所有 L_w 处逼近 T 中的单位；该点处的值属于$\theta_L K_2(L)$。在这两个点处，矩阵字都恰好是单位元。

最后，引理 2.1.6 中的附加字母使单位纤维在所有 b_v处都光滑，而泛词在其光滑开子集上定义了一个 K_2-类。如果这两个整体点足够接近 b_v，那么根据引理 2.2.2，它们在 $Q_F(D)$ 中的取值 $[z]$ 和 0 相等；因此$[z] = 0$。这个证明没有用到局部域上 SK_2 的消失。 □

2.3 扭曲高阶 Chow群与约化范数的像

在本小节中，我们将第 2.2 节的局部–整体原理与一个循环分裂域结合起来，证明整体域上的 $\mathrm{SK}_2(D) = 0$ ，并恢复 Bak 和 Rehmann [4, §2，定理 3] 中关于约化范数像的公式（定理 2.3.2）。我们还引入扭曲高阶 Chow 群，并证明权重一时的消失性，该结果将在第 3.2 节中使用（定理 2.3.4）。

引理 2.3.1。 设 F 为整体域， D 为 F上的中心除法代数。存在一个循环极大子域 $L_0 \subset D$ ，它在 F 的每个 D分裂的实位上都完全分裂。

证明。 如果 F 是全局函数域，或者 $\deg D$ 为奇数，那么 D 的一个循环极大子域具有所需性质，因为奇数次伽罗瓦扩张在所有实位完全分裂。设 F 是数域，且 $\deg D$ 为偶数。从一个循环极大子域出发，我们用一个二次特征修正其类域论特征：该二次特征在 D不分裂的每个赋值处均为平凡，并抵消 D 分裂的实位处的符号；平方类的弱逼近可保证这些局部条件。修正后的特征的阶整除 $\deg D$ ，因为原特征和二次特征的阶都整除它。在 D 不分裂的赋值处，局部次数保持不变，且是局部指标的倍数，而这些局部指标的最小公倍数为 $\deg D$。因此，修正后的循环扩张 L_0/F的次数为 $\deg D$，且分裂 D，所以它嵌入 D 中成为一个极大子域。

□

定理 2.3.2。 对于整体域 F 以及 F上的任意中心除法代数 D ，我们有$\mathrm{SK}_2(D) = 0$。若 $S_{\mathbb{R}}$ 是 D的分歧实位集合，则约化范数的像为

$$R_D = \ker\left(K_2(F) \xrightarrow{(s_v)_{v\in S_{\mathbb{R}}}} (\mathbb{Z}/2)^{S_{\mathbb{R}}}\right).$$

这里 $s_v\{a,b\} = 1$ 当且仅当 a 和 b 在 v处都为负，否则为零。因此$C_2(D/F) \simeq (\mathbb{Z}/2)^{S_{\mathbb{R}}}$。

我们利用引理 2.3.1 中域 L_0 上的循环 Hilbert 90，证明 Nrd_2 在$I_F(D)$上的单射性。局部生成和定理 2.2.4 随即给出 $K_2(D) = I_F(D)$，其约化范数像为 $N_{L_0/F}K_2(L_0)$。

证明。 设 L_0/F 如引理 2.3.1 所述。我们首先证明 Nrd_2 在 $I_F(D)$ 上是单射的。有限分裂域 E/F 的每个实素点都位于 F 的一个实素点之上，在该处 D 分裂，并且 L_0在那里完全分裂。因此， E 没有实素点在 EL_0中变为复点，所以域范数$K_2(EL_0) \to K_2(E)$ 是满射的 [4, §2，定理 2]。转移的传递性给出

$$I_F(D) = \theta_{L_0} K_2(L_0).$$

设 σ 是 $G = \mathrm{Gal}(L_0/F)$ 的一个生成元。根据 Skolem–Noether 定理， $\theta_{L_0}((1-\sigma)K_2(L_0)) = 0$，因此 θ_{L_0} 可经由 $K_2(L_0)_G$ 分解，我们得到

$$K_2(L_0)_G \xrightarrow{\theta_{L_0}} I_F(D) \xrightarrow{\mathrm{Nrd}_2} K_2(F), \qquad \mathrm{Nrd}_2 \circ \theta_{L_0} = N_{L_0/F}.$$

若 $\mathrm{char}\ F \nmid$ 不整除 $\deg D$，循环 Hilbert 90 [55, 定理 14.1] 给出 $\ker N_{L_0/F} = (1-\sigma)K_2(L_0)$，因此该复合映射在 $K_2(L_0)_G$ 上是单射。若 $\mathrm{char}\, F = p$ 整除 $\deg D$，令 P 为 G 的一个 Sylow p-子群，并令 $M = L_0^P$。由于 $[L_0\colon L_0^p] = [M\colon M^p] = p$，群 $K_2(L_0)$ 和 $K_2(M)$ 唯一地可被 p 整除（定理 8.1], ），而恒等式 $\mathrm{res}^{L_0/M} \circ N_{L_0/M} = \sum_{g\in P} g$ 和 $N_{L_0/M} \circ \mathrm{res}_{L_0/M} = |P|$ 给出 $K_2(L_0)_P \simeq K_2(M)$。于是，对次数与 p 互素的循环扩张 M/F，循环 Hilbert 90 给出相同的单射性。由于第一映射是满射，Nrd_2 在 $I_F(D)$ 上是单射。

最后，我们证明 $K_2(D) = I_F(D)$。在每个有限处 v，群 $K_2(D_v)$ 都由分裂转移的像生成：对于 D_v 的伽罗瓦分裂域 L/F_v ，范数 $N_{(D_v)_L/D_v}$ 在分裂 Morita 识别下是 θ_L ，因此引理 1.1.6 给出

$$\theta_L\colon K_2(L)_{\mathrm{Gal}(L/F_v)} \xrightarrow{\sim} K_2(D_v).$$

在分歧实位上，分裂转移 $\theta_{\mathbb{C}}$ 也满射到 K_2 实四元数代数的 [39, 像]（命题 6.6.1(2)）。因此，定理 2.2.4 的目标为零，所以

$K_2(D) = I_F(D)$，而 Nrd_2 在 $I_F(D)$上的单射性给出 $\mathrm{SK}_2(D) = 0$。Nrd_2的像为 $N_{L_0/F}K_2(L_0)$，根据 [4, §2，定理 2]，它等于 R_D。弱逼近可以在符号 $\{a, -1\}$ 上实现任意实符号向量，因此所示的符号映射是满射。 □

定义 2.3.3. 设 X/F 是一个光滑等维概形，并令

$$D_X = D \otimes_F \mathcal{O}_X, \qquad \Delta_F^m = \operatorname{Spec} F[t_0, \dots, t_m] \Big/ \Big(\sum_i t_i - 1\Big).$$

W 中余维为 r 的整闭子概形是可容许支集，当且仅当它与每个面 $X \times \{t_{i_1} = \cdots = t_{i_s} = 0\}$ 都正常相交。我们定义

$$z^r(X, m; D) = \bigoplus_{W \text{ admissible}} K_0(D_{\kappa(W)}).$$

记 ∂_i^* 为沿第 i个面的拉回，并记 $\partial = \sum_{i=0}^m (-1)^i \partial_i^*$ 为微分。这些拉回由带支撑的 K-理论构造，并满足面与退化恒等式，因此 $z^r(X, \bullet; D)$ 是一个链复形。我们令

$$\mathrm{CH}^r(X, m; D) = H_m(z^r(X, \bullet; D))$$

并将其简记为 $\mathrm{CH}^r(F, m; D)$，其中 $X = \operatorname{Spec} F$。对于 $D = F$，这些是 Bloch 高阶 Chow 群 [49], [39, 定义 5.6.1 和 5.6.3]。

约化秩给出一个单射

$$K_0(D_{\kappa(W)}) \hookrightarrow \mathbb{Z}, \qquad \mathrm{im} = \mathrm{ind}(D_{\kappa(W)})\mathbb{Z}.$$

它诱导出约化循环映射 ρ，将扭曲循环复形实现为普通循环复形的子复形。在此识别下，系数微分就是带通常交数的面限制。对于有限系数，我们使用该复形的导出张量积，并将此导出张量积的同调与整数同调模去系数整数所得的商区分开来 [39, 第 5.6 节和第 5.9 节，定理 6.5.3]。

同样的方法可得权重一扭曲高阶 Chow 群的如下消失结果：次数为二时使用局部–整体原理，次数为三时使用域 L_0 和约化循环映射。

定理 2.3.4. 设 F 是一个整体域，D 是 F上的中心除法代数。则$\mathrm{CH}^1(F, 2; D) = \mathrm{CH}^1(F, 3; D) = 0$。

证明。步骤 *1*：与 $Q_k(D)$ 的识别。对于完美域 k，我们使用 [39,定理 6.7.1(2)],的边缘正合列

$$0 \to \mathrm{CH}^1(k, 3; D) \to \mathrm{CH}^2(k, 2; D) \xrightarrow{e_2} K_2(D) \to \mathrm{CH}^1(k, 2; D) \to 0.$$

来自分裂域的转移生成 $\mathrm{CH}^2(k, 2; D)$ [39, 引理 6.6.2–6.6.4]：对于每个可容许闭点 x，我们选取布劳尔类 $D_{\kappa(x)}$中的除代数的一个极大子域，并从所得点推前，得到 K_0系数的生成元。在分裂域 E上，映射 e_2 是同构 $\mathrm{CH}^2(E, 2) \simeq K_2(E)$ [61]，且与转移相容。因此

$$\mathrm{im}\, e_2 = I_k(D), \qquad \mathrm{CH}^1(k, 2; D) = Q_k(D),$$

在域扩张中是自然的。

步骤 *2*：非完美域。对于特征为 p 的域 k，我们首先将 p 取逆，并转至 k 的完美闭包。对于有限纯不可分扩张 M/k，我们有

$$\mathrm{cor}_{M/k} \circ \mathrm{res}_{M/k} = \mathrm{res}_{M/k} \circ \mathrm{cor}_{M/k} = [M : k].$$

对于循环，因子 $[M : k]$ 是支集重数与剩余次数的乘积。对于 K-理论，我们按根基的幂过滤自身基变换所得到的局部阿廷环，并利用可加性 [68]。扭曲循环复形、 K-理论以及按分裂转移取商，都与域的滤过余极限 [39] 相容。因此，在将 p 取逆后，限制到完美闭包是一个同构，并且

$$\mathrm{CH}^1(k, 2; D)[1/p] \simeq Q_k(D)[1/p].$$

步骤 *3*： p-主部分。对于 p-主部分，沿着次数与 p 互素、且能分裂布劳尔类的素数到p 分量的扩张进行限制与余限制，可将问题归结为一个 p-主类。由于对于特征为p 的局部域 F 以及全局函数域 F， $[F : F^p] = p$，命题 A.3 的秩一 Frobenius 比较使正权下的约化循环映射成为拟同构。因此，权重一中次数为二和三的 p-主部分由交换计算 [39, 命题 6.8 得以消失。1]。

步骤 *4*：上的二次次数 F。定理 2.3.2 的证明给出 $Q_F(D) = 0$。在特征零情形下，步骤 1 给出 $\mathrm{CH}^1(F, 2; D) \simeq Q_F(D) = 0$；在正特征情形下，步骤 2 在将 p 取逆后给出相同结论，而步骤 3 表明 p-主挠部分消失。

步骤 *5*：上的三次次数 F。对角群 $\mathrm{CH}^2(F, 2; D)$ 由分裂域上的转移生成，这对任意域都成立，因此该步骤在 F 上进行；只有下面的边缘正合列要求完美域。对于分裂域 E，同构 $\mathrm{CH}^2(E, 2) \simeq K_2(E)$ 与转移 [61] 相容。对于引理 2.3.1 中的域 L_0，分裂域 E 的域范数 $K_2(EL_0) \to K_2(E)$ 是满射的，正如定理 2.3.2 的证明中所示，因此推前

$$\psi\colon \mathrm{CH}^2(L_0, 2) \longrightarrow \mathrm{CH}^2(F, 2; D)$$

是满射。因此， ψ 经由 $G = \mathrm{Gal}(L_0/F)$的余不变元分解，因为结构映射 $\mathrm{Spec}\, L_0 \to \mathrm{Spec}\, F$ 是 G-不变的，而 $\rho \circ \psi = N_{L_0/F}$ 是 ρ 与推前 [39, 引理 6.6.4]的相容性。因此，循环 Hilbert 90 与特征 p 下定理 2.3.2 证明中的平均化论证相结合，使 $\rho\circ \psi$ 在余不变元上是单射的，并且

$$\rho\colon \mathrm{CH}^2(F, 2; D) \to \mathrm{CH}^2(F, 2)$$

是单射的 。当 F是完美域时，在 $\mathrm{CH}^2(L_0, 2) \simeq K_2(L_0)$ 和 $\mathrm{CH}^2(F, 2) \simeq K_2(F)$ 的条件下，我们有

$$\mathrm{Nrd}_2 \circ e_2 \circ \psi = \mathrm{Nrd}_2 \circ \theta_{L_0} = N_{L_0/F} = \rho \circ \psi,$$

而且， ψ 的满射性给出 $\mathrm{Nrd}_2\circ e_2 = \rho$ [39, 命题 6.6.5]。因此， ρ的单射性与边缘正合列给出

$$\mathrm{CH}^1(F, 3; D) = \ker e_2 \subseteq \ker \rho = 0.$$

在正特征下，限制到完美闭包与 ρ 交换，并且在 $\mathrm{CH}^2(-, 2; D)[1/p]$ 和 $\mathrm{CH}^2(-, 2)[1/p]$上是同构，因此上文证明的 ρ在 F上的单射性，在将 p置可逆后给出其在完美闭包上的单射性。在那里，边缘正合列和单位元 $\mathrm{Nrd}_2 \circ e_2 = \rho$给出 $\mathrm{CH}^1(F, 3; D)[1/p] = 0$，而 p-主部分由上述比较映射而消失。

□

整体域上的扭曲 K-理论

本节比较整体域 F 上正次数中的 $K(D)$ 与 $K(F)$。我们首先准备低次数中所使用的扭曲高阶 Chow 群与普通高阶 Chow 群的比较映射（第 3.1 节）。随后构造比较映射，在至少为二的次数上将其分裂，并研究其纤维（第 3.2 节）；当 D 在某个实位处分歧时，关于比较映射、其分裂以及其纤维的陈述在将 2 置可逆后成立。

3.1 结构推前与扭曲高阶 Chow 群

本小节为第 3.2 节准备循环论输入。我们通过塞韦里–布劳尔簇的结构映射所诱导的推前，将扭曲高阶 Chow 群与普通高阶 Chow 群联系起来：该推前经过扭曲高阶 Chow 群分解，分解后的映射在对角线上是同构的，并且在下一行上是满射；将其与约化循环映射复合后得到通常的推前。在 ℓ-局部化之后，约化循环映射在权重 $r \geq 2$下的两行上都是同构，但在带有实位的数域上，$\ell = 2$ 除外（命题 3.1.3）；对于 $\mathrm{CH}^2(F, 3; D)$，命题 3.1.4 消除了这一例外。这些同构用于 $K_3(D)$以及比较纤维的群 π_4。

设 F是一个整体域，D是 F上的中心除法代数。在闭支撑 T处，约化秩将 $K_0(D_{\kappa(T)})$识别为 $\mathrm{ind}(D_{\kappa(T)})\mathbb{Z}$，从而诱导出定义 2.3.3 中的约化循环映射 ρ。我们将 ρ 与结构迹进行比较，即与塞韦里–布劳尔簇的结构映射沿其进行的推前进行比较。记 $\mathcal{F}^r K(D)$ 为同伦余维塔。同伦余维塔的权重-r 层的同伦群 π_m 是 $\mathrm{CH}^r(F, m; D)$，而 $\pi_i \mathcal{F}^r K(D) = 0$ 表示 $i < r$。权重零层在零次上只有约化秩群 [39, ，见推论 6.1.4 和第 6.6] 节。对于整体函数域（它是不完备的），层的识别由引理 A.2 给出。

结构推前与约化秩

我们的首要目标是引理 3.1.2。该引理将对角线及其下一行上的扭曲高阶 Chow 群，通过塞韦里–布劳尔簇的高阶 Chow 群来表示，并且与约化循环映射相容。其证明用到了以下边界修正。

引理 3.1.1. 设 F 是一个无限域，设 B 是 F上的一个中心单代数，令$X = \mathrm{SB}(B)$ 且 $n =$维数 X，取 $r \geq 1$，并记 $f_*\colon z^{n+r}(X, \bullet) \to z^r(F, \bullet)$ 为沿结构映射 $f\colon X \to \mathrm{Spec}\ F$的适当推前。若链 c 的次数为 r 且满足 $f_* c = 0$，则存在次数为 $r+1$ 的链 W，使得

$$f_* W = 0, \qquad \partial W = c.$$

证明。链 c 的余维为 $n + r =$ 维数$(X \times \Delta^r)$，因此其分量都是闭点；与各个面的正常交迫使它们在 Δ^r 中的像避开所有面。对于每个内部闭点 $q \in \Delta^r$，c 的相应分量是$X_{\kappa(q)}$上的零次零循环。塞韦里–布劳尔簇上的 CH_0 的次数映射是单射 [16, 推论 7.3], ，因此该分量可表示为正常整完备曲线 $C \to X_{\kappa(q)}$上的有理函数之因子的推前之和。由 C的正规性，满足 $\mathrm{div}(\psi) \neq 0$ 的有理函数 ψ 定义了一个非常值态射 $\psi\colon C \to \mathbb{P}^1_{\kappa(q)}$。该完备曲线之间的态射是有限的，并且是平坦的，因为 $\psi_* \mathcal{O}_C$ 在正则曲线 $\mathbb{P}^1_{\kappa(q)}$上无挠。

设定 $L = \kappa(q)$，并将相应的 L-点 $a = (a_0, \ldots\ldots, a_{r+1})$置于 Δ^{r+1}_L 的面 $t_0 = 0$ 上。因此，对于 $j > 0$，有 $a_0 = 0$ 和 $a_j \neq 0$。我们选择满足 $\sum_j b_j = 0$、$b_j \neq 0$和 $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$ 的 $b_j \in L$，使其对应于 $i \neq j$；这避开了无限域 L 上超平面$\sum_j b_j = 0$ 的有限多个真线性子空间。直线 $t_j = a_j + b_j u$ 由 $u \in \mathbb{A}^1_L$ 参数化，与

余维一面横截相交于不同点 $u_j = -a_j/b_j$，并避开所有更高余维的面。我们插值出一个多项式 h，使得对于 $j>0$，$h(u_0)=1$ 且 $h(u_j)=0$，并设 $\varphi(u) = [1-h(u) : h(u)]$。沿 φ 以及沿取值为 ∞ 的常值映射拉回，得到

$$C \times_{\mathbb{P}^1_L,\varphi} \mathbb{A}^1_L, \qquad C \times_{\mathbb{P}^1_L,\infty} \mathbb{A}^1_L,$$

在直线上均为次数相同的有限平坦态射，其中 $0=[0:\ 1]$ 和 $\infty=[1:\ 0]$ 属于 $\mathbb{P}^1_L$。它们的基本循环之差经适当推前到 $X_L \times \Delta^{r+1}_L$，再经有限推前到 F，给出一个可容许链 W_ψ。次数相等意味着 $f_* W_\psi = 0$。由横截性和有限平坦性，限制到 $t_j = 0$ 后得到 u_j处纤维循环之差，即对于 $j=0$ 为 $\psi^{-1}(0) - \psi^{-1}(\infty)$，对于 $j>0$则为零。推前没有额外的次数因子，因为 $L = \kappa(q)$，而 $t_0 = 0$ 的边界符号为 $+1$。将这些链W_ψ 对各因子求和，我们得到一个链 W，使得

$$f_* W = 0, \qquad \partial W = c.$$

□

引理 3.1.2。设 F 是一个无限域，D 是 F上的中心除法代数，B 是 F 上的中心单代数，且满足 $[B]=[D]$，并令 $X = \mathrm{SB}(B)$ 以及 $n =$ 维数 X。对于每个 $r \geq 1$，结构映射 $f:\ X \to \operatorname{Spec} F$ 诱导出

$$\mathrm{CH}^{n+r}(X, r+1) \twoheadrightarrow \mathrm{CH}^r(F, r+1; D), \qquad \mathrm{CH}^{n+r}(X, r) \xrightarrow{\sim} \mathrm{CH}^r(F, r; D).$$

与 ρ 的复合映射就是沿结构映射的通常适当推前。这些映射与有限扩张的限制与转移相容。

证明。我们首先证明 f_* 可经由扭曲循环复形分解。在每个单纯形次数中，设 $W \subset X \times \Delta^m$ 是一个整循环，其像为 $T \subset \Delta^m$。那么

$$f_*[W] = \begin{cases} [\kappa(W) : \kappa(T)]\,[T], & \dim T = \dim W, \\ 0, & \dim T < \dim W. \end{cases}$$

在第一种情形下，X有一个 $\kappa(W)$-有理点，因此 $[\kappa(W) : \kappa(T)]$ 可被 $\mathrm{ind}(D_{\kappa(T)})$ 整除。因此，f_* 可经由扭曲循环复形 $z^r(F, \bullet;\ D) \subset z^r(F, \bullet)$ 分解，其中后者通过约化秩嵌入，且与面限制、平坦基变换及适当转移相容。

接下来我们证明链上的满射性。对于 $m = r, r+1$，可容许支集 T分别是一个闭点或一条整曲线。为提升系数生成元 $\mathrm{ind}(D_{\kappa(T)})[T]$，我们取 $X_{\kappa(T)}$ 中一个次数为 $\mathrm{ind}(D_{\kappa(T)})$ 的闭点的闭包。当 T 是一条曲线时，该闭包在 T上是适当的，其闭纤维是该闭包（即一条整曲线）的适当闭子集；因此这些闭纤维是零维的，且该闭包在 T上是有限的。它从 T继承了与各面的正常交条件。这就证明了这两个次数上的链满射性。

我们将扭曲循环复形中次数为 $r+1$ 的一个循环提升为链 Z；于是 $f_* \partial Z = 0$。对于引理 3.1.1 中满足 $c = \partial Z$ 的链 W，差 $Z - W$ 是一个提升了给定循环的循环。在次数 r 时，低一度的链群为零，因此得到满射性。设 $\tilde{}$ 一个次数为 r 的链 Y 和一个链 V 满足 $f_* Y = \partial V$。我们选取 V 的一个提升 V，并将 ∂V 从 Y 中减去。于是 $f_*(Y - \partial V) = 0$，所以根据引理 3.1.1，$Y - \partial V$ 也是一个边界，且 $\tilde{}$ 满足 $c = Y - \partial V$。这证明了次数 r 时的单射性。

□

对角线上的约化范数与下一行

接下来我们 利用引理 3.1.2 研究 $\mathrm{CH}^r(F,\ m;\ D)$ 上的约化循环映射 ρ，其中 $m=r,\ r+1$.

命题 3.1.3. 设 F 是整体域，ℓ 是一个素数。若 F 是数域，我们假设 ℓ 为奇数，或 F 没有实位。对于每个 $r\geq 2$,

$$\rho\colon\ \mathrm{CH}^r(F,m;D)_{(\ell)}\xrightarrow{\sim}\mathrm{CH}^r(F,m)_{(\ell)}\qquad (m=r,r+1).$$

这些同构与限制和转移相容。

证明。 首先设 $\ell=$ 特征为 F，于是 $[F\colon\ F^\ell]=\ell$。我们将布劳尔类中阶与 ℓ 互素的分量，在一个次数与 ℓ 互素的扩张 $F\prime/F$ 上分裂。由于 $\mathrm{cor}_{F'/F}\mathrm{res}_{F'/F}=[F\prime\colon\ F]$，$\rho_{(\ell)}$ 的核与余核可以通过扩张后检测。此时应用命题 A.3 的秩一 Frobenius 比较。

现在设 $\ell\neq$ 特征为 F，并令 $X=\mathrm{SB}(D)$、$n=\dim\ X$，以及 $R=\mathbb{Z}_{(\ell)}$。我们考虑结构迹的纤维

$$\mathcal{C}_r=\mathrm{fib}\Big[R\Gamma_{\mathrm{mot}}(X,R(n+r))[2n]\xrightarrow{f_*}R\Gamma_{\mathrm{mot}}(F,R(r))\Big].$$

由于 $\mathrm{CH}^r(F,m)=H^{2r-m}_{\mathrm{mot}}(F,\mathbb{Z}(r))$ 和 $\mathrm{CH}^{n+r}(X,m)=H^{2r-m}(R\Gamma_{\mathrm{mot}}(X,\mathbb{Z}(n+r))[2n])$，行 $m=r$ 和 $m=r+1$ 对应于迹的次数 r 和 $r-1$。根据关于 ℓ 的假设，$\mathrm{cd}_\ell F\leq 2$。在X中维数为 a、余维为 $c=n-a$ 的点处，纯性给出权 $a+r$，且剩余域的 ℓ-上同调维数至多为$a+2\leq a+r$ （如 $r\geq 2$）。因此，支撑过滤的各层均处于 Beilinson–Lichtenbaum 比较 [85], [89, 定理 2.3(2)] 的适用范围内。由于循环类映射与真态射迹相交换，这便将有限系数迹与所需次数上的 étale 迹对应起来。

在 F^{sep} 上，X 是 $\mathbb{P}^n$。迹经 $[2n]$ 平移后，在最高几何群 $\mathbb{Z}/\ell(r)$ 上是一个同构。其余群位于几何上同调次数 $-2,\ -4,$ ....., $-2n$。模掉 ℓ后，Hochschild–Serre 给出

$$H^q(\mathcal{C}_r/\ell)=0\qquad (q\geq 1).$$

对于有理系数，我们通过限制与转移，从有限分裂域下降射影丛分解，并使用超平面类 $c_1(\omega_X^{-1})/(n+1)$。迹是投影到最高分量的投影，因此

$$(\mathcal{C}_r)_{\mathbb{Q}}\simeq\bigoplus_{k=1}^{n}R\Gamma_{\mathrm{mot}}(F,\mathbb{Q}(r+k))[2k].$$

对于数域，Borel 的计算 [13] 通过 Chern 特征给出的权分解表明，$H^i_{\mathrm{mot}}(F,\ \mathbb{Q}(b))=0$ 对于 $b\geq 2$ 和 $i\neq 1$ 成立（见 [74, 定理 3.2] 的证明）。对于全局函数域，根据 Harder 定理 [29]，此范围内的群消失；这与局部化相符，因为有限剩余域的正 K群是挠群 [66]。因此，对于 $q\geq 0,\ H^q((\mathcal{C}_r)\mathbb{Q})=0$ 。

结合这两项计算，系数序列表明，乘以ℓ 在 $H^q(\mathcal{C}_r)$ 上是可逆的，其中 $q\geq 2$。这些群是 ℓ-主挠群，因此为零。群 $H^1(\mathcal{C}_r)$ 是 ℓ-可整除的。因此，结构迹在 $\widetilde{}$ 次数 $q\geq 2$ 中是同构，在一次时是满射，且其核是 ℓ-可整除的。将引理 3.1.2 中的映射 $\mathrm{CH}^{n+r}(X,m)\to\mathrm{CH}^r(F,m;\ D)$ 记为 f_*，于是 $f_*=\rho\circ\widetilde{f}_*$。在对角线上，$\widetilde{f}_*$ 是一个 $\widetilde{}$ 同构，并将 ρ 与次数 r 中的迹相对应。在下一行，f_* 和 f_* 均为$\widetilde{}$满射，因此 ρ 是满射，且 $\ker\ \rho=f_*(\ker f_*)$。当 $r\geq 3$ 时，此核消失，因为 f_* 是

在次数 $r-1\geq 2$ 上是单射；对于 $(r,m)=(2,3)$，它是 ℓ-可整除的。在 $(r,m)=(2,3)$ 的情形下，限制与转移表明，$\ker\rho$ 被一个有限分裂域的次数所湮灭。该次数中与 ℓ 互素的部分是一个单位，因此这个 ℓ-可整除群被 ℓ 的某个幂所湮灭，从而为零。

□

相对于实位的迹

命题 3.1.3 排除了带有实位的数域上的素数 2。对于 $\mathrm{CH}^2(F,3;D)$，我们将在命题 3.1.4 中利用相对于实位的结构迹，去掉这一限制。

命题 3.1.4. 设数域 F 有一个实位，且 D 是 F 上的中心除法代数，

$$\rho\colon \mathrm{CH}^2(F,3;D)_{(2)}\xrightarrow{\sim}\mathrm{CH}^2(F,3)_{(2)}.$$

证明. 设 $X=\mathrm{SB}(D)$、$n=\dim X$，并设 $R=\mathbb{Z}_{(2)}$。一次的结构迹为

$$f_*\colon H^{2n+1}_{\mathrm{mot}}(X,R(n+2))\longrightarrow H^1_{\mathrm{mot}}(F,R(2)),$$

而 ρ 的目标是 $\mathrm{CH}^2(F,3)_{(2)}=K_3^{\mathrm{ind}}(F)_{(2)}$。

我们用 $R\Gamma_{\mathrm{mot,\ rel}}$ 和 H^i_{rel} 表示在所有实位 v 处到代数实闭包 F_v^{rc} 的限制映射的纤维及其上同调。对于 $M=R,\ \mathbb{Q},\ \mathbb{Q}/R$，设

$$\mathcal{C}_{\mathrm{rel}}(F,M)=\mathrm{fib}\left(R\Gamma_{\mathrm{mot,rel}}(X,M(n+2))[2n]\xrightarrow{f_*}R\Gamma_{\mathrm{mot,rel}}(F,M(2))\right).$$

我们首先证明 $H^0\mathcal{C}_{\mathrm{rel}}(F,\mathbb{Q}/R)$ 和 $H^1\mathcal{C}_{\mathrm{rel}}(F,\mathbb{Q}/R)$ 均消失。

我们将有限系数的动机–étale 比较应用于支撑过滤。在维数为 a 的 X 上的一个点处，纯性将权移至 $a+2$。不作实相对化时，虚拟 2-上同调维数至多为 $a+2$。在相对计算中，剩余域中的常数域是一个有限数域，其实分支和复分支决定了限制的目标。根据 Jannsen [36, 命题 1.2 和引理 1.3]，限制到实分支在次数 $a+2$ 上是满射，在高于该次数时是同构。复分支的上同调维数至多为 a。因此，取相对纤维后，Beilinson–Lichtenbaum 范围 [85] 以上的比较余纤维消失。对于 $x\in X$，令 k_x 为 $\kappa(x)$ 中 F 的代数闭包；实闭包一侧的剩余域是 $\kappa(x)\otimes_F F_v^{\mathrm{rc}}$ 的因子。实闭包上的闭支撑下降到有限中间域，并包含于其有限像的基变换中；由于余维保持不变，基变换后的支撑是共终的，因此可以逐个剩余域计算相对层 [36, 命题 1.2、引理 1.3(b)、注 1.4(a)]。对有限系数取直极限后，我们通过 étale 上同调计算 $\mathcal{C}_{\mathrm{rel}}(F,\mathbb{Q}/R)$。

在 F^{sep} 上，迹在最高几何次数 $2n$ 上是 $(\mathbb{Q}/R)(2)$ 的同构，因此将几何纤维平移 $[2n]$ 后，其上同调仅出现在不超过 -2 的偶数次数中；对于 $n\geq 1$，次数 -2 上为 $(\mathbb{Q}/R)(3)$。基底的相对上同调维数至多为二，因此正次数上的上同调消失，而零次中唯一可能的贡献是 $H^2_{\mathrm{rel}}(F,\ (\mathbb{Q}/R)(3))$。动机系数三角给出

$$H^2(F,(\mathbb{Q}/R)(3))\simeq K_3^M(F)\otimes R.$$

事实上，$H^2_{\mathrm{mot}}(F,\ \mathbb{Q}(3))$ 和 $H^3_{\mathrm{mot}}(F,\ \mathbb{Q}(3))$ 这两个位于 $\mathbb{Q}/R$-系数项两侧的有理群，分别由 $K_4(F)_{\mathbb{Q}}=0$ [13] 和 $K_3^M(F)_{\mathbb{Q}}=0$ 消去。在代数实闭包处也同样成立，只需对有限数域取直极限。利用 $K_3^M(F)$ 可由实位处的符号描述这一点 [8]，，我们有

$$H^2(F,(\mathbb{Q}/R)(3))\simeq\prod_{v\,\mathrm{real}}H^2(F_v^{\mathrm{rc}},(\mathbb{Q}/R)(3)).$$

复共轭在 $(\mathbb{Q}/R)(3)$ 上的作用为 -1，因此

$$H^1(F_v^{\mathrm{rc}}, (\mathbb{Q}/R)(3)) = (\mathbb{Q}/R)(3)/2(\mathbb{Q}/R)(3) = 0.$$

相对正合列给出 $H^2_{\mathrm{rel}}(F,\ (\mathbb{Q}/R)(3)) = 0$。因此 $H^i\mathcal{C}_{\mathrm{rel}}(F,\ \mathbb{Q}/R) = 0$ 对 $i \geq 0$成立。接下来我们用有理系数进行计算。利用上面的超平面类，我们将有理射影丛分解下降。由于结构迹投影到最高分量，

$$\mathcal{C}_{\mathrm{rel}}(F, \mathbb{Q}) \simeq \bigoplus_{j=3}^{n+2} R\Gamma_{\mathrm{mot,rel}}(F, \mathbb{Q}(j))[2j-4].$$

对于 $i \geq 1$，绝对群 $H^{2j+i-4}\,\mathrm{mot}\,(F, \mathbb{Q}(j))$ 消失，因为次数超过权，除 $j = 3$ 和 $i = 1$ 外；在这两种情形下，它等于 $K_3^M(F)_{\mathbb{Q}} = 0$。前面的实闭包群$H^{2j+i-5}\,\mathrm{mot}\,(F_v^{\mathrm{rc}}, \mathbb{Q}(j))$ 也用同样的方法处理。权界内的例外项为 $H^2_{\mathrm{mot}}(-, \mathbb{Q}(3))$、$K_3^M(-)_{\mathbb{Q}}$ 和 $K_4^M(-)_{\mathbb{Q}}$；根据数域计算和滤过余极限，它们均为零。因此 $H^i\mathrm{C}_{\mathrm{rel}}(F, \mathbb{Q}) = 0$ 对 $i \geq 1$成立，而系数三角给出$H^i\,\mathrm{C}_{\mathrm{rel}}(F, R) = 0$ 对 $i \geq 1$成立。

现在回到绝对迹。对于如上所述的域扩张 k/F 和 M，记作$X_k = X \times_F k$，并定义

$$\mathcal{C}_{\mathrm{abs}}(k, M) = \mathrm{fib}\left(R\Gamma_{\mathrm{mot}}(X_k, M(n+2))[2n] \xrightarrow{f_*} R\Gamma_{\mathrm{mot}}(k, M(2))\right).$$

带有绝对迹纤维的正合序列给出

$$H^1\mathcal{C}_{\mathrm{abs}}(F, R) \xrightarrow{\sim} \prod_{v\,\mathrm{real}} H^1\mathcal{C}_{\mathrm{abs}}(F_v^{\mathrm{rc}}, R), \qquad H^2\mathcal{C}_{\mathrm{abs}}(F, R) \hookrightarrow \prod_{v\,\mathrm{real}} H^2\mathcal{C}_{\mathrm{abs}}(F_v^{\mathrm{rc}}, R).$$

由引理 3.1.2 结合 $r = 2$，结构映射诱导出满射 $\mathrm{CH}^{n+2}(X, 3) \twoheadrightarrow \mathrm{CH}^2(F, 3; D)$，其与 ρ 的复合映射为 f_*。在 F_v^{rc} 上以及在 F 的有限扩张上也成立，并且这些满射与限制和转移相容。在实闭包上，指标为 1 或 2；在后一种情况下，通过 Morita 等价转到次数 2 后，ρ 是权重二 [39, 定理 6.5.3 和 8.1.4(1)] 中的同构。因此，f_* 满射到 $H^1_{\mathrm{mot}}(F\mathrm{rc}_v, R(2))$，所以连接映射 $H^1_{\mathrm{mot}}(F_v^{\mathrm{rc}}, R(2)) \to H^2\mathrm{C}_{\mathrm{abs}}(F_v^{\mathrm{rc}}, R)$ 为零。由自然性以及上文所示的 H^2 单射性，连接映射 $H^1_{\mathrm{mot}}(F, R(2)) \to H^2\mathrm{C}_{\mathrm{abs}}(F, R)$ 也为零。因此，f_* 在 F 上是满射；又因为 f_* 经由 ρ 分解，所以 ρ 到 $K_3^{\mathrm{ind}}(F)_{(2)}$ 也是满射。为证明单射性，将权重二中的一个核元素沿引理 3.1.2 的满射提升到 $H^{2n+1}_{\mathrm{mot}}(X, R(n+2))$，再提升为 $y\,\mathrm{C}_{\mathrm{abs}}(F, R)$ 中的元素 H^1。选取 $k = F(\alpha)$，使得 α 的最小多项式为一个次数为 $\deg D$ 的首一多项式，并通过弱逼近选定：在每个 D 分歧的有限处，使其接近定义次数为 $\deg D$ 的非分歧扩张的不可约多项式（Krasner 引理）；在每个实位，使其接近具有互异实根的多项式（单根构成开条件）；于是所有实位都在 k 中完全分裂，且有限分歧处的局部次数可被指标整除。若没有有限处分歧，则 $\mathrm{ind}\, D \leq 2$，而 $k = F$ 已足够。Brauer–Hasse–Noether 定理给出 $\mathrm{ind}(D_k) \leq 2$。将 y 在每个实位的分量置于 k 的一个实分支上，在其他分支上取零。由于相对计算适用于 k 上的 $X_k = \mathrm{SB}(D_k)$，将 H^1 中到实分量的同构应用于 k，便可将所得元组提升到 $y_k \in H^1\,\mathrm{C}_{\mathrm{abs}}(k, R)$。在 F 的每个实位 v 上，余限制将 k 中位于 v 上方的实位所对应的分量相加，因此 $\mathrm{cor}_{k/F}\, y_k$ 与 y 具有相同的实分量；由 H^1 中的单射性可得 $\mathrm{cor}_{k/F}\, y_k = y$。由于 ρ 在指标至多为 2 时是同构，故当指标为 2 时，通过 Morita 等价转到次数 2 后，[39, 定理 6.5.3 和 8.1.4(1)] 中的 y_k 在扭曲权二群中的像为零。转移回去可知，原核元素为零。

□

3.2 整体域上的正次数比较映射及其纤维

在本小节中，我们构造整体域上的比较映射 $g\colon \tau_{\geq 1}K(D) \to \tau_{\geq 1}K(F)$（定理 3.2.4），并研究其纤维 Z。我们证明 g 在次数至少为二时分裂，先考虑数域，再考虑全局函数域，并计算 $K_3(D)$。接着我们证明，Z 具有有限多个主因子，且其同伦有界（定理 3.2.20）；在等价意义下，它仅取决于由 $[D]$ 生成的 Brauer 群循环子群（命题 3.2.24）；并且在数域上，它非典范地等价于有限个移位 Eilenberg–Mac Lane 谱的和（定理 3.2.30）。当 D 在某个实位分歧时，关于比较映射、其分裂及其纤维的陈述均在将 2 置可逆后成立；而 $K_3(D)$ 的计算则是整系数的。

正次数比较映射的构造

该比较映射在算术方块中由以下映射粘合而成：对每个整除 $\deg D$ 的素数 $\ell \neq \operatorname{char} F$，取几何秩 1 类的乘法逆映射（命题 3.2.1）；当 $p \mid \deg D$ 时取 $_1$ 在 $p = \operatorname{char} F$ 处的约化范数；以及将 $\deg D$ 置可逆后取 $N_{D/F}/\deg D$。

设 F 为整体域。在下文的构造中，我们假设 D 在所有实位处分裂；实分歧情形将在定理 3.2.4 中将 2 置可逆后处理。与命题 3.1.4 一样，H^i_{rel} 表示在所有实位处限制到代数实闭包的限制映射之纤维的上同调。固定一个素数 $\ell \neq \operatorname{char} F$。在 étale 下降中，系数模 ℓ^r 的几何茎为

$$\mathbb{Z}/\ell^r(n) \text{ in degree } 2n, \qquad 0 \text{ in odd degrees.}$$

给定一个相容的几何秩 1 类 $x \in \pi_0 L_{K(1),\ \ell}K(D)$，乘以 x 是一个等价

$$m_x\colon L_{K(1),\ell}K(F) \xrightarrow{\sim} L_{K(1),\ell}K(D)$$

根据引理 1.2.2（参见 [20, 定理 6.18 和 7.14]）。

命题 3.2.1. 设 F 是一个整体域，设 $\ell \neq$ 特征 F 是一个素数，并假设 D在 F的所有实位处分裂。那么可以选取一个几何秩为1 的类 $x \in \pi_0 L_{K(1),\ \ell}K(D)$。对于具有实位的数域以及 $\ell = 2$，可以在每个实闭包上指定秩为1 的 *Morita* 类。

证明. 除非 $\ell = 2$ 且 F 有一个实位，否则 $\mathrm{cd}_\ell F \leq 2$；这个例外情形就是下文讨论的实相对情形。

先假设 $\mathrm{cd}_\ell F \leq 2$。那么该秩沿边缘映射在模 ℓ^r的零次中提升，且两个提升之差属于 $H^2(F,\ \mathbb{Z}/\ell^r(1))$。系数过渡映射

$$H^2(F, \mathbb{Z}/\ell^{r+1}(1)) \longrightarrow H^2(F, \mathbb{Z}/\ell^r(1))$$

是满射的，因此我们可以选取相容提升。

在实相对情形中，提升指定实元素的障碍位于相对群的总次数 -1 中，即权零中的 H^1_{rel}。它是元组的相对边界

$$(1)_v \in \prod_{v \text{ real}} H^0(F_v^{\mathrm{rc}}, \mathbb{Z}/2^r),$$

它是对角线 1 的限制，因此该边界消失。提升之差属于权重一的相对 H^2，其过渡映射是满射，因为相对 H^3消失了。因此，同伦逆极限的米尔诺精确列给出 $x_\circ$。由于实数域一侧模去 2^r 后的相应群是有限的，x 的限制在极限中仍是所指定的映射。

□

我们也将 $N_{D/F}\colon L_{K(1),\ \ell}K(D)\to L_{K(1),\ \ell}K(F)$ 记作由范数诱导的映射，并将$m_{N_{D/F}(x)}$ 记作乘以 $N_{D/F}(x)\in\pi_0 L_{K(1),\ \ell}K(F)$。

引理 3.2.2。 设 $\ell\neq$特征 F，并设 $x\in\pi_0 L_{K(1),\ \ell}K(D)$ 是命题 *3.2.1* 中几何秩为1 的一个类；若 $\ell=2$ 和 F 具有实位，则假设 x 在每个实闭包处都是秩1 的 *Morita* 类。于是

$$(N_{D/F}(x)-\deg D)\,y=0\qquad \textit{for } y\in\pi_i L_{K(1),\ell}K(F),\ i\geq 1,$$

因此 $N_{D/F}\circ\ m_x$ 在 π_i 上对 $i\geq 1$的作用是乘以度 D。此外，对每个有限可分裂域 E/F，乘以 x_E-1 在 $\pi_i L_{K(1),\ \ell}K(E)$ 上对 $i\geq 1$均为零，其中 $x_E=\mathrm{res}^{E/F}x$，并且 $K(D_E)$ 通过 *Morita* 等价与 $K(E)$ 相识别。

证明。 由投影公式，

$$N_{D/F}\circ m_x\simeq m_{N_{D/F}(x)}.$$

类 $N_{D/F}(x)$ $-$度 $D\in\pi_0 L_{K(1),\ \ell}K(F)$ 和 $x_E-1\in\pi_0 L_{K(1),\ \ell}K(E)$ 的几何秩均为 0。在实相对情形下，它们在每个实闭包处的限制都为零，因为 x，因此 x_E在此处是秩 1 的 Morita 类。分别在 F 和 E上应用引理 1.2.3，即得这两个断言。

□

引理 3.2.3。 设 F 是一个整体域且 $j\geq 1$。那么 $K_j(F)$ 没有非零可除子群。对于每个素数 ℓ，$K_j(F)^{(\ell)}$ 以及 $K_j(F)[1/2]$ 也同样成立。

证明。 在一次情形下，我们使用映射到有限处或闭点处赋值的直和；其核是有限生成单位群。在更高次数下，我们对整数环或光滑适当曲线使用局部化：剩余域的群K_{j-1} 的直和没有非零可除子群，因此任意可除子群都包含在模型 [68, 28, 66], [67, 定理 1]的有限生成群 K_j 的像中。在 ℓ 处局部化后，或将 2 置可逆后，值群或剩余K群的直和仍然没有非零可除子群，其余部分包含在有限生成$\mathbb{Z}_{(\ell)}$模或 $\mathbb{Z}[1/2]$模中，因此同样的论证适用。

□

定理 3.2.4。 若 D 在 F的所有实位处分裂，则存在一个正次数谱之间的整映射

$$g\colon \tau_{\geq 1}K(D)\longrightarrow\tau_{\geq 1}K(F)$$

该映射将每个有限可分裂域 E/F 到 $N_{E/F}$的分裂转移 θ_E 映至每个 π_j上。在次数 1 和2时，映射 g 与约化范数 Nrd_1 和 Nrd_2一致。存在实分歧时，将 2取逆后，同样的构造仍然成立。

对于 $j\geq 1$，记作 $g_j=\pi_j g$。

证明。 我们首先定义算术方块中 g 的分量。对于 $\ell\mid\deg D$ 且$\ell\neq$char F的情形，我们使用复合映射

$$K(D)\longrightarrow L_{K(1),\ell}K(D)\xrightarrow{m_x^{-1}}L_{K(1),\ell}K(F),$$

连同 Quillen–Lichtenbaum 比较 $\tau_{\geq 1}L_{K(1),\ \ell}K(F)\simeq(\tau_{\geq 1}K(F))^\wedge_\ell$对于 F。如果 $p=$特征 F整除次数 D，则 $[F\colon\ F^p]=p$，而命题 A.3 的秩一 Frobenius 比较给出

$$K_i(D;\mathbb{Z}/p)=K_i(F;\mathbb{Z}/p)=0\qquad(i\geq 2).$$

因此， p 处的完备正次数谱集中在一次，我们在此使用全局约化范数 Nrd_1。将次数 D求逆后，我们使用 $N_{D/F}/$ 次数 D。

这些分量在交叠处一致。对于 $\ell \neq \mathrm{char}\ F$，引理 3.2.2 给出 $N_{D/F} m_x = \deg D$ 在正次数中，因此

$$m_x^{-1} = N_{D/F}/\deg D$$

在该 ℓ-完备因子的有理化正同伦群上。如果 $p = \mathrm{char}\, F$ 整除 $\deg D$，那么对于每个有限可分分裂域 E/F

$$N_{D/F}\theta_E = \deg D \cdot N_{E/F} = \deg D \cdot \mathrm{Nrd}_1\, \theta_E,$$

并且分裂转移生成 $K_1(D)$，如下所示，因此 $N_{D/F} = \deg D \cdot \mathrm{Nrd}_1$ on$K_1(D)$。由于算术方块的交叠是有理的，在同伦群上相同的映射到该交叠的映射彼此同伦，因此我们可以粘合这些完备映射，并将 $N_{D/F}/\deg\ D$，从而得到 g。存在实分歧时，将 2 置可逆后只出现奇素数 ℓ ，此时 $\mathrm{cd}_\ell F \leq 2$。对于奇数 ℓ，秩 1 提升、乘法等价以及引理 3.2.2 中乘积的消失，都可由绝对 étale 下降通过相同论证得到；几何秩论证不需要在实位处作任何规定。

接下来，我们检查各分量上的转移恒等式。对于有限可分裂域 E，我们通过 θ_E 的定义中的 Morita 等价，将 $K(D_E)$ 与 $K(E)$ 等同，从而得到 $\theta_E = N_{D_E/D}$。在完备因子上，引理 1.2.2 的投影公式给出$N_{D_E/D} m_{x_E} \simeq m_x N_{E/F}$，因此

$$m_x^{-1}\theta_E = N_{E/F} m_{x_E}^{-1}.$$

根据引理 3.2.2，乘以 $x_E - 1$ 在 E 上的正次数中为零，因此右端诱导出域范数。对于完备的特征-p因子唯一的正次数，Nrd_1 的转移恒等式给出相同结论。将 $\deg\ D$ 取逆后，我们使用 $N_{D/F}\theta_E = \deg\ D \cdot N_{E/F}$。因此，在整同伦群上， $g_j\theta_E - N_{E/F}$的取值落在来自算术方块有理重叠边界的可除像中。根据引理 3.2.3，该像为零；此处应用于 $K_j(F)$，或在存在实分歧时应用于$K_j(F)[1/2]$。因此，转移恒等式对定理中的系数成立。

最后我们识别 g_1 和 g_2。在一次情形中，生成可分极大子域的单位构成一个开子集，并且每个单位都是该子集中两个元素之比；因此，分裂转移生成 $K_1(D)$。在二次情形中，定理 2.3.2 的证明表明， $K_2(D)$由从一个可分裂域进行的转移生成。由于约化范数满足相同的转移恒等式 $\mathrm{Nrd}_j\, \theta_E = N_{E/F}$for $j = 1,2$，我们得到$g_j = \mathrm{Nrd}_j$。

□

引理 3.2.5。 设 F 是一个整体域，且 g 是定理 *3.2.4* 中的比较映射。若 D在 F的所有实位处分裂，则 g_1 和 g_2 是同构；否则，在将2求逆后它们是同构。

证明。 根据定理 3.2.4， $g_j = \mathrm{Nrd}_j$ 对 $j = 1,\ 2$。在全局函数域上，$\mathrm{SK}_1(D) = 0$由 [90, 推论 2], 给出，其证明还说明了 Nrd_1的满射性。在数域上，Nrd_1是单射，因为 $\mathrm{SK}_1(D) = 0$ [87]。根据 Hasse–Schilling–Maass 范数定理 [69,定理 33，15], 其像由 $F^\times$ 中在 D 所分歧的每个实位上均为正的元素组成。因此，如果 D 在所有实位上都分裂，则 Nrd_1 是满射的。如果 D 在某个实位处分歧，则 Nrd_1 的余核被 2 湮灭，因为平方在每个实位上都为正，所以 Nrd_1 只有在将 2 置可逆后才是同构。根据定理 2.3.2，Nrd_2 是单射，其余核为 $(\mathbb{Z}/2)^{S_\mathbb{R}}$，其中 $S_\mathbb{R}$ 是 D 所分歧的实位集合。因此，如果 D 在所有实位上都分裂，则 Nrd_2 是同构；一般而言，将 2 置可逆后它是同构。 □

对于数域，定理 3.2.4 的比较映射可以在有限Galois扩张的中间域上相容地选取，正如局部情形（命题1.2.6）中一样。

命题 3.2.6。设 F 是一个数域，设 D 是 F 上的中心除法代数，设 L/F 是一个有限伽罗瓦扩张。若 D 在某个实位处分歧，则我们始终将 2 逆。在此情况下，比较映射

$$g_{F'}\colon \tau_{\geq 1}K(D_{F'}) \longrightarrow \tau_{\geq 1}K(F')$$

定理 *3.2.4* 中关于 L/F 的中间域 F' 的比较映射，可以相容地同时选取，使其与限制、转移、共轭及其复合映射相容。

证明。设 $G = $ = Gal(L/F)，并按照命题 1.2.6 的证明定义 X，$Y \in \mathscr{M}_G$，其中 $X(G/H)$ $= \tau_{\geq 1}K(D_{L^H})$，且 $Y(G/H)$ $=\tau_{\geq 1}K(L^H)$。同样地，我们使用代数 $D_{F'}$ 的范数 $N_{D_{F'}/F'}$，即使指标在 $F\prime$ 上下降，它们的次数仍为 deg D；并对 $\mathscr{M}_G$ 中整除 deg D 的素数使用算术方块。只有当 D 在某个实位处分歧时，我们才一开始就将 X 和 Y 替换为远离 2 的局部化；此时二完备因子为零，我们在选取秩一类时将其略去。

对于每个剩余的 $\ell \mid \deg D$，选取一个在 F 上具有几何秩 1 的类 x_ℓ，并将其限制到每个中间域。若 D 在所有实位处分裂，则命题 3.2.1 给出了该类，且引理 1.2.2 适用；若进一步有 $\ell = 2$，我们便选取 x_2，使其在每个实闭包上的秩 1 莫里田类符合指定要求，这正如命题 3.2.1 所允许的。中间域及分裂域的实闭包也继承了这一指定。在实分歧情形下，只剩奇数 ℓ；此时我们不直接应用命题 3.2.1 或引理 1.2.2（它们假设 D 在实位处分裂），而是如定理 3.2.4 的证明中那样，通过绝对 étale 下降提升秩一类，并借助引理 1.2.2 证明中的几何点和自由模论证构造等价。在每个轨道上，u_ℓ（如定理 1.2.1 的证明中那样）是扭曲一侧的自然局部化单位、$m_{x_\ell}^{-1}$，与域一侧 Quillen–Lichtenbaum 比较映射的逆映射的复合；后者是自然的，且在每个轨道上都是等价，因此可在 Mackey 范畴中取逆。随后按命题 1.2.6 的论证进行粘合。这里，定理 3.2.4 证明中的乘积计算表明，在每个中间域上，正同伦群上的有理化 u_ℓ 与 $N/$deg D 相同。由拉回得到 $g\colon\ X \to Y$。

对于数域，局部情形的修正是不必要的。一旦算术分量确定，次数为 $j \geq 1$ 的同伦群上的映射，除有理群 $\pi_{j+1}\big(Y(F\prime)^\wedge_{\deg D}[1/\deg\ D]\big)$ 的边界像外，均已确定；根据引理 3.2.3，将其应用于 $K_j(F\prime)$，或在存在实分歧时应用于 $K_j(F\prime)[1/2]$，该像可整除，因而为零。对于每个中间域 $F\prime$ 以及每个有限可分裂域 E/F'，投影公式以及与几何秩为 0 的类相乘所得的消失性（如定理 3.2.4 的证明中所示），给出了完备化分量上的转移恒等式。将 deg D 求逆后，该恒等式由 $\pi_j(N_{D_{F'}/F'} \circ \theta_E)$ $=$deg $D\cdot\pi_j N_{E/F'}$ 得出。因此，边界像的消失性给出了具有所述系数的同伦群上的转移恒等式。按照定理 3.2.4 证明中的做法，对每个中间域上表示 $D_{F'}$ 的除代数应用由分裂转移生成的性质，可得次数一和次数二的正规化。因此，$g_{F'}$ 满足定理 3.2.4 的转移恒等式以及次数一和次数二的正规化。

□

数域上的导出范数与分裂

对于数域，定理 3.2.11 的分裂使用命题 3.2.8 中针对有限伽罗瓦扩张 E/F 的导出范数等价；除非将 2 取逆，否则 F 的每个实位都在 E 中完全分裂。

对于群为 G 的有限伽罗瓦扩张 E/F，域范数借助标量限制与其和伽罗瓦共轭复合映射之间的典范同构，定义了一个从同伦轨道出发的映射。我们将这些同构的相容性纳入定义轨道的作用中。

我们如下使用 S整数环的 étale 上同调。设 E/F 是群为 G 的数域有限伽罗瓦扩张。固定 ℓ，取一个有限集 S，其中包含位于 ℓ 之上的赋值以及在 E/F 中分歧的赋值，并令

$$V_L = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{L,S} \qquad (L \in \{E, F\}).$$

那么 $V_E \to V_F$ 是一个有限 étale G 覆盖。对于有限 ℓ-主局部系统 M，若 ℓ 为奇数或 F 全虚，我们使用普通 $R\Gamma$。若 $\ell = 2$ 且 F 有实位，则使用

$$R\Gamma_{\mathrm{rel}}(V_L, M) = \mathrm{fib}\left(R\Gamma(V_L, M) \longrightarrow \bigoplus_{v \text{ real}} R\Gamma(L_v, M) \right).$$

实项是 $\mathbb{Z}/2$ 的普通群上同调。我们用 $R\Gamma_\star(V_L, -)$ 表示所选函子。对于有限 ℓ-主局部系统，$R\Gamma_\star(V_L, M)$ 的上同调集中于 $[0, 2]$，因为 S 包含 ℓ 之上的赋值。对于 $R\Gamma_{\mathrm{rel}}(V_L, M)$，这一上界利用了实限制在三次及以上次数处的同构，以及在二次处的满射性。二次处的满射性由普瓦图—泰特对偶性推出：选取 L 的一个素点 $v \mid \ell$；局部对偶性使 $H^2(L_v, M)$ 到 $\to H^0(V_L, M^D)^\vee$ 的映射为满射，其中 $M^D = \mathrm{Hom}(M, \mu_{\ell^\infty})$，因此，实位处任意元组所对应的障碍都可以在该有限处抵消。对于连续的 $\mathbb{Z}_\ell$ 系数，每个有限阶段的有限性保证 Mittag–Leffler 条件成立，并使这一上界得以保持[37, 17]。

引理 3.2.7。设 M 是 V_F 上取值于 $\mathbb{Z}/\ell^a$模的有限局部系统，且 $\omega\colon\ V_E \to V_F$ 是该覆盖。在实相对情形中，假设 F 的每个实位在 E 中完全分裂。则迹诱导出一个等价

$$\mathbb{Z}/\ell^a \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbb{Z}/\ell^a[G]} R\Gamma_\star(V_E, \omega^* M) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_\star(V_F, M). \tag{2}$$

证明。对于覆盖 ω，$\omega_*\omega^* M$ 的茎是诱导的 G模，其导出余不变元M 由迹给出。这是正则置换作用下，利用自由群环分解进行的张量积计算。我们有 $R\Gamma(V_F, \omega_*\omega^* M) = R\Gamma(V_E, \omega^* M)$，且与实相对情形中对实位的限制相容，因为这些实位完全分裂。自由分解随即给出(2)：条形分解的有限截断具有有限自由项，因此截面与有限和及余纤维相交换。由上同调上界为二可知，对固定次数而言，在足够靠后的阶段，被省略的尾部不再有贡献。同样的推理也适用于相对截面。

□

命题 3.2.8。对于每个实位都完全分裂的数域有限伽罗瓦扩张 E/F，范数

$$\mathcal{N}_{E/F} : \left(\tau_{\geq 2} K(E)\right)_{hG} \longrightarrow \tau_{\geq 2} K(F)$$

是等价。在实位处不完全分裂时，将2置为可逆元后同样成立。

证明。固定如上所述的 ℓ 和 S。将连续 Tate 系数与模 ℓ^a 约化进行比较的系数三角与截面相容。因此，引理 3.2.7 在模 ℓ^a 意义下的等价，给出了导出 ℓ-完备范畴中的相应等价。

现在我们转向 étale K 理论。记周期 étale K 理论层为 $\mathcal{KU}_\ell$，并考虑几何 Postnikov 塔

$$\mathcal{P}_L^m = R\Gamma_\star(V_L, \tau_{\geq 2m}\mathcal{KU}_\ell), \qquad \mathrm{gr}^m\,\mathcal{P}_L \simeq R\Gamma_\star(V_L, \mathbb{Z}_\ell(m))[2m].$$

我们通过有限系数版本的逆极限来解释连续层。$\mathcal{P}_L^m$的连通性界为 $2m-2$。由于 $H^0(V_L, \mathbb{Z}_\ell(1)) = 0$ 且相对 H^0 也消失，权至多为一的项在次数至少为二时不产生贡献。因此$\mathcal{P}_L^2 \simeq \tau_{\geq 2}R\Gamma_\star(V_L, \mathcal{KU}_\ell)$。同伦轨道保持尾部的下连通性界，因此任意高层都不会对固定次数 [20] 产生贡献。将引理 3.2.7 应用于各层的有限系数版本，并对有限截断归纳，我们在导出 ℓ-完备范畴中得到 $(\mathcal{P}_E^2)_{hG} \simeq \mathcal{P}_F^2$。

接下来我们回到代数 K-理论。对于通常的截面，我们在次数至少为二时使用 ℓ-完备比较 $K(V_L) \to K^{\text{ét}}(V_L)$。在实相对情形中，我们恢复实项。扩大 S 后，弱逼近给出 S-单位 u，实现所有实符号向量。符号 $\{-1, u\} \in K_2(V_L)$ 在指定的实位处命中 $\pi_2(K(L_v)_2^\wedge) \simeq \pi_2(KO_2^\wedge) = \mathbb{Z}/2$的生成元，因此限制 $K(V_L)_2^\wedge \to \bigoplus_v$ 实 $KO_2^\wedge$在 π_2上是满射。在由该限制、限制 $R\Gamma(V_L, \mathrm{KU}_2) \to \bigoplus_v$ 实 $KO_2^\wedge$以及比较映射构成的交换方块中，次数至少为二时垂直映射均为同构，因此下方的限制在 π_2上也满射。于是，取 2-连通覆盖后，相对项、绝对项和实项仍构成纤维序列，并且代数相对项可识别为 $\tau_{\geq 2}R\Gamma_{\mathrm{rel}}(V_L, \mathrm{KU}_2)$ [20, 定理 7.12–7.13]。在 V_E 上，实项是有限个诱导 G-谱的和，而导出范数在其上是等价。相对项上的等价性随后也给出绝对项上的等价性 [72, 20]。

最后，我们将这些等价模 ℓ 约化，并对 S取滤过余极限。K-理论、连通覆盖、轨道以及模 ℓ 约化都与此余极限交换，从而得到在每个 ℓ模下的域上的一个等价。有理地，范数由限制—转移恒等式和平均化给出一个等价。由余纤维有理地以及模每个素数均消失，可得整数上的等价。将 2 逆之后，只需考虑奇素数和有理比较映射。

□

接下来，我们构造分裂定理中出现的从同伦轨道出发的转移。设 E/F 是 D 的一个有限伽罗瓦分裂域，其群为 G。群 G 通过固定 D的半线性标量变换作用于右 D_E-模的范畴。从D_E 到 D 的标量限制与其和此作用的复合映射之间存在自然同构。这些同构保持底层 D-模，并与群乘法相容，因此它们给出转移

$$\mathcal{N}_{E/F}^D : \left(\tau_{\geq 2}K(D_E)\right)_{hG} \longrightarrow \tau_{\geq 2}K(D)$$

来自同伦轨道。对于 $j \geq 2$，其与边缘映射的复合 $K_j(D_E) \to \pi_j((\tau_{\geq 2}K(D_E))_{hG})$ 是标量限制，也就是说，在 Morita 等价给出的识别 $K(D_E) \simeq K(E)$下，它是分裂转移 θ_E。

在这两个分裂定理中，只要其与来自同伦轨道的转移的复合是等价，我们就得到 $\tau_{\geq 2}g$ 的一个截面。

引理 3.2.9。设 F 是一个整体域，令 g 为定理 *3.2.4* 的比较映射，置$Z = \mathrm{fib}(g)$，并设 E/F 是 D 的一个有限伽罗瓦分裂域，其群为 G。若 D 在某个实位分歧，则在全文中将 2 求逆。假设 $h = (\tau_{\geq 2}g)\circ \mathcal{N}_{E/F}^D$是一个等价。那么 $\mathcal{N}_{E/F}^D\circ h^{-1}$ 是 $\tau_{\geq 2}g$的一个截面，因此

$$\tau_{\geq 2}K(D) \simeq \tau_{\geq 2}K(F) \oplus \text{纤维}(\tau_{\geq 2}g) \text{ 与第一分量 } \tau_{\geq 2}g,\ \text{余纤维}(\mathcal{N}_{E/F}^D) \simeq \text{纤维}(\tau_{\geq 2}g),$$

并且对每个 $j \geq 2$，g_j 都是分裂满射。此外，若 g_1 是同构且 g_2 是满射，则 $\mathrm{fib}(\tau_{\geq 2}g) \simeq Z$，并且对 $j \geq 2$，$\pi_j Z = \ker g_j$。

证明。 由于 $(\tau_{\geq 2}g)\circ\mathcal{N}^{D}_{E/F}\circ h^{-1}=hh^{-1}$ 是单位元，映射 $s=\mathcal{N}^{D}_{E/F}\circ h^{-1}$ 是 $\tau_{\geq 2}g$的一个截面。该截面给出一个直和分解，其第一分量为 $\tau_{\geq 2}g$，并且对 $j\geq 2$，g_j 是分裂满射。由于 $\mathcal{N}^{D}_{E/F}=s\circ h$ 且 h 是等价，$\mathrm{cofib}(\mathcal{N}^{D}_{E/F})\simeq\mathrm{cofib}(s)$，而 $\tau_{\geq 2}g$ 的截面 s 的余纤维是 $\mathrm{fib}(\tau_{\geq 2}g)$。若 g_1 是同构且 g_2 是满射，则关于 $Z=\mathrm{fib}(g)$ 的同伦群长正合列给出$\pi_0 Z$ 和 $\pi_1 Z$ 的消失，并且自然映射 $\mathrm{fib}(\tau_{\geq 2}g)\to Z$ 是等价。 □

我们还需要使指定实位完全分裂的分裂域。

引理 3.2.10. 设 F 是一个整体域， S 是 F 的一个实位集合，并且 D在这些实位处分裂。那么存在 D 的有限伽罗瓦分裂域 E/F，使得 S 中的每个素点都完全分裂。

证明。 若 S 为空，则 D 的一个可分极大子域的伽罗瓦闭包即可。否则，F 是一个数域，我们利用 D 中的弱逼近，选取一个元素 α，使其在 S中的每个素点处都接近一个具有互异实特征值的矩阵。 α 的约化特征多项式是可分的，并且在 S中的每个素点处都只有实根。由于 D 是一个除代数， $F(\alpha)$是一个域，且是 D 次数为 $\deg$ 的极大子域，其中S 中的每个素点都完全分裂。 $F(\alpha)$的伽罗瓦闭包也具有相同的性质。 □

定理 3.2.11. 设 F 是一个数域，并假设 D 在所有实位处分裂，或者在全文中均将 2 求逆。设 g 是定理 *3.2.4* 中的比较映射，并令 $Z=\mathrm{fib}(g)$。设E/F 是 D 的一个有限伽罗瓦分裂域，其群为 G；若 D 在所有实位处分裂，则假设 F的每个实位都在 E中完全分裂。于是，复合映射 $(\tau_{\geq 2}g)\,N^{D}_{E/F}$是一个等价。因此，

$$\tau_{\geq 2}K(D)\simeq\tau_{\geq 2}K(F)\oplus Z\quad \textit{with first component } \tau_{\geq 2}g,\qquad Z\simeq\mathrm{cofib}(\mathcal{N}^{D}_{E/F}).$$

对每个 $j\geq 2$， g_j 都是分裂满射，且 $\pi_j Z=\ker g_j$。特别地， $Z\in \mathrm{Sp}^{\geq 3}$。

证明。 根据引理 3.2.10，这样的域 E 存在：若 D 在所有实位处分裂，则取所有实位的集合；否则取空集。

我们首先比较完备化因子上的范数。对于 $\ell\mid\deg D$，我们限制到比较中所使用的 E 秩一类 x。由于 x_E 是从 F限制而来，引理 1.2.2 给出了一个相容的 G-等变等价

$$m_{x_E}\colon L_{K(1),\ell}K(E)\xrightarrow{\sim}L_{K(1),\ell}K(D_E).$$

由于 D_E 是分裂的，Morita 等价和针对 E 的 Quillen–Lichtenbaum 比较将其 2-连通覆盖与一个等变等价相对应

$$\alpha_E\colon(\tau_{\geq 2}K(E))^{\wedge}_{\ell}\xrightarrow{\sim}(\tau_{\geq 2}K(D_E))^{\wedge}_{\ell}.$$

引理 1.2.2 的投影公式给出

$$(\tau_{\geq 2}g)^{\wedge}_{\ell}\,(\mathcal{N}^{D}_{E/F})^{\wedge}_{\ell}\,(\alpha_E)_{hG}=(\mathcal{N}_{E/F})^{\wedge}_{\ell}$$

作为导出 ℓ-完备范畴中 $K(F)^{\wedge}_{\ell}$-模之间的映射。这里，同伦轨道取自导出 ℓ-完备范畴，并且将它们模 ℓ 约化所得的结果，与先将约化模 ℓ 后再完备化所取的同伦轨道相同。这同样适用于奇素数下的实分歧情形。

在反转 $\deg D$ 后，乘以 $[D]/\deg D\in K_0(D)[1/\deg D]$ 在 E 上的限制，得到一个 G-等变的秩 1 等价 $K(E)[1/\deg D]\to K(D_E)[1/\deg D]$。根据投影公式，这个等价与 $\mathcal{N}^{D}_{E/F}$ 复合后的同伦轨道

再与 $N_{D/F}/\deg D$ 复合，得到 $\mathcal{N}^{E/F}$。命题 3.2.8 由此证明，$(\tau_{\geq 2}g)\mathcal{N}^{D}_{E/F}$ 在有理化后以及模掉所有相关素数后都是等价，因此在给定系数下也是等价。

最后，由引理 3.2.5，g_1 和 g_2 是同构，因此引理 3.2.9给出两个公式以及 $\pi_j Z = \ker g_j$ 对于 $j \geq 2$。由于 g_2 是单射，$\pi_2 Z = 0$，因此 $Z \in \mathrm{Sp}^{\geq 3}$。在每个完备因子上，投影公式也给出了作为 $K(F)^\wedge_\ell$-模的分裂。 □

通过常数域转移在全局函数域上的分裂

对于全局函数域，我们通过从一个常数域扩张进行转移，得到相应的分裂（定理 3.2.13）。

设 F 是一个常数域为 $k = \mathbb{F}_q$的全局函数域。设 f_v 是素点 v的剩余次数，并选取一个有限常数扩张 $E = Fk'$，使得 $s = [k' : k]$ 是整数 $\deg D \cdot f_v$ 的公倍数，其中这些整数对应于局部不变量 D 非零的素点 v。对每个这样的 v，局部次数 $s/\gcd(s, f_v)$ 可被 $\deg D$ 整除，因此 D_E的局部不变量均为零，并由 Brauer 群的局部–整体原理可知它分裂。

引理 3.2.12。对于任意有限常数扩张 E/F，其群为 $G = \mathrm{Gal}(E/F)$，以及每个$j \geq 2$,

$$H_i(G, K_j(E)) = 0 \quad (i > 0), \qquad N_{E/F} : K_j(E)_G \xrightarrow{\sim} K_j(F).$$

证明。设 $\ell \neq p = \mathrm{char}\ k$。我们先证明，对于 $m \geq 2$，$H^2(F, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m)) = 0$。设 C/k 为 F的光滑适当几何连通模型。由韦伊权重可知，弗罗贝尼乌斯减一在 $H^1(C_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_\ell(m))$ 上的有理化格上可逆。因此，它在$H^1(C_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m))$ 上满射。有限域的上同调维数为一，因此 Hochschild–Serre 边映射给出

$$H^2(C, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m)) \xrightarrow{\sim} H^0(k, H^2(C_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m))) = H^0(k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m-1)).$$

闭点 v 的吉辛映射变为余限制

$$H^0(k_v, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m-1)) \longrightarrow H^0(k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m-1)).$$

事实上，几何点类的迹为一，而对共轭点求和就是余限制。对于算术弗罗贝尼乌斯 Φ 和 $f = [k_v : k]$，余限制为 $1+\Phi+\cdots+\Phi^{f-1}$，它在 $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m-1)$ 上是乘以一个非零整数，因而满射。恒等式 $(\Phi - 1)(1 + \Phi + \cdots + \Phi^{f-1}) = \Phi^f - 1$ 也意味着在不变元上满射。此外$H^1(k_v, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m-1)) = 0$，因此纯性和局部化给出

$$\begin{aligned} H^0(k_v, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m-1)) &\longrightarrow H^2(C, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m)) \\ &\longrightarrow H^2(C - \{v\}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m)) \longrightarrow H^1(k_v, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m-1)). \end{aligned}$$

因此 $H^2(C-\{v\}\ \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m)) = 0$，并且对 C 的更小开子集采用相同的论证，$H^2(F,\ \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell m) = 0$，通过取直极限即可。

接下来，我们计算 $j \geq 2$ 上 $K_j(F)$ 的挠子群。Harder 定理和闭支撑局部化给出：对于 $j \geq 2$ [29,，$K_j(F) \otimes \mathbb{Q} = 0$ 推论 2.3.2]。对于阿贝尔群 M 和素数 ℓ，我们用 $M\{\ell\}$ 表示 M 的 ℓ-主挠子群。由于 $[F:\ F^p] = p$，Geisser–Levine 关于 p 系数的计算表明，$K_j(F)\{p\}$ 在此范围内消失[27]。由于 $K_j(F)$ 是挠群，群 $K_j(F)/\ell^r$ 的直极限 $K_j(F)\otimes(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$ 消失，因此模 ℓ^r Bockstein 正合列的直极限给出，对于$j \geq 3$，$K_j(F;\ \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \simeq K_{j-1}(F)\{\ell\}$。我们通过 Quillen–Lichtenbaum 比较和 étale 下降 [20]计算系数群。由于 k 在 F 中代数闭，$F \otimes_k k$ 是一个域。在该域上，étale$K$-理论的系数集中在偶数次数，而刚刚证明的 H^2 消失性

只留下总次数为 $2m$ 时的 $H^0(F,\ \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m))$，以及总次数为$2m+1$时的 $H^1(F,\ \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m+1))$。几何连通性给出 $H^0(F,\ \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m)) = H^0(k,\ \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m))$。与转移相容地，我们有

$$\begin{aligned} K_{2m-1}(F)\{\ell\} &\simeq H^0(k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m)) \qquad (m \geq 2), \\ K_{2m}(F)\{\ell\} &\simeq H^1(F, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m+1)) \quad (m \geq 1). \end{aligned}$$

在 E上同样有这些对应关系。

最后，我们验证循环群 G的周期分解的正合性。在奇次数中，令 $M = \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m)$；在偶次数中，令 $M = H^1(F \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m+1))$。在这两个次数中，我们都有

$$K_j(F)\{\ell\} \simeq M^\Phi, \qquad K_j(E)\{\ell\} \simeq M^{\Phi^s},$$

其中，$j = 2m-1$ 在奇次数中，$j = 2m$ 在偶次数中，而 $s = [E:\ F]$。在偶次数中，这由 $H^1(k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m+1)) = 0$ 以及 Hochschild–Serre 边映射得到。由于$F \otimes_k \bar{k}$ 的 ℓ-上同调维数至多为一，$H^2(F, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m+1))$ 和$H^2(E, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m+1))$ 的消失意味着 $\Phi - 1$和 $\Phi^s - 1$ 在 M上是满射的。在奇次数中，二者都是在 $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(m)$ 上的非零整数乘法，因而是满射。置 $N_s = 1 + \Phi + \cdots + \Phi^{s-1}$。由于 $\Phi^s - 1$是满射且 $N_s(\Phi - 1) = (\Phi - 1)N_s = \Phi^s - 1$，算子 N_s在M上是满射，并诱导出满射 $N_s\colon\ M^{\Phi^s} \to M^\Phi$。若 $z \in M^{\Phi^s}$且 $N_s z = 0$，则记 $z = (\Phi - 1)y$。于是 $(\Phi^s - 1)y = N_s z = 0$，因此 $N_s\colon\ M^{\Phi^s} \to M^\Phi$的核为 $(\Phi - 1)M^{\Phi^s}$。这两项检验给出了正次数中周期分解的正合性，因此高阶群同调消失，并且余不变元上的范数在 ℓ-主挠部分上是一个同构。对所有素数求和即得结论。 □

定理 3.2.13。 设 F 为全局函数域。设 g 为定理 *3.2.4* 中的比较映射，并置 $Z = \mathrm{fib}(g)$。设 $E = Fk'$ 为分裂 D的有限常数扩张，其群为$G = \mathrm{Gal}(E/F)$。则复合映射 $(\tau_{\geq 2}g)\boldsymbol{N}_{E/F}^D$是一个等价。因而，

$$\tau_{\geq 2}K(D) \simeq \tau_{\geq 2}K(F) \oplus Z \quad \textit{with first component } \tau_{\geq 2}g, \qquad Z \simeq \mathrm{cofib}(\mathcal{N}_{E/F}^D).$$

对于每个 $j \geq 1$，g_j 都是满射，并且对于 $j \geq 2$，

$$\pi_j Z \simeq K_j(D)/\theta_E K_j(E) = K_j(D) \Big/ \sum_{\substack{L/F \ \textit{finite separable} \\ D_L \ \textit{split}}} \theta_L K_j(L). \tag{3}$$

证明。 我们首先计算同伦轨道。轨道谱序列

$$H_i(G, \pi_j \tau_{\geq 2}K(D_E)) \implies \pi_{i+j}((\tau_{\geq 2}K(D_E))_{hG})$$

按连通性在每个总次数上都有有限滤过。在通常的识别$\pi_j K(D_E) = K_j(E)$下，由 Morita 等价，任意 $\gamma \in G$ 的作用都与域作用一致。事实上，将 γ 的半线性作用与域作用的逆复合，得到 $D_E \simeq M_{\deg D}(E)$的一个 E-线性自同构；根据 Skolem–Noether 定理，该自同构是内的，因而在 K-理论上作用为单位元。由引理 3.2.12，只有行 $i = 0$ 保留下来，因此边缘映射将 $\pi_j((\tau_{\geq 2}K(D_E))_{hG})$ 识别为 $K_j(E)_G$；在此识别下，$\pi_j(\mathcal{N}_{E/F}^D)$由分裂转移 θ_E诱导。转移恒等式 $g_j\theta_E = N_{E/F}$因此表明，$(\tau_{\geq 2}g)\mathcal{N}_{E/F}^D$ 在每个同伦群上都诱导同构。由引理 3.2.5，g_1 和 g_2是同构，于是引理 3.2.9给出直和分解、$\mathrm{cofib}(\mathcal{N}_{E/F}^D) \simeq Z$，以及对每个 $j \geq 1$而言 g_j 的满射性。

最后我们识别出 $\pi_j Z$。对于任意有限可分裂域 L/F，合成域EL/L 是有限常数扩张，因此根据引理 3.2.12，$N_{EL/L}\colon\ K_j(EL) \to K_j(L)$ 对 $j \geq 2$是满射。转移的传递性给出 $\theta_L K_j(L) \subseteq \theta_E K_j(E)$，而且 E 本身是有限可分裂域。结合分裂的长正合列，可得 (3)。

□

第三个 K群与实符号

本小小节计算了 $K_3(D)$的整系数情形（定理 3.2.14）。结合上述分裂，可知比较纤维是 3-连通的（推论 3.2.16）。

设 J_F 是 $K_3^M(F) \to K_3(F)$ 的像。对于数域 F，实位上的符号给出一个同构 $J_F \simeq \bigoplus_{v\text{ 实}} \mathbb{Z}/2$；对于全局函数域，则有 $J_F = 0$[8, 56]。对于数域，记 $J_F^{\mathrm{ram}} \subset J_F$ 为对应于 D 分歧的实位处直和项的子群，记 J_F^{sp} 为对应于 D 分裂的实位处直和项的子群。对于全局函数域，令 $J_F^{\mathrm{ram}} = 0$。在 D 的任意分裂域中，D 分歧的实位上方的每个素点都是复素点；因此，对每个分裂域 L，限制 $K_3(F) \to K_3(L)$ 都消去 J_F^{ram}，且限制定义在 $K_3(F)/J_F^{\mathrm{ram}}$ 上。

定理 3.2.14。若 F 是常数域为 $\mathbb{F}_q$ 的全局函数域，则存在唯一的同构

$$K_3(D) \xrightarrow{\sim} K_3(F)$$

对每个有限可分裂域 L/F，都与到 K_3（L） 的限制相容；此外，从常数域出发的限制是同构 K_3（$\mathbb{F}_q$） $\simeq K_3$（F），且 K_3（$\mathbb{F}_q$） 是阶为 q^2-1 的循环群。若 F 是数域，则存在唯一的同构

$$K_3(D) \xrightarrow{\sim} K_3(F)/J_F^{\mathrm{ram}}$$

对每个有限伽罗瓦分裂域 L/F，若其中 F 的每个使 D 分裂的实位都完全分裂，则均与到 K_3（L） 的限制相容。这些同构与有限扩张的限制与转移相容。

证明。步骤 *1*：约化为权二和权三。由定理 2.3.4，$\mathrm{CH}^1(F,\ 3;\ D) = 0$，且阶段 $\mathcal{F}^r K(D)$ 在次数至多为三时消失（在全局函数域上，由引理 A.2 可得同伦余维塔），因此

$$\mathrm{CH}^3(F,3;D) \longrightarrow \pi_3\mathcal{F}^2K(D) \longrightarrow \mathrm{CH}^2(F,3;D) \longrightarrow 0, \qquad \pi_3\mathcal{F}^2K(D) \twoheadrightarrow K_3(D).$$

在交换侧，$\mathrm{CH}^1(F,\ 4) = 0$ 也成立，因此交换边映射 $\pi_3\mathcal{F}^2K(F) \to K_3(F)$ 是同构，而权三的像为推论 6.1.4]。

步骤 *2*：权重二。根据命题 3.1.3 和 3.1.4，权二约化范数在整数层面上是同构。对于有限可分扩张 L/F，转移表明，限制映射在 $K_3^{\mathrm{ind}}(F)$ 上的核被扩张次数所湮灭。系数序列和 $H^0_{\mathrm{mot}}(F,\ \mathbb{Q}(2)) = 0$ 将 $K_3^{\mathrm{ind}}(F)$ 的挠子群与 $H^0(F,\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ 识别起来，而限制映射就是不变元的包含映射 [85]；在全局函数域上，特征主部分将在步骤 5 中处理。因此，限制映射在 $K_3^{\mathrm{ind}}(F)$ 上是单射的。由于 $\mathrm{CH}^2(F,\ 3) \simeq K_3^{\mathrm{ind}}(F)$ 且权二约化范数是同构，将 $\mathrm{CH}^2(F,\ 3;\ D)$ 限制到一个分裂域上仍然是单射的，并且其像与交换侧上的像相同。

第 *3* 步：权三。与定理 2.3.4 中关于 $\mathrm{CH}^2(k,2;\ D)$ 的证明一样，在每个可容许闭点处从极大子域推前可知，群 $\mathrm{CH}^3(F,3;\ D)$ 由有限分裂域 E/F [61] 上 $\mathrm{CH}^3(E,3) = K_3^M(E)$ 的转移生成。对于全局函数域，这些群 K_3^M为零。对于数域，我们选取一个有限伽罗瓦分裂域 L/F，使得 F 中每个 D 分裂的实位都完全分裂；根据引理 3.2.10，这样的域存在。任意有限分裂域 E/F 的每个实位都位于 F 的一个分裂实点之上，因此 EL/E 在每个实位处都完全分裂。限制会在实分支上复制 K_3^M的实符号，而转移会将它们在各分支上相加。因此，$K_3^M(EL) \to K_3^M(E)$ 是满射，由转移的传递性可得

$$K_3^M(L)_{\mathrm{Gal}(L/F)} \twoheadrightarrow \mathrm{CH}^3(F,3;D) \xrightarrow{\rho} K_3^M(F).$$

复合映射就是通常的范数，并且它是到 J_F^{sp} 的同构：每个实分支的伽罗瓦轨道都对应一个分裂实点，而一个分支上的单位符号映到其下方的单位符号；这里 $K_3^M(F) \simeq J_F$ 由实符号 [8] 得出。由于限制会复制符号，$\mathrm{CH}^3(F,3;\,D) \to J_L$ 是单射，其像为 $J^{\mathrm{Gal}(L/F)}{}_L$。交换侧的核为 J_F^{ram}，且像相同 [8, 第二章，定理 2.1(3)], [39, 引理 6.6.3–6.6.4]。

步骤 4：组装。对于数域，令 L 如步骤 3 所述；对于全局函数域，令 L 为任意有限可分裂域。若 $\pi_3\mathrm{F}^2K(D)$ 中的一个元素在$K_3(L)$中的限制为零，则其权二像为零，因此它来自权三，而限制在权三上也是单射。由于此映射经过 $K_3(D)$，可得 $\pi_3\mathrm{F}^2K(D) \simeq K_3(D)$。给定$x \in K_3(D)$，选取 $y \in K_3(F)$，使其在 $K_3^{\mathrm{ind}}(F) = \mathrm{CH}^2(F,3)$ 中的像等于 x的权二像的 ρ。对于全局函数域，L/F 是任意有限可分裂域，且 $J_L = 0$，因此只要权二像相匹配，x 和 y 在 $K_3(L)$中的限制就相等。对于数域，x和 y在 $K_3(L)$中的限制之差属于 $J^{\mathrm{Gal}(L/F)}{}_L$，而它是两侧权三的像，因此用 J_F中的一个元素修正 y 后，两侧的限制便相等。交换两侧后作同样的论证，可知 $K_3(D)$ 和 $K_3(F)$ 在 $K_3(L)$中的像相等。交换侧上的核为$J\mathrm{ram}_F$，对于全局函数域，该核为零。因此，$K_3(D)$ 和 $K_3(F)/J_F^{\mathrm{ram}}$都单射地映入$K_3(L)$，且像相等；所以存在唯一的同构，使其与到 $K_3(L)$的限制相容。

步骤 *5*：全局函数域。对于全局函数域，权三消灭。这里 $J_F = 0$，因此 $K_3^{\mathrm{ind}}(F) = K_3(F)$，其特征主部挠元由命题 A.3(2)消灭；对于其他主部分，我们使用 Beilinson–Lichtenbaum 比较。有限系数比较和 Harder 消灭定理给出，当 $\ell \neq \mathrm{char}\ F$ 时，

$$\mathrm{CH}^2(F,3)_{(\ell)} = H^1_{\mathrm{mot}}(F, \mathbb{Z}_{(\ell)}(2)) \simeq H^0(F, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)).$$

右侧的作用经过常数域，而常数域上的弗罗贝尼乌斯通过乘以 q^2 起作用。因此，$K_3(F)$ 是一个阶为 q^2-1 的循环群，并且从常数域出发的限制是同构 [29, 66]。

步骤 *6*：独立性与函子性。通过比较合成域中的限制像，可以得到分裂域的独立性。对于任意有限扩张，限制与转移通过在分歧实位处复制并相加符号而下降到符号商。对于有限扩张 E/F，由限制像构造的同构之间的相容性，来自基变换公式以及每个 $E \otimes_F L$ 的域分量上的 Morita 等价。特别地，来自分裂域 E/F 的 θ_E 对应于交换侧上的复合 $K_3(E) \xrightarrow{N_{E/F}} K_3(F) \to K_3(F)/J_F^{\mathrm{ram}}$。

□

推论 3.2.15. 设 F 是一个有 r_2 个复位的数域，令 r_{sp} 为 D 分裂的实位数，并设 $w_2 = |H^0(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))|$。则 $K_3(D)$ 的自由秩为 r_2，其挠子群在 $r_{\mathrm{sp}} = 0$ 时为 $\mathbb{Z}/w_2$，而在 $r_{\mathrm{sp}} > 0$时为 $\mathbb{Z}/(2w_2) \oplus (\mathbb{Z}/2)^{r_{\mathrm{sp}}-1}$。

证明。由定理 3.2.14，$K_3(D) \simeq K_3(F)/J_F^{\mathrm{ram}}$，且 $K_3(F)$的自由秩为 r_2 [13]。由于 J_F^{ram} 是有限的，$K_3(D)$的挠部分是 $T/J\mathrm{ram}_F$，其中 T是 $K_3(F)$的挠部分。群 T是 $H^0(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = \mathbb{Z}/w_2$由 J_F扩张而成的。取生成元的一个提升 $z \in T$（它是挠元素，因为 J_F 是有限的），则 $w_2 z = \{-1,-1,-1\}$ [56, §11], 是 J_F 中在每个实位处都非零的元素。因此，$T/J\mathrm{ram}_F$是由 $\mathbb{Z}/w_2$和 J_F^{sp}构成的扩张，其中 $w_2\bar{z}$是所有分量均为一的向量；若没有分裂实位，它为零，否则其阶为二，由此得到所述的挠子群。 □

推论 3.2.16。比较映射 g 的纤维 Z 属于 $\mathrm{Sp}_{\geq 4}$。如果 D 在某个实位处分歧，则将比较映射中的 2 可逆化后，其纤维也具有相同性质。

证明。 根据定理 3.2.11 和 3.2.13， g_3 是满射。根据定理 3.2.14，其源和目标在 $\mathbb{Z}$上抽象同构；在实分歧的情形下，则在 $\mathbb{Z}[1/2]$ 上抽象同构。二者都是有限生成的：对于数域，通过局部化， $K_3(F)$是 $K_3(\mathcal{O}_F)$的一个像，因为K_2 有限域的同伦群消失；对于全局函数域，根据同一定理， $K_3(F)$是有限的。在这些诺特环上，有限生成模之间的满射若源和目标同构，则为同构，因此 g_3 是同构。根据引理 3.2.5， g_1 和 g_2 是同构。因此，次数至少为二的分裂使得 Z 的同伦群在次数至多为三时消失。

□

备注 3.2.17。 对于 Proposition 3.1.3 适用的每个素数 $\ell \neq \operatorname{char} F$，三次比较映射也与权二约化范数一致。事实上，秩一平凡化在 étale K-理论的几何权二层上作用为单位元，而 $\mathrm{CH}^2(F, 3; D)^{(\ell)}$ 上的约化范数就是该层上的比较映射。令 L 为定理 3.2.14 中的分裂域。若 $\ell \mid \deg D$，则限制将完备化比较映射 m_x^{-1} 映至 $m_{x_L}^{-1}$；根据引理 3.2.2，后者在分裂 Morita 识别下于正次数上作用为单位元。若 $\ell \nmid \deg D$，则平坦基变换给出相同的相容性，因为 $N_{D_L/L}$ 等于 $\deg D$ 乘以分裂 Morita 比较映射。由于 $K_3(L)^{(\ell)}$ 嵌入其导出完备化中，这两个限制在 $K_3(L)^{(\ell)}$中相等。在这些素数处 $J_{F(\ell)} = 0$，因此定理 3.2.14 中的限制描述将 g_3 与权二约化范数对应起来。

当 D 在实位处分歧时，定理 3.2.4 的比较映射在将 2 置可逆后才有定义。整系数下，$K_1(D)$ 是 $F^\times$ 的子群，由在每个分歧实位都为正的元素组成。群 $K_1(D)$ 中不存在与 $K_1(F)$ 的元素 -1 相对应的二阶挠元。

例 3.2.18。 令 $F = \mathbb{Q}$、 $D = (-1, -1)$ 和 $E = \mathbb{Q}(i)$。不存在整映射 $K_3(D) \to K_3(\mathbb{Q})$，使其将所有分裂转移映到相应的域范数。

证明。由定理 3.2.14， $K_3(D) = \mathbb{Z}/24$ 且 $K_3(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/48$，而 θ_E 对应于复合映射 $K_3(E) \xrightarrow{N_{E/\mathbb{Q}}} K_3(\mathbb{Q}) \to K_3(\mathbb{Q})/J_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ram}}$。将 $K_3^{\mathrm{ind}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/24$ 的一个生成元提升到 $z \in K_3(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/48$，并令 $y = \operatorname{res}^{E/\mathbb{Q}} z$。满射 $K_3(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/48 \to K_3^{\mathrm{ind}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/24$ 的核为 $J_{\mathbb{Q}} = \{0, 24\}$，故 z 生成 $\mathbb{Z}/48$。于是 $N_{E/\mathbb{Q}} y = 2z$ 的序为 24，而其像 $\theta_E(y)$ 在符号商 $K_3(D)$ 中的序为 12。由于 $12\theta_E(y) = 0$，但 $12N_{E/\mathbb{Q}} y \neq 0$，不存在同态 $K_3(D) \to K_3(\mathbb{Q})$ 将 $\theta_E(y)$ 映到 $N_{E/\mathbb{Q}} y$ [56, §11]。

□

素数指标下的基本比较

对于一个素数 $\ell \neq \operatorname{char} F$，若 D 的 ℓ-主指标为 ℓ，则可通过直接比较扭曲循环复形与交换循环复形来分析这一情形。命题 3.2.19 处理了这一情形，它是下一小小节中次数界的一个输入。

命题 3.2.19. 对于一个素数 $\ell \mid \deg D$，满足 $\ell \neq \operatorname{char} F$，并且若 D 在实位处分歧，则当 $v_\ell(\deg D) = 1$ 时，定理 *3.2.4* 中的映射 g 在ℓ-局部化后是一个等价。由此，若指标中与特征互素的部分无平方因子，则在该定理的系数范围内， g 是一个等价。

证明。 由于有理比较成立， ℓ-局部化后的整比较归约为 ℓ-完备化比较。我们在一个次数与 ℓ 互素的可分扩张上，将布劳尔类中除 ℓ-主分量之外的主分量分裂。经过ℓ-局部化后，限制到该扩张是分裂单射，因为它与转移的复合是乘以该次数，而对于局部化单位$K(D) \to {}_{\ell}K(D)$的余纤维，情况也相同。由于 m_x 是一个等价，因而只需证明该局部化单位在正次数完备化后是一个等价，并且由分裂单射性，这可以

在限制之后验证。因此，我们归约到布劳尔类中的除代数具有次数 ℓ的情形。在正特征下，对于有限纯不可分扩张，限制与转移的两个复合都是乘以其次数，而该次数与 ℓ互素。因此，取直极限后，我们将模 ℓ^r 的计算转移到完美闭包，这正是 [39, 定理 8.2.2]，（下文将使用该定理）所要求的。étale 侧在纯不可分扩张下保持不变。

我们首先比较正权下的扭曲循环复形与交换循环复形。根据[39, 定理 8.2，2], 正权下的约化循环映射 q 在动机次数 $s < q$上是同构。在次数 q 上，它是单射，其余核为以下对象的像：

$$K_q^M(F) \xrightarrow{[D]\cup -} H^{q+2}_{\text{ét}}(F, \mathbb{Z}/\ell(q+1)).$$

由于 $q+2 \geq 3$，当 ℓ-上同调维数至多为二时，目标 $H^{q+2}_{\text{ét}}(F, \mathbb{Z}/\ell(q+1))$ 消失。对于 $\ell = 2$ 带有实位的数域上的情形，将目标限制到所有实闭包后所得映射是单射，并且 $[D] = 0$ 在每个实闭包上成立，因此像也为零。在次数$s > q$上，扭曲项和交换项都消失，因为单纯形次数 $2q - s < q$上没有循环。因此，正权映射是域上复形之间的拟同构。模 ℓ^r 后它仍是拟同构，并且与限制到实闭包相容 [39, 定理 6.5.3], [36, 85]。

我们比较模 ℓ^r 的同伦余维塔与其 étale 超层化的整体截面塔。层比较是从域上的扭曲动机复形到系数为 $\mathbb{Z}/\ell^r(q)$的 étale 上同调的映射，其置于同伦次数$2q - s$。这由 Kahn–Levine 对各层的识别，以及约化循环映射的 étale 层化能够识别系数层这一事实推出。根据刚证明的拟同构， $q > 0$ 的比较余纤维与交换情形下的余纤维同构。由 Beilinson–Lichtenbaum 比较以及动机上同调在次数$> q$处消失可知，其上同调仅在 $s > q$处非零，且等于 $H^s_{\text{ét}}(F, \mathbb{Z}/\ell^r(q))$. 对于 $q \geq 2$，这些上同调群在上同调维数为二时消失。在实相对情形中，限制到实闭包在次数 $s \geq 3$处也是同构，因此实相对比较余纤维消失。对于 $q = 1$，绝对余纤维和实相对余纤维都位于同伦次数 $2 - s \leq 0$ [39, 定理 6.5.5，第 6.9] 节。

这些塔的收敛性由以下次数估计控制。余维至少为 q 处的支撑项在单纯形次数低于 q 时没有支撑，因此，同伦余维塔的第 q 层集中在不低于 q的次数上，其几何茎也如此。模 ℓ^r 的某一层的茎是次数为 $2q$ 的有限系数 Tate 层。在任意固定次数下，几何同伦群可由足够多但有限个层计算，因此是有限的 ℓ主系数群。因此，经过 étale 超层化后，取整体截面或实相对截面至多会使连通性降低两个上同调维数界。足够高层的尾部不会对固定总次数产生贡献。因此，逐层比较表明，整个塔的比较余纤维的π_j 对 $j \geq 2$ 消失，而该余纤维的 π_1 单射到权零比较余纤维的 π_1 中。

还需检验权零的情形。代数层将秩格 $\deg D \cdot \mathbb{Z}$ 置于零次，其系数取模 ℓ^r ，而 π_0 上的比较映射为

$$\deg D \cdot \mathbb{Z}/\ell^r(\deg D \cdot \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell^r, \qquad [\deg D] \longmapsto [\deg D].$$

étale 层没有正同伦群，因此 π_1 权零比较余纤维是此映射的核。在实相对情形中， D 在每个实闭包上分裂，并且所有局部权零比较余纤维都位于零次及以下。相对纤维的 π_1 中也出现同一个核。在系数转移下，层级 $r + v_\ell(\deg D)$处的这个核

在层级 r处映射为零。因此，整个比较余纤维的 π_1 的逆极限为零。由于比较余纤维的 π_2 在每个有限阶段都消失，米尔诺精确列也使导出完备比较余纤维的 π_1 为零。这证明完备化比较在每个正次数上都是同构。在实相对情形中，这证明了相对项的比较。在实闭包上，D 是分裂的，因此 Morita 等价以及实闭包上的 Quillen–Lichtenbaum 比较给出了实项的比较。如果相对项与实项在正次数上同构，则长正合列给出绝对项在至少二次时的同构；在一次时，我们利用 $g_1 = \mathrm{Nrd}_1$ 是同构（引理 3.2.5）。应用算术方块可知， g 在 ℓ局部化后是等价。对于第二个断言，映射$g[1/\deg D] = N_{D/F}/\deg D$是等价，因为 $i_D N_{D/F} = N_{D/F} i_D = (\deg D)^2$。若$p = \mathrm{char}\ F$整除 $\deg D$，命题 A.3 给出 $K_i(D; \mathbb{Z}/p) = K_i(F; \mathbb{Z}/p) = 0$，对于 $i \geq 2$，因此 p完备化的比较是 $g_1 = \mathrm{Nrd}_1$, 的完备化，而 g_1 由引理 3.2.5 可知是同构。结合其他整除 $\deg D$的素数处的第一个断言，关于整除 $\deg D$ 的素数的算术方块表明 g 是等价。

□

比较纤维的素数分解与次数界

我们利用局部化纤维 $B_\ell(D)$ 描述比较纤维的主因子（定理 3.2.20）。

对于 $\ell \mid \deg D$ with $\ell \neq \mathrm{char}\ F$，记

$$e_\ell = \ell^{v_\ell(\deg D)}, \qquad B_\ell(D) = \mathrm{fib}\Big(K(D)_{(\ell)} \longrightarrow L_{E(1),\ell} K(D)\Big).$$

定理 3.2.20。 设 F 是一个整体域；若 D 在某个实位处分歧，则在全文中将 2 求逆，并排除 $\ell = 2$。设 $g\colon\ \tau_{\geq 1} K(D) \to \tau_{\geq 1} K(F)$ 为定理 *3.2.4* 中的比较映射，并令 $Z = \mathrm{fib}(g)$。则该纤维分解为

$$Z \simeq \prod_{\substack{\ell \mid \deg D,\ \ell \neq \mathrm{char}\, F \\ \ell \neq 2 \text{ if } D \text{ is ramified at a real place}}} \tau_{\geq 2} B_\ell(D). \tag{4}$$

对于每个因子，

$$e_\ell\, \pi_j B_\ell(D) = 0 \quad (j \geq 1), \qquad B_\ell(D) \in \mathrm{Sp}_{\leq e_\ell - 3}. \tag{5}$$

若 $e_\ell = \ell$，则因子 $\tau_{\geq 2} B_\ell(D)$ 为零。

证明。 函子 $L_{E(1),\ell}$ 是结合有理化与高度一的 smashing 局部化。由于 ℓ在 F上可逆，THH(F)-模结构使得在 F上的代数和概形的 THH 上，乘以 ℓ是一个等价。这是圆分谱之间的等价，因此在 TC 上也成立，所以 $\mathrm{TC}^{(\ell)}$ 是有理的。因此，在 Selmer K-理论的定义中，从 $\mathrm{TC}^{(\ell)}$ 到其 $L_{E(1),\ell}$ 局部化的映射是一个等价，这给出了与比较映射 [20, Definition 6.1] 兼容的等价 $K^{\mathrm{Sel}}_{(\ell)} \simeq L_{E(1),\ell} K$ 。

我们首先给出各因子指数的上界。选取一个次数为 $\deg D$ 的有限可分裂域E/F。 E 的虚 ℓ-上同调维数至多为二，因此 [20,定理 6.18] 给出 $B_\ell(E) \in \mathrm{Sp}^{\leq -2}$。由分裂莫里田等价，我们有 $B_\ell(D_E) \simeq B_\ell(E)$。在 $K(D)$ 和 $L_{E(1),\ell} K(D)$ 上，均有 $N_{D_E/D} \mathrm{res}^{E/F} = \deg D$。因此，$\deg D$ 湮灭 $\pi_j B_\ell(D)$，其中 $j \geq 1$。这些群是 ℓ-局部的，所以它们的指数整除 e_ℓ。

对于次数上界，我们将非 ℓ 素数 Brauer 分量在一个次数与 ℓ 互素的有限可分扩张 F'/F 上分裂。这不会改变 ℓ 主指标，因为 $\mathrm{ind}(D_{F'})\ |\deg D\ |\ [F'\colon F]\,\mathrm{ind}(D_{F'})$。将限制与转移除以扩张次数，可将 $\pi_j B_\ell(D)$ 表示为 $\pi_j B_\ell(D_{F'})$ 的一个直和项。因此，根据 Morita 等价

只需考虑次数为 e_ℓ 的除代数。对于 $X = \mathrm{SB}(D)$，我们有 Quillen 分解 [68,第 8] 节

$$K(X) \simeq \bigoplus_{i=0}^{e_\ell - 1} K(D^{\otimes i}).$$

将这一分解应用于局部化单位及其纤维，我们可将 $B_\ell(D)$视为 $B_\ell(X)$的一个直和项。X 中各点的剩余域的虚拟 ℓ上同调维数至多为 $2+\dim X = e_\ell + 1$。Clausen 和 Mathew 的同一定理给出 $B_\ell(X) \in \mathrm{Sp}^{\leq e_\ell - 3}$，从而得到 (5)。

接下来，我们对 g取导出 ℓ-完备化。定理 3.2.4 中的构造使用$L_{K(1),\ell}K(F) \simeq L_{K(1),\ell}K(D)$，因此次数至少为二的完备化比较纤维为

$$\tau_{\geq 2}\,\mathrm{fib}\Big((\tau_{\geq 1}K(D))^\wedge_\ell \longrightarrow \tau_{\geq 1}L_{K(1),\ell}K(D)\Big).$$

将 $\tau_{\geq 1}K(D)$替换为 $K(D)$不会改变这一结果，因为由 $(-)^\wedge_\ell = \varprojlim_r (-)/\ell^r$ 和 Moore 系数序列可知，$\tau_{\leq 0}K(D)$的完备化集中在次数至多为一的部分。移除目标中的 $\tau_{\geq 1}$ 后，得到的仍是同一个 2-连通纤维。高度一算术平方给出 $(L_{E(1),\ell}K(D))^\wedge_\ell \simeq L_{K(1),\ell}K(D)$，因此这一范围内的完备化比较纤维为 $\tau_{\geq 2}B_\ell(D)^\wedge_\ell$。

上面的有界指数意味着 $\tau_{\geq 1}B_\ell(D)$是导出 ℓ-完备的。Bockstein 扭项的过渡映射由乘以 ℓ 给出，并构成一个原零系统。商项在每个次数上都稳定，因此 Milnor 列在完备化后恢复同伦群。由于 $\tau_{\leq 0}B_\ell(D)$的完备化集中在不大于一的次数上，$\tau_{\geq 2}B_\ell(D)^\wedge_\ell \simeq \tau_{\geq 2}B_\ell(D)$。另一方面，根据引理 3.2.5，$g$ 在次数一和二上是同构，因此 Z 是 2-连通的，其完备化也同样如此。由此得到 $Z^\wedge_\ell \simeq \tau_{\geq 2}B_\ell(D)$。

$g[1/\deg D]$ 的构造给出 $Z[1/\deg D] = 0$。在特征 p下，根据命题 A.3 的秩一 Frobenius 比较以及一次约化范数，正次数完备化比较在 p 处是等价。因而，Z 的算术方块只留下式（4）中的完备化因子。当 $e_\ell = \ell$时，如上所述限制到 F'，再通过 Morita 等价转到 Brauer 类 $D_{F'}$中的除代数 D'，其次数为 ℓ。命题 3.2.19 应用于 F'上的 D'，表明 D' 的比较在 ℓ-局部化后是等价。其在次数至少为二时的完备化比较纤维如上所述为 $\tau_{\geq 2}B_\ell(D')$，因此 $\tau_{\geq 2}B_\ell(D_{F'}) \simeq \tau_{\geq 2}B_\ell(D') = 0$。限制与转移的复合是一个 ℓ-局部单位，这表明 $\tau_{\geq 2}B_\ell(D)$是这个零谱的一个直和项。

□

推论 3.2.21。设 F 是一个数域，ℓ 是整除$\deg D$的素数；若 D 在某个实位处为分歧，则 $\ell \neq 2$。那么，$\tau_{\geq 2}B_\ell(D)$ 的每个同伦群都是有限 ℓ-群。

证明。我们选取一个极大 O_F-序 $\Lambda \subset D$ 以及一个非空开子概形 $U \subset \mathrm{Spec}\,\mathrm{O}_F$，使得 $A = \Lambda|_U$ 是阿祖马亚，且 U 不包含位于 ℓ之上的赋值。群 $K_j(\Lambda)$ 是有限生成的 [47]。极大阶是遗传的，而删去的赋值处的支撑项是有限剩余除环的 K-理论，因此局部化给出 $K_j(A)$ 也是有限生成的 [68, 第 5]节。$K(A) \to K(D)$ 的支撑项是 U的闭点 v 处 $K(k_v)$ 的直和。每个 $B_\ell(k_v)$ 都集中在不高于 -2的次数上，而且高度一局部化与直和及局部化序列相交换 [66, 20]。因此，$B_\ell(A) \to B_\ell(D)$ 在次数至少为二时是同构。定理 3.2.20 的证明中得到的等价 $Z^\wedge_\ell \simeq \tau_{\geq 2}B_\ell(D)$（并且 $Z_{(\ell)} \to Z^\wedge_\ell$是等价，因为有限乘积的其他因子具有与 ℓ互素的有界指数）在 ℓ-完备化后，与到 $(\tau_{\geq 2}K(D))^\wedge_\ell$的典范映射相交换；后者是完备化比较映射和完备化局部化单位共同的源。对于 $j \geq 2$，映射 $\pi_j B_\ell(D) \to \pi_j B_\ell(D)^\wedge_\ell$ 由（5）中的有界指数可知是同构。由于完备化比较映射由

定理 3.2.11，复合映射 $\pi_j B_\ell(D) \to K_j(D)_{(\ell)} \to \pi_j K(D)^\wedge_\ell$对 $j \geq 2$是单射，因此 $\pi_j B_\ell(D) \to K_j(D)^{(\ell)}$也是单射。后一个映射经过 $\pi_j B_\ell(\mathcal{A}) \to K_j(\mathcal{A})^{(\ell)}$因子化，从而表明 $\pi_j B_\ell(D)$是有限生成 $\mathbb{Z}_{(\ell)}$-模的一个子群。由（5），群$\pi_j B_\ell(D)$是有限的。

□

推论 3.2.22. 若对每个 $\ell \mid$次数 D且满足 $\ell \neq$特征 F的情形都有 $e_\ell = \ell$或 $e_\ell = 4$，则 g是一个等价（采用定理 *3.2.20* 的系数约定）。对于全局函数域，当 $j < 4$时，我们有 $\pi_j Z = 0$，而 $\pi_j Z$ 的 ℓ-主部分只有在以下范围内才可能非零

$$4 \leq j \leq e_\ell - 3.$$

证明. 若 $e_\ell = 4$，则 $e_\ell - 3 = 1$ 且 $\tau_{\geq 2} B_\ell(D) = 0$。$e_\ell = \ell$ 的情形是定理 3.2.20 的最后一个断言。对于全局函数域，根据推论 3.2.16，当 $j < 4$ 时有 $\pi_j Z = 0$。我们将此与 (5) 结合。

□

备注 3.2.23. 方程 (3) 和 (4) 分别通过转移和高度一局部化描述同一个纤维。后者给出了全局函数域上 $K_j(D)/\theta_E K_j(E)$ 的素数分解和指数界。

布劳尔类的幂作用下纤维的不变性

我们使用 Adams 运算和素数分解（4）来比较布劳尔类不同幂次所对应的纤维。

命题 3.2.24。设 F 为一个整体域，且 D 为F上的中心除法代数。设 $a \geq 1$ 为满足 最大公因数(a、阶 D) $= 1$的整数。设 g_D和 $g_{D^{\otimes a}}$分别为定理 *3.2.4* 中针对 D 以及 $D^{\otimes a}$的布劳尔类中的除代数所作的比较映射，并记$Z_D =$纤维(g_D) 和 $Z_{D^{\otimes a}} =$纤维($g_{D^{\otimes a}}$)。对于具有实分歧的数域，比较纤维取作将2 逆后的对象，如该定理中所述。存在谱的非典范等价

$$Z_D \simeq Z_{D^{\otimes a}}.$$

因此，类生成同一个循环子群的两个中心单代数，在相同的系数约定下具有等价的比较纤维。此外，如果非负整数 i、j满足 最大公因数(i、阶 D) $=$最大公因数(j、阶 D)，则 $Z_{D^{\otimes i}} \simeq Z_{D^{\otimes j}}$，其中$D^{\otimes 0} = F$。

命题 3.2.24 的证明将在下文的引理 3.2.25–3.2.27 之后给出。

对于辅助比较，设 F 是任意域，设 D 是 F 上次数为 $\deg D \geq 2$ 的中心除法代数，并取 $a \geq 2$。记 $D^i = D^{\otimes i}$ 和 $X = \mathrm{SB}(D^{\mathrm{op}})$。我们将普适右 D^{op}-理想视为左 D-丛，并令 $\phi_i : K(D^i) \to K(X)$ 为由其张量幂定义的映射。Quillen 分解为

$$\phi = \bigoplus_{i=0}^{\deg D - 1} \phi_i : P = \bigoplus_{i=0}^{\deg D - 1} K(D^i) \xrightarrow{\sim} K(X).$$

负泛丛给出一个按 $i = \deg D - 1, \ldots, 0$ 排序的半正交分解；将 K-理论直和按递增顺序重新排列。我们取包含映射和投影作为完美复形范畴微分分次增强上的正合函子 [68, §8], [9, 定理 4.1]。同一个泛丛对所有 $i \geq 0$ 定义了 ϕ_i，从而得到

$$\phi^{(a)} = \bigoplus_{i=0}^{\deg D - 1} \phi_{ai} : P_a = \bigoplus_{i=0}^{\deg D - 1} K(D^{ai}) \longrightarrow K(X).$$

引理 3.2.25. 若 $\gcd(a, \operatorname{per} D) = 1$，则 $\phi^{(a)}[1/a]\colon P_a[1/a] \to K(X)[1/a]$ 是一个等价。

证明。由于 $\operatorname{per} D \mid \deg D$ 且乘以 a 会置换 $\mathbb{Z}/(\operatorname{per} D)$，因此对于 $0 \le i < \deg D$，类 $[D^i]$和 $[D^{ai}]$ 作为多重集相等，所以对分量进行置换并应用 Morita 等价，得到 $P_a \simeq P$。将 Quillen 分解中的投影与 ϕ_{ai}复合，可得到分量之间带有完美双模复形的导出张量积。我们将这些双模复形的 K_0-类用作对应，其复合由导出张量积给出。分裂后取 Morita 秩，可将所得对应的自同态环忠实地表示为

$$\Pi = \Big\{ (n_{ij}) \in M_{\deg D}(\mathbb{Z}) : n_{ij} \in \operatorname{ind}\big((D^i)^{\mathrm{op}} \otimes_F D^j\big)\mathbb{Z} \Big\}$$

其复合运算为通常的矩阵乘法。由 K-理论的可加性，对应相等会推出谱映射的同伦类相等 [83,命题 2.25(i)，§10，（10.1）]。

分裂后，令 $t = [\mathcal{O}(-1)]$。映射 ϕ 和 $\phi^{(a)}$ 比较以下两个列表：$1,\ t,\ \ldots\ldots,\ t^{\deg D-1}$和 $1,\ t^a,\ \ldots\ldots,\ t^{a(\deg D-1)}$ 在 $\mathbb{Z}[t]/(1-t)^{\deg D}$中。记 $h = 1 - t$，则有$1 - t^a = ah + O(h^2)$，因此滤过中次数为r 的因子是 a^r。故比较这两个列表的矩阵的行列式为

$$\pm a^{\deg D\,(\deg D-1)/2}.$$

由于 $\gcd(a,\operatorname{per} D) = 1$，代数 D^i 和 D^{ai} 具有相同的分裂域，因而具有相同的指标。通过所选的置换以及 Morita 等价 $P_a \simeq P$，映射 $\phi^{-1}\phi^{(a)}$ 变成了 P 的一个自同态；它在 Π 中的矩阵，除分量的置换外，是上面的分裂 K_0-矩阵，因此其行列式为 $\pm a^{\deg D(\deg D-1)/2}$。Cayley–Hamilton 恒等式将其逆表示为关于它的、系数属于 $\mathbb{Z}[1/a]$的多项式，因此该逆属于 $\Pi[1/a]$。在 K-理论中实现这个逆表明，$\phi^{(a)}[1/a]$ 是一个等价。

□

引理 3.2.26。 稳定 *Adams* 运算 ψ^a_X 是 $K(X)[1/a]$上的一个等价。

证明。令 KGL 为表示代数 K-理论的动机 $\mathbb{P}^1$-谱，令 f_q 为 q-有效覆盖，并令 $s_q = \operatorname{cofib}(f_{q+1} \to f_q)$ 为第 q 层。记 $\operatorname{Fil}^q K(X) = (f_q KGL)(X)$；特别地，$\operatorname{Fil}^0 K(X) \simeq K(X)$。单位 $\eta\colon \mathbf{1}[1/a] \to KGL[1/a]$ 在第零层上诱导同构，而 $\psi^a\eta = \eta$ 推出 $s_0\psi^a = 1$。由于对于 Bott 元 b，$\psi^a(b) = ab$，所以对每个 r都有 $s_r\psi^a = a^r$。置 $m = \dim X$。动机滤过的第 q 阶段 $\operatorname{Fil}^\bullet K(X)[1/a]$ 属于 $\mathrm{Sp}^{\ge q-m}$。对于 $q > n + m$，一个固定的 π_n 可在有限商 $\operatorname{Fil}^0/\operatorname{Fil}^q$ 中计算，并且 a^r 在其每个层上都是单位。因此，ψ^a_X在每个 π_n上都诱导同构。关于该稳定运算及其对 Bott 元的作用，见 [2, 例 9.6]；层上的单位等价以及收敛估计见[3, 推论 9.5 和 9.7]。整数局部化与有效覆盖及层交换，这是因为有效子范畴具有紧生成元。

□

引理 3.2.27。 对于每个 $i \ge 0$，存在 *Adams* 运算 $\psi^a_i\colon\ K_n(D^i) \to K_n(D^{ai})$、$n \ge 0$，使得

$$(\psi^a_X)_*(\phi_i)_* = (\phi_{ai})_*\psi^a_i \qquad on\ K_n(D^i)[1/a].$$

证明。我们选取一个有限伽罗瓦分裂域 L/F，令 $G = \operatorname{Gal}(L/F)$，并选取 γ-半线性同构 ξ_γ，使其在 $\gamma \in G$ 上实现 $D_L = \operatorname{End}_L(W)$ 的下降，其中 $\xi_1 = 1$。记 $\xi_\gamma\xi_\delta = c_{\gamma,\,\delta}\xi_{\gamma\delta}$。由此得到的归一化 2-余循环 c 的交叉积作用于 W，其交换子为 D，因此 c 的布劳尔类为 $-[D]$。令 $\mathcal{M}_i$ 为以下对象构成的正合范畴：

有限维 L-向量空间 V，配备 γ-半线性同构 $\zeta_\gamma\colon V\to V$（对 $\gamma\in G$），并满足

$$\zeta_\gamma\zeta_\delta = c^i_{\gamma,\delta}\zeta_{\gamma\delta}.$$

态射是与 ζ_γ交换的 L-线性映射。范畴 $\mathbf{M}_i$ 是 c^i的交叉积上的左模范畴。该交叉积的反代数具有布劳尔类 $i[D]$，因此 $\mathbf{M}_i$ 与右 D^i-模范畴莫里田等价。张量积将乘子的指数相加，而 a 次旗标的外幂则将其乘以 a。分裂后，一个右 D^i-模具有 $V\otimes_L (W^*)^{\otimes i}$的形式。由于 $(W^*)^{\otimes i}$ 的乘子为 c^{-i}，所以 V 的乘子为 c^i。簇 X_L 参数化了 W^*中的直线，因此 $\mathcal{O}(-1)$具有乘子 c^{-1}，该乘子在 $V\otimes_L\mathcal{O}(-i)$ 中抵消。该通常下降定义了 ϕ_i。ζ_γ与张量积和旗标外幂的自然同构相容，因此这些自然同构下降为原正合范畴上的自然同构。这个分次正合范畴系统给出了外幂运算 λ^a_i 和 Adams 运算 ψ^a_i：$K_n(D^i)\to K_n(D^{ai})$，作用于 [46, 定义 1.1、定义 2.1、命题 2.2、(2.8)、定理 4.1] 中的群。牛顿多项式的总张量次数为 a，而在正次数中 $\psi^a_i = (-1)^{a-1}a\lambda^a_i$；因此，$\psi^a_i$的目标是 $K_n(D^{ai})$。将外幂运算的函子性构造应用于上述自然同构，即可得到由外幂定义的 $K_n(X)$ 上 Adams 运算的所示恒等式。

剩下的工作是确认这个 Adams 运算与作用于 $K_n(X)[1/a]$上的稳定运算 ψ^a_X 相同。将稳定运算与 $KGL\to KGL[1/a]$复合，并将由外幂中的牛顿多项式定义的运算与映射到 $[1/a]$-系数的映射复合，我们得到两个基点映射 $\mathbb{Z}\times \mathbf{Gr}\to \Omega^\infty KGL[1/a]$。二者都将线丛的类映为其 a次幂，因此根据分裂原理，它们在光滑 F-概形的K_0 上诱导相同的自然变换。[71, 引理 1.2.10] 的证明仍然成立：有限格拉斯曼簇的 K_1 上的限制在将 a求逆后仍为满射，因此目标满足 [71, 定理 1.1.6], 的条件，且两个映射相同。因此它们在每个 $K_n\to K_n[1/a]$上都相同；根据系数局部化的泛性质，它们在 $K_n(X)[1/a]$ [2,例 9.6]上也相同。

□

命题 *3.2.24* 的证明。若 $a=1$ or $\deg D=1$，结论显然成立，因此我们假设 $a\geq 2$ and $\deg D\geq 2$，并使用上述记号。由引理 3.2.25、3.2.26 和 3.2.27，谱的等价

$$(\phi^{(a)})^{-1}\psi^a_X\phi : P[1/a]\xrightarrow{\sim} P_a[1/a]$$

在所有同伦群上诱导出一个保持指标 i 的对角矩阵。每个对角分量都是群同构，因此，利用包含映射和投影定义的谱之间的映射

$$\Psi^{(a)}_D = \mathrm{pr}_1(\phi^{(a)})^{-1}\psi^a_X\phi\,\mathrm{in}_1 : K(D)[1/a]\longrightarrow K(D^{\otimes a})[1/a]$$

是一个等价。

现在假设 F 是一个整体域。若 $\ell\mid \deg D$ 且 $\ell\neq \mathrm{char}\ F$，则 $\ell\nmid a$，因为 $\mathrm{per}\ D$ 和 $\deg D$ 有相同的素因子。我们将上述等价在 ℓ 处局部化，并利用$L_{E(1),\ell}$ 的局部化单位的自然性，得到 $B_\ell(D)\simeq B_\ell(D^{\otimes a})$。单位幂保持指标，因此合并式 (4) 的有限多个因子，便得到 $Z_D\simeq Z_{D^{\otimes a}}$，而无需将 a 逆化。若存在实分歧，则如定理 3.2.4 中那样将 2 逆化。

由于 $\mathrm{Br}(F)$ 中同一循环子群的生成元彼此相差一个单位次幂，因此第一个推论成立。如果 $\gcd(i,\ \mathrm{per}\ D)=\gcd(j,\ \mathrm{per}\ D)$，那么 $i[D]$ 和 $j[D]$ 生成同一个循环子群，因此第二个推论也成立。

□

任意指标下比较纤维消失的例子

例 3.2.28 给出了指标任意且比较纤维消失的代数。

例 3.2.28. 设 k 是一个有限域，并令 $F = k(t)$。设 k_n/k 是次数为 n的扩张， σ 是其弗罗贝尼乌斯。于是

$$D = (k_n(t)/k(t), \sigma, t)$$

其指标为 n，且正次数上的比较映射 g 是一个等价。

证明。 $t = 0$ 处的局部不变量的阶为 n，因此循环代数 D 的指标为 n。令$\mathcal{A} = k_n[u, u^{-1}; \sigma]$，并通过 $t = u^n$将其中心与 $k[t, t^{-1}]$ 认同。经基变换至 k_n后，系数代数分解为对角幂等元，而 u 变为循环置换矩阵，其完整循环乘以 t。这些矩阵生成矩阵代数，因此$\mathcal{A}$ 是 $k[t, t^{-1}]$上的阿祖马亚代数。

由扭曲 Bass–Heller–Swan 分解 [45, 推论 5.3] 以及 Nil 项的消失 [45, 推论 4.2], （这由系数域 k_n的正则性推出），可得

$$K(\mathcal{A}) \simeq \operatorname{cofib}(1 - \sigma_* : K(k_n) \longrightarrow K(k_n)).$$

高度一局部化是正合的，而在稳定范畴中取纤维是一个正合函子，因此对 B_ℓ 仍有相同的分解。有限域的 $B_\ell(k_n) \in \mathrm{Sp}^{\leq -2}$ 有界性 [20,定理 6.18] 给出 $B_\ell(\mathcal{A}) \in \mathrm{Sp}^{\leq -1}$。在 $K(\mathcal{A}) \to K(D)$ 的局部化序列中，支撑项是闭点 v of $\mathbf{G}_{m,k}$ 上的 $K(k_v)$ 的直和。事实上，阿祖马亚代数在每个有限剩余域 k_v 上分裂，因此 Morita 等价和分层归约适用 [68, §5]。由于 $L_{E(1),\ell}$ 与直和交换，将 B_ℓ 应用于该局部化序列，得到一个纤维序列，其支撑项是谱 $B_\ell(k_v)$ 的直和。每个 $B_\ell(k_v)$ 都集中在不超过 -2 的次数上，因此 $B_\ell(D)$ 集中在不超过 -1的次数上。(4) 中的所有因子因而都消失。

□

备注 3.2.29。 Quillen的有限域计算给出 $K_{2m-1}(\mathbb{F}_q) = \mathbb{Z}/(q^m - 1)$ [66], 因此，有限域的 K 理论的每个连通覆盖在上方都是无界的。此外，每个非零上截断 $\tau_{\leq N}\tau_{\geq 1}K(\mathbb{F}_q)$ 都在不超过三的次数上具有非零同伦群。根据定理 3.2.20，比较纤维在上方有界；根据推论 3.2.16，对于全局函数域，它集中在至少四的次数上。对于全局函数域而言，在这个有限次数范围内描述比较纤维的同伦群和 Postnikov 不变量仍是一个开放问题。

数域上的 Eilenberg–Mac Lane分解

我们在此证明定理 3.2.30 的奇素部分，并将在接下来的两个小小节中用 Bott 元处理 2-主部分。

有限广义 Eilenberg–Mac Lane 谱（有限 GEM）是 Eilenberg–Mac Lane 谱的悬挂的有限直和。令 F 为数域，令 D 为 F上的中心除法代数，并令 Z 为定理 3.2.4 中比较映射的纤维。若存在实分歧，则将比较映射和 Z 中的 2 取逆。

定理 3.2.30。 对于每个素数 $\ell \mid$次数 D，令 $e_\ell = \ell^{v_\ell(\text{次数 } D)}$。存在一个谱的非典范等价

$$Z \simeq \bigoplus_{\ell \mid \deg D} \bigoplus_{j=4}^{e_\ell - 3} \Sigma^j H(\pi_j Z_{(\ell)}).$$

若存在实分歧，则求和时省略 $\ell = 2$；空的次数范围贡献为零。每个 $\pi_j Z_{(\ell)}$ 都是有限 ℓ群，并且根据定理 *3.2.11* 中的分裂，是$K_j(D)_{(\ell)} \to K_j(F)^{(\ell)}$的核。

我们先证明以下引理，再证明定理 3.2.30。固定定理中的一个素数 ℓ ，并令 $R = K(F)^{(\ell)}$ 和 $\mathsf{X} = \tau_{\geq 2} B_\ell(D)$。

引理 3.2.31. 存在 F 的分圆 $\mathbb{Z}_\ell$-扩张的一个有限层 E ，满足 $G = \mathrm{Gal}(E/F)$，使得以下结论成立。

1. 作用映射 $\tau_{\geq 2} R \otimes_R \mathsf{X} \to \mathsf{X}$ 作为 R-模的映射是零同伦的。

2. 映射

$$(\tau_{\geq 1} K(E)_{(\ell)})_{hG} \otimes_R \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{X}, \qquad y \otimes z \longmapsto \mathcal{N}_{E/F}(y) \cdot z,$$

作为 R-模的映射是零同伦的。

证明. 由定理 3.2.20，$\mathsf{X} \simeq Z_{(\ell)}$ 作为谱。我们使用由定义 $B_\ell(D)$的局部化纤维诱导的 X 上的 R-模结构。局部化映射是模映射，而限制、转移及其投影公式也在纤维上诱导映射和恒等式。

我们令 F_∞ 为 F 与 $\mathbb{Q}$的圆分 $\mathbb{Z}_\ell$-扩张的合成域，因此每个实位都完全分裂。我们取圆分$\mathbb{Z}_\ell$-扩张 F_∞/F中的一个足够高的有限层 E ，并令 $G = \mathrm{Gal}(E/F)$。每个有限处的分解群都是 $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ 中的开群。事实上，在 ℓ之外，该处的弗罗贝尼乌斯通过其绝对范数作用，而其在 $\mathbb{Z}_\ell$-商 $\mathbb{Z}_\ell^\times$中的像非零；在 ℓ之上，局部圆分扩张中的分歧指数无界。因此，我们可以选择 E ，使得在 ℓ主布劳尔类 D 非平凡的每个有限处，该局部次数都能被该类的局部不变量的序整除。该主分量的不变元在实位处为零，因此 Brauer–Hasse–Noether 定理表明 $\mathrm{ind}(D_E)$ 与 ℓ互素。将证明 (5) 中第一个关系的论证应用于 D_E 在 E上的情形，并取次数为 $\mathrm{ind}(D_E)$ 的可分裂域，可得对于 $j \geq 1$，$\mathrm{ind}(D_E)\,\pi_j B_\ell(D_E) = 0$ 。由于 $\mathrm{ind}(D_E)$ 与 ℓ 互素，且 $B_\ell(D_E)$ 是 ℓ-局部的，因此有 $\tau_{\geq 2} B_\ell(D_E) = 0$。

由于 R 是连通的，且 $\mathsf{X} = \tau_{\geq 2} B_\ell(D)$，由 R-模的连通覆盖的伴随性可知，从一个 2-连通 R-模到 X 的 R-模映射，只要其与 $\mathsf{X} \to B_\ell(D)$ 的复合映射是零同伦的，它本身就是零同伦的。限制映射 $\mathsf{X} \to B_\ell(D_E)$ 作为G-等变 R-模的映射是零同伦的，因为 X 的次数至少为 4，而 $B_\ell(D_E)$ 的次数至多为 1，所以等变模上的 t-结构使映射空间可缩。由投影公式，映射

$$(\tau_{\geq 2} K(E)_{(\ell)})_{hG} \otimes_R \mathsf{X} \longrightarrow B_\ell(D), \qquad y \otimes z \longmapsto N_{D_E/D}(y \cdot \mathrm{res}_{E/F}\, z)$$

是零同伦的，并且等于映射 $y \otimes z \mapsto \mathcal{N}^{E/F}(y) \cdot z$ ，该映射由导出范数给出的作用定义。利用命题 3.2.8 的等价 $(\tau_{\geq 2} K(E)^{(\ell)})_{hG} \simeq \tau_{\geq 2} R$ 以及连通张量积经由截断的分解，我们可知，作用映射 (1) 与 $\mathsf{X} \to B_\ell(D)$ 的复合映射是零同伦的。作用映射 (1) 的源是 6-连通的，因为 X 的次数至少为 4，所以由上述原理可得 (1)。将 $\tau_{\geq 2} K(E)^{(\ell)}$ 替换为 $\tau_{\geq 1} K(E)^{(\ell)}$，同一个投影公式仍然成立，因此映射 (2) 与 $\mathsf{X} \to B_\ell(D)$ 的复合映射作为 R-模的映射是零同伦的。映射 (2) 的源是 5-连通的，因为 X 的次数至少为 4。由同一原理可得 (2)。

□

引理 3.2.32。 有限 *GEM* 的一个收缩仍是有限 *GEM*。此外，对于每个素数 ℓ，一个有上界且有下界的 $H\mathbb{Z}_{(\ell)}$-模作为模分裂为其同伦群的悬置 *Eilenberg–Mac Lane* 谱的直和。

证明。 按次数递增排列各项，并合并次数相同的项。根据 t-结构，从较高次数到较低次数的映射均为零，因此自同态环中的非对角项理想是幂零的。令 ε 为定义该收缩的幂等元，令 ε_0 为其对角部分。于是 $u = \varepsilon\varepsilon_0 + (1-\varepsilon)(1-\varepsilon_0)$ 模非对角理想同 1，因而是可逆的，并且满足 $\varepsilon u = u\varepsilon_0$。因此， $\varepsilon = u\varepsilon_0 u^{-1}$ 与 ε_0 共轭。对角幂等元确定了各个系数群的直和项。对于第二个断言， $\mathbb{Z}_{(\ell)}$ 的整体维数为 1，因此包含 Postnikov 扩张的次数至少为 2 的 Ext 群消失。

□

定理 *3.2.30* 的奇素部分。将 $\tau_{\geq 2}R \to R \to \tau_{\leq 1}R$ 与 X 张量。根据引理 3.2.31(1)，映射 $\mathrm{X} \to \tau_{\leq 1}R \otimes_R \mathrm{X}$ 是 R-模之间的分裂单态射。对于奇数 ℓ，有 $\tau_{\leq 1}\mathbb{S}_{(\ell)} \simeq H\mathbb{Z}_{(\ell)}$。截断单位映射得到 $H\mathbb{Z}_{(\ell)} \to \tau_{\leq 1}R$，因此$\tau_{\leq 1}R \otimes_R \mathrm{X}$ 是一个 $H\mathbb{Z}_{(\ell)}$-模。我们将整个收缩图截断到支撑 X 的同伦群的有限次数范围内。引理 3.2.32 表明，X 也是一个有限 GEM。

□

Bott 元与2-主分解

2-主部分依赖于两个引理：关于 Bott 元的引理 3.2.33，以及关于模二分解的引理 3.2.34。

引理 3.2.33. 设 $\ell = 2$。设 $\widetilde{\eta} \in \pi_2(\mathbb{S}/2)$ 是一个 *Bockstein* 为 *Hopf* 元 η的元素，并设 $b \in K_2(F;\mathbb{Z}/2)$ 是它在单位映射下的像。由 b 诱导的映射 $\Sigma^2\mathrm{X} \to \mathrm{X}/2$ 以及由 η 诱导的映射 $\Sigma\mathrm{X} \to \mathrm{X}$ 作为 R- 模之间的映射都是零同伦的。

证明。 对于引理 3.2.31 的有限圆分层 E/F， $-1 \in N_{E/F}E^\times$。事实上，在每个有限处，局部互反映射 $F_v^\times \to \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ 都会消去有限阶元素，因为其目标是 $\mathbb{Z}_2$ 的无挠子群。实位完全分裂。因此， -1 在每个赋值处都是局部范数；根据循环扩张的 Hasse 范数定理[30, §1]，它也是全局范数。

取整系数，令 $Y = (\tau_{\geq 1}K(E))_{hG}$。次数至少为 2 时，导出范数使 $\pi_2 Y \to K_2(F)$ 成为满射。在次数 1 时， $\pi_1 Y = (E^\times)_G$，而循环 Hilbert 90 使域范数 $\pi_1 Y \to F^\times$ 成为单射。因此， -1 的原像属于 $\pi_1 Y[2]$。在由有限集的置换建模的球面单位下，表示 η 的换位变成行列式为 -1的矩阵，因此 η 映到 $-1 \in K_1(F)$，且 b 的 Bockstein 为 -1。我们通过 Moore 系数序列提升 -1 的原像

$$0 \longrightarrow \pi_2 Y/2 \longrightarrow \pi_2(Y/2) \longrightarrow \pi_1 Y[2] \longrightarrow 0.$$

这个提升的范数与 b相差一个 $K_2(F)/2$中的类，而 $\pi_2 Y \to K_2(F)$的满射性使我们能够修正该提升，因此 b 提升到 $\pi_2(Y/2)$。我们将引理 3.2.31(2)应用于 $Y_{(2)}$ ，并模 2 化。由此可知， b 的作用为零。与 Bockstein 复合后可知， η 的作用也为零。

□

引理 3.2.34. 谱$\mathrm{X}/2$ 是 $H\mathbb{F}_2$的悬挂的有限直和。

证明。 令 $\mathrm{W} = \tau_{\leq 1}R \otimes_R (\mathrm{X}/2)$。将引理 3.2.31(1) 的零伦模 2 化，可得 $\mathrm{X}/2$ 是 W 的一个收缩。若 ι 表示 Moore 谱底胞腔的包含映射， ∂ 表示到其顶胞腔的投影，则 $2\,\mathrm{id}_{\mathbb{S}/2} = \iota\eta\partial$ [75, 命题 4]。事实上，与 ι 复合为零的自映射来自序为二的群 $\pi_1(\mathbb{S}/2)$，其非零元素为 $\iota\eta\partial$。不等式 $2\,\mathrm{id}_{\mathbb{S}/2} \neq 0$ 由 Sq^2 在 $\mathbb{S}/2 \wedge \mathbb{S}/2$ 底部次数上的作用以及 Cartan 公式推出。因此，引理 3.2.33 给出 $2\,\mathrm{id}_{\mathrm{X}/2} = 0$。

我们通过环映射将 W 视为一个 $ko_{(2)}$-模

$$ko_{(2)} \longrightarrow \tau_{\leq 1} ko_{(2)} \simeq \tau_{\leq 1}\mathbb{S}_{(2)} \longrightarrow \tau_{\leq 1} R.$$

中间的等价来自球面单位在 π_0, π_1 上诱导的同构。η 在 W 上的作用，是通过基变换到 $\tau_{\leq 1}R$ 并模 2 约化后，由它在引理 3.2.33 中对 X 的作用得到的，因此为零。Wood 序列 $\Sigma ko \xrightarrow{\eta} ko \to ku$ 使 W 成为 V $= ku_{(2)} \otimes_{ko_{(2)}}$ W 的一个收缩。这里，Wood 序列的连通版本由周期版本中 $\Sigma^{-2}\mathbb{CP}^2$ 的双胞腔描述，以及与连通覆盖上的复化的比较映射推出。在次数 0,1 中，利用 $\pi_0 ko \to \pi_0 ku$ 是同构，且 $\eta\colon \pi_0 ko \to \pi_1 ko$ 是满射 [52, 定理 9.7]。

$\widetilde{\eta}$ 的像 $b_0 \in \pi_2(ko/2)$ 经复化映射到 $\pi_2(ku/2) = \mathbb{F}_2$ 中的非零元素，即复 Bott 元的约化 $\beta \in \pi_2 ku$。事实上，在模 2 约化的 Wood 序列中，映射 $\eta\colon \pi_0(ko/2) \to \pi_1(ko/2)$ 是同构，因此 $\pi_2(ko/2) \to \pi_2(ku/2)$ 是满射，其核为 $\eta\pi_1(ko/2)$，由整数类 η^2 的约化生成。Bockstein 在此核上为零，但将 b_0 映到 $\eta \neq 0$，所以 b_0 不在核中。

由于 b_0 来自球面，其作用 $\Sigma^2 \mathrm{W} \to \mathrm{W}/2$ 可由引理 3.2.33 中的作用经基变换并模 2 约化得到。因此，基变换至 $ku_{(2)}$后，复合映射 $\Sigma^2 \mathrm{V} \xrightarrow{\beta} \mathrm{V} \to \mathrm{V}/2$ 为零。由于 $2\,\mathrm{id}_{\mathrm{V}} = 0$（$2\,\mathrm{id}_{\mathrm{X}/2}$ 的零伦是 R-线性的，因此基变换给出一个 $ku_{(2)}$-线性的零伦），映射 V $\to$ V $/2$ 是 $ku_{(2)}$-模之间的分裂单态射，故 $\beta_{\mathrm{V}} = 0$。由于 $ku_{(2)}/\beta \simeq H\mathbb{Z}_{(2)}$，谱 V 是 $H\mathbb{Z}_{(2)} \otimes_{ku_{(2)}} \mathrm{V}$ 的一个收缩。因此，X$/2$ 是一个 $H\mathbb{Z}_{(2)}$-模的收缩。我们将整个收缩图截断到 X$/2$ 的有界次数范围内。引理 3.2.32 表明，X$/2$ 是一个有限 GEM。最后，$2\,\mathrm{id}_{\mathrm{X}/2} = 0$ 意味着每个系数群都是一个 $\mathbb{F}_2$-向量空间。 □

从有限系数分解到整系数分解

接下来只需从有限系数分解过渡到整数分解，即可完成定理 3.2.30 的 2-主部分。

引理 3.2.35. 设 M, M' 是有限 ℓ-群。若 $n \geq 2$，则 $\ell[HM, \Sigma^n HM\prime] = 0$。

证明. Richter 对 Kochman 计算的阐述表明，对于 $q > 0$ [70, ， $H_q(H\mathbb{Z}; \mathbb{Z}_{(\ell)})$ 被 ℓ 湮灭，见 §6.1，第 297] 页。单位 $\mathbb{S} \to H\mathbb{Z}$ 的余纤维位于次数至少为 2 的部分，与 $H\mathbb{Z}_{(\ell)}$ 作 smash 积会保持这一连通性。因此， $H_0(H\mathbb{Z}; \mathbb{Z}_{(\ell)}) = \mathbb{Z}_{(\ell)}$ ，且 $H_1(H\mathbb{Z}; \mathbb{Z}_{(\ell)}) = 0$。

我们可以假设 $M = \mathbb{Z}/\ell^a$。由引理 3.2.32， $H\mathbb{Z}_{(\ell)} \wedge H\mathbb{Z}$ 的每个有限次数截断都分裂为悬挂的 Eilenberg–Mac Lane 谱。在乘以 ℓ^a 的余纤维中，零次的自由直和项给出 $H(\mathbb{Z}/\ell^a)$，而正次数的每个直和项 $\Sigma^q HA$ 都给出 $\Sigma^q HA \oplus \Sigma^{q+1} HA$，因为 $\ell A = 0$。因此， $H_0(HM; \mathbb{Z}_{(\ell)}) = \mathbb{Z}/\ell^a$， $H_1(HM; \mathbb{Z}_{(\ell)}) = 0$，并且 $H_q(HM; \mathbb{Z}_{(\ell)})$ 被 ℓ 湮灭，条件是 $q \geq 2$；特别是，正次数中没有扩张会产生 $\mathbb{Z}/\ell^2$。我们利用 $H\mathbb{Z}_{(\ell)}$-模的扩张–限制伴随计算 $[HM, \Sigma^n HM\prime]$。其直和项为

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{(\ell)}}(H_n(HM; \mathbb{Z}_{(\ell)}), M'), \qquad \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_{(\ell)}}(H_{n-1}(HM; \mathbb{Z}_{(\ell)}), M').$$

这里我们再次利用整体维数为 1 所提供的分裂。对于 $n \geq 2$，两个直和项都被 ℓ 消去。 □

引理 3.2.36。设 T 是一个上下有界的谱，且每个 $\pi_i T$ 都是有限 ℓ-群。若 T/ℓ 是 $H\mathbb{F}_\ell$ 的悬挂的直和，则 T 是有限 *GEM*。

证明。 如果一个从 $H\mathbb{F}_\ell$ 的悬挂的直和出发的映射在 π_* 上是满射，那么其目标也具有相同形式，且该映射存在一个截面。事实上，将目标的齐次基提升到源中，并通过来自相同次数因子的映射实现这些提升；由此得到一个到目标上的等价。

令 $T_m = \tau_{\le m}T$。映射 $T/\ell \to T_m/\ell$ 在每个同伦群上都是满射：在不超过 m 的次数上是同构，而在次数 $m+1$ 上，Bockstein 给出一个到 $\pi_m T[\ell]$ 的满射。因此 T_m/ℓ 也是这样的直和。

归纳地假设 T_{m-1} 是有限 GEM。令 $M' = \pi_m T$，并将 Postnikov 不变量写为 k：$T_{m-1} \to \Sigma^{m+1}HM'$。从 T/ℓ 出发的映射的复合表明，$T_m/\ell \to T_{m-1}/\ell$ 在所有同伦群上同样都是满射。根据上面的观察，它有一个截面，因此 $k/\ell = 0$。由模 ℓ 约化的自然性， k 与约化映射 $\Sigma^{m+1}HM' \to \Sigma^{m+1}HM\prime/\ell$的复合通过 $k/\ell = 0$分解，因此系数余纤维序列表明 k 是 ℓ的倍数。从 T_{m-1} 的每个直和项到 $\Sigma^{m+1}HM'$ 的次数差至少为 2，因此由引理 3.2.35 可得 $k = 0$。 □

定理 *3.2.30* 的证明补充。 根据定理 3.2.20 的分解，对于每个素数，群 $\pi_j Z_{(\ell)}$ 都是有限的 ℓ-群，并由 (5) 及推论 3.2.16 和 3.2.21 知其支撑于次数 $4 \le j \le e_\ell - 3$ 。当出现 2-主因子时，将引理 3.2.34 和 3.2.36 应用于 $T = \mathrm{X} \simeq Z_{(2)}$ ，即可得到 2-主部分。 □

第一个剩余群

由推论 3.2.16 可知，比较纤维中可能非零的第一个同伦群是$\pi_4 Z$。对于数域，当 ℓ 为奇数或 F 没有实位时，我们在命题 3.2.37 中描述 $\pi_4 Z_{(\ell)}$ 。

命题 3.2.37。 设 F 为数域，设 ℓ 为一个素数，并假设 ℓ 为奇数或 F 没有实位。存在一个自然的短正合列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \operatorname{coker}\bigl[\mathrm{CH}^1(F,5;D)_{(\ell)} \xrightarrow{d_2} \mathrm{CH}^2(F,4;D)_{(\ell)}\bigr] \\ \longrightarrow \pi_4 Z_{(\ell)} \longrightarrow \mathrm{CH}^1(F,4;D)_{(\ell)} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

这里， d_2 是扭曲动机谱序列中的微分。

证明。 本证明中的所有群都在 ℓ 处局部化。我们按权重 r 和总次数 m为同伦余维塔 $\mathcal{F}^r K(D)$ 的谱序列编指标；于是 d_s 从 (r,m) 映到 $(r+s-1, m-1)$。由命题 3.1.3 和 Bass–Tate 计算，总次数为四时的权重四部分消失。权零以及权重至少为五的部分也消失。

首先将权三部分与实际的比较映射 g_4进行比较。由于 $\pi_4\mathcal{F}^4K(D) = \pi_3\mathcal{F}^4K(D) = 0$，可得

$$\pi_4\mathcal{F}^3K(D) \simeq \mathrm{CH}^3(F,4;D).$$

在交换侧， $H^0_{\mathrm{mot}}(F,\mathbb{Z}_{(\ell)}(2))$ 和 $H^{-1}_{\mathrm{mot}}(F,\mathbb{Z}_{(\ell)}(2))$ 由有理群的消失以及与可除系数的 Beilinson–Lichtenbaum 比较而消失。因此，总次数为四和五时，权重二部分消失。权重一部分在这些总次数下也消失，所以交换边映射 $\mathrm{CH}^3(F,4) \to K_4(F)$ 是一个同构。

取有限系数时， F^{sep} 上的 Morita 等价以及动机–étale 比较，将 étale 层化同伦余维塔 $\mathcal{F}^r K(D)$ 的几何权重 $-r$ 层识别为 $\mathbb{Z}/\ell^a(r)[2r]$。层比较由约化秩给出。由于这些层集中在次数 $2r$ ，且支撑塔尾部的连通性趋于无穷，层化后的第 r阶段就是几何 $2r$-连通覆盖。因此，乘以秩一类会保留各阶段，并在权重三层上作用为单位元。

由于 $\mathrm{cd}_\ell F \le 2$，权重至少为四的层在几何点上是 8-连通的，在截面上是 6-连通的，经过导出逆极限后是 5-连通的，因此其 π_4 和π_3 按需在长正合列中消失。因此， π_4 上权重- H^2_{cont} 比较的目标是 F， $\mathbb{Z}_\ell$(3))。于是，经过导出完备化后，复合映射$\pi_4\mathcal{F}^3K(D) \to K_4(D) \xrightarrow{g_4} K_4$ (F) 等于复合映射

$$\pi_4\mathcal{F}^3K(D) \simeq \mathrm{CH}^3(F,4;D) \longrightarrow \mathrm{CH}^3(F,4) \longrightarrow K_4(F),$$

其中，CH^3(F， 4; D) $\to \mathrm{CH}^3$(F， 4) 是权三约化范数，而 CH^3(F， 4) $\to K_4$(F) 是交换边映射 [39, §6.9], [20]。

对于一个 ℓ-局部谱，到其导出完备化的映射具有有理纤维，因此它在同伦群上的核是可整除的。由引理 3.2.3， $K_4(F)^{(\ell)}$ 因而单射映入 $\pi_4(K(F)^\wedge_\ell)$，并且上述比较对 $\mathbb{Z}_{(\ell)}$ 系数成立。记 $\mathcal{F}^3K_4(D)$ 为 $\pi_4\mathcal{F}^3K(D)$ 在 $K_4(D)$ 中的像。命题 3.1.3 结合 $r = 3$ 表明， g_4 maps$\mathcal{F}^3K_4(D)$ 同构映到 $K_4(F)$。特别地，权三的所有部分都在 $K_4(D)$ 中保留下来，并且 $\pi_4 Z_{(\ell)} \simeq K_4(D)_{(\ell)}/\mathcal{F}^3K_4(D)^{(\ell)}$。

接下来我们考虑来自权重一的微分，

$$d_2 : \mathrm{CH}^1(F,4;D) \longrightarrow \mathrm{CH}^2(F,3;D).$$

其源的比较映射指向 étale 权重一项 $H^{-2}_{\text{ét}}(F,\mathbb{Z}/\ell^a(1))$，由于它处于负上同调次数中而消失。目标上的比较映射是单射：根据命题 3.1.3，权二约化范数是同构。交换群 $\mathrm{CH}^2(F,3)^{(\ell)}$ 在 $\mathbb{Z}_{(\ell)}$ 上有限生成，因此可以通过其模 ℓ^a 商来检测；根据系数序列和 Beilinson–Lichtenbaum 比较，每个商 $\mathrm{CH}^2(F,3)_{(\ell)}/\ell^a$ 都嵌入 $H^1_{\text{ét}}(F,\mathbb{Z}/\ell^a(2))$ 中。由于与 étale 谱序列的比较和 d_2相容，该微分为零。下一个微分的目标 CH^3(F,3; D) 根据命题 3.1.3、 $r = 3$ 和 [8, 第二章定理 2.1(3)],而消失，更高目标则由支撑上的维数条件而消失。进入权重一的微分也都消失，从而权重一中只剩下 CH^1(F,4; D)。由于同样的原因，离开权重二的微分消失，而唯一进入的微分 d_2 来自权重一中的总次数五。权重一和权重二中的两步滤过给出了所显示的短正合列 [39, 推论 6.1.4，§6.9]。

□

问题 3.2.38. 定理 3.2.30 中的所有有限群 $\pi_j Z_{(\ell)}$ 在数域上都消失吗？非零群要求 $e_\ell \ge 7$，否则范围 $4 \le j \le e_\ell - 3$ 为空；还要求 $e_\ell \ne \ell$，因为定理 3.2.20 给出 $\tau_{\ge 2}B_\ell(D) = 0$ ，其中 $e_\ell = \ell$；因此 e_ℓ 可能的最小值是 $8 = 2^3$ 和 $9 = 3^2$。在四次情形下，对于奇素数或没有实位的域，命题 3.2.37 将这个问题归结为对该命题中的扭曲高阶 Chow 群所满足条件的考察。

4 二维局部域上的约化范数

本节证明，在二维局部域上， K_2 上的约化范数是同构。满射性由加藤存在定理得出，而在驯分情形下，局部化可计算 SK_2 （第 4.1 节）。剩余野分情形下 SK_2 的消失，则通过对指标进行归纳法证明（第 4.2 节）。

4.1 分裂域的范数与温和局部化

在本小节中，我们首先证明，在二维局部域上，分裂域的域范数生成 $K_2(F)$（定理 4.1.1）；特别地， K_2 上的约化范数是满射的。

在下文所述的假设下，随后我们给出 D/F 温和分歧时 $\mathrm{SK}_2(D)$ 的局部化公式：在第一剩余特征为零时（命题 4.1.6），以及对于 ℓ-主 D，当 ℓ 不同于第一剩余特征时，在 ℓ-局部化之后（命题 4.1.9）。在此过程中，我们证明了二维局部域上 $\mathrm{SK}_1(D) = 0$ （推论 4.1.3）。这些结果将二维局部域上 SK_2 的消失归结为第 4.2 节的野分情形。

设 $F = F_h$ 是一个 h 维局部域，其域 F_{h-1}、……、F_0 如约定中所述。我们按 char F_h、……、char F_1 的顺序书写特征序列。设 D 是 F 上的中心除法代数，且 $\alpha = [D] \in \in \mathrm{Br}(F)$，令 $N_2(\alpha) \subseteq K_2(F)$ 表示定义 2.1.1 中的范数子群。根据松本定理[53], 我们将 $K_2^M(F)$ 与 $K_2(F)$ 等同。Morita 归一化分裂转移 θ_E 满足 $\mathrm{Nrd}_2 \theta_E = N_{E/F}$，因此$N_2(\alpha) \subset \mathrm{Nrd}_2 K_2(D)$。

定理 4.1.1。设 F 是一个二维局部域，设 D 是 F 上的中心除法代数，并令 $\alpha = [D]$。则 $N_2(\alpha) = K_2(F)$。因此， $C_2(D/F) = 0$。

证明。我们将 $[44, \text{命题 } 5]$ 应用于 $\alpha \in H^2_m(F) = \mathrm{Br}(F)[m]$，其中 $m = \mathrm{per}(\alpha)$，并对特征主部分使用对数系数。取 $n = q = r = 2$ 得到$q + r > n + 1$，因此，来自消去 α 的有限扩张的 Milnor K_2-范数生成 $K_2(F)$。 □

要得到温和局部化公式，我们需要二维局部域上 SK_1 的消失，这可由以下范数一元的分解推出。

引理 4.1.2。设 F 是二维局部域， D 是 F 上的中心除法代数。$\mathrm{SL}_1(D)(F)$ 中的每个元素都可表示为 $\mathrm{SL}_1(D)(F)$ 中两个元素的乘积，且这两个元素各自生成 D 的可分极大子域。

证明。群 $\mathrm{SL}_1(D)$ 是光滑且几何连通的；在 F 上的非平凡 Hensel 赋值下，étale 坐标中的开球表明，其 F-点 Zariski 稠密。正则半单元素构成一个非空开子集 Ω，而 $\Omega(F)$ 中的元素生成一个可分极大子域。对于 $g \in \mathrm{SL}_1(D)(F)$，开集 $\Omega \cap g\Omega^{-1}$ 非空，因此由稠密性可知其中有一个 F-点 h。于是 $g = h \cdot (h^{-1}g)$，其中 $h, h^{-1}g \in \Omega(F)$。 □

推论 4.1.3。若 F 是二维局部域，且 D 是 F上的中心除法代数，则$\mathrm{SK}_1(D) = 0$。

证明。二维局部域及其每个有限扩张 $[18,$ 上的周期等于指标（推论5.1，命题 5。2]）。此外，加藤对偶性和范数像公式表明，对于一个素数幂阶的布劳尔类 α，子群 $\alpha \cup F^\times \subset H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的阶为 $\mathrm{per}(\alpha)$，而与 α 的杯积在 $F^\times$上的核就是约化范数像。在不变量映射下，限制到一个有限扩张等于乘以其次数。对数系数的相同公式适用于特征主分量 $[42, \S 3.1,$ 定理 3(2)], $[44,$ 定理 2], $[34,$ 例 1.1(4)]。

群 $\mathrm{SK}_1(D)$ 被 $\deg D$ 消去。对于 ℓ-主部分，转移使得沿着一个次数与 ℓ 互素、且能分裂其他布劳尔分量的扩张进行的限制是单射。随后，Morita 等价将问题约化到 $\deg D = \ell^r$，我们再从分裂情形 $r = 0$ 出发，对 r 进行归纳。

由引理 4.1.2，只需处理一个生成可分极大子域的范数为一元素 a。

~ ~令 L为 $L = F(a)$ 在 F 上的正规闭包，令 $G = \mathrm{Gal}(L/F)$，并令 H为固定 L的子群。我们选取一个包含 H 的 ℓ-Sylow 子群的 ℓ-Sylow 子群 P，并转而考虑次数与 ℓ 互素的扩张 $\widetilde{L}^P/F$。 L的指标和次数均保持不变，且 SK_1 上的限制仍为单射。 ℓ-群的一个极大子群

P 包含 $H \cap P$，这表明经过此次基变换后， L 包含一个次数为 ℓ 的循环中间域T/F。我们仍将基域记为 F。

令 $B = Z_D(T)$ 和 $\alpha = [D]$。则 $\deg B = \ell^{r-1}$，且周期等于指标，因此 $\operatorname{per} B = \ell^{r-1}$。元素 $b = \mathrm{Nrd}^{B/T}(a)$ 满足 $N_{T/F} b = 1$；对于 $\mathrm{Gal}(T/F)$ 的生成元 σ，希尔伯特90 给出 $b = c/\sigma(c)$，满足 $c \in T^\times$。 $\alpha_T \cup c$ 的序整除 ℓ^{r-1}，而 $\alpha \cup F^\times$ 的限制也是 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 中序为 ℓ^{r-1} 的子群。因此，我们可以选取 $u \in F^\times$，使得 $\alpha_T \cup (cu) = 0$；范数像公式随后给出 $y \in B^\times$，满足 $\mathrm{Nrd}^{B/T}(y) = cu$。我们选取 $v \in D^\times$，使得由 v 进行共轭在 T 上诱导出 σ。然后

$$\mathrm{Nrd}_{B/T}([y, v]) = c/\sigma(c) = b.$$

因此， $a[y, v]^{-1}$ 是 B 的范数为一元素，并且其在 $K_1(B)$ 中的类由归纳法消失。由于 $[y, v]$ 在 $K_1(D)$ 中也消失， a 的类也消失。我们从素数到 ℓ 的扩张下降，并利用前面分解为两个元素的结果得出结论。 □

我们还需要两个引理，这些引理在第5.1节中还会再次用到：对于完备离散赋值环上剩余代数为除代数的阿祖马亚代数，约化映射是满射；以及布劳尔类与约化范数像的杯积为零。

引理 4.1.4。设 R 是一个一致化元为 π的完备离散赋值环，且 D 是 R 上的阿祖马亚代数，其剩余代数 $D/\pi D$ 是除代数。那么 $K_2(D) \to K_2(D/\pi D)$ 是满射。

证明。令 $I = \pi D$，并在 R上重复引理 B.3.1 的论证。由于 D 是阿祖马亚代数，其约化迹配对是完美的。对于提升剩余除代数一组基的单位 s_i， $(x_i) \mapsto \prod_i [s_i, x_i]$ 的微分满射到剩余域上 Trd 的核，因此到光滑群 $\mathrm{SL}_1(D)$的映射在单位元处是光滑的。由亨泽尔引理，每个范数为一的主单位都可表示为乘积 $\prod_i [s_i, x_i]$，其中 $x_i \in 1 + I$。相对群 $K_1(D, I)$由 $1 + I$中的单位生成；根据证明引理 B.4.1 时用到的相对初等关系 $[1 + bx] = [1 + xb]$，每个 $[s_i, x_i]$ 在 $K_1(D, I)$中的类均为零。若一个单位代表 $K_1(D, I) \to K_1(D)$核中的元素，则其约化范数为一，因此该映射是单射。相对正合列 $K_2(D) \to K_2(D/I) \to K_1(D, I) \to K_1(D)$于是推出映射 $K_2(D) \to K_2(D/I)$是满射。 □

引理 4.1.5. 设 K 是一个域， A 是 K上的中心单代数，并令 $\alpha = [A]$.

1. 若 $\operatorname{char} K = 0$，则 $\alpha \cup \mathrm{Nrd}_2(x) = 0$ 属于 $H^4(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(3))$，对每个 $x \in K_2(A)$均成立。若$\operatorname{char} K = p > 0$，则对素数 p 的互素分量，同样结论成立。*2.* 若 $\operatorname{char} K = p > 0$ 且 A 是除代数，则对每个 $x \in K_2(A)$，$\alpha \cup \mathrm{Nrd}_2(x)$ 的 p-主分量为零。

证明。 (1) 在特征零的情形下，我们使用 Kahn–Levine [39, §6.9] 的 étale 动机下降。该下降的权二边缘映射就是约化范数：将基域扩张到一个分裂的 Severi–Brauer 函数域，并利用限制映射在 $K_2(K)$ 上的单射性即可得到这一点。由模结构以及命题 6.9.1], 中的公式 $d_2^A(1) = \alpha$，边缘映射的像包含于 $d_2^A(x) = \alpha \cup x$ 的核中。在可逆系数的正特征情形下，同样的计算仍然适用，因为取完美闭包不会改变相关的伽罗瓦上同调；此处我们还使用了 Nrd_2 与基变换的相容性。

(2) 取一个完备 Cohen 离散赋值环 R，其剩余域为 K，一致化元为π，并取一个阿祖马亚代数 D/R，其剩余为 A [23, （Exposé XXIV，命题 8.1].）。由引理 4.1.4，我们可以将 $x \in K_2(A)$ 提升为 $\tilde{x} \in K_2(D)$；令 $y \in K_2(\operatorname{Frac} R)$ 为其泛点处的约化范数。于是 y 来自 $K_2(R)$，并约化为 $\mathrm{Nrd}_2(x)$。事实上，在

限制到相对塞韦里–布劳尔簇特殊纤维泛点处的离散赋值环后，该处代数分裂， y 的边界为零；由于剩余乘法群上的限制是单射， y 本身的边界也为零，而 y 通过局部化提升为 $K_2(R)$。在那里， K_2 上的约化在泛点处与 $s_\pi = \partial(\{\pi\}\cdot -)$ 一致，因此两个具有相同泛点类的整提升具有相同的约化；由于 $K_2(K) \to K_2(K(\mathrm{SB}(A)))$ 是单射（见推论 5.6–5.7], ）， y 的约化为 $\mathrm{Nrd}_2(x)$。类 y 的边界为零，因此它是 $K_2(\operatorname{Frac} R)$ 中单位符号之和。事实上，根据松本定理，只需处理满足 $c \in R$ 的符号 $\{\pi, 1-\pi c\}$。若 $c \in R^\times$，Steinberg 关系给出 $\{\pi, 1-\pi c\} = -\{c, 1-\pi c\}$。若 $c \in \pi R$，我们将其写成$1-\pi c = (1-\pi(1+c-\pi c))/(1-\pi)$，并对两个因子应用单位情形。加藤非分歧映射 $H^r(K) \to H^r(\operatorname{Frac} R)$ 将阿廷-施赖尔-维特特征映为非分歧特征，并将与单位符号的乘积映为与任意单位提升的乘积 [48, （§5.1，第 55–56] 页）。因此， $\alpha \cup \mathrm{Nrd}_2(x)$ 映为 $[D_{\operatorname{Frac} R}] \cup y$。将第 (1) 部分应用于特征零域 Frac R，可知此乘积为零。

□

命题 4.1.6。设 k 是维数为 $r \geq 1$ 且特征 $k = 0$ 的局部域，并设 $F = k((t))$。设 B 是中心除法代数 D/F 的剩余除代数（由于特征 $k = 0$，它是温和分歧的），并设 L 是 B 的中心。群 $G = \mathrm{Gal}(L/k)$ 是循环的。若 $\mathrm{SK}_1(B) = 0$，则

$$\mathrm{SK}_2(D) \simeq \ker\left(K_2(B)_G \xrightarrow{N_{L/k}\,\mathrm{Nrd}_{B/L,2}} K_2(k) \right).$$

若 $\mathrm{Nrd}_{B/L,2}$ 是满射的，则 $\mathrm{SK}_2(B)_G \to \mathrm{SK}_2(D)$ 是满射的。

我们沿用命题 4.1.6 中的记号，其证明将由下面两个引理推出。在 Witt 分解 $[D] = a + (\chi, t)$ 中， $a \in \mathrm{Br}(k)$ 且 $\chi \in H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$，有 $L = k(\chi)$ 和 $[B] = a_L$。设 R 是 D 的赋值环。根据 [91, 定理 1] 及其证明，剩余映射 $R \to B$ 有一个环截面 $\iota\colon B \to R$，即系数嵌入；它扩张了固定的系数域 $k \subset F = k((t))$；这为下文所使用的识别 $L \otimes_k F = L((t))$ 提供了依据。由于 B 是可分的 k-代数，固定的 k 上的系数嵌入可通过提升穿过 $R/J^{s+1} \to R/J^s$ 的平方零核而得到，其中 $J = J(R)$，然后取逆极限。将 w 在 D 上的赋值归一化，使得 $w(D^\times) = \mathbb{Z}$，于是 $w(t) = e$，其中 $e = [L : k]$。在温和同构 $\Gamma_D/\Gamma_F \simeq \mathrm{Gal}(L/k)$ 下，令 σ_L 为对应于值 1 的生成元。由于 $[B] = a_L$ 是从 k 限制而来的，自同构 σ_L 可提升为 B 的半线性自同构 σ。将 σ 扩张到 $B \otimes_k F$，并对 $B \otimes_k F$ 到 D 的两个由此得到的 F-嵌入应用 Skolem–Noether 定理，可得到 $u \in D^\times$，满足对于 $b \in B$， $u\,\iota(b) = \iota(\sigma(b))\,u$。对剩余中心的作用给出 $w(u) \equiv 1$ 模 e，因此乘以中心元素 t 的某个幂后，我们可以假设 u 是 D 的一致化元。使用这一一致化元，有 $R = B[[u;\ \sigma]]$。我们将 σ_* 记作由 σ 诱导的 $K_*(B)$ 的自同构；由于 $\sigma^{[L:k]}$ 是内的，σ_* 定义了 G 的一个作用。

引理 4.1.7. 在此设定下，令 $i_*\colon K_*(B) \to K_*(R)$ 为从闭支撑出发的映射，并令 $V_2 = \ker(K_2(R) \to K_2(B))$。那么 $i_* = \iota_* \circ (1 - (\sigma^{-1})_*)$，群 V_2 是唯一可除的，且局部化序列具有如下形式

$$0 \longrightarrow K_2(B)_G \oplus V_2 \xrightarrow{\iota_* + \mathrm{incl}} K_2(D) \xrightarrow{\partial_D} K_1(B)^G \longrightarrow 0.$$

证明。右 R-模 B 有长度为一的投射分解 $0 \to uR \to R \to B \to 0$。右线性同构 $R \to uR$， $r \mapsto ur$，通过 σ^{-1} 扭转左 B 作用，因为 $\iota(b)ur = u\,\iota(\sigma^{-1}(b))r$。因此，可加性给出 $i_* = \iota_* \circ (1 - (\sigma^{-1})_*)$。由于 ι 分裂约化， $K_2(R) = \iota_* K_2(B) \oplus V_2$，且 ι_* 在 $K_*(B)$ 上是单射。因此，余核$(i_*\colon K_2(B) \to K_2(R)) = K_2(B)_G \oplus V_2$，且核$(i_*\colon K_1(B) \to K_1(R)) = K_1(B)^G$。

局部化序列 $K_2(B) \to K_2(R) \to K_2(D) \to K_1(B) \to K_1(R)$ 现在给出所示序列。剩余特征为零时的有限系数刚性使 V_2 唯一可除[82, §3，定理 2] 的推论 2。

□

引理 4.1.8。 在此设定下，设 $U \subset D$ 为非分歧极大子域。则

$$\partial_F \circ \mathrm{Nrd}_{D,2} = \mathrm{Nrd}_{B/L,1} \circ \partial_D \quad \textit{inside } \bar{U}^\times,$$

并且，对于 $x \in K_2(B)$,

$$\mathrm{Nrd}_{D,2}(\iota_* x) = \mathrm{res}_{F/k}\, N_{L/k}\, \mathrm{Nrd}_{B/L,2}(x).$$

此外，$\mathrm{res}^{F/k}$： $K_2(k) \to K_2(F)$ 是分裂单射。

证明。 这样的域 U 确实存在：将 B 的可分极大子域 K 提升到 $\iota(K)((t))$。令 $\bar{\mathcal{O}}_U$ 为 U 的赋值环，令 U 为其剩余域，它是包含 L 的 B 的极大子域。从 R 到 $\mathcal{O}_U$ 的标量限制与局部化序列相容；在分裂 Morita 等价之后，它在泛点处是 $\mathrm{res}^{U/F}\mathrm{Nrd}_{D,\,2}$，在闭支撑上是 $\mathrm{res}_{\bar{U}/L}\mathrm{Nrd}_{B/L,\,1}$。由于 $e(U/F) = 1$，域侧边界映射 $K_2(U) \to K_1(U)$ 与 $\mathrm{res}^{U/F}$ 复合后，等于 ∂_F 再限制到剩余域 U，而所得的局部化图表给出了第一个恒等式。

对于第二个恒等式，令 $M = L((t))$ 和 $C = Z_D(M)$。根据 Skolem–Noether 定理，存在某个 $\beta \in B^\times$，使得 $\sigma^{[L:k]} = \mathrm{Ad}(\beta)$ 在 B 上成立，因此 $\beta^{-1}u^{[L:k]}$ 与 B 交换，而 L 在$R = B[[u$ 中的中心化子； $\sigma]]$ 是 $B[[\beta^{-1}u^{[L:k]}]]$。于是 $C = B \otimes_L M$：它包含这个代数，而双中心化子定理表明两者的次数相同。我们使用 Morita $(C,\ D_M)$-双模 D。经过此 Morita 等价后，从 D_M 到 D 的标量限制就是沿$C \to D$的标量扩张，因此沿 $C \to D$ 的标量扩张与 $\mathrm{Nrd}_{D,\,2}$ 的复合映射为 $N_{M/F}\mathrm{Nrd}_{C/M,\,2}$[39,命题 6.6.1(1)]。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Nrd}_{D,2}(\iota_* x) &= N_{M/F}\,\mathrm{Nrd}_{C/M,2}(x)\\ &= N_{M/F}\,\mathrm{res}_{M/L}\,\mathrm{Nrd}_{B/L,2}(x)\\ &= \mathrm{res}_{F/k}\,N_{L/k}\,\mathrm{Nrd}_{B/L,2}(x)\end{aligned}$$

根据这个公式、约化范数与基变换的相容性，以及 $L \otimes_k F = M$ 的基变换公式。最后，在 t 处特化会使 $\mathrm{res}^{F/k}$ 分裂。 □

命题 *4.1.6* 的证明。 设 $\xi \in \mathrm{SK}_2(D)$。由引理 4.1.8，$\mathrm{Nrd}_{B/L,1}(\partial_D \xi) = \partial_F(1) = 1$，且 $\mathrm{SK}_1(B) = 0$ 给出 $\partial_D \xi = 0$。因此，由引理 4.1.7， ξ 属于 $K_2(B)_G \oplus V_2$。其 V_2- 分量为零，因为 $\deg D$ 消去 $\mathrm{SK}_2(D)$，而 V_2 是唯一可除的。因此，$\mathrm{SK}_2(D)$ 是 $K_2(B)_G$上约化范数的核；由引理 4.1.8 及 $\mathrm{res}^{F/k}$的单射性，该核可识别为所示的核。

对于最后一个断言，设 $\mathrm{Nrd}_{B/L}$,2 是满射；我们先证明 $\mathrm{SK}_1(B) = 0$ 自动成立，从而可以使用所显示的同一性。由于 L/k 有限， L 是维数为 r的局部域，且 $\mathrm{char}\, L = 0$。若 $r \le 2$, 则由关于$r = 1$ 的定理 1.1.1 以及关于 $r = 2$的推论 4.1.3，$\mathrm{SK}_1(B) = 0$ 。若 $r \ge 3$，则由引理 4.1.5(1) 和 $\mathrm{Nrd}_{B/L}$,2 的满射性可得 $[B] \cup K_2(L) = 0$。将长度为 $r-1$ 的 Milnor 符号写成其前两个项与其余项的乘积，我们得到 $[B] \cup K^M_{r-1}(L) = 0$；由加藤的最高次数对偶性和定理 2]可知 $[B] = 0$ [44, ；因此 $B = L$ ，并且再次有 $\mathrm{SK}_1(B) = 0$。现在我们使用循环的 K_2 希尔伯特 90 [55, 定理 14.1]: 范数 $N_{L/k}$： $K_2(L)_G \to K_2(k)$是单射。因此，核等于 $\ker(K_2(B)_G \to K_2(L)_G)$，而余不变元的右正合性表明，该核是 $\mathrm{SK}_2(B)_G$的像。

□

当第一剩余特征为 $p>0$时，对 $\ell\neq p$作 ℓ-局部化后，同一核公式仍成立。在下一个命题中， F是剩余域为 k 且特征为 p的完备离散赋值域， ℓ是 F 上的一个 D -主中心除代数，其剩余除代数为 B，而 L 是 B的中心。由于 D/F是温和分歧的（$\ell\neq p$），由 D 的一个一致化元 u 给出的共轭 $z\mapsto u^{-1}zu$ 限制为 $\mathrm{Gal}(L/k)$ 的一个生成元。另一种规范化选取 u' 给出赋值环 $\mathcal{O}_D$ 的一个单位 $u'u^{-1}$，其剩余类通过内自同构作用，因此 $\mathrm{Gal}(L/k)$ 在 $K_2(B)$上的诱导作用 $\bar{\sigma}_*$ 与选取无关。这就是陈述中的作用。

命题 4.1.9. 设 F 是一个完备离散赋值域，其剩余域 k 是维数至多为二的局部域，且其特征为$\mathrm{char}\,k=p>0$。设 $\ell\neq p$ 是一个素数， D 是 F 上的一个ℓ-主中心除法代数（因此 D/F 是温和分歧的）， B 是其剩余除代数， L 是 B的中心。

1. 若$\mathrm{SK}_1(B)=0$，则

$$\mathrm{SK}_2(D)_{(\ell)}\simeq\ker\Big(K_2(B)_{\mathrm{Gal}(L/k)}\xrightarrow{N_{L/k}\,\mathrm{Nrd}_{B/L,2}}K_2(k)\Big)_{(\ell)}.$$

2. 若 k 是一个非阿基米德局部域，则$\mathrm{SK}_2(D)_{(\ell)}=0$。

命题 4.1.9 的证明见下文引理 4.1.10 之后。

设 O_D 是 D的赋值环，因此 $B=\mathsf{O}_D/J(\mathsf{O}_D)$。根据温和分歧除代数的结构， D/F 的分歧指数 e 等于 $[L:\ k]$，且整除 $\deg D$，因此它是 ℓ的幂。设 u 是 D的一致化元， π 是 F 的一致化元，并用 σ_* 和 $\bar{\sigma}_*$ 表示共轭 $z\mapsto u^{-1}zu$ 在 $K_2(\mathsf{O}_D)$上及在 $K_2(B)$上的作用。设 r: $K_2(\mathsf{O}_D)\to K_2(B)$是约化映射， i_*: $K_2(B)\to K_2(\mathsf{O}_D)$是闭支撑映射。一般而言，不存在系数域，因此我们通过非分歧中心化子进行提升。设 M/F 是 L/k的非分歧提升，O_0 是 D 中 M 的中心化子里的一个极大阶。则 O_0是 O_M 上的阿祖马亚代数，其剩余代数为 B。

引理 4.1.10。 在命题 *4.1.9*的情形下，约化 r 是满射的，核r 是唯一 ℓ-可整除的，并且

$$\mathrm{im}\,i_*\cap\ker r=0.$$

证明。 将引理 4.1.4应用于完备离散赋值环 $\mathcal{O}_M$上的阿祖马亚代数 $\mathcal{O}_0$； 其剩余代数为除代数 B。该引理表明， $K_2(\mathcal{O}_0)\to K_2(B)$是满射的；因此 r也是满射的。

B根据 Suslin 和 Yufryakov [82, §3，定理 2 和推论 2], ，纤维 r

$$V=\mathrm{fib}\big(K(\mathcal{O}_D)\to K(B)\big)$$

是唯一 ℓ-可整除的。像 $C=\mathrm{im}(K_3(B)\to\pi_2V)$ 是 ℓ-无挠的。此外， C/ℓ^a是 $K_3(B)/\ell^a$的一个商，而后者嵌入 $K_3(B;\mathbb{Z}/\ell^a)$中。在每个剩余步骤中，刚性和 ¯ ¯ ¯局部化给出 $|K_i(B;\,\mathbb{Z}/\ell^a)|\le|K_i(B;\mathbb{Z}/\ell^a)|\cdot|K_{i-1}(B;\mathbb{Z}/\ell^a)|$，其中剩余代数为 B。由于 k 的维数至多为二，从 $K_3(B)$开始至多经过两个剩余步骤，并且只剩下满足 $i\ge1$的群 $K_i(\mathbb{F}_q;\mathbb{Z}/\ell^a)$。它们的阶有一个与 a无关的界，因此 C/ℓ^a的阶也有这样的界。由于 C 是 ℓ-无挠的， $|C/\ell^a|=|C/\ell|^a$，所以一致界迫使 $C/\ell=0$，且 $\ker\ r\simeq\pi_2V/C$是唯一 ℓ-可整除的。

局部化序列给出

$$i_*\circ r=1-\sigma_*,\qquad r\circ i_*=1-\bar{\sigma}_*,$$

其中，第一个等式由双模序列 $J(\mathcal{O}_D) \to \mathcal{O}_D \to B$ 的可加性得出；第二个等式则来自与剩余代数的导出张量积，其 Tor_0 和 Tor_1 给出这两项。若 $y = i_* b$ 属于 $\ker r$，则 $\bar{\sigma}_* b = b$，因此 $\sigma_* y = y$。由于 $\pi u^{-e} \in \mathcal{O}_D^\times$ 且 π 是中心的，通过 u^{-e} 进行共轭等同于通过 $\mathcal{O}_D$ 的一个单位进行共轭，因此 σ^e 在 $\mathcal{O}_D$ 和 $\sigma_*^e = 1$ 上是内的。由于 r 是满射，第一个等式表明 $1 + \sigma_* + \cdots + \sigma_*^{e-1}$ 消去 $\mathrm{im}\ i_*$；将其应用于 σ_*-不变元素 y，得到 $e\,y = 0$。由于 e 是 ℓ 的幂，且 $\ker r$ 唯一地 ℓ-可整除，因此 $y = 0$。 □

命题 4.1.9 的证明。我们通过将标量限制到非分歧极大子域 $U \subset D$ 来比较边界；该子域是通过沿 O_0提升 B 的可分极大子域得到的。所得图表在所有 $K_2(D)$上均可交换；下文对任意整提升也会用到这一点。经过 Morita 等价后，标量限制到 U^-的赋值环 O_U，在泛点处为 $\mathrm{res}^{U/F}\mathrm{Nrd}_{D,2}$，在闭支撑上为 $\mathrm{res}_{\bar{U}/L}\mathrm{Nrd}_{B/L,1}$，其中 U是 U的剩余域。由于 $e(U/F) = 1$，域侧边界映射就是到剩余域的限制，因此 $\mathrm{SK}_2(D)$ 的边界属于 $\mathrm{SK}_1(B)$。令 $s_\pi = \partial([\pi]\cdot -) : K_2(F) \to K_2(k)$ 为特化映射。对于来自 O_0，的提升，复合映射 $K_2(\mathrm{O}_0) \to K_2(D) \xrightarrow{\mathrm{Nrd}^2} K_2(F) \xrightarrow{s_\pi} K_2(k)$ 等于约化映射 $K_2(\mathrm{O}_0) \to K_2(B)$ 后接 $N_{L/k}\mathrm{Nrd}_{B/L,2}$。这是通过 M的中心化子来计算的：在相对塞韦里–布劳尔概形的特殊纤维泛点处，代数分裂；具体如引理 4.1.5(2) 的证明所示，并结合特化与沿非分歧扩张 M/F 的转移在共同一致化元 π 下的相容性。令 $y \in \ker r$。限制到 U 并取 Morita 等价后， y 的约化可由 $\mathrm{O}_D/\pi\mathrm{O}_D$ 按 J^i $(0 \le i < e)$ 的滤过计算，其中$J = J(\mathrm{O}_D)$，其分次分量是 B的扭曲；因此它是 $r(y) = 0$ 的扭曲之和，并且$s_\pi(\mathrm{res}_U \mathrm{Nrd}_2\, y) = 0$。取从 U来的范数，得到 $\deg D \cdot s_\pi(\mathrm{Nrd}_2\, y) = 0$；又因 $\ker r$是 ℓ-可整除的，且 $\deg D$ 是 ℓ的幂，所以 $s_\pi(\mathrm{Nrd}_2\, y) = 0$。由于 $K_2(\mathrm{O}_0) \to K_2(B)$ 是满射， $K_2(\mathrm{O}_D)$ 中的每个类都是来自 O_0 的提升与 $\ker r$中的一个元素之和，因此在 ℓ-局部化后，上述公式对所有 $K_2(\mathrm{O}_D)$均成立。

(1) 假设 $\mathrm{SK}_1(B) = 0$。通过局部化，$\mathrm{SK}_2(D)$ 中边界为零的一个元素可提升至 $K_2(\mathcal{O}_D)$。由引理 4.1.10，约化给出一个正合序列

$$0 \longrightarrow \ker r \longrightarrow \operatorname{coker} i_* \longrightarrow K_2(B)_{\mathrm{Gal}(L/k)} \longrightarrow 0,$$

并且余核通过局部化嵌入 $K_2(D)$。由于核 r 是唯一 ℓ-可整除的，而 $\deg D$ 消去 $\mathrm{SK}_2(D)$，约化在 $\mathrm{SK}_2(D)^{(\ell)}$ 上是单射的。因此，$\mathrm{SK}_2(D)^{(\ell)}$ 位于 $N_{L/k}\mathrm{Nrd}_{B/L,2}$ 在 $K_2(B)^{\mathrm{Gal}(L/k)}$ 上的 ℓ-局部化核中。反过来，在 ℓ-局部化的群中进行，因此下面的提升和修正都是取 ℓ-局部化的；剩余范数核中一个元素的提升的约化范数属于

$$J'_F = \ker \partial_F \cap \ker s_\pi \subseteq K_2(F),$$

并且，由于 s_π 在核 ∂_F 上根据投影公式与约化 r_F：$K_2(\mathcal{O}_F) \to K_2(k)$ 一致， J'_F 是核 r_F 的像。在交换侧， $i_* r_F = 0$ 和 r_F 是满射的，因此 $i_* = 0$ 和 $K_2(\mathcal{O}_F) \to K_2(F)$ 是单射的；于是 $J'_F \simeq$核 r_F 是唯一 ℓ-可整除的，这由同样的刚性和有界性得到。标量扩张后再施加 $\mathrm{Nrd}_{D,2}$，在 $J_{\prime F}$ 上等于乘以 $\deg D$，因此我们可以在 J'_F 中将该范数除以 $\deg D$，进行标量扩张并相减，从而得到约化范数为零的提升。该修正来自 $K_2(\mathcal{O}_F)$ 中一个约化为零的类，因此不会改变 $K_2(B)^{\mathrm{Gal}(L/k)}$中的剩余类。这给出了 ℓ-局部化后的反向比较。

(2) 如果 k 是非阿基米德局部域，那么 L 也是非阿基米德局部域，而定理 1.1.1 给出 $\mathrm{SK}_1(B) = 0$ 和同构 $\mathrm{Nrd}_{B/L,\ 2}$。循环的 K_2 希尔伯特 90 [55, 定理 14.1] 使 $N_{L/k}$ 在 $K_2(L)^{\mathrm{Gal}(L/k)}$ 上是单射，因此 (1) 中的核为零。 □

4.2 野分歧中的整性归纳

本小节的目的是陈述以下定理，它完成了对二维局部域上除代数的 K_2 的计算。

定理 4.2.1. 设 F 是一个二维局部域。对于 F上的任意中心除法代数 D，都有以下整性等式：

$$\mathrm{SK}_2(D) = 0, \qquad \mathrm{Nrd}_2 \colon K_2(D) \xrightarrow{\sim} K_2(F).$$

定理 4.2.1 的证明将在本小节末尾给出，接在定理 4.2.2 的证明之后。

定理 4.2.2. 设 k 是特征为 $p > 0$的非阿基米德局部域，并设 F 是第一剩余域为 k的完备离散赋值域。域 F 的特征可以是p 或零。对于任意 p-主中心除法代数 D/F，都有$\mathrm{SK}_2(D) = 0$。

我们概述定理 4.2.2 的证明。这是关于最小非分歧指标的归纳法。对于实现最小指标的有限伽罗瓦非分歧扩张 F'/F，限制映射在 SK_2 上的核包含于 $\mathrm{SK}_2(D')$ 的余限制像中，其中 D' 是布劳尔类 $D_{F'}$中的除代数；因此只需证明 $\mathrm{SK}_2(D') = 0$，且我们可以假设 $\deg D = \mathrm{ind}(D_{F^{\mathrm{nr}}}) = p^q$。若 $q = 0$，则 D 分裂。

如果 $q > 0$，那么在必要时添加 μ_p 并经过进一步的有限伽罗瓦非分歧扩张后，循环覆盖引理给出 T/F 的一个次数为 p 的循环扩张，该扩张位于 D 内，其中心化子 B 具有最小非分歧指标 p^{q-1}。归纳假设正是在此处发挥作用：将其应用于 B，得到 $\mathrm{SK}_2(B) = 0$；再结合约化范数在分裂转移上的同构，得到 $K_2(B) = I_T(B)$。这处理了相对覆盖的轨道的角分量的泛点像，而轨道像引理则处理其他分量，因此这些轨道的整个 π_2 的泛点像属于 $I_F(D)$。

最后，对于 $\xi \in \mathrm{SK}_2(D)$，我们将 ξ 提升为剩余为零的整数类，通过零次 TC 的 π_2 上的满射提升其迹，并去除剩余分量。在固定的有限截断处，我们用整数类表示剩余的相对轨道类；在混合特征齐次单位型中，再加回一个整数代表元，该代表元对应于随剩余一起被减去的类。所得类的泛点像属于 $I_F(D)$；它与原提升之差在该截断处消失，因此根据同余分离（引理 B.2.1），该差的泛点像属于 $I_F(D)$。于是 $\xi \in I_F(D)$；又由于 Nrd_2 在 $I_F(D)$上是单射的，我们得出 $\xi = 0$。

非分歧下降与最小指标

我们首先将定理 4.2.2 归约到那些在最大非分歧扩张上指标不下降的除代数。回顾定义 2.1.1 中的子群 $I_F(D) = \sum_E \theta_E K_2(E)$，其中$E/F$ 遍历有限分裂域。

命题 4.2.3. 对于二维局部域 F 以及任意中心单代数 D/F，映射 $\mathrm{Nrd}_2 \colon I_F(D) \xrightarrow{\sim} K_2(F)$ 是一个同构。

证明。若 $\ell \neq$ 的特征为 F，则 $\mathrm{cd}_\ell F \leq 3$，因此推论 C.5 适用。若特征为 $F = p$，则 $[F\colon F^p] = p^2$，而引理 C.6 处理剩余的 p-分量。由于 $\mathrm{Nrd}_2 \colon I_F(D) \to K_2(F)$ 在每个素数处局部化后都是同构，整映射也必为同构。 □

引理 4.2.4. 设 F 是一个二维局部域，其第一剩余域 k 的特征为 p，且 D/F是次数为 $n = p^q$ 的中心除法代数。假设 指标 $D_{F^{\mathrm{nr}}} = n$,

并令 $P=O_D$和 $\Delta = P/J(P)$。那么分歧指数为 n，剩余域为$\Delta = k^{1/n}$，且 周期 $D_{F^{\mathrm{nr}}} = n$。此外，序列

$$0 \longrightarrow \Delta^{\times}/k^{\times} \longrightarrow K_1(P) \longrightarrow \mathrm{Nrd}_1(P^{\times}) \longrightarrow 0$$

是精确的。对于有限非分歧扩张 $F\prime/F$，映射 $K_1(P) \to K_1(O^{D_{F'}})$ 是单射，映射到所有有限非分歧扩张的直极限也同样如此。

证明。 在每个有限非分歧阶段，这里仍然是一个二维局部域，指标保持为 n；根据每个有限扩张上周期与指标相等的关系[18, 推论5.1、命题 5.2]，周期也保持不变。布劳尔类的一个更小正倍数若在 F_{nr}上消失，则根据其分裂数据的下降，它会在某个有限阶段消失，因此由 $D_{F^{\mathrm{nr}}} = n$可得。若剩余中心具有非平凡的可分部分，或剩余代数具有非交换除代数部分，则一个分裂该部分的有限可分剩余扩张会产生非平凡幂等元。Hensel性将该幂等元提升到序中，这与一般纤维为除代数的事实矛盾。因此， Δ/k 是纯不可分的。由于 $[k\colon k^p] = p$, 该扩张是单扩张；提升一个本原元可得 $f = [\Delta\colon k] \leq n$。类似地，提升值群的一个生成元可得 $e \leq n$ ，其中为分歧指数。无亏维数公式 $n^2 = ef$ 现在给出 $e = f = n$，从而得到 $\Delta = k^{1/n}$ [86]。

令 $i_*\colon K_1(\Delta) \to K_1(P)$ 为支撑映射。对于 $x \in K_2(D)$，设 $c = \partial_D x$。对于可分极大子域 $E \subset D$ 及分裂莫里田等价 μ_E，设 $\rho_E = \mu_E^{-1}\mathrm{res}^{E/F}\colon K_2(D) \to K_2(E)$。于是 $\theta_E \circ \rho_E = n$, $N_{E/F}\circ \rho_E = N_{D/F}$，且 $\mathrm{Nrd}_2\,\theta_E = N_{E/F}$[39, 命题 6.6.1(1)], ，因此 $N_{D/F} = \mathrm{Nrd}_2\,\theta_E\rho_E = n\mathrm{Nrd}_2$。范数 $N_{D/F} = n\mathrm{Nrd}_2$满足 $\partial_F N_{D/F} = N_{\Delta/k}\partial_D$，并且 $N_{\Delta/k}(c) = c^n$ ，因为 Δ/k 是次数为n的纯不可分扩张，所以

$$c^n = (\partial_F\,\mathrm{Nrd}_2\,x)^n.$$

由于 $\Delta^{\times}$ 没有 p-挠，因此可得 $c = \partial_F\,\mathrm{Nrd}_2\,x \in k^{\times}$。包含映射 $k^{\times} \subseteq \partial_D K_2(D)$ 可由定理 4.1.1 以及交换域上的边界映射的满射性推出，因此 $\ker\ i_* = k^{\times}$。由推论 4.1.3，$\mathrm{SK}_1(D) = 0$，故 $\ker[K_1(P) \to \mathrm{Nrd}_1(P^{\times})] = \mathrm{im}\ i_*$，这就证明了所显示的正合序列。

对于剩余域扩张为 k'/k的有限非分歧扩张，新的剩余域为$\Delta' = \Delta k'$。仅由边界比较可得 $\ker\ i'_* \subseteq (k')^{\times}$。如果 $z \in K_1(P)$在基变换后变为零，那么 $\mathrm{Nrd}_1(z) = 1$，因此对于某个 $c \in \Delta^{\times}/k^{\times}$，有 $z = i_*c$ 。基变换后消失意味着 $c \in (k')^{\times}$。纯不可分扩张与可分扩张的线性不交性给出 $\Delta \cap k' = k$，故 $z = 0$。到直极限的映射的单射性由 K-理论的连续性推出。

□

引理 4.2.5。 在前一个引理的情形中，令 P^{nr} 为 P的所有有限非分歧基变换之并，令 π 为 O_F的一个一致化元。存在 j_0，使得对所有 $a \geq 1$ 和 $j \geq j_0$,

$$K_1(P)[p^a] \longrightarrow K_1(P^{\mathrm{nr}}/\pi^j P^{\mathrm{nr}})$$

是单射。因此，如果 $K_2(P;\mathbb{Z}/p^a)$ 中的一个类在此几何截断上消失，那么它的 *Bockstein* 为零。

证明。 我们使用引理 B.3.1 中的单射性，该结论对非分歧扩张一致成立。假设 ind $D_{F^{\mathrm{nr}}} = n$ 表明，每个 D_L 都是次数相同的除代数，并且P_L 是由同一个整格经基变换得到的。因此存在 j_1 ，使得对于每个有限非分歧 L/F和 $j \geq j_1$，映射 Nrd_1 在 $K_1(P_L)$ 中 $1+\pi^j P_L$ 的像上是单射。

在混合特征下，令 $e = v_F(p)$。对于 $j > e/(p-1)$，群 $1+\pi^j\mathcal{O}_L$ 不含任何序为 p 的非平凡单位根。事实上，若 $\zeta \neq 1$ 的序为 p^r，则 $v_L(\zeta - 1) =$

$e/(p^{r-1}(p-1))$，且 e 在非分歧扩张下保持不变。在等特征下，乘法群没有 p-挠。因而，取足够大的 j_0，即可使每个 $K_1(P_L)$ 中的π^j-同余核都不含 p-主挠。此处，对一般线性群的提升表明，该同余核等于 $\mathrm{im}(1+\pi^j P_L \to K_1(P_L))$。

如果 $z \in K_1(P)[p^a]$ 在几何截断上消失，那么它在某个有限阶段L/F就已经消失。于是 z_L 是前一个同余核中的 p- 主挠元素，因此为零。引理 4.2.4 中的非分歧单射性给出 $z=0$。最后一个断言由 Moore 系数序列中 Bockstein 的自然性得出。

□

引理 4.2.6。设 F 是一个二维局部域，其第一剩余域 k 的特征为 p，且 B/F 是一个满足 $n=p^q=$ 次数 $B=$ 指标 $B_{F^{\mathrm{nr}}}$ 的中心除法代数。设 $R=\mathcal{O}_F$、$C=\mathcal{O}_B$、$\Delta=C/J(C)$，并设 π 是 R 的一致化元。设 $Y_C=K(C,\Delta)$ 和$Y_s=K(C/\pi^s C,\Delta)$。对于任意 a、$j\geq 1$，存在 $b\geq j$，使得对于 $\pi_2(Y_b/p^a)$ 中的任意几何上为零的类，该类在 Y_j/p^a 中的像均可由 $\pi_2 Y_C$中的一个整元表示。

证明。我们将 Δ/k 的一个生成元提升到 $w\in C^\times$。由于 $[\Delta:\ k]=\deg B=n$，由引理 4.2.4 可知，$E=F(w)$ 的剩余次数至少为 n。极大子域次数的界给出 $[E:\ F]=n$，且分歧指数为一。有限自由 R-代数 $R[w]$ 的剩余域为 Δ，极大理想为 $\pi R[w]$，因此它是一个离散赋值环，从而 $R[w]=\mathcal{O}_E\subset C$。由于 Matsumoto 符号在 $K_2(\Delta)$ 中的两个元素都提升为这个交换阶的单位，映射 $K_2(C)\to K_2(\Delta)$ 是满射，并且同样的提升在每个截断中都适用。因此

$$\pi_1 Y_C = M, \qquad M=\ker[K_1(C)\to\Delta^\times],$$
$$\pi_1 Y_s = M/\mathcal{U}_s(C), \qquad \mathcal{U}_s(C)=\mathrm{im}(1+\pi^s C\to K_1(C)).$$

根据推论 B.4.2，对充分深的 $r\geq j$，$\pi_2 Y_r$ 在 $\pi_2 Y_j$ 中的像等于 $\pi_2 Y_C$ 的像。增大 r，使得对于引理 4.2.5 中的整数 j_0，有 $r\geq j_0$；并且根据引理 B.3.1，约化范数在$\mathcal{U}_r(C)$ 上是单射。

对于充分深的 b，将给定类的 Bockstein 写作 $\beta_b\in(M/\mathrm{U}_b(C))[p^a]$，并将其提升到 $\beta\in M$。于是 $p^a\beta\in \mathrm{U}_b(C)$。令 $t=\mathrm{Nrd}_1(\beta)$，则 $t^{p^a}\in 1+\pi^b R$。在混合特征下，若 b 充分大，则由亨泽尔引理可得 t^{p^a} 在 $1+\pi^{r+c}R$中的一个 p^a 次方根 η，其中 c满足 $1+\pi^{r+c}R\subset \mathrm{Nrd}_1(\mathrm{U}_r(C))$。在等特征下，$v_F(t^{p^a}-1)=p^a v_F(t-1)$，因此 $b\geq p^a(r+c)$使我们可以取 $\eta=t\in 1+\pi^{r+c}R$。我们选取 $\gamma\in\mathrm{U}_r(C)$，使得 $\mathrm{Nrd}_1(\gamma)=\eta$。元素 $p^a(\beta-\gamma)$ 属于 $\mathrm{U}_r(C)$，且其约化范数为一，因此它为零。于是$\beta_0=\beta-\gamma\in M[p^a]$ 表示深度为 r处 β_b 的像。

由于给定的 Moore类在几何上为零，β_0 在深度为 r 的几何截断上消失。引理 4.2.5 给出 $\beta_0=0$。因此，给定类在 Y_r/p^a 中的像的 Bockstein 为零，并且来自某个 $u_r\in\pi_2 Y_r$。根据通过推论 B.4.2 对 r 的选择，u_r 在 Y_j 中的像由 $\pi_2 Y_C$中的一个元素表示。

□

设 $F_\prime/F$是二维局部域 F的有限伽罗瓦非分歧扩张，设D/F是一个中心除法代数，并设 D' 是属于 $D_{F'}$中的布劳尔类的除代数。置 $R=\mathcal{O}_F$、$R'=\mathcal{O}_{F'}$、$P=\mathcal{O}_D$和 $C=\mathcal{O}_{D'}$。序 $P\otimes_R R'$是遗传的。事实上，有限 étale 基变换是可分的，因此每个经过基变换的模都是再次对其进行限制并诱导后所得模的一个直和项；投射维数至多为一这一界保持不变。在通过 Morita 等价移除矩形对角块之后，遗传序的格链分类因此将 $P\otimes_R R'$ 识别为一个带有角 C [69, Chapter 9]的 Iwahori 阶。

引理 4.2.7. 设 F 是一个二维局部域，其第一剩余域 k 的特征为 p，且 D/F 是一个中心除法代数。设 $R=\mathcal{O}_F$、$P=\mathcal{O}_D$，并设 π 是一个

R的一个一致化元。设 $a \geq 1$。设 $F\prime/F$是一个有限伽罗瓦非分歧扩张，令 $R' = O_{F'}$，并设 k'/k 是剩余域扩张。设 D' 是布劳尔类$D_{F'}$中的除代数，并令 $C = O_{D'}$。通过 *Morita* 等价消去矩形对角块后，我们将 $P \otimes_R R'$ 写成一个角为 C 的 *Iwahori* 阶 H 。令

$$\mathcal{X}_s = K(P/\pi^s P, P/J(P))/p^a, \qquad \mathcal{Y}_s = K(C/\pi^s C, C/J(C))/p^a.$$

如引理*B.1.3*所述，也可将它们视为有限*étale*位点上的层。设在此固定系数 p^a 下，类 $y_s \in \pi_2 X_s(k)$ 对所有 s 都相容，且在几何茎处的像为零。对于每个 j 及每个给定的 $b_0 \geq j$，存在 $b \geq b_0$ 和一个几何上为零的 $z_b \in \pi_2 Y_b(k')$，使得 y_j 是 z_b 从角处转移所得元素在深度 j 处的像。

证明。令 $V_s = \pi_3(\mathcal{X}_s)_{\bar{k}}$ 和 $W_s = \pi_3(\mathcal{Y}_s)_{\bar{k}}$。它们分别是 G_k 和 $G_{k'}$ 的离散模。角归纳与有限 étale 范数给出一个系数映射

$$c_{b,j}\colon \operatorname{Ind}_{G_{k'}}^{G_k} W_b \longrightarrow V_j.$$

$^{-}$在几何茎处，它是由嵌入 k'，$\to k$ 所标记的角映射之和。将其像记为 $L_{b,\ j} \subset V_j$。

根据引理 B.1.2，相对角余纤维上的过渡映射可经由定义在 k' 上的 Koszul代数进行分解，从而同伦于零，因此这些零同伦与 $G_{k'}$ 相容。对于固定的 $b \geq b_0$，我们因而可以取足够深的 r，使得

$$V_r|_{G_{k'}} \longrightarrow W_b \longrightarrow V_j|_{G_{k'}}$$

等于 $V_r \to V_j$。事实上，如果从 $\mathcal{X}_r$ 到 $\mathcal{X}_b$ 的角余纤维的复合映射是零同伦的，就将它提升到 $\mathcal{Y}_b$，然后经过深度 j。因此，$\operatorname{im}(V_r \to V_j) \subseteq L_{b,\ j}$。

由引理B.1.3，y_r 来自某个 $h_r \in H^1(k,\ V_r)$。h_r 在 $H^1(k,\ V_j)$ 中的像来自 $H^1(k,\ L_{b,\ j})$。根据定义，映射 $\operatorname{Ind} W_b \to L_{b,\ j}$ 是满射；其核是一个离散的 p-primary 模，因此 $H^2(k,\ \ker(\operatorname{Ind} W_b \to L_{b,\ j})) = 0$。因此，

$$H^1(k, \operatorname{Ind}_{G_{k'}}^{G_k} W_b) \twoheadrightarrow H^1(k, L_{b,j}).$$

由 Shapiro引理，我们有 $H^1(k,\ \operatorname{Ind}_{G_{k'}}^{G_k} W_b) \simeq H^1(k',\ W_b)$，这通过引理B.1.3的边缘映射给出一个几何上为零的 $z_b \in \pi_2 \mathcal{Y}_b(k')$。在几何茎处，转移是对前序嵌入求和。因此，与下降边缘映射的相容性表明，z_b 在深度 j 处的转移等于 y_j。

□

引理 4.2.8。设 F 和 D 如引理 *4.2.7* 中所述。设 F'/F 是一个有限伽罗瓦非分歧扩张，且 指标 $D_{F'} = n$，其中 $n =$指标 $D_{F^{\text{非分歧}}}$，并设 D'是 $D_{F'}$的布劳尔类中的除代数。那么

$$\ker[\mathrm{SK}_2(D) \longrightarrow \mathrm{SK}_2(D')] \ \subseteq\ \operatorname{cor}_{F'/F} \mathrm{SK}_2(D').$$

我们不假设 $[F\prime:\ F]$ 与 p互素。

证明。令 $R = \mathcal{O}_F$、$P = \mathcal{O}_D$、$C = \mathcal{O}_{D'}$ 和 $R' = \mathcal{O}_{F'}$。如引理 4.2.7 之前所述，通过 Morita 等价去除矩形对角块后，$P \otimes_R R'$ 是一个 Iwahori 阶，其角为 C。ξ 中属于 $\ker[\mathrm{SK}_2(D) \to \mathrm{SK}_2(D')]$ 的元素 p是 p -主挠元，因为 SK_2 的互素于 $\ell \neq p$ 的部分消失：对每个素数 $\ell \neq p$，取一个次数与 ℓ 互素的有限可分扩张，将 $[D]$ 的其他主分量分裂；限制与转移可检测 ℓ-主部分，再对表示该结果的除代数应用命题 4.1.9(2)。

剩余代数 $P/J(P)$ 是一个除代数，其中心 l 是非阿基米德局部域，因此定理 1.1.1 给出约化范数同构 $K_1(P/J(P)) \simeq l^\times$ 和 $K_2(P/J(P)) \simeq K_2(l)$。$\xi$ 的局部化边界为零，因为 $l^\times$ 没有 p-挠，因此 ξ 可提升至 $K_2(P)$。支集像是 p-可整除的，因为 $K_2(l)$ 是唯一 p-可整除的 [27]。因此，对该提升加上一个支集类进行调整，可使调整后的提升的某个 p 次幂倍数为零，故可将整提升本身选为 p-主挠元。由于剩余 K_2 没有 p-挠，调整后的提升约化为零，因此我们选取 ξ 的相对整提升 y。令 R 的一个一致化元为 π，并令 $\Delta' = C/J(C)$。令 y' 为 y 在基变换及角等价之后于 $K_2(C)$ 中的像（引理 B.1.2）。由于 $\xi|_{D'} = 0$，局部化序列给出 $y' \in i_* K_2(\Delta')$，且对每个进一步的有限非分歧基变换，同样结论仍成立。Δ' 的每个有限可分扩张 Δ'' 都是特征为 p 且满足 $[\Delta'' : \Delta''^{p}] = p$ 的非阿基米德局部域，因此 Geisser–Levine 给出 $K_2(\Delta''; \mathbb{Z}/p^a) = K_3(\Delta''; \mathbb{Z}/p^a) = 0$。第一个消失结果消去了闭支集类在 $K_2(C; \mathbb{Z}/p^a)$ 中的像，第二个则使相对群的 π_2 嵌入绝对群，因此相对 Moore 类也消失。于是，对每个固定的 a，相容族在几何茎处的像为零，正如引理 4.2.7 所要求的。

固定一个有限可分裂域 L_0/F，并选择一个深度 j，使得引理 B.2.1 对 L_0 成立。我们选择 p^a 湮灭 $K_2(P/\pi^j P, P/J(P))$，这是可能的，因为该相对群是指数有界的 p-primary 群（引理 B.1.1）。令 b_0 为一个深度，使得引理 4.2.6 可应用于角 C，并应用引理 4.2.7。该引理之所以适用，是因为 $\deg D' = n$ 是 p 的幂：F^{nr} 的剩余域是可分闭的，且对于 $\ell \neq p$，$\mathrm{cd}_\ell(F^{\mathrm{nr}}) \leq 1$，因此 $\mathrm{Br}(F^{\mathrm{nr}})$ 是 p-primary 的；此外，D' 具有最小非分歧指标 n，因为 $(F')^{\mathrm{nr}} = F^{\mathrm{nr}}$。在深度 j 处，几何上为零的类 z_b 的像由一个整 $z \in K_2(C, C/J(C))$ 表示。因此，在 $\pi_2 \mathrm{X}_j$ 中，y 与从该角转移而来的 z 相等，其中 X_j 如引理 4.2.7 中所述。由于 p^a 湮灭 $K_2(P/\pi^j P, P/J(P))$，Moore 序列将这个整群单射到 $\pi_2 \mathrm{X}_j$ 中，所以该等式在深度 j 处对整群成立。由引理 B.2.1，我们有 $\xi - \mathrm{cor}_{F'/F}(z|_{D'}) \in I_F(D)$。由命题 4.2.3，$K_2(D') = I_{F'}(D') \oplus \mathrm{SK}_2(D')$。写作 $z|_{D'} = z_I + z_0$，其中 $z_I \in I_{F'}(D')$ 且 $z_0 \in \mathrm{SK}_2(D')$。由转移的传递性，$\mathrm{cor}_{F'/F} I_{F'}(D') \subseteq I_F(D)$，因此 $\xi - \mathrm{cor}_{F'/F}(z_0) \in I_F(D)$。由于 $\mathrm{Nrd}_2 \circ \mathrm{cor}_{F'/F} = N_{F'/F} \circ \mathrm{Nrd}_2$，同一元素属于 $\mathrm{SK}_2(D)$。由 Nrd_2 在 $I_F(D)$ 上的单射性（命题 4.2.3），$I_F(D) \cap \mathrm{SK}_2(D) = 0$，于是得到 $\xi = \mathrm{cor}_{F'/F}(z_0)$，从而

$$\xi \in \mathrm{cor}_{F'/F} \mathrm{SK}_2(D').$$

□

根据引理 4.2.8，只需对实现最小非分歧指标 $n = p^q$ 的除代数 q 进行归纳。相应地替换除代数，并固定 $R = \mathcal{O}_F$、$P = \mathcal{O}_D$、F 的一致化元 π，以及 $J_D = J(P)$。引理 4.2.4 给出了最大非分歧域上的分歧指数 n、剩余域 $\Delta = k^{1/n}$ 和周期 n。

两个降低指标的循环覆盖

为了对最小非分歧指标进行归纳，我们在适当扩张基底之后，构造一个次数为 p、包含于 D 中的循环扩张 T/F，使其中心化子的最小非分歧指标更小。根据 T/F 的分歧情况，这类扩张分为两种。

引理 4.2.9。设 k 是特征为 p 的非阿基米德局部域，F 是第一剩余域为 k 的完备离散赋值域，D/F 是一个中心除法代数，且其次数 $D =$ 指标 $D_{F^{\mathrm{nr}}} = n = p^q > 1$。令 $m = n/p$，$P = \mathcal{O}_D$ 和 $\Delta = P/J(P)$。如有必要，先加入 μ_p，再取一个有限伽罗瓦非分歧扩张，并将所得的

域和序重新记为 F, k, D, P, Δ和 π，则存在一个次数为 p的循环扩张 T/F、$\mathrm{Gal}(T/F)$ 的一个生成元 σ以及 $x \in D^\times$，满足以下性质。

1. $T \subset D$，且由 x 共轭诱导出 σ 于 T。*2.* $B = Z_D(T)$ 是一个除代数，$\deg B = \mathrm{ind}\, B_{T^{\mathrm{nr}}} = m$；其分歧指数为 m，其剩余域 Δ_0 是 T的剩余域的 m次单位根域，并且 $SK_1(B) = 0$。*3.* $m[D] = (T/F, \sigma, \mathrm{Nrd}_{B/T}, 1(x^p))$，其中 σ是选定的循环标准形中的生成元。*4.* 要么 T/F 全分歧，且 x 是一个单位，其剩余在 k上生成 Δ （第一类型，或齐次单位型）；要么 T/F 的分歧指数为一，且纯不可分剩余次数为 p，而 x 是 D 的一个一致化元（第二类型，或齐次一致化元型）。*5.* 对于 $C = O_B$，有 $P = \bigoplus_{j=0}^{p-1} Cx^j$。

证明。 添加 μ_p 是一个次数与 p互素的扩张，因此保持 p主部分的指标，而限制到该扩张可检测 SK_2的 p主部分。它也保持最小非分歧指标，因为添加后得到的最大非分歧扩张为 $F(\mu_p)F^{\mathrm{nr}}$，其在 F^{nr}上的次数与 p 互素。有限伽罗瓦非分歧阶段不假设具有素数次数；我们通过引理 4.2.8 中经由转移的包含映射从该阶段返回。模去被最大非分歧扩张消去的类后，顶层分量 $m[D]$ 可用以下某种形式表示，其中 T/F 是次数为 p的循环扩张：

1. T/F 是全分歧的，且系数是一个单位，其剩余不是 p次幂 .
2. T/F 的分歧指数为一，且纯不可分剩余次数为 p，系数是一致化元。

在等特征下，Artin–Schreier–Cartier 表示中的首项极点阶给出这两种类型；参见 [41, §4, 引理 5，第 338–339] 页。在混合特征下，深度为零以及与 p 互素的正深度对应第一类型，而可被 p 整除的正深度对应第二类型 [41, §2，命题 2(i)–(iii)，第 321–322 页，以及 §4，第 339] 页；在深度为零时，使用形式为 $\{\pi, f^{-1}\}$ 的加藤符号 $\{f, \pi\}$，从而得到全分歧的库默尔域 $T = F(\pi^{1/p})$。事实上，在中间深度 s处，写作 $z^p = 1 + c$，其中$v_F(c) = s < pv_F(p)/(p-1)$。若 $p \nmid s$，则 $v(z-1) = s/p$。若 $s = ph$，则 $Y = (z-1)/\pi^h$满足 $Y^p = c/\pi^s$：中间的二项式系数可被 p整除，相应各项因 $v_F(p) - (p-1)h > 0$而模 π 消失。在第二类型中，$c/\pi^s \notin k^p$，因此 Y是一个纯不可分剩余根。在终端深度 $pv_F(p)/(p-1)$ 处，我们从一个 p次根中减去 1 再除以 $\zeta_p - 1$，得到一个可分 Artin–Schreier 方程，因此该层被非分歧地消去。

对于这两种类型 $T_{\mathrm{nr}} = TF_{\mathrm{nr}}$，由于 T/F 的剩余域扩张是平凡的或纯不可分的，因此可分剩余扩张来自 k。T/F 的这两种类型都没有非平凡的非分歧子扩张，所以 $[T_{\mathrm{nr}} : F^{\mathrm{nr}}] = p$。去掉在最大非分歧扩张上消失的差之后，$m[D]$ 是 T 的一个循环类，因此它在 T_{nr} 以及某个有限阶段 TF' 上消失。上界为

$$\mathrm{ind}\, D_{T^{\mathrm{nr}}} \le \mathrm{ind}\, D_{TF'} = \mathrm{per}\, D_{TF'} \le m,$$

其中 $F\prime/F$是一个有限非分歧扩张，满足 $m[D]$在 TF'上分裂；等式在二维局部域 TF' [18, 上成立（推论5.1，命题 5.2]）。下界

指标 ind $D_T$nr $\geq$per $D_T$nr $\geq m$由 per $D_F$nr $= n$和 cor$_T$nr$_{/F}$nr res$_T$nr$_{/F^{\mathrm{nr}}} = p$在 Br(Fnr) 上推出。因此，限制到 T后，最小非分歧指标为 m。由于 Tnr $= TF^{\mathrm{nr}}$，引理 4.2.8 使我们能够进一步取 F 的一个有限非分歧阶段，在该阶段 ind $D_T = m$与标准形的差均消失。 D 的指标仍为 n；又由于 ind D/ind $D_T = n/m = [T\colon F]$，域 T嵌入 D。于是 $B = Z_D(T)$ 是一个最小非分歧指标为 m 的除代数；对 B/T 应用引理 4.2.4 可知， B 的分歧指数为 m ，其剩余域等于 m 次单位根所构成的域（该域取自 T 的剩余域）。我们有 per $B =$ ind B，而推论 4.1.3 给出 SK$_1(B) = 0$。

对于 Gal(T/F) 的生成元 σ 以及通过共轭实现 σ 的 $x \in D^\times$，

$$m[D] = (T/F, \sigma, \mathrm{Nrd}_{B/T,1}(x^p)).$$

这个单位元是在对应于 $T^{\otimes_F m} \to T$ 的 $D^{\otimes_F m}$ 角中得到的。代数$B^{\otimes_T m}$ 是分裂的。对于 GL$_m$ 的标准表示 V，标量在 $V^{\otimes m} \otimes$det$(V)^{-1}$ 上的作用是平凡的，因此 $g \mapsto g^{\otimes m}/\det g$ 是 PGL$_m$ 的一个表示，并可函子性地作用于余循环和 σ-半线性作用；因此，在该角上的半线性作用中的进位为 $(x^p)^{\otimes m}/\mathrm{Nrd}_{B/T,\,1}(x^p)$。若半线性作用是 $P\sigma$，将角生成元 x' 替换为 $P^{-1}x'$ 会使其变为逐分量的 σ，剩余系数为 $(P^{-1}x')^p = \mathrm{Nrd}_{B/T,\,1}(x^p)$。

在第一类型中，通过 $B^\times$ 进行修正，使 x 成为单位。全分歧扩张中单位的范数的留数是 p 次幂，而 $\mathrm{Nrd}_{B/T,1}(x^p) = \bar{x}^{pm} = \bar{x}^n$ ，因为 B 的剩余域$k^{1/m}$ 是 k 上次数为 m 的纯不可分扩张。因此 $\bar{x}^n \notin k^p$，且 $\bar{x}$ 生成 Δ。在第二类型中，$\mathrm{Nrd}_{B/T,1}(x^p)/\pi$ 是来自 T/F 的范数，其赋值属于 $p\mathbb{Z}$，并且$v_F(\mathrm{Nrd}_{B/T,1}(x^p)) = v_D(x)$，其中将 D 的一致化元的赋值规范化为 1；因此$v_D(x) \equiv 1$ 模 p。由于 $v_D(B^\times) = p\mathbb{Z}$，我们可以取 x 为一致化元。令 $C = \mathsf{O}_B$ 和 $\Delta_0 = C/J(C)$。在两种类型中， $P = \bigoplus_{j=0}^{p-1} Cx^j$。在第一类型中，用 B 的一个元素消去系数的最小赋值后，1、$\bar{x}$、.....、$\bar{x}^{p-1}$ 在 Δ_0 上的独立性给出该分解；在第二类型中，各项的赋值模 p互不相同。

□

我们转向引理 4.2.9 的扩张，再次将所得的域和序记为 F,k, D, P, Δ和 π，并按照该引理固定 T, σ, x, B, C和 Δ_0。对最小非分歧指标作归纳，得到 SK$_2(B) = 0$。结合命题 4.2.3 中的同构 $\mathrm{Nrd}_2|_{I_T(B)}\colon I_T(B) \to K_2(T)$，可得 $K_2(B) = I_T(B)$。

零次数相对迹

引理 4.2.9 的循环扩张使 P 成为一个 $\mathbb{Z}/p$-分次序。在本小小节中，我们证明，从 THH(P) 的总次数为零部分的 p-完备化拓扑循环同调到 TC(P)$^\wedge_p$ 的映射在 π_2上是满射，然后去掉剩余贡献。令 $G = \mathbb{Z}/p$。对于 G-分次环 S，其覆盖 $\mathcal{Q}(S)$ 的顶点为 $i \in G$，态射为 S_{j-i}，并带有同时平移顶点的严格G-作用。我们将 K-理论记为 $K(\mathcal{Q}(S))$，它对应于完美右$\mathcal{Q}(S)$-模范畴。我们用 $\mathbb{T}$表示圆群。

引理 4.2.10。 设 A 是一个具有 $pA = 0$的有限阿贝尔群，且 $S = \bigoplus_{g\in A} S_g$ 是一个A分次离散环。设

$$X = \mathrm{THH}(S) = \bigoplus_{g\in A} X_g$$

是循环条构造的总次数分解。该分解保留了 $\mathbb{T}$-作用，而 X_0 是一个 p-循环对象。我们称$\mathrm{TC}(X_0; p)^\wedge_p$ 为S的零次TC ； 我们不声称它是$\mathrm{TC}(S)^\wedge_p$的直和项。采用这一记号，存在一个纤维

序列

$$\mathrm{TC}(X_0;p)^\wedge_p \longrightarrow \mathrm{TC}(S)^\wedge_p \longrightarrow \left(\bigoplus_{g\neq 0}\Sigma(X_g)_{h\mathbb{T}}\right)^\wedge_p.$$

若对所有 $g\neq 0$， $\pi_1(((X_g)_{h\mathbb{T}})^\wedge_p)=0$，则第一映射在二次次数上是满射 .

对于顶点为 A 、从 i 到 j 的态射 S_{j-i} 的分次覆盖 $Q_A(S)$，存在一个自然等价

$$(\mathrm{TC}(\mathcal{Q}_A(S);p)_{hA})^\wedge_p \simeq \mathrm{TC}(X_0;p)^\wedge_p.$$

在左侧， A 通过顶点平移作用于 $Q_A(S)$ 。对于分次环或覆盖之间映射的相对纤维，同样的断言也成立。

证明。 循环条构造中的总次数在由乘法给出的面映射、由单位给出的退化映射以及循环置换下保持不变。来自 p 重 Tate 对角映射的圆分弗罗贝尼乌斯将一个总次数为 g 的单形恰好重复 p 次，并将其映至次数 $pg=0$。因此， X_0 是一个子 p-圆分谱，而余纤维 $Q=X/X_0$ 的底层谱为 $\bigoplus_{g\neq 0}X_g$，其弗罗贝尼乌斯映射为零。

由于 Q 的弗罗贝尼乌斯映射为零，Nikolaus–Scholze 公式表明，对于有下界的 p-圆分谱，$\mathrm{TC}(Q;p)^\wedge_p$ 等于典范映射 $(Q^{h\mathbb{T}})^\wedge_p\to(Q^{t\mathbb{T}})^\wedge_p$ 的纤维。根据圆群范数纤维序列，我们有 $\mathrm{TC}(Q;p)^\wedge_p\simeq(\Sigma Q_{h\mathbb{T}})^\wedge_p$。函子 $\mathrm{TC}(-;p)$ 是稳定范畴之间的正合函子；将其作用于 $X_0\to X\to Q$ 即得所述序列。由于圆群的同伦轨道与有限直和 $\bigoplus_{g\neq 0}X_g$ 交换，我们有 $Q_{h\mathbb{T}}\simeq\bigoplus_{g\neq 0}(X_g)_{h\mathbb{T}}$。次数二的断言由长正合列得出，参见命题 II.1.9、引理 II.4.2]。

在每个单纯形次数中，循环 bar 构造里总次数为零的单纯形的提升，构成一个以起始顶点为指标的自由 A-集。对起始顶点的平移取同伦轨道，便通过遗忘顶点的映射得到 $\mathrm{THH}(\mathcal{Q}_A(S))_{hA}\simeq X_0$ 。对于每个素数 q， q 重 Tate 对角映射从同一起始顶点重复一个循环 q 次，并且与顶点平移交换，因此 A作用和该映射构成圆分 [62, 推论 II.1.7, §III.2]。由于从圆分谱到谱的遗忘函子保余极限，在每个循环次数中对自由 A-轨道的计算给出了圆分谱的一个等价。绝对 THH 是连通的，而 TC/p 保连通圆分谱的所有余极限 [21, 定理 2.7], 因此可以将其应用于 A-bar 构造。利用系数正合序列作归纳，可得 Moore 系数下的相同断言 p^a；再对 a 取逆极限，便得到 p-完备范畴中的上述等价。相对版本由两个绝对版本推出，因为有限纤维与同伦轨道可交换，且 TC 是正合的。

□

引理 4.2.11. 设 R 是一个完备离散赋值环，其一致化元为 π ，剩余域 k 的特征为 p。设 $\{\bar{u}_i\}$ 是 k的一组有限 p-基，并选取提升 $u_i\in R$。在混合特征情形下，$\Omega^1_{R/\mathbb{Z}}\otimes_R R/p^aR$ 由 $d\pi$ 和每个 $a\geq 1$对应的 du_i 生成。此外，对于 $f\in\pi^tR$,

$$df\in\pi^{t-1}R\,d\pi+\sum_i\pi^tR\,du_i\qquad(\mathrm{mod}\ p^a\Omega^1_{R/\mathbb{Z}}).$$

在等特征情形下，选取一个系数域，并取其中的 u_i 。于是， u_i 与 π 构成环 R的一组 p-基，而$\Omega^1_{R/\mathbb{F}_p}$ 以 $d\pi$ 和 du_i为自由基。

证明。 在混合特征下，令 $e=v_R(p)$ 并选取 $s\geq a$ 和 $M\geq ea+1$。通过逐位提升剩余域的 p^s-基展开，我们将每个 $r\in R$ 表示为

$$r=\sum_{t=0}^{M-1}\pi^t\sum_{0\leq I_i<p^s}b_{t,I}^{p^s}u^I+\pi^Mc\qquad(b_{t,I},c\in R).$$

对于将 R 映射到由 p^a 湮灭的模中的任意导子 d，有 $d(b^{p^s}) = 0$ 以及 $d(\pi^M c) = 0$。因此，dr 属于由所述有限个微分生成的子模。对于 $f = \pi^t r$，莱布尼茨法则给出 $df = t\pi^{t-1} r\, d\pi + \pi^t\, dr$，这就证明了深度断言。该论证适用于万有微分，因此不需要对 R 作有限型假设。

在等特征情形下，写作 $R = k[[\pi]]$。利用系数的 p-基展开，并按照幂级数指数模 p的余数进行分解，我们得到

$$R = \bigoplus_{0 \le I_i < p,\ 0 \le j < p} R^p u^I \pi^j.$$

Th这正是环 p-基的定义，从而证明了关于微分的断言 ls. □

引理 4.2.12。 设 R 是一个离散赋值环，一致化元为 ϖ，且设 L、L' 是有限自由 R-模。若 $f\colon\ L \to L'$ 是单射，则存在 $c \ge 0$，使得对所有 $j \ge 0$ 及所有$s \ge j + c$,

$$\ker(f \bmod \varpi^s) \longrightarrow L/\varpi^j L$$

为零。

证明。 我们在分式域上的左逆中消去分母，得到 $g\colon\ L' \to L$和 $c \ge 0$，其中 $gf = \varpi^c \mathrm{id}_L$。若 $a \in L$ 满足 $f(a) \in \varpi^s L'$，则 $\varpi^c a \in \varpi^s L$，从而$a \in \varpi^{s-c} L \subseteq \varpi^j L$。

□

引理 4.2.13。 对于上述构造的 $\mathbb{Z}/p$-分次极大阶的每个非零次数 g，在混合特征下有

$$\{HC_1(P/p^a P \,/\, \mathbb{Z}/p^a)_g\}_{a \ge 1} = 0 \quad \textit{in the pro category}$$

而在等特征下，$HC_1\left(P/\mathbb{F}_p\right)_g = 0$。

证明。 我们通过 $v_D(\pi) = n$ 将中心上的赋值归一化。环 $\operatorname{gr} D$ 是交换的。事实上，由于 Δ/k 是纯不可分的，齐次元素的共轭作用在 Δ 上诱导出恒等 k-自同构。赋值群的商群是循环的，并且每个齐次分量都是 Δ 与某个一致化元的幂之积；这些元素彼此交换。我们计算 $\Omega^1(P)_\natural = \Omega^1(P)/[P, \Omega^1(P)]$ 中的循环一形式，然后减去实际的恰当微分。边界为 $b(y\, dz) = [y, z]$。

我们先讨论齐次单位型。设 η 为一个零次素元，x 为一个一次单位。剩余基与赋值群基给出 R-基 $\eta^i x^j$ $(0 \le i,\ j < n)$ of$P$。我们选择中心 p-基元素的提升 u 作为 x 的最小多项式的常数项。于是

$$\varphi_\eta(\eta) = \eta^n + \pi \sum_{i<n} b_i \eta^i = 0, \quad b_0 \in R^\times, \qquad \varphi_x(x) = x^n + \sum_{0<j<n,\, p|j} c_j x^j - u = 0, \quad c_j \in \pi R.$$

只有可被 p 整除的指数才会出现在 φ_x中；下文的齐次一致化元型中也是如此：若 f是 x^p 在 F上的最小多项式，则 $f(X^p)$消去 x，且其次数为$[F(x)\colon\ F]$，因此它是 x的最小多项式。引理 4.2.11 将有限截断上的每个系数微分都表示为 $d\pi$，du的形式。

对于非零次数的 y，我们应用 $y\, d\varphi_\eta(\eta) = 0$。令 $\psi(y)$为循环置换后 $d\eta$ 的系数。于是 $[\psi(y)\ \eta] = [y, \varphi_\eta(\eta)] = 0$。域 $F(\eta)$是零次部分中的自中心化极大子域，因此 $\psi(y) = 0$。因此，该关系只涉及 $d\pi$ 和 du。$d\pi$ 的系数算子是乘以单位 $\sum_i b_i \eta^i$ 再加上 π 倍积分算子，故可逆。du 的系数可被 π整除。因此，深度为r 的 $d\pi$ 系数可以替换为深度至少为 $r + n$的 du 系数。

接下来，我们使用 $y\,d\varphi_x(x) = 0$，并如上所述消去 $d\pi$。du 的系数算子是-1 加上 π 倍积分算子，故可逆。对于 $dx\,x^{-1}$的系数，伴随分次环上的每个循环和都是乘以相应指数 j。每个这样的 j 都可被 p整除，因此该系数比输入至少深一层。因此，深度为 r 的 du 系数可以替换为深度至少为 $r+1$的 $dx\,x^{-1}$ 系数；对于 $d\pi$，增益至少为 $n+1$。

我们取 $h = f\eta^i x^j$ 的恰当微分，其中 $f \in \pi^t R$ 和 $j \equiv g$ （模 p）。利用上述两个关系消去标量微分后，$dx\,x^{-1}$ 的系数模深度 v_D 为 jh （h）$+1$。事实上，df 的 $d\pi$ 部分深度至多降低 n，但其替代项的深度增加了 $n+1$。du 部分的深度不变，并增加一级。d（x^j）中的循环和，在交换相关分次环中等于乘以 j。由于 $j \equiv g \neq 0$ 是单位，逐深度减去这样的实际恰当微分，就能消去 $dx\,x^{-1}$ 系数。模 p^a 后，这一过程会在有限步后终止，留下一个形式 $z\,d\eta$。

我们对齐次一致化元型采用相同的步骤。设 w 为零次单位，x 为一次一致化元。此时基为 $w^i x^j$ （$0 \le i,\ j < n$），关系为

$$\varphi_w(w) = w^n + \sum_{i<n} c_i w^i - u = 0, \quad c_i \in \pi R, \qquad \varphi_x(x) = x^n + \pi \sum_{i<m} b_i x^{pi} = 0, \quad b_0 \in R^\times.$$

对于一个次数非零的输入 y，$y\,d\varphi_w(w)$ 的 dw 系数与 w 对易。由于 $F(w)$ 在零次部分是一个自中心化极大子域，该系数在整数意义下也为零。另一方面，$y\,d\varphi_x(x)$ 的 $d\pi$ 系数是一个单位乘法再加上 π 倍的积分算子。$y\,d\varphi_x(x)$ 的 dx 系数使 y 的深度至少增加 n。在最高次项中，x^{n-1} 贡献 $n-1$；长度为 n、可被 p 整除的循环和则额外贡献一步。较低次项也满足同样的界，因为它们带有显式因子 π，且指数为 pi 时的循环和也如此。

因此，这两个关系同时消去 $d\pi$，du，将深度为 r 的标量微分系数变为深度至少为 $r+n$ 的 dx 系数。$h = f w^i x^j$ 的恰当微分的首项 dx 系数为 jhx^{-1}。df 的 $d\pi$ 部分至多损失 n，因此消去后，其深度至少比首项深度 $v_D(h) - 1$ 深一步。同样，$j \equiv g \neq 0$允许通过恰当微分依次消去 dx，留下 $z\,dw$。

Thu对于两种类型，每个有限截断上的 HC_1 类分别表示为

$$z\,d\eta, \quad [z,\eta] = 0 \pmod{p^a P}; \qquad z\,dw, \quad [z,w] = 0 \pmod{p^a P}.$$

系数 z属于有限自由模 $P_g/p^a P_g$。映射 $[\cdot\ \eta]$ 和 $[\cdot\ w]$ 在 P_g 上是单射的，因为自中心化子域位于零次。根据引理 4.2.12，对于任意固定的截断，这些核在足够深的阶段于该截断中的像为零。因此，HC_1 群的逆系统是本质上为零的。

在等特征情形下，$\Omega^1_{R/\mathbb{F}_p}$ 是有限自由模，循环 1-形式构成一个有限生成的、因而完备的 R-模。上面依次选取的原函数的深度趋于无穷，因此它们收敛。微分的连续性使我们能够将它们的和作为一个恰当微分减去。剩余边界的整数单射性使 HC_1 自身为零。

□

该引理提供了与绝对零次 TC 进行比较所需的消失结果。

引理 4.2.14。对于引理 *4.2.9* 的 $\mathbb{Z}/p$分次极大阶 P，取 $X = \mathrm{THH}(P)$，映射

$$\mathrm{TC}(X_0; p)^\wedge_p \longrightarrow \mathrm{TC}(P)^\wedge_p$$

引理 *4.2.10* 在 π_2 上是满射。

证明。对于每个 $g \neq 0$，我们计算圆轨道 $Z_g = \mathrm{THH}(P)^{g})_{h\mathbb{T}}$ 的完备化。在混合特征下， P 在 $\mathbb{Z}$ 上是平坦的，而低次线性化和基变换给出

$$\pi_1(Z_g/p^a) \simeq HC_1(P/p^aP \,/\, \mathbb{Z}/p^a)_g.$$

这里我们使用 $\mathrm{THH}(P) \to HH(P/\mathbb{Z})$ 的圆轨道的一次比较映射。在循环条构造的单纯形次数 s 项中，从拓扑张量积到 $\mathbb{Z}$ 上的张量积的映射在 π_0 和 π_1 上是同构：由于 P 是 $\mathbb{Z}$-平坦的，经典项集中在零次，而拓扑项具有 $\pi_0 = P^{\otimes(s+1)}$ 和 $\pi_1 = 0$。这种低次比较在 Moore 约化、几何实现和圆轨道下保持不变，而模 p^a 的经典约化是 P/p^aP 的循环复形。因此，引理 4.2.13 表明左侧的逆系统是 pro-zero 的。在等特征情形下，$\mathrm{THH}(\mathbb{F}_p) \to H\mathbb{F}_p$ 的纤维位于至少二次的次数上，因此根据引理 4.2.13， $\pi_1 Z_g \simeq HC_1(P/\mathbb{F}_p)_g = 0$ 。Moore 序列将 $\pi_1(Z_g/p^a) = \pi_0 Z_g[p^a]$ 上的过渡映射识别为乘以 p。由于 $p\pi_0 Z_g = 0$，这些过渡映射为零，因此此时的逆系统同样是 pro-zero 的。

无论哪种情况，逆系统 $\{\pi_1 Z_g/p^a\}_a$ 的过渡映射都是满射，且嵌入前一个原零系统中，因此每一项都是零。于是 $\pi_1 Z_g$ 可被 p整除，且映射$\pi_1 Z_g[p^{a+1}] \xrightarrow{p} \pi_1 Z_g[p^a]$ 都是满射。Moore 正合序列的两个外项

$$0 \to \pi_2 Z_g/p^a \to \pi_2(Z_g/p^a) \to \pi_1 Z_g[p^a] \to 0$$

的过渡映射都是满射，因此中间项也满足 Mittag–Leffler 条件。米尔诺精确列和 $\lim\!\leftarrow\!\!-_a {}^{1}(Z_g/p^a) = 0$ 给出 $\pi_1((Z_g)^\wedge_p) = 0$。由引理 4.2.10，零次子对象的余纤维的 TC 为 $(\bigoplus_{g\neq 0} \Sigma Z_g)^\wedge_p$，其二次部分为零。这表明从绝对零次 TC 到 $\mathrm{TC}(P)^\wedge_p$的映射在二次上是满射。 □

引理 4.2.14 给出的提升在剩余轨道 $(\mathrm{TC}(H)^\wedge_p)_{hG}$ 中未必为零，其中 H 是覆盖 $H = \mathrm{Q}(P)$ 的半单剩余；去掉这一分量后，剩余的类便是相对的，因此可应用引理 B.4.1。在齐次一致化元型中，$\mathrm{Q}(P)$ 是 Iwahori 阶，其 C位于对角线及其上方，而 $J(C)$位于对角线下方。群 G正则地置换 $\mathrm{Q}(P)$ 的半单剩余中 Δ 的 p 个副本，因此剩余轨道为 $\mathrm{TC}(\Delta)^\wedge_p$。群 $\pi_2\mathrm{TC}(\Delta)^\wedge_p$和 $\pi_3\mathrm{TC}(\Delta)^\wedge_p$均为零，因为 $[\Delta :\ \Delta^p] = p$ [21, 定理 6.5], [27, 定理 8.1]。在齐次单位型中，令 $E = F(x)$。于是 E/F 是一个分歧指数为一、剩余域为 Δ的极大子域。环 $\mathrm{O}_E = \bigoplus_{i<p} \mathrm{O}_{F(x^p)} x^i$定义了一个分次子覆盖。在等特征情形下，选取一个包含x的系数域 $\Delta \subset \mathrm{O}_E$，其中 $\bar{x}$ 是 Δ的一个 p-基；由于 $E^p \subset F(x^p)$，域 $\Delta_0 = \Delta^p$ 属于零次部分 $\mathrm{O}_{F(x^p)}$，因此剩余覆盖有一个分次截面。忘掉覆盖结构后，被减去的剩余项为零，因为 $\pi_2\mathrm{TC}(\Delta)^\wedge_p = 0$。

现在我们处理混合特征。令 $S = \mathcal{O}_{F(x^p)}$、 $l = \Delta_0$ 和 $v = x^p \in S^\times$。交换子覆盖的约化与 $\mathcal{Q}(P)$ 的约化相同，都是 $\Delta = \bigoplus_{i<p} \Delta_0 \bar{x}^i$ 的分次覆盖。乘以 x 可将相邻顶点与角对应起来。在 $\mathrm{Perf}(S)$ 上，对每个群元素， $G = C_p$ 的传输作用都是单位元。对于$0 \le i, j < p$, 将 $[i+j]$ 记为 $\{0, \dots, p-1\}$ 中的代表元，其复合同构为乘以

$$x^{i+j-[i+j]} = v^{\lfloor (i+j)/p \rfloor}.$$

约化后的作用由相同的公式给出，其中含有 $\bar{v} \notin l^p$。我们证明，$\mathrm{TC}(S)$ 的 p-完备同伦轨道上的约化在 π_2 上是满射。为此，我们比较迹与行列式。对于有限可分 l'/l，令 $S_{l'}$ 为相应的有限 étale 局部 S-代数。在 l的小 étale site 上，令 $\mathcal{D}_S$ 和 $\mathcal{D}_l$ 分别表示代数 $S_{l'}$ 和域 l'上的分次线的 Picard 谱，其在秩上的对称性由

$(-1)^{rr'}$给出 r，r'。对于 $\Lambda \in \{S, l\}$，令 $\mathcal{D}(\Lambda) = R\Gamma(l, \mathcal{D}_\Lambda)_p^\wedge$。群 G 通过上述作用作用于这些谱，其复合同构为 $v_\Lambda^{\lfloor (i+j)/p \rfloor}$；这些同构在秩为 n 的行列式上的作用为 $v_\Lambda^{n\lfloor (i+j)/p \rfloor}$，其中 $v_S = v$ 和 $v_l = \bar{v}$。

引理 4.2.15。在此设定下，行列式和回旋迹给出一个约化箭头 G-谱的映射

$$(\mathrm{TC}(S)_p^\wedge \to \mathrm{TC}(l)_p^\wedge) \longrightarrow (\mathcal{D}(S) \to \mathcal{D}(l)).$$

映射 拓扑循环同调$(l)_p^\wedge \to D(l)$ 是一个等价，而映射 $((\text{拓扑循环同调}(S)_p^\wedge)_{hG})_p^\wedge \to (D(S)_{hG})_p^\wedge$ 在 π_2上是满射。

证明。我们首先对完美复形取带符号的行列式，然后取 Moore 系数。该行列式确定零次和一次同伦层，并且复形上秩为 n 的标量自同构 v 诱导其行列式上的乘法 v^n [10, 命题 5.3 和 §12]。有限 étale 基变换函子保持标量复合同构。回旋迹对于这些函子及其自然同构 [12, 定理 7.4], 是自然的，行列式也同样如此 [10, 命题 5.3]。在闭 étale 位点上，通过严格 Hensel 比较，回旋迹将K/p^a 和拓扑循环同调$/p^a$ 的层化 Postnikov 塔对应起来。对于每个 $\Lambda \in \{S, l\}$，后一个塔的整体截面通过对 Spec Λ 的单位元应用真基变换计算拓扑循环同调 ($\Lambda)/p^a$，因为 Λ 沿着 (p) 是 Hensel 的 [21, 定理 6.1 和 6.3]。将迹等价取逆，与行列式复合，并取逆极限，即得陈述中的约化箭头 G-谱的映射。对于 l，在几何茎上，带有限 Moore 系数的行列式是一个等价。事实上，l 的可分扩张具有 p-秩一，因此次数至少为二的对数微分消失。范数剩余同构以及与 Quillen K-理论的比较随后给出 $K_i(-; \mathbb{Z}/p^a) = 0$ 其中对于 $i \geq 2$，且单位没有 p-挠 [11, 推论 (2.8)], [27, 定理 8.1]。由下降可知，拓扑循环同调$(l)_p^\wedge \to$ D(l)是一个等价。

接下来我们对比较纤维给出界。记 U 为主单位层 $1 + \mathfrak{m}_{S_{l'}}$。它在 l 上的高阶上同调消失。在有限伽罗瓦阶段，主单位滤过的连续商是加法剩余模；根据正规基定理，它们的高阶上同调消失。有限同余商的不变元构成一个满射塔，因此这种消失性可传递到那里的逆极限；而几何茎上的连续余链是有限阶段余链的滤并。另有，$U(S)$ 具有有界的 p-次幂挠性，因为一个原始的 p^a 次单位根满足 $v_S(\zeta - 1) = v_S(p)/(p^{a-1}(p-1))$。秩映射在约化下保持不变，而标量相容性在秩为零的对象 $\frown$ 上平凡作用。因此，D$(S) \to$ D(l) 的纤维是 $\Sigma HU(S)_p$，并带有平凡的 G-作用。相对群 $K_1(S, l)$ 是 $U(S)$，因为通过提升 Matsumoto 符号，$K_2(S) \to K_2(l)$ 是满射，而 $K(S, l)$ 是 1-连通的。行列式在相对谱的 π_1 上诱导出这一识别。Hensel 比较给出 $K(S, l)_p^\wedge \simeq \mathrm{TC}(S, l)_p^\wedge$ [21, 定理 4.36]。因此，相对比较纤维是 2-连通的；完备化后仍然如此，因为底部的 Moore 同伦群构成一个满射塔。S 上的绝对比较纤维具有相同的界，因为在 l 上的比较是一个等价。取同伦轨道及随后进行 p-完备化保持这一界，因此在 S 上的比较在完备化轨道的 π_2 上是满射的。对于一个有下界的 p-完备谱，同伦轨道已经是 p-完备的，因为 G-bar 构造具有 p-完备的有限骨架，而其几何实现中各骨架的余纤维具有不断增加的连通性。

□

我们计算这些行列式轨道上的约化映射。

引理 4.2.16。 在此设定中，假设 l 是一个非阿基米德局部域。那么约化映射

$$\pi_2\big((\mathcal{D}(S)_{hG})^\wedge_p\big) \longrightarrow \pi_2\big((\mathcal{D}(l)_{hG})^\wedge_p\big)$$

是满射。

证明。令

$$\mathcal{A} = R\Gamma(l, H\underline{\mathbb{Z}})^\wedge_p, \qquad \mathcal{M}_\Lambda = R\Gamma(l, H\mathbf{G}_{m,\Lambda})^\wedge_p \quad (\Lambda \in \{S, l\}).$$

$\Sigma\mathcal{M}_\Lambda \to \mathcal{D}(\Lambda) \to \mathcal{A}$ 中的秩项和单位项具有平凡作用。记 κ_Λ 为常值作用下的连接映射，并记 $\iota_{v_\Lambda}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{M}_\Lambda$ 为由 $n \mapsto v_\Lambda^n$诱导的映射，其中 $v_S = v$ 且 $v_l = \bar{v}$。弱作用下的连接映射为

$$\kappa_\Lambda + (\Sigma^2\iota_{v_\Lambda}) \circ e_G(\mathcal{A}), \qquad e_G(\mathcal{A})\colon \mathcal{A} \longrightarrow \Sigma^2\mathcal{A},$$

其中 $e_G(\mathcal{A})$是标准双扩张 $H\mathbb{Z}_p \to \Sigma^2 H\mathbb{Z}_p$与具有平凡作用的秩模$\mathcal{A}$的张量积；该扩张由类 $e_G \in H^2(G, \mathbb{Z})$给出，其代表为$(g^i, g^j) \mapsto \lfloor (i+j)/p \rfloor$。事实上，在取截面之前，端点已标识的扩张空间是从 $H\mathbb{Z}$ 到 $\Sigma^2 H\mathbf{G}_m$的映射空间。它是2-截断的，且这两种作用在顶点和边上相同。它们在每个2-单形上的差是标量行列式$v_\Lambda^{n\lfloor (i+j)/p \rfloor}$。在约化箭头范畴中进行同样的计算，可得符号项的常值作用比较，以及相容的进位项。对于 $p = 2$，剩余符号是平凡的，因为 $-1 = 1$ 在 l中，所以 $\kappa_l = 0$。对于奇数 p，直线的张量平方给出到无符号分次线谱的一个映射，该映射在 p-完备化后是等价，并且再次有 $\kappa_l = 0$。我们保留 κ_S 作为谱之间的映射。

现在我们来确定二次轨道。A 的两个非零同伦群分别是零次的 $\mathbb{Z}_p$，以及 -1 次的 $X_l = H^1_{\mathrm{cont}}(l, \mathbb{Z}_p)$。$\mathbf{M}_l$ 的同伦群在相同次数上分别为 $\widehat{l^\times}_p$ 和 $T_p\,\mathrm{Br}(l) = \mathbb{Z}_p$。这些描述来自 $\mathrm{cd}_p(l) = 1$、希尔伯特90，以及 l 的 étale 单位层上 p^a 次幂映射的单射性。$\mathbf{M}_\Lambda$ 上的约化在 π_0 上是满射，并在 π_{-1} 上是同构，因为其纤维为 $HU(S)_p$。零次映射 $\iota_{\bar{v}}$ 将 $\widehat{\mathbf{1}}$ 映到 $l^\times{}_p$ 的一个本原元，因为 $\bar{v} \notin l^p$。在 -1 次时，该映射是与 $\bar{v}$ 的杯积。局部不变量配对表明，此映射模 p 后是满射；而 $\mathrm{cd}_p(l) = 1$ 将一度特征提升为 $\mathbb{Z}_p$-特征，因此到 $T_p\,\mathrm{Br}(l)$ 的映射是满射 [48, §5]。

令 $X_l^0 = \ker(X_l \xrightarrow{\cup\bar{v}} T_p\,\mathrm{Br}(l))$ 和 $U^0 = \widehat{l^\times}_p/\mathbb{Z}_p\bar{v}$。模 $\widehat{l^\times}_p$ 和 X_l 是 p-完备且 p-无挠的。对于单位，这可由乘法映射 p 在 $l^\times$ 上的单射性推出；对于 X_l，则可由 $H^1(l, \mathbb{Z}/p^a)$ 上的满射约化映射以及系数正合序列推出。p-完备、p-无挠的 $\mathbb{Z}_p$-模，是通过将模 p 的基提升而得到的自由模的完备化。因此，从由此得到的 Eilenberg–Mac Lane 谱到导出p-完备 $H\mathbb{Z}_p$-模的映射，可以在完备化之前通过这些生成元计算。因此，我们可以分裂$\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{M}_l$ 的两个同伦次数，并在 $\iota_{\bar{v}}$ 的两个逐次映射中分离出本原直和项。由于 $e_G(\mathcal{A})$ 对所选的完备 $H\mathbb{Z}_p$-模分解具有自然性，因此在剩余一侧（此处 $\kappa_l = 0$），进位只会在相应的两个直和项上保留下来。进位中这两个相匹配的秩直和项和单位直和项，各自都是由以下对象表示的扩张

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \xrightarrow{1+g+\cdots+g^{p-1}} \mathbb{Z}_p[G] \xrightarrow{g-1} \mathbb{Z}_p[G] \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0.$$

因此，其中间复形在次数 1、0 上是 $\mathbb{Z}_p[G]$ 上的自由复形，其导出余不变元在这些次数上为 $\mathbb{Z}_p \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_p$。次数为 -1 的配对所对应的复形是其平移 -1，其导出余不变元位于次数 0、-1。两者在二次次数上均无贡献。其余直和项上的作用都是平凡的，因此二次行列式轨道由以下元素生成

$H_1(G、\ U^0)$ 和 $H_3(G、\ X_l^0)$。由于单位约化的满射性，单位贡献可从 $\Sigma\mathcal{M}_S$ 提升。

对于特征贡献，我们将扩张的约化箭头限制到$\mathcal{A}$的秩直和项 $\Sigma^{-1}HX_l^0$。由于它在 π_{-1} 上为零，且源是一个移位的完备自由模，因此 ι_v 在导出 p-完备 $H\mathbb{Z}_p$-模中是零。我们在 S 上选取一个零伦，并将其约化，从而得到 l上的相容零伦。于是进位在这个约化箭头上消失，留下常值作用比较；当 $p=2$时，其中还包括符号 κ_S。其来自特征直和项的相对边界属于常值映射的轨道

$$\Sigma^{-1}HX_l^0 \longrightarrow \Sigma^2 H\widehat{U(S)}_p.$$

$H_3(G,\ X_l^0)$的贡献属于 $\Sigma^\infty BG_+ \simeq \mathbb{S} \vee \Sigma^\infty BG$下的约化直和项。常值映射保持这一分裂，而约化目标的 π_2 是$\sim$ $\frown H_0(BG,\ U(S)_p) = 0$。因此，特征贡献也能提升。改变其在 l 上的所选分裂，会使其像相差单位类，而这些类本来就能提升。

□

由引理 4.2.15 和 4.2.16，与 TC 的比较映射现在将交换子覆盖中的每个二次剩余轨道类都提升出来。我们减去这样一个提升，以消除绝对零次类的剩余像。遗忘覆盖后，被减去的项属于 $\pi_2\mathrm{TC}(\mathcal{O}_E)_p^\wedge$；由于 $\pi_2\mathrm{TC}(\Delta)_p^\wedge = 0$，它可以提升为一个相对类。根据推论 B.5.1，该相对类在指定截断中的像由 $K_2(\mathcal{O}_E, \Delta)$ 的一个整元表示，其泛点像属于 θ_E 的像。

来自序的整转移与消失

现在我们完成定理 4.2.2 的证明。在归纳假设 $K_2(B) = I_T(B)$ 下，我们将在下文的引理 4.2.19 中证明，相对覆盖的二次同伦轨道类的像属于 $I_F(D)$。将相对 TC 轨道类在有限截断处的像表示为一个整数类的迹，并应用同余分离后，Nrd_2 在 $I_F(D)$ 上的单射性便完成了归纳。

¯ ¯我们考虑覆盖 $H = Q(P)$ 的相对谱 $Y = K(H, H)$，其中 H是上文使用的剩余覆盖。与角的相对 Morita 比较使 Y成为 1-连通的，并具有 $\pi_1 Y = K_1(C, \Delta_0)$ 以及 G的作用 $\tau = \mathrm{Ad}(x)$。在齐次一致化元型中，置于不同角上的 K_1 类 $a \in 1 + J(C)$ 相同：对于$i < j$置 $b = e_{ij}$，并令 $d = (a-1)e_{ji} \in J_H = \ker(H \to H)$，再使用 $[1 + bd] = [1 + db]$；因此经过顶点平移后，剩余作用就是坐标变换所给出的共轭。由于 $\deg B = \mathrm{ind}\ B_{T^{\mathrm{nr}}} = m$，按照引理 4.2.6 的证明将 Matsumoto 符号提升到交换阶后，$K_2(C) \to K_2(\Delta_0)$ 是满射的，所以 $\pi_1 Y = M = \ker[K_1(C) \to \Delta_0^\times]$。对于齐次一致化元型中的角比较，使用引理 B.1.2 的二项导出 Iwahori 商。有限截断的角余纤维上的过渡映射一步即消失。因此存在一个正合序列

$$(\pi_2 Y)_G \longrightarrow \pi_2(Y_{hG}) \longrightarrow H_1(G, M) \longrightarrow 0.$$

左侧像的泛点传递属于 $I_F(D)$，因为 $K_2(B) = I_T(B)$。右侧边也可以通过整子覆盖实现，如下所示。

引理 *4.2.17.* 设 $Y \to Z$ 是有限群 G 的谱之间的等变映射，其中 Y 1 连通且 Z 连通。设 $S_\lambda \to Z$ 是连通 G 谱之间的映射，设 $q\colon \pi_2(Z_{hG}) \to \Lambda$ 是一个同态，并设 $I \subset \Lambda$ 是一个子群。假设 q 将 $(\pi_2 Z)_G$ 的像以及每个 $F_1\pi_2((S_\lambda)_{hG})$ 的整个像映入 I。如果 $u \in \pi_2(Y_{hG})$ 的边在 $H_1(G, \pi_1 Z)$ 中的像属于 $\sum_\lambda \mathrm{im}[H_1(G, \pi_1 S_\lambda) \to H_1(G, \pi_1 Z)],$，那么 q 将 u 的像

在 π_2（Z_{hG}） 中映入 I。这里 F_a 表示同伦轨道同调谱序列的滤过。

证明。 对于连通谱 X，二次次数的第一个商为

$$\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0 = E_{1,1}^{\infty} = H_1(G, \pi_1 X)/\operatorname{im}[d_2 \colon H_3(G, \pi_0 X) \to H_1(G, \pi_1 X)],$$

并且 $\mathcal{F}_0\pi_2(X_{hG})$ $=\operatorname{im}[(\pi_2 X)_G \to \pi_2(X_{hG})]$。由于 Y 是 1-连通的， $u \in \mathcal{F}_1\pi_2(Y_{hG})$。我们将其边缘像表示为来自指定源群的类的有限和。我们将 $E_{1}^{\infty},_1$ 中的每个类提升到源 $\mathcal{F}_1\pi_2$。减去它们在 Z 中的像后，由自然性可知，余项属于 $\mathcal{F}_0\pi_2(Z_{hG})$。现在可应用关于 q 的假设。□

如上所述，我们记 $R = \mathcal{O}_F$, $P = \mathcal{O}_D$, $J_D = J(P)$, $C = \mathcal{O}_B$ 和 $J_C = J(C)$。对于 $b \in C^{\times}$，记作

$$w_b = bx, \qquad E_b = F(w_b).$$

在齐次单位型中， $b\bar{x} \notin \Delta_0$，因此 $b\bar{x}$ 生成 Δ/k ，而 E_b/F 是剩余次数为 n 且分歧指数为一的极大子域。在齐次一致化元型中， $v_D(w_b) = 1$，因此 E_b/F 是次数为 n 的全分歧极大子域。由于 w_b通过共轭在 T 上的作用非平凡，我们有 $w_b \notin B$，但 $w_b^p \in B$。由库默尔表示 $X^p - w_b^p$ （等特征下的纯不可分表示），我们有$[E_b \colon F(w_b^p)] = p$和 $[F(w_b^p) \colon F] = m$。此外， $T \cap E_b = F$，因此 $T(w_b^p)/T$是 B的极大子域。分别取剩余基或艾森斯坦基，可得

$$\mathcal{O}_{E_b} = \bigoplus_{j=0}^{p-1} \mathcal{O}_{F(w_b^p)} w_b^j.$$

这是下文使用的交换分次子覆盖。对于二维局部域 L 上的布劳尔类 β ，令 $\chi_\beta(z) = \operatorname{inv}_L(\beta \cup z)$。

引理 4.2.18。 沿用上述记号，设 $U_D = 1 + J_D$、 $U_C = 1 + J_C$、 $U_F = 1 + \mathfrak{m}_F$ 和 $V = \operatorname{Nrd}_{B/T}(U_C)$。对于任意赋值域 L，记 $U(L) = 1 + \mathfrak{m}_L$ 和 $U_T = U(T)$。在齐次单位型中，这些比值

$$\frac{N_{E_b/F} f(bx)}{N_{F(x)/F} f(x)}$$

对于 $b \in 1 + J_C$ 和 $f(X) = 1 + hX (h \in R)$，连同 $N_{T/F}V$，生成核 $\chi_{[D]} \cap U_F$。在齐次一致化元型中，群 $N_{E_b/F}U(E_b)$ $(b \in C^{\times})$ 连同 $N_{T/F}V$ 生成同一个群。可以选取 $u \in U_F$，使得这些生成元连同$u^m = N_{F(x^p)/F} u$ 生成 $V^G =$核 $\chi_{p[D]} \cap U_F$。

证明。首先逐个赋值层近似 D 的主单位。在齐次单位型中，令 s 为 C 的一致化元，取 $c \in C$，并令 $b = 1 + cs^r$。 $f(bx)/f(x)$ 在深度 r 处的首项系数为

$$\bar{c}\,\frac{\bar{x} f'(\bar{x})}{f(\bar{x})}.$$

这可通过展开 $b - 1$ 恰好出现一次的项得到。我们选取无限域 k 中互不相同的 $\tilde{}$ $\tilde{}$个非零元素 h_1、.....、 h_p，选取提升 $h_i \in R$，并令 $f_i = 1 + h_i X$。若 $\sum_i c_i h_i \bar{x}/(1 + h_i \bar{x}) = 0$且 $c_i \in \Delta_0$，则除以 $\bar{x}$并消去分母。此时多项式 $\sum_i c_i h_i \prod_{j \neq i}(1 + h_j X) \in \Delta_0[X]$ 的次数至多为 $p - 1$，并且在 $\bar{x}$ 处为零。由于$[\Delta_0(\bar{x}) : \Delta_0] = p$，该多项式恒为零。代入 $X = -1/h_i$，可得对每个 i 都有 $c_i = 0$。因此，这些对数导数构成了 $\Delta_0(\bar{x})$ 在 Δ_0 上的一组基。于是，这些比值的有限乘积可以实现主单位的任意首项系数。

在齐次一致化元型中，我们以 x^r 为参照。若 $p \mid r$，角 C 的主单位给出该层的所有系数。若 $p \nmid r$，则 $1 + a(bx)^r$ 的系数为 $\bar{a}\bar{b}^r$。这里 $\Delta_0 = \Delta$；选取满足 $\Delta^{p^{e_0}} \subset k$ 的 e_0，以及满足 $rs_0 + p^{e_0}t_0 = 1$ 的整数 s_0、t_0。于是每个$z \in \Delta^\times$都可写成 $z = (z^{p^{e_0}})^{t_0}(z^{s_0})^r$。我们将 $\bar{a} = (z^{p^{e_0}})^{t_0} \in k^\times$ 提升至中心 R，并将$b = z^{s_0} \in \Delta^\times$ 提升至 $C^\times$。单个主单位 $1 + a(bx)^r$ 即可实现首项系数 z。因此，在这种类型中，每一层也都可以实现。

经过有限多个层后，深层余项的范数属于 $N_{T/F}V$。事实上，由于 T/F 可分且约化迹非退化，$\mathrm{Tr}^{T/F}\,\mathrm{Trd}^{B/T}$ 是一个非零的F-线性泛函，因此将其乘以固定一致化元 π 的某个幂后，我们可以选取$z \in J_C$，使得 $\mathrm{Tr}^{T/F}\,\mathrm{Trd}^{B/T}(z) \neq 0$。多项式

$$g(X) = N_{T/F}\,\mathrm{Nrd}_{B/T}(1 + Xz)$$

满足 $g(0) = 1$ 且 $g'(0) \neq 0$，因此根据亨泽尔引理，它的像包含 F中所有足够深的主单位。因此，只需进行有限次层修正和一次深层范数修正，无需使用无限乘积。这就证明了两种类型中的约化范数生成性。

Kato 的范数像公式和纯不可分剩余域扩张给出

$$\mathrm{Nrd}_{D/F}(U_D) = \ker \chi_{[D]} \cap U_F, \qquad V = \ker \chi_{[B]} \cap U_T.$$

例如，如果一个单位的约化范数的剩余为 1，那么该剩余就是该单位的剩余的纯不可分次数幂，因此该单位自身的剩余为 1。关于不变元的投影公式和限制公式给出 $V^G = \ker\ \chi_{p[D]} \cap U_F$。

最后，Kato对偶表明，$\chi_{[D]}$ 在 U_F 上的像的阶为 n：U_F的湮灭子是 $\ker(\mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(F^{\mathrm{nr}}))$。事实上，与两个 Witt 分量 $\mathrm{Br}(k)$ 和 $H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 的配对分别给出了 $F^\times/U_F$的赋值分量和剩余单位分量的有限阶连续特征标。通常的局部互反律与 Kato对偶表明，这些就是全部此类特征标。指标的极小性给出 $m[D] \notin \ker(\mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(F^{\mathrm{nr}}))$，因此 U_F 上的像的阶为 n [44, 定理 2]。我们选择 $u \in U_F$ 使得 $\chi_{[D]}(u)$ 的阶为 n。于是 $u^m = N_{F(x^p)/F}u$ 属于 $\ker\ \chi_{p[D]} \cap U_F$，且 $\chi_{[D]}(u^m)$ 的阶为 p。由于$\chi_{p[D]} = p\chi_{[D]}$ 且 $\chi_{[D]}(U_F) \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是阶为 n的循环群，映射 $\chi_{[D]}$ 给出了同构

$$(\ker \chi_{p[D]} \cap U_F)/(\ker \chi_{[D]} \cap U_F)$$

与 $\chi_{[D]}(U_F)$ 的 p 阶子群。因而这个商的阶为 p，由 u^m 的类生成，所以群 $\ker \chi_{[D]} \cap U_F$ 和元素 u^m 生成 V^G。 □

引理 4.2.19。 在引理 *4.2.9* 的情形下，假设 $K_2(B) = I_T(B)$，并令$Y = K(H, H)$ 为上述覆盖 $H = Q(P)$ 的相对谱。那么映射$\pi_2(Y_{hG}) \to K_2(D)$，它通过 $K(B)_{hG}$ 忘掉覆盖并取到泛点，满足

$$\mathrm{im}\big[\pi_2(Y_{hG}) \longrightarrow K_2(D)\big] \subseteq I_F(D).$$

证明。 我们为引理 4.2.18 中的生成元描述整源。在齐次一致化元类型中，使用 E_b的相对 Iwahori 覆盖。该覆盖的相对角为$\mathcal{O}_{F(w_b^p)}$，其一次群为 $U(F(w_b^p))$。元素 w_b 固定 $F(w_b^p)$，且 $\mathrm{Ad}(b)$ 在 $K_1(C)$ 上作用平凡；因此，$a_b \in U(F(w_b^p))$ 在 M 中的类是 G-不变的。我们取 $a_b = N_{E_b/F(w_b^p)}z$，使得 $z \in U(E_b)$，从而由传递性，其约化范数为 $N_{F(w_b^p)/F}a_b = N_{E_b/F}z$。作用及其进位取自实际的分次子环 $\mathcal{O}_{E_b} = \bigoplus_{j=0}^{p-1}\mathcal{O}_{F(w_b^p)}w_b^j$，使用 w_b^p。

在齐次单位型中，置入 $a_b = N_{E_b/F\,(w_b^p)}\,f(bx)$ 和 $a_1 = N_{F\,(x)\,/F\,(x^p)}\,f(x)$。这里$b \in 1 + J_C$，因此 bx和 x具有相同的约化，而 p-次范数作用于 Δ/Δ_0得到 $\bar{a}_b = \bar{a}_1$。

置 $R_b = \mathcal{O}_{E_b} \times_\Delta \mathcal{O}^{F(x)}$ 和 $S_b = \tau_{\geq 0} K(\mathcal{Q}(R_b))$。两个投影都是分次的，并且到剩余域的复合映射相同，因此它们的差连同其规范剩余零伦给出一个 G-等变映射 $S_b \to Y$。角单位对（a_b, a_1）是$\pi_1 S_b$的 G-不变类，其在 M 中的像为 $[a_b] - [a_1]$。事实上，一次单位 $r = (bx, x)$与零次角交换，并且顶点平移固定此角单位对。弱作用的进位为 r^p。对于附加的类 u，使用 $F(x)$ 的交换相对覆盖及其角主单位 $u \in U(F(x^p))$。

我们对这些源、 $Y \to K(B)$ 和 $I_F(D) \subset K_2(D)$ 应用引理 4.2.17。遗忘源轨道的映射作为谱映射，经由 $K(E_b)$ 因子化；在泛点处，它是从 E_b 到 D 的标量扩张，也就是由（E_b, D）-双模 D 给出的归一化转移 θ_{E_b}。对于源 S_b，它经由泛点处两个映射之差 $R_b \otimes_R F = E_b \times F(x)$ 因子化。因此，第一滤过层的整个像都落在 $I_F(D)$ 中，分别经由 θ_{E_b} 或 $\theta_{E_b} - \theta_{F(x)}$。根据归纳假设 $K_2(B) = I_T(B)$ 以及转移的传递性，角 $K_2(B)$ 的像也落在 $I_F(D)$ 中。另一方面，由于 G 是循环的，我们有自然同构 $H_1(G, M) \simeq M^G / N_G M$ 和 $H_1(G, K_1(B)) \simeq K_1(B)^G / N_G K_1(B)$。由于 $\mathrm{SK}_1(B) = 0$，约化范数 $\mathrm{Nrd}^{B/T}\colon K_1(B) \to \mathrm{Nrd}^{B/T}(B^\times)$ 是一个 G-等变同构；又因为 U_C 在 $K_1(C)$ 中的像落在 M 中，且 $\mathrm{Nrd}^{B/T}(M) \subseteq U_T \cap \ker \chi_{[B]} = V$，所以 $\mathrm{Nrd}^{B/T}(M) = V$。因此，$\mathrm{Nrd}^{B/T}$ 将 $H_1(G, M)$ 在 $H_1(G, K_1(B))$ 中的像映到 $\mathrm{Nrd}^{B/T}(M^G) \subseteq V^G$ 在 $\mathrm{Nrd}^{B/T}(B^\times)^G / N_{T/F}\mathrm{Nrd}^{B/T}(B^\times)$ 中的像。由引理 4.2.18 和 $N_{T/F} V = \mathrm{Nrd}^{B/T}(N_G M)$，$H_1(G, M)$ 的泛点像因此由这些源边生成。由此，我们得到两种情形下所断言的包含关系。

□

定理 4.2.2 证明的补充。情形 $n = 1$ 是分裂的。假设 $n > 1$，并令$\xi \in \mathrm{SK}_2(D)$。对于 $c = \partial_D \xi$，引理 4.2.4 的证明中的边界比较给出$c = \partial_F \mathrm{Nrd}_2\, \xi = 1$，因此 ξ提升到某个 $y \in K_2(P)$。我们先证明支撑映射$i_*\colon K_2(\Delta) \to K_2(P)$ 消失。通过分歧指数为一的极大子域提升 Matsumoto 符号，使约化映射 $r\colon K_2(P) \to K_2(\Delta)$ 成为满射。对于 D 的一致化元x_0，在 $K_2(P)$ 上令 $\alpha = \mathrm{Ad}(x_0^{-1})_*$。由双模序列 $J_D \to P \to \Delta$ 的可加性可得 $i_* r = 1 - \alpha$，因为 $J_D = x_0 P$，且在 J_D 上的左作用由 $\mathrm{Ad}(x_0^{-1})$ 扭曲，如引理 4.1.10 的证明中所述。x_0 的共轭作用固定纯不可分剩余域，因此 $r\alpha = r$，且 $(1-\alpha)^2 = i_* r (1-\alpha) = i_* r - i_* r \alpha = 0$。由于 $x_0^n \in \pi P^\times$，且 π 是中心的，$\mathrm{Ad}(x_0^n)$ 是由 P 的一个单位元给出的共轭作用，因此 $1 = \alpha^n = (1 - (1-\alpha))^n = 1 - n(1-\alpha)$。于是 $n i_* r = n(1-\alpha) = 0$，而 r 的满射性给出 $n i_* = 0$，所以来自唯一 p-可整除群 $K_2(\Delta)$ 的 i_* 为零。由局部化序列 $K_2(\Delta) \xrightarrow{i_*} K_2(P) \to K_2(D)$，映射 $K_2(P) \to K_2(D)$ 因而是单射。因此，$n\xi = 0$ 给出 $ny = 0$，且 $r(y) = 0$，因为 $K_2(\Delta)$ 是唯一 p-可整除的。

固定一个有限可分裂域 L_0/F，并选取一个深度 j，使引理 B.2.1 对 L_0成立。我们利用引理 4.2.14 中从绝对零次 TC 到 $\mathrm{TC}(P)^\wedge_p$ 的二次满射，提升 y 的迹，并移除该提升的剩余分量。步骤的次序至关重要：在齐次单位型中，通过交换子覆盖的 TC 类移除剩余轨道（在齐次一致化元型中，剩余轨道的 π_2 已消失）；忘掉覆盖后的像被提升至相对 TC，并在其中利用 $\pi_3 \mathrm{TC}(\Delta)^\wedge_p = 0$进行比较；随后才在指定深度 j将其表示为一个整数类。在混合特征齐次单位型中，减去的 TC 类在忘掉覆盖后的像，在深度 j 由来自 $\mathcal{O}_E$的一个整数类表示，并且已在剩余域和指定截断上进行了比较。根据¯引理 4.2.10 中的等价，剩余的相对轨道类为 $t_{\mathrm{rel}} \in \pi_2((\mathrm{TC}(H, H)^\wedge_p)_{hG})$。该引理中的外层$_p$-完备化可以去掉，因为 $\mathrm{TC}(H, H)^\wedge_p$ 有下界（绝对项属于 $\mathrm{Sp}^{\geq -1}$，相对项属于 $\mathrm{Sp}^{\geq -2}$），且 G 是有限的。然后我们将 t_{rel} 送至深度 j：由引理 B.4.1 的最后一个断言，其在深度 j 的像可表示为

π_2(Y_{hG})中一个整元的迹。该整元的泛点像根据引理 4.2.19 属于 $I_F(D)$。为与 y比较，注意到 $r(y)=0$，因此 y 提升为一个相对类 y_{rel}。在相对 TC 中，我们有

$$\mathrm{tr}(y_{\mathrm{rel}}) = f_*(t_{\mathrm{rel}}) + b_{\mathrm{rel}},$$

其中 f_* 忘掉覆盖，而 b_{rel} 是在混合特征齐次单位型中加回的相对修正项（其他情况下为零）。绝对等式给出这个相对等式，因为 $\pi_3\mathrm{TC}(\Delta)^{\wedge}_p = 0$，因此从相对 TC 的 π_2 到绝对 TC 的 π_2 的映射是单射。我们将这一致性送至指定的有限截断，其中针对幂零理想的相对迹比较（引理 B.1.1）给出了整系数下的一致性。加回整代表元，即来自覆盖的代表元，以及在混合特征齐次单位型中从$\mathcal{O}_E$中减去的代表元，得到$z \in K_2(P)$，其中 $z|_D \in I_F(D)$，且 $y - z \in \ker[K_2(P) \to K_2(P/\pi^j P)]$。由引理 B.2.1，我们有 $(y-z)|_D \in \theta_{L_0} K_2(L_0)$。因此 $\xi \in I_F(D)$，而命题 4.2.3 中的单射性给出 $\xi = 0$。至此归纳完成，由引理 4.2.8 的非分歧下降可得原始 F, D 的情形。

□

我们将定理 4.2.1 归结为定理 4.2.2。

定理 *4.2.1* 的证明。 定理 4.1.1 证明了满射性。当第一剩余域 k 的特征为零时，由 Cohen 结构定理可写作 $F = k((t))$，并令 B 为 D 的剩余除代数，其中心为 L。由于 L 是非阿基米德局部域，定理 1.1.1 给出 $\mathrm{SK}_1(B) = 0$，以及同构 $\mathrm{Nrd}_{B/L,\,2}\colon K_2(B) \xrightarrow{\sim} K_2(L)$。此同构与 $\mathrm{Gal}(L/k)$ 的作用相容，因此由命题 4.1.6 及 K_2 [55, 的循环 Hilbert 90，定理 14.1] 给出 $\mathrm{SK}_2(D) = 0$。现在假设 k 的特征为 $p > 0$；此时 k 是非阿基米德局部域。对于素数 $\ell \neq p$，取一个次数与 ℓ 互素、且能分裂其他布劳尔分量的扩张，通过限制与转移，将 $\mathrm{SK}_2(D)$ 的 ℓ-主部分归结为一个 ℓ-主除代数的情形，而命题 4.1.9(2) 表明该部分为零。再经过一个次数与 p 互素、且能分裂那些次数与 p 互素的布劳尔分量的扩张后，限制与转移表明，SK_2 的 p-主部分可由该扩张上的情形检测。由 Morita 等价，剩下的情形恰好就是定理 4.2.2 中的情形。 □

5 三维局部域上的约化范数

本节讨论三维局部域。我们计算任意特征下 K_2 上约化范数的像与余核（第5.1节）。接着证明，当第一剩余域的特征为零时，SK_2消失（第5.2节），并讨论一般情况下 SK_2 的消失（第5.3节）。

5.1 约化范数的余核

本小节计算三维局部域上 K_2 的约化范数的像与余核（定理 5.1.4）。对于三维局部域 F，我们将 $\mathrm{inv}_F\colon H^4(F,\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(3)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 记作加藤同构 [44, 定理 2]，，如约定中所述。对于三维局部域 F 以及其上的中心除法代数 D，满足 $\alpha = [D]$，对偶性将计算归结为证明：一个在 α 的每个有限分裂域上都消失的布劳尔类属于由 α生成的子群。

对于域 F和 $z \in \mathrm{Br}(F)$，令 $B_z(F)$ 表示 $\mathrm{Br}(F)$ 中限制到 z 的所有有限分裂域所得的公共核。对于主分解 $z = \sum_\ell z_\ell$，有 $B_z(F) = \bigoplus_\ell B_{z_\ell}(F)$。事实上， $B_z(F)$ 被 $\mathrm{ind}(z)$ 湮灭。在 z_ℓ 的一个分裂域上，我们通过依次添加相应的可分极大子域，将其余部分按次数与 F互素进行分裂

分量；随后，限制和余限制表明，ℓ-分量属于 $B_{z_\ell}(F)$。反向包含由定义立即得到。*Witt* 部分 是这样一个布劳尔类子群：其中的类被相对于 F 的最高离散赋值的最大非分歧扩张湮灭，而该扩张的剩余域是第一剩余域 k。Witt 部分中的一个类具有 Witt 分解$i(a) + (\chi, \pi)$，其中 $a \in \mathrm{Br}(k)$ 且 $\chi \in H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$；当 $\chi = 0$ 时，我们称其为纯非分歧类。在第一剩余特征 p 下，如果一个 p-主类不属于 Witt 部分，则称其为野类。对于二维局部域 F，等式 $B_z(F) = \langle z \rangle$ 由 Kato 的一次范数定理和对偶性得到，因为来自所有分裂域的 K_1 范数之和，就是布劳尔类 z [42, §3.1, 定理 3(2)], [44, 定理 2]中除代数的约化范数像。在这里，对于属于类 z 的除代数 D，群 $K_1(D)$ 由来自可分裂域的转移生成：生成可分极大子域的元素构成 $D^\times$ 的一个非空开子集，而每个元素都是其中两个元素之比。

引理 5.1.1。设 F 是维数为 $h \geq 2$ 的局部域，ℓ 为素数，且 L/F 是次数为 ℓ 的循环扩张。则 $F^\times / N_{L/F} L^\times$ 是一个 $\mathbb{F}_\ell$-向量空间，其维数至少为二。

证明。我们使用 $v_F(N_{L/F} x) = f(L/F)\, v_L(x)$。该商被 ℓ 所湮灭。设 k 为第一剩余域。若该扩张是非分歧的，则存在赋值商 $\mathbb{Z}/\ell$ 和单位的剩余范数商。对于循环剩余域扩张 l/k，若单位的剩余范数商为零，则投影公式会使 Milnor 范数 $K^M_{h-1}(l) \to K^M_{h-1}(k)$ 满射，然而根据高维局部类域论 [44, §0，第 168] 页，其余核是 $\mathrm{Gal}(l/k) \simeq \mathbb{Z}/\ell$。若该扩张是全分歧的，则单位范数的留数属于 $k^{\times \ell}$。单位范数的原像是一个单位，因此单位在范数商中的像满射到 $k^\times / k^{\times \ell}$。当 $\ell \neq \mathrm{char}\, k$ 时，温和循环全分歧意味着 $\mu_\ell \subset k$。在可逆素数处，约化保持单位根的序；而在混合特征步骤中，这些序由 $v(\zeta_{\ell^r} - 1) = v(\ell)/(\ell^{r-1}(\ell - 1))$ 界定。因此 k 具有一个最大 ℓ-幂次序的单位根。这样的单位根与一个一致化元在 $k^\times / k^{\times \ell}$ 中给出彼此独立的类。若 $\ell = \mathrm{char}\, k$，则一致化元 w 和 $1 + w$ 的类彼此独立。事实上，赋值首先消去 w 的指数。对于指数小于 ℓ 的 $1 + w$ 的非零幂，减去一所得元素的赋值为一；但从一个 ℓ 次幂中减去一，其赋值可被 ℓ 整除。剩下的情形是分歧指数为一且纯不可分剩余次数为 ℓ（此处 $\ell = \mathrm{char}\, k$）。若一个范数是第一主单位，则其原像的留数为一，所以该原像也是第一主单位。该原像的范数属于第二主单位：对于公共一致化元 π，有 $N_{L/F}(1 + \pi a) \equiv 1 + \pi \mathrm{Tr}^{l/k}(\bar{a})$（模 π^2），并且对于纯不可分剩余扩张 l/k 有 $\mathrm{Tr}_{l/k} = 0$。因此 $N_{L/F} L^\times \cap U^1_F \subseteq U^2_F$，所以主单位在范数商中的像满射到 $U^1_F / U^2_F \simeq (k, +)$。由于 k 是无限的，维数至少为二。这些情形涵盖了所有可能性，因为完备离散赋值域满足 $[L : F] = e(L/F) f(L/F)$。

□

引理 5.1.2. 设 ℓ 为素数，F 为维数至少为二的局部域，并且$\eta \in \mathrm{Br}(F)\{\ell\}$ 和 $\theta \in H^1(F, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$。若 θ 的序为 n，则

$$\bigcap_{u \in F^\times} \langle \eta + (\theta, u) \rangle = \langle n\eta \rangle.$$

证明。$n = 1$ 的情形显然，因此假设 $n > 1$。由引理 5.1.1 以及将循环相对布劳尔群的描述应用于序为 ℓ 的特征 $(n/\ell)\theta$，群 $(n/\ell)(\theta, F^\times)$ 的维数也至少为二。因此，我们可以选取 $\delta = (\theta, u)$，使得 $(n/\ell)\delta \notin \langle \eta \rangle$。于是 δ 的序为 n，且 $\langle \delta \rangle \cap \langle \eta \rangle = 0$，因为循环 ℓ-群 $\langle \delta \rangle$ 的每个非零子群都包含 $(n/\ell)\delta$；因此

$$\langle \eta \rangle \cap \langle \eta + \delta \rangle = \langle n\eta \rangle.$$

$u=1$ 的项与这个 u 给出一个包含映射；另一个包含映射则由每个 $(\theta,\ u)$ 都被 n 消去而得。 □

引理 5.1.3。设 F 是完备离散赋值域，其第一剩余域 k 是一个 h维局部域，并且满足 $h\geq 2$。对于素数 ℓ，假设对每个$z\in \mathrm{Br}(k)\{\ell\}$，都有 $B_z(k)=\langle z\rangle$。若 $\alpha\in \mathrm{Br}(F)\{\ell\}$ 被某个有限非分歧扩张分裂，则 $B_\alpha(F)=\langle\alpha\rangle$。

证明。经由可分极大子域进行限制与余限制，可知 $B_\alpha(F)$ 是 ℓ-初级的。此群中的每个 β 都被与 α相同的有限非分歧分裂域湮灭，因此将 Witt 分解写为

$$\alpha=i(a)+(\chi,\pi),\qquad \beta=i(b)+(\psi,\pi).$$

这里，π是一致化元，i是非分歧提升，$a,b\in \mathrm{Br}(k)\{\ell\}$，且 $\chi,\psi\in H^1(k,\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$。这种关于非分歧地分裂的类的分解适用于每个素数，并且与分歧指数为一的有限扩张的剩余域限制相容，见 [1, §3，（3.3）–（3.4），定理 3.2]。令 $m=\mathrm{ord}\ \chi$ 且 $L=k(\chi)$，其中当 $\chi=0$时，$m=1, L=k$。每个有限 M/k都可提升为一个分歧指数为一、剩余域为 M的有限扩张 F_M/F：沿着单扩张塔逐步提升首一极小多项式。提升所得的环是完备离散赋值环，因为其剩余域是域，且其极大理想由 π生成。对于 a_L的每个有限分裂域 M/L，a_M 和 χ_M 都消失，因为 M 分裂 a_L 且包含L，故由 Witt 分解可得 $\alpha_{F_M}=0$。由于 $\beta\in B_\alpha(F)$，$\beta_{F_M}=0$也成立，而在 F_M 上的 Witt 分解的唯一性给出 $\psi_M=0$。由 [44, 命题 5]，取 $n=q=h$和 $r=2$，可得 $\sum_M N_{M/L}K_h^M(M)=K_h^M(L)$，其中 M遍历这些分裂域。因此，$H^1(L,\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$一侧的投影公式与对偶性给出 $\psi_L=0$，从而对某个整数 c [44, 有$\psi=c\chi$，见命题 5、定理 2]。将 β 替换为 $\beta-c\alpha$后，我们可以假设 $\beta=i(b)$。

取任意的 $u\in k^\times$ 以及 $z=a+(\chi,\ u)$ 的任意有限分裂域 E/k。将 $t^m=\pi/\tilde{u}$添入提升域 F_E，其中 $\tilde{u}$ 是 u的单位提升。对于 $m>1$，这是一个艾森斯坦扩张，因此剩余域仍为 E。在此域上，记 $\pi=\tilde{u}\,t^m$，则有 $(\chi,\ \pi)=(\chi,\ \tilde{u})+m(\chi,\ t)=i((\chi,\ u))$，因为 $m\chi=0$；因此 $\alpha=i(z_E)=0$ 在那里成立，从而 $i(b_E)=0$。非分歧提升是单射，因此 $b_E=0$。假设以及引理 5.1.2 应用于 k，其中 $\eta=a$ 且 $\theta=\chi$ 的阶为 $n=m$，给出

$$b\in\bigcap_{u\in k^\times}\langle a+(\chi,u)\rangle=\langle ma\rangle,\qquad i(ma)=m\alpha.$$

因此，原来的 β 是 α的整数倍。 □

定理 5.1.4。设 F 是三维局部域，D 是 F上的中心除法代数，α 是 D的布劳尔类。那么

$$N_2(\alpha)=\mathrm{Nrd}_2\,K_2(D)=\ker(\alpha\cup-:K_2(F)\to H^4(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(3))),$$
$$C_2(D/F)\xrightarrow[\mathrm{inv}_F(\alpha\cup-)]{\sim}\tfrac{1}{\mathrm{per}(\alpha)}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}.$$

我们在本小节末尾证明定理 5.1.4，此前先给出一系列引理。对于三维局部域 F和 $\alpha\in \mathrm{Br}(F)$，记 B_α为 $B_\alpha(F)$。引理 5.1.5 将定理归结为等式 $B_\alpha=\langle\alpha\rangle$，而第 4.1 节中的引理 4.1.5 则说明约化范数的像包含于杯积的核中。对于周期为 p的野类，其余引理转而考虑一个扩张，在该扩张上相关类仍保持非零，且 α 的指标为 p（引理 5.1.11）；同时，这些引理给出了该扩张上的范数像（引理 5.1.6 和 5.1.8）。在定理的证明中，先通过引理 5.1.3 处理可被非分歧扩张分裂的类，然后通过归纳法证明在 F 上，对于周期更高的野 p-主类，有等式 $B_\alpha=\langle\alpha\rangle$。

引理 5.1.5。 设 F 为三维局部域，且 $\alpha \in \mathrm{Br}(F)$。则 $N_2(\alpha)$ 是 $K_2(F)$中的开子群，且 *Kato*对偶给出

$$(K_2(F)/N_2(\alpha))^\vee = B_\alpha.$$

此外， $B_\alpha = \langle \alpha \rangle$ 当且仅当 $N_2(\alpha) = \ker(\alpha \cup -)$，在此情形下，$\mathrm{inv}_F(\alpha \cup -)$ 诱导出同构 $K_2(F)/N_2(\alpha) \simeq {}^{1}{}_{\mathrm{per}(\alpha)}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$。 ——

证明。 $K_2(F)$ 的子群 $N_2(\alpha)$ 是开子群且具有有限指数 [44, 定理 2–3], ，因此 $K_2(F)/N_2(\alpha)$ 的所有特征都是连续的。在 Kato 对偶 下，$K_2(F)$ 的连续特征标具有形式 $x \mapsto \mathrm{inv}_F(\beta \cup x)$，其中 β 是唯一的布劳尔类。对于每个有限分裂域 E/F，无论其是否可分，投影公式以及最高不变量与余限制的相容性表明，该特征在 $N_{E/F}K_2(E)$ 上消失，当且仅当 $\beta_E = 0$ [42, §3.2，引理 1(2) 和命题 1(2)(ii)]。因此，有限商 $K_2(F)/N_2(\alpha)$ 的对偶为 B_α。

类 α 生成 B_α 当且仅当其特征是忠实的。由于 inv_F 是一个同构，这当且仅当 $N_2(\alpha) = \ker(\alpha \cup -)$；此时该特征的像是阶为 $\mathrm{per}(\alpha)$ 的子群。

□

引理 5.1.6. 设 B 是域 k 上的中心单代数，其指标 e 无平方因子且与 特征 k互素。那么

$$K_2(B) = \sum_{\substack{E/k \text{ finite separable} \\ B_E \text{ split}}} \theta_E K_2(E),$$

且 $\mathrm{Nrd}_2 K_2(B) = N_2([B])$ 是下列映射的核

$$[B] \cup -\colon K_2(k) \longrightarrow H^4(k, (\mathbb{Z}/e)(3)).$$

证明。 根据 [39, 命题 6.6.1(2)]， $K_2(B)$由 θ_E 在有限分裂域 E/k上的像生成。若有限分裂域 E/k 不可分，令 E_s 为其最大可分子扩张； B_{E_s} 的指标同时整除 e（它与 $\mathrm{char}\, k$互素）和 $[E : E_s]$（$\mathrm{char}\, k$的幂），故 E_s 分裂 B 和 $\theta_E = \theta_{E_s} N_{E/E_s}$。这就得到所示的生成结果，因而 $\mathrm{Nrd}_2 K_2(B) = N_2([B])$ 。

由投影公式可知， $N_2([B])$包含于 $[B] \cup -$ 的核中。为证明反向包含，先假设 k 是完美的。此时， [39, 定理 8.2.2(4)], 利用了权至三的 Beilinson–Lichtenbaum 比较， [85], 将 $N_2([B])$与 $[B] \cup -$ 的核相等同，其中指数特征已被求逆。 $K_2(k)$的两个商——分别是模 $N_2([B])$以及模 $[B] \cup -$的核所得的商——都被 e湮灭：前者是因为，对于 B的除代数中次数为 e 的可分极大子域 E ，有 $N_{E/k}\mathrm{res}^{E/k} = e$ ；后者则是因为系数为 $\mathbb{Z}/e$。由于 e 与 $\mathrm{char}\, k$互素，对指数特征求逆不会改变这一比较，因此该等同在整数系数下成立。若 $\mathrm{char}\, k = q > 0$ 且 k不是完美域，取 z属于 $[B] \cup -$的核。经过完美闭包后，z 属于范数子群；我们将所得的范表出下降到某个有限纯不可分阶段，再将其转移回来。这样便得到 z 的一个 q次幂倍数属于 $N_2([B])$；又由于 q 与 e互素，元素 z 本身也属于 $N_2([B])$。

□

引理 5.1.7。 设 F' 为三维局部域， p 为素数。自然映射

$$H^4(F', \mathbb{Z}/p(3)) \longrightarrow H^4(F', \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(3))$$

是单射，且最高不变量将 H^4（F，$\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$（3））与 $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$对应起来。若 $p =$特征 F'，系数是对数型的。

证明。 根据系数正合序列，核是对 $H^3(F',\ \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(3))$ 上的乘以 p映射的余核。三次范数剩余同构将此群同构于 p-可整除群 $K_3^M(F_\prime)\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$：当 $p\neq$特征 F' 时，由 $[85,$定理 6.16 和 6.17$],$得出；当 $p=$特征 F' 时，由 $[11,$推论 (2.8)$]$得出。对于 $p=$特征 F'，连续应用加藤剩余映射，再对有限末剩余域取迹，将 $H^4(F',\ \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(3))$ 与 $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$对应起来；一般情形下，最高不变量也有相同作用，见 $[48,$§5.2$]$。 □

引理 5.1.8。 设 F' 是特征为 p 的三维局部域，设 B 是 F' 上指标为 p 的中心单代数，并令 $\beta=[B]$。则

$$N_2(\beta)=\ker(\beta\cup-\colon K_2(F')\longrightarrow H^4(F',\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(3))).$$

证明。 从左到右的包含关系由伽罗瓦上同调中的投影公式得出：在 $[64,$ §2 (C3)$]$，中，该公式应用于有限系数并取直极限即可得到：对于任意有限分裂域 E/F' 以及任意 $w\in K_2(E)$,

$$\beta\cup N_{E/F'}w=\mathrm{cor}_{E/F'}(\beta_E\cup w)=0.$$

对于反向包含，取 $z\in K_2(F_\prime)$，其中 $\beta\cup z=0$。根据引理 5.1.7， $H^4(F_\prime\mathbb{Z}/p(3))\simeq\mathbb{Z}/p$ 可识别为 $H^4(F',\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(3))$ 中被 p 湮灭的子群。令 $c=\beta\cup z\in H^4(F_\prime\mathbb{Z}/p(3))$ 为 $\beta\in{}_p\mathrm{Br}(F')[p]$ 与 z 的范数剩余符号之积。它在正向极限系数群中的像为零，因此根据这一识别， $c=0$ 。

我们选取一个混合特征为 R (0， p)、剩余域为 F'、一致化元为 π、分式域为 $\mathcal{K}$ 的完备 Cohen 离散赋值环。Hensel布饶尔群同构$[58,$IV，推论 2。$13]$

$$\mathrm{Br}(R)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Br}(F')$$

以及 Hensel局部环上 PGL$_p$-托ors 的固定次数提升定理 $[23,$ Exposé ˜XXIV，命题 8.1$]$ ，给出了一个 B 上的阿祖马亚代数 R ，其次数为 p ，且其特殊纤维˜同构于与 B布饶尔等价的除代数。其一般纤维 $B_{\mathcal{K}}$ 的指标也为 p：指标整除其次数，并且由于 Br(R) $\to$ Br($\mathcal{K}$) 是单射 $[58,$ IV，推论 2.6$]$，布劳尔类不可能在$\mathcal{K}$ 上消失。根据松本定理，我们将 z 写成 Milnor 符号的有限和；将它们的条目提升为 R 的单位后，得到

$$\widetilde{z}\in K_2^M(R),\qquad \mathrm{sp}(\widetilde{z})=z.$$

我们使用带有限 p-系数的 Kato的非分歧提升映射

$$\iota^q_{F'/\mathcal{K}}\colon H^q(F',\mathbb{Z}/p(q-1))\longrightarrow H^q(\mathcal{K},\mu_p^{\otimes(q-1)})$$

对于 $q=2,\ 4$。其定义是通过提升阿廷–施莱尔特征和符号的单位项$[43,$ 定理 3$]$, $[48,$ §5.1$]$。在二次情形下，我们将 β 写成循环符号之和，并将它们的阿廷–施莱尔特征提升到有限 étale R-代数中，将它们的单位提升到 $R^\times$。提升后的循环类之和可延拓到 R 上，其特殊纤维为 β，因此 Br(R) $\simeq$ Br(F') 给出 $\iota^2_{F'/\mathcal{K}}(\beta)=[\widetilde{B}_{\mathcal{K}}]$。在四次情形下，Kato 的显式乘积公式给出

$$\iota^4_{F'/\mathcal{K}}(\beta\cup z)=[\widetilde{B}_{\mathcal{K}}]\cup\widetilde{z}_{\mathcal{K}}\quad\text{in } H^4(\mathcal{K},\mu_p^{\otimes3}).$$

左边为零，因为 $c=0$，所以 $\mathcal{K}$ 上的有限系数杯积消失。˜由于 $\mathcal{K}$ 的特征为零，且 $B_{\mathcal{K}}$ 的指标为 p，由引理 5.1.6 可得有限可分˜分裂域 $L_j/\mathcal{K}$ ，它们是 $B_{\mathcal{K}}$ 的分裂域，并且存在元素 $w_j\in K_2(L_j)$，使得

$$\widetilde{z}_{\mathcal{K}}=\sum_j N_{L_j/\mathcal{K}}(w_j)\quad\text{in } K_2(\mathcal{K}).$$

R 在 L_j 中的整闭包 R_j 是一个完备离散赋值环；记其剩余域为 F'_j。由于 $\mathrm{Br}(R_j) \to \mathrm{Br}(L_j)$ 是单射，且 B_{L_j} 分裂，每个有限剩余域扩张 F_{ij}/F' 都分裂 B。这些剩余域扩张未必可分，但这并无妨碍，因为 $N_2(\beta)$ 的定义包含所有有限分裂域。

记 $\partial_{\mathcal{K}}\colon K_3(\mathcal{K}) \to K_2(F_i)$ 和 $\partial_{L_j}\colon K_3(L_j) \to K_2(F'_j)$ 为 Quillen 局部化序列中的边界映射，并通过松本定理将 K_2 剩余域识别为 Milnor 范数；在此识别下，Quillen 范数与 Milnor 范数一致。由于 $\tilde{z}$来自 $K_2(R)$，边界映射的 $K(R)$-线性以及 $\partial_{\mathcal{K}}\{\pi\} = 1$ 给出下方的第一个等式。Quillen K-理论中的投影公式表达了张量积与标量限制的相容性；再结合范数与边界映射的相容性，便得到

$$\begin{aligned} z &= \partial_{\mathcal{K}}\big(\{\pi\} \cdot \tilde{z}_{\mathcal{K}}\big) \\ &= \sum_j \partial_{\mathcal{K}} N_{L_j/\mathcal{K}}\big(\mathrm{res}_{L_j/\mathcal{K}}\{\pi\} \cdot w_j\big) \\ &= \sum_j N_{F'_j/F'}\, \partial_{L_j}\big(\mathrm{res}_{L_j/\mathcal{K}}\{\pi\} \cdot w_j\big). \end{aligned}$$

最后一个等式中范数与边界映射的相容性，来自 Quillen 的局部化序列和分层归约 [68, §5 定理 4 和 5]：沿有限自由扩张 R_j/R 进行标量限制会保有限长度模，而在闭支撑上，它就是从 F'_j 到 F'的标量限制。因此，即使F'_j/F_i不可分，边界映射仍与范数相容，且不会出现分歧因子。由于每个 F_{ij}都分裂 B，最终和式中的每一项都属于 $N_2(\beta)$，从而 $z \in N_2(\beta)$。 □

余下的引理通过指标下降处理周期为 p 的野类。在这两条引理中，F 是一个第一剩余特征为 p 、第一剩余域为 k的三维局部域，$\alpha \in \mathrm{Br}(F)[p]$ 是野的，而 $S \subset \mathrm{Br}(F)[p] \setminus \{0\}$ 是一个包含 α的有限集，其中至多含有一个纯非分歧类。在混合特征情形下，我们先添加 μ_p；如有必要，再经过一个次数与 p互素的全分歧扩张；这些限制在 p-挠部分上是单射并保留野性，而且不会产生新的纯非分歧类，因为 Witt 类的特征分量变为 $e \cdot \mathrm{res}\,\chi$，其中 e 与 p互素。我们选择全分歧扩张的次数，以满足下文所用的深度不等式。完成这些准备性扩张后，我们仍分别用 F、α 和 S 表示该域及这些类，然后才选择 k、一致化元 π 和剩余 p-基。

引理 5.1.9。在此情形下，存在 k 的剩余 p-基 (a, b)，以及 F 的一个单位 C，其剩余为 a，使得对于 $F_i = F(C^{1/p^i})$ 和 $L = \bigcup_i F_i$ 的完备化 $L^\wedge$，S 的每个元素在 $L^\wedge$ 上都非零，且 $\alpha_{L^\wedge}$ 是野的。$L^\wedge$ 的剩余域 k_∞ 满足 $[k_\infty : k_\infty^p] = p$，其 p-基为 b。

证明。对于 $\gamma \in \mathrm{Br}(F)[p]$，在等特征情形下，我们使用加藤滤子中 γ 的首项（按极点阶 i编号）；在混合特征情形下，则使用 Bloch–Kato滤子中 γ 的首项（按 U^j的深度 j 编号）。在等特征情形下，极点阶为 $i > 0$时；在混合特征情形下，深度为 $0 < j < c$时，其分次分量为 Ω^1_k（若 p 不整除该指标），若 p 整除该指标则为 $\Omega^1_k/Z^1_k \oplus k/k^p$；在混合特征情形下，零次的分量为 $\nu^2(k) \oplus \nu^1(k)$。终端层，即等特征情形下极点阶为零的一层，以及混合特征情形下深度为 c（定义见下文）的一层，是 Witt 部分。下文的各分量均指该首项的分量，而一个类是野的，当且仅当其首项不属于终端层。对于 k 的 p-基 (a, b)，∂_a, ∂_b 是与 da, db 对偶的导数。

我们完善剩余 p-基（a，b）的一个方向，使 S 中的每个元素都保持非零，并保持 α 为野。对 da 而言，禁方向包括 S的非零一形式分量、非零分量 $w \in k/k^p$的微分 dw，以及对数微分

方向，以及非零零次数 $\nu^1(k)$ 分量的方向；这样的方向只有有限多个。Witt 分解中的非零特征分量在纯不可分扩张下仍保持非零。若 S 不含纯非分歧类，我们便直接选取 a，使其避开禁方向。否则，设 $\gamma \in \mathrm{Br}(k)[p]$ 为 S中的纯非分歧类。二维局部对偶性给出 a_0，且满足 $\gamma \cup a_0 \neq 0$。于是 $a_0 \notin k^p$，故 da_0 可扩充为 Ω^1_k的一个基。我们选取与 da_0无关的 db_0，并令 $a = a_0 + t b_0$ 在足够深的$t \in k^p$中变化。杯积特征会消去某个主单位群，因此 $\gamma \cup a \neq 0$ 保持不变。与此同时，$da = da_0 + t\, db_0$ 取遍无穷多个方向，因而可以避开有限多个禁方向。对于 $k_i = k(a^{1/p^i})$，投影公式和 $N_{k_i/k}(a^{1/p^i}) = a$ 在每个阶段都给出 $\gamma_{k_i} \neq 0$，从而在直极限 k_∞上也成立。我们选取 b，将 a扩充为一个 p-基。

我们将 a提升为单位 C，并令 $F_i = F(C^{1/p^i})$。多项式次数给出 $[F_i : F] \le p^i = [k_i : k]$，且剩余域包含 k_i，因此 F_i/F 的分歧指数为一，剩余域为 k_i。完备化 $F^\wedge_\infty = L^\wedge$ 的剩余域 k_∞ 具有 p-基 b。特别地，$\ker(\Omega^1_k \to \Omega^1_{k_\infty}) = k\, da$。我们将此与模 π^2改变 C 的自由度结合起来。

先假设 F 具有等特征，并写作 $F = k((\pi))$。极点阶为 $i > 0$ 时，Kato 的首项由 Ω^1_k 衡量（若 $p \nmid i$），而若 $p \mid i$则由 $\Omega^1_k/Z^1_k \oplus k/k^p$ 衡量，其中 $Z^1_k = \ker d$。在第一种情况下，只要方向 da 避开该形式，非零形式仍非零；在第二种情况下，只要方向 da 避开 dw，非零的第二分量 $w \bmod k^p$ 仍非零。若第二分量为零，取 Ω^1_k/Z^1_k中一个非零类的代表元 $\omega = f\, da + g\, db$；于是 $d\omega \neq 0$。对于 $\lambda \in k^p$，我们令 $C = a + \lambda\pi$，并为其剩余域 k_∞ 选择一个新的系数域 $F^\wedge_\infty$，使其包含 b的指定提升；令 $a^\sharp$ 为 a 在其中的提升。于是 C 和 $a^\sharp$ 具有相同的剩余，且二者在 $F^\wedge_\infty$中都有所有 p-次方根；因此若二者不同，$C/a^\sharp - 1$ 的正赋值就会被每个 p^n整除；故 $C = a^\sharp$。根据 $u = \sum u_{ij}^p a^i b^j$的二项式展开，任意 $u \in k$ 的新旧提升之差在一阶近似下为 $-\lambda\pi\partial_a u$。由于 $dC = 0$ 在 $F^\wedge_\infty$中，我们有

$$\omega \equiv g\, db - \lambda\pi\big((\partial_a g)\, db + f\, d\log\pi\big) \pmod{\pi^2}.$$

在此情形下，当 $p \mid i$ 时，第二分量消失，且代表元满足 $d\omega \neq 0$；经嘉当算子将极点阶降至 i/p 后的闭形式是受限形式 $g\, db$；它在系数域上是闭的，而该系数域具有一个一元素的 p- 基。在极点阶 $i - 1$ 下，用恰当微分 $d(\pi^{-(i-1)}\lambda f)$ 消去 $d\log\pi$ 项后，λ 的系数等于 $(\partial_b f - \partial_a g)\, db$；由于 $d\omega \neq 0$，该系数非零。嘉当算子作用下受限闭形式 $g\, db$ 的像的系数，由其在新系数域中的剩余给出，其中不涉及 λ。当 $i/p = i - 1$ 时同样适用，而这仅在 $i = p = 2$ 时发生。

接下来，假设 F 具有混合特征，因此已完成上述预备扩张。令 $e = v_F(p)$，并令 $c = pe/(p-1)$。Bloch–Kato 单位滤过模 p 的末项 U^c对应于 Witt 部分：取 $\tau = \zeta_p - 1$，$\big((1+\tau y)^p - 1\big)/\tau^p$的剩余为 $y^p - y$。因此，$1 + (\zeta_p - 1)^p u$的库默尔特征是 $\bar{u}$的阿廷–施莱尔特征的非分歧提升；在第二槽取一个单位和一个一致化元，即生成两个 Witt 分量 [11, (5.1)–(5.3)]。对于 $0 < j < c$，若 $p \nmid j$，则分次块为 Ω^1_k；若 $p \mid j$，则为 $\Omega^1_k/Z^1_k \oplus k/k^p$。零次分量为 $\nu^2(k) \oplus \nu^1(k)$，其中$\nu^r(k) = K^M_r(k)/p$通过对数微分 [11, (5.1)–(5.3)]得到识别。将 e、c、j按预备全分歧扩张的次数缩放后，我们已使每个相关正深度都满足 $j + 1 < c$，并且在 $p \mid j$时满足 $e + j/p - j \ge 2$；我们还使 $e = v_F(p) \ge 2$成立，这一点将在下文用到，即使 S 没有正深度的类也是如此。对于满足 $p \nmid d$的变换 $\pi' = \pi$，有 $d\log\pi = d \cdot d\log\pi'$，因此非零分次块得以保留，同时满足这些深度不等式。选择 da 避开禁方向，可保留非零 1-形式（当 $p \nmid j$时）、k/k^p中的分量，以及非零的零次 $\nu^1(k)$ 分量。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$对于其余情形，取 a, b, λ 的整提升 $\widetilde{a}, b, \lambda$，并令 $C = \widetilde{a} + \lambda\pi$。固定 $u = \sum x_{rs}^p a^r b^s$的一个提升$\widetilde{u}$，并令 $\widetilde{u}_0 = \sum \widetilde{x}_{rs}^p C^r b^s$。于是

$$\overline{(\widetilde{u} - \widetilde{u}_0)/\pi} = z_{\widetilde{u}} - \lambda\, \partial_a u,$$

其中 $z_{\widetilde{u}}$ 是左侧在 $C = \widetilde{a}$ 处的取值。对于可被 p 整除且第二分量为零的正深度 j，用 $\{1 + \pi^j \widetilde{f}\widetilde{a}, \widetilde{a}\} + \{1 + \pi^j \widetilde{g}\widetilde{b}, \widetilde{b}\}$ 提升 $\omega = f\, da + g\, db$。在第一项中，$\widetilde{a} = C(1 - \lambda\pi/C)$ 中的 C 变成一个 p 次幂。我们对第一个符号应用一阶 Steinberg 关系 $\{1+x, 1+y\} \equiv \{1+xy, -x^{-1}\} \bmod U^{j+2}$ [11, (4.1.1)]，其中 $x \equiv \pi^j \widetilde{f}\widetilde{a}$ 且 $y = -\lambda\pi/C$。于是 $xy/\pi^{j+1} = -\lambda f$；又因为限制后 $p \mid j$ 且 $da = 0$，所以 $-\lambda f\, d\log(-x^{-1})$ 中次数为 $j+1$ 的项为 $\lambda\, df$。第二项系数的 $\widetilde{u}_0$ 部分模 π^2 可写成 $\sum_{r<p} h_r^p \widetilde{b}^r$。由于 $e + j/p - j \geq 2$，我们有 $1 + \pi^j h_0^p \equiv (1 + \pi^{j/p} h_0)^p \pmod{U^{j+2}}$，因此 $r = 0$ 部分模 U^{j+2} 是一个 p 次幂。对于 $r > 0$，将符号乘以 r 并使用 Steinberg 关系，可将其变为第二槽为 $-(\pi^j h_r^p)^{-1}$ 的符号，同样可得其消失。第二个符号的新第二槽除符号外是一个 p 次幂，而 $p = 2$ 的符号在此次数下消失，因为 $-1 \in U_F^e$ 且 $e \geq 2$。因此，$-\lambda(\partial_a g)\, db$ 是第二项中依赖于 λ 的部分；也可能出现与 λ 无关的项，因此下文每个类至多排除一个 λ 的取值。因此，λ 的系数是非零形式 $(\partial_b f - \partial_a g)\, db$。

在零次情况下，如果 $\nu^1(k)$ 分量消失，则用单位符号的和提升非零的 $\omega \in \nu^2(k)$。环 $\mathcal{O}_{F_\infty^\wedge}/(\pi^2)$ 的特征为 p。我们考虑这样一个截面：将 k_∞^p 的一个元素映射为其根的某个提升的 p 次幂；在特征为 p 的情况下模 π^2 后，这个 p 次幂与提升的选择无关，并且与 b 的 p 次幂相容，因此该截面是一个环同态。利用 b 中的幂基，我们将此截面延拓为 k_∞ 的一个截面。沿此截面的符号模 (p, U^2) 消失，因为 $K_2^M(k_\infty)/p = 0$。对前述一阶展开取差，我们发现，对于原始符号 $\{\widetilde{u}, \widetilde{v}\}$，$\lambda$ 的系数为

$$-(\partial_a u/u)\, d\log v + (\partial_a v/v)\, d\log u.$$

因此，对于该和，它是 $-\iota_{\partial_a}\omega$；非零的 $da \wedge db$ 分量映射到非零的 db 分量。

无论哪种情况，已经落在下一层中的贡献都来自剩余限制，且与 λ无关。每个类最多避开一个 λ，即可使 S中的所有元素都非零且为 α 野的。

□

下一个引理的证明会用到以下稠密性陈述。

$\widehat{\ }$**引理 5.1.10.** 设 H 是一个关于秩1 赋值的 *Hensel* 域，且 H 是它的完备化。$\widehat{\ }$在任意光滑有限型 H概形上，H点在 H点中稠密。

证明。在局部上，光滑概形是 $\mathbb{A}_H^n$上的标准 étale 概形：它由 $g(a, y) = 0$ 给出，其中$\widetilde{\ }\partial_y g(a, y) \neq 0$，且 $g \in H[a_1, \ldots, a_n][y]$ 是关于 y的首一多项式。设(a, b)是一个 H点。经过平移和缩放后，可以假定 $g(a, -)$的系数以及该点都属于赋值环。由于 H 在 $\widehat{H}$中稠密，我们可以选取 $a' \in H^n$ 和 $b' \in H$，使它们分别足够接近 a 和 b，从而 $|g(a', b')| < |\partial_y g(a', b')|^2$。于是，Hensel 秩一域 H 中的牛顿形式的亨泽尔引理给出 $g(a', -)$的一个根 $b'' \in H$，满足 $|b'' - b'| \leq |g(a', b')|/|\partial_y g(a', b')|$；该根可以任意小，而$(a', b'')$是一个接近$(a, b)$的 H点。缩小邻域即可保持开条件 $\partial_y g \neq 0$。

□

引理 5.1.11. 在这种情况下，存在一个有限扩张 $F\prime/F$，即引理 *5.1.9* 中塔的某一层 F_i，使得 S 的每个元素在 $F\prime$ 上都非零，$\alpha_{F'}$ 是野的，并且$\mathrm{ind}(\alpha_{F'}) = p$。

证明. 设 (a,b)、 C、 F_i 和 L 如引理 5.1.9 中所述。 $L^\wedge$ 的剩余域 k_∞ 满足$[k_\infty:$ $k_\infty^p]=p$，因此周期为 p 的野类 $\alpha_{L^\wedge}$ 的指标为 p，由 [41, §4，引理 5，第 337], 页可知；其假设（一个未被最大非分歧扩张分裂的 p-挠类，且剩余 p-秩为一）在此成立。设 A 是 F 上类为 α 的中心单代数，并令X =SB$_p(A_L)$ 为参数化约化维数为 p 的右理想的广义塞韦里-布劳尔簇。由于 X 光滑，且 L 是 Hensel 的并在 $L^\wedge$中稠密，引理 5.1.10 和$X(L^\wedge)$ $\neq\varnothing$ 给出 $X(L)\neq\varnothing$。有限表示将此点下降到有限层 F_i，其中 ind$(\alpha_{F_i})\mid p$。 S 的所有元素在 $L^\wedge$ 上都非零，因此在 F_i 上也非零；特别地，ind$(\alpha_{F_i})=p$。若 α_{F_i} 属于 Witt 部分，则其限制 $\alpha_{L^\wedge}$ 也属于 Witt 部分，因为分裂 Witt 类的有限非分歧扩张可沿分歧指数为一的基变换提升；这与引理 5.1.9 矛盾。因此 α_{F_i} 是野的。 □

定理 *5.1.4* 的证明。 由引理 5.1.5，$(K_2(F)/N_2(\alpha))^\vee = B_{\alpha^\circ}$ 分裂转移给出 $N_2(\alpha)\subset$ Nrd$_2\,K_2(D)$，而引理 4.1.5 给出 Nrd$_2\,K_2(D)\subset\ker(\alpha\cup -)$。根据定义，$B_\alpha$ 包含 $\langle\alpha\rangle$，因此只需证明二者相等。由于 $B_\alpha=\bigoplus_\ell B_{\alpha_\ell}$ 和 $\langle\alpha\rangle=\bigoplus_\ell\langle\alpha_\ell\rangle$，只需对 ℓ-主 α证明这一点。Witt 部分中的一个类可由有限非分歧扩张分裂，因此引理 5.1.3 适用于 $h=2$；其假设正是本小节开头回顾的二维情形。这涵盖了所有 ℓ-主类，其中 ℓ 不等于第一剩余特征，因为它们都属于 Witt 部分。

设 α 是周期为 p 的野类，且 $\beta\in B_\alpha[p]\backslash\alpha$。令 $S=\{\alpha\}\cup\{\beta-j\alpha:\ j\in\mathbb{F}_p\}$。 S 的每个成员都非零，并且 S 至多包含一个纯非分歧类：两个纯非分歧类之差将是野类 α 的非零倍数。引理 5.1.11 给出了原域 F 的一个有限扩张 $F'=F_i$，该扩张通过预备扩张得到，并且在其上 S 的每个成员都非零， α_{F_i} 是野的，且 ind$(\alpha_{F_i})=p$。我们断言 $N_2(\alpha_{F_i})=\ker(\alpha_{F_i}\cup -)$。在特征零的情形，应用引理 5.1.6，其中取 $k=F_i$ 和 $e=p$，再利用引理 5.1.7 将 $\mathbb{Z}/p$(3) 系数转换为 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$(3) 系数。在特征 p 的情形，应用引理 5.1.8，其中取 $F'=F_i$和 $\beta=\alpha_{F_i}$。根据引理 5.1.5 在 F_i 上的等价性，该断言给出 $B_{\alpha_{F_i}}=\alpha_{F_i}$。由于$\beta_{F_i}\in B_{\alpha_{F_i}}$，存在 $j\in\mathbb{F}_p$，使得 S 中的元素 $\beta-j\alpha$ 在 F_i 上消失，这与 S 中成员的非零性相矛盾。

接下来令 per$(\alpha)=p^r$ 且 $\theta=p^{r-1}\alpha$。对于任意分裂 θ的有限扩张 E/F，令E_s 为其最大可分子扩张。在 E_s/F的伽罗瓦闭包 E_s^{gal}中，选取 Gal(E_s^{gal}/F) 的一个 Sylow p-子群 P，使其包含 Gal(E_s^{gal}/E_s) 的一个 Sylow p-子群，并令 $F''=(E_s^{\mathrm{gal}})^P$。 $[F'':\ F]$和 $[EF'':\ E]$均与 p互素；对于后者，$[E_sF'':\ E_s]=[H:\ H\cap P]$，其中 $H=$Gal(E_s^{gal}/E_s)，且 E/E_s是纯不可分的。 p群的子群链给出一个由次数为 p的扩张组成的塔，用于 E_sF''/F''；纯不可分扩张 EF''/E_sF''也有一个由次数为 p的扩张组成的塔。令 M'/M为 θ 消失的第一步。我们有 per$(\alpha_M)=p^r$ 且 per$(\alpha_{M'})=p^{r-1}$。次数为 p的限制至多使序降低因子 p：对于可分步骤，这由余限制得出；对于纯不可分步骤，若 M'/M的次数为 p，则复合映射 $M\to M'\xrightarrow{x\mapsto x^p}M$是弗罗贝尼乌斯，其在 Br$(M)\{p\}$ 上的作用是乘以 p。对于 $r\geq 2$，我们假设由归纳法可知，对于三维局部域上满足 $p^{r-1}\alpha'=0$ 的每个野类 α'，都有 $B_{\alpha'}=\alpha'$。由引理 5.1.3 可知，在这样的域上，Witt 部分中的每个 p-主类 α' 也满足同一等式。仍就 $r\geq 2$而言，我们取 $\beta\in B_\alpha[p]$。 M' 的每个分裂 $\alpha_{M'}$ 的有限扩张，在 F上也分裂 α；因此限制将 B_α映入 $B_{\alpha_{M'}}$，且 $\beta_{M'}\in B_{\alpha_{M'}}[p]$。由归纳法可得，对于某个整数 j，有 $\beta_{M'}=jp^{r-2}\alpha_{M'}$。若 $j\not\equiv 0$(模 p)，则 $\beta_M-jp^{r-2}\alpha_M$的序为 p^2，不可能在次数为 p的扩张中消失。因此 $\beta_{M'}=0$，从而 $\beta_{EF''}=0$。由于 $[EF'':\ E]$与 p 互素，故 $\beta_E=0$，于是 $\beta\in B_\theta[p]$。此外， $B_\theta[p]=\theta$：若 θ 属于 Witt 部分，则由引理 5.1.3 得出；若 θ 是野的，则由周期为 p 的情形得出。对于 $r=1$，我们已经证明 $B_\alpha[p]=\alpha$。在两种情形下， B_α 都是有限群，且 $B_\alpha[p]$ 的维数为一，因此 B_α 是循环群。若生成元 δ 的序为 p^{r+q}，则 $q>0$，于是 α 将是 $p^q\delta$的单位倍数。在 M'/M的第一个消失步骤

对于 θ， α_M 的序为 p^r，故 δ_M 的序为 p^{r+q}。因此， $\delta_{M'}$ 的序至少为 p^{r+q-1}。由上述相同的限制性质可知，分裂 $\alpha_{M'}$ 的 M' 的每个有限扩张也分裂 α，故 $\delta_{M'} \in B_{\alpha_{M'}}$。但对于 $r \geq 2$，由归纳法， $B_{\alpha_{M'}} = \alpha_{M'}$ 被 p^{r-1}消去。对于 $r = 1$，有 $\alpha_{M'} = 0$，因此 $B_{\alpha_{M'}} = 0$。两种情形都导致矛盾。因此 $B_\alpha = \alpha$，于是引理 5.1.5 给出 $N_2(\alpha) = \ker(\alpha \cup -)$。结合上文所示的包含关系 $N_2(\alpha) \subseteq \mathrm{Nrd}_2 K_2(D) \subseteq \ker(\alpha \cup -)$，可得 $N_2(\alpha) = \mathrm{Nrd}_2 K_2(D) = \ker(\alpha \cup -)$；同一引理还通过 $\mathrm{inv}_F(\alpha \cup -)$ 将$C_2(D/F) = K_2(F)/N_2(\alpha)$ 与 ${}_1\mathrm{per}(\alpha)^{\mathbb{Z}/\mathbb{Z}}$对应起来，由此证明该定理。 □

5.2 第一剩余特征为特征零时核的消失

当第一剩余域的特征为零时，第 4.1 和 4.2 节的结果也能推出约化范数的核消失。

推论 5.2.1. 对于每个第一剩余域特征为零的三维局部域 F，以及其上的每个中心除法代数 D（F），都有 $\mathrm{SK}_2(D) = 0$。这包括特征序列 $(0, 0, 0)$ 和 $(0, 0, p)$。

证明。根据 Cohen 结构定理，写作 $F = k((t))$，其中 k 是 F 的第一剩余域。令 B 为 D 的第一剩余除法代数，并设 $L = Z(B)$。中心 L 是一个二维局部域，因此推论 4.1.3 给出 $\mathrm{SK}_1(B) = 0$，这正是命题 4.1.6 的假设。根据该命题， L/k 是循环的，并且

$$\mathrm{SK}_2(D) \simeq \ker\big[K_2(B)_{\mathrm{Gal}(L/k)} \xrightarrow{N_{L/k}\,\mathrm{Nrd}_{B/L,2}} K_2(k)\big].$$

根据定理 4.2.1，等变映射 $\mathrm{Nrd}_{B/L,\,2}$： $K_2(B) \to K_2(L)$ 是同构；并且根据 K_2 [55, 定理 14.1] 的循环 Hilbert 90， $N_{L/k}$ 在 $K_2(L)^{\mathrm{Gal}(L/k)}$上是单射。因此核为零。 □

以下关于非分歧情形 $D = B((t))$ 的观察在注 5.3.3 中使用，并且在任意特征下都成立。

命题 5.2.2。设 B 是域 k 上的中心除法代数，并令 $F = k((t))$ 和 $D = B((t))$。则映射 $\mathrm{SK}_1(B) \to \mathrm{SK}_2(D)$， $x \mapsto x \cdot \{t\}$，定义良好且为单射。

证明。与 $\{t\}$ 相乘在任意特征下都与约化范数交换： $K_1(B)$ 由分裂转移生成，而对于 $x = \theta_E(e)$，投影公式和 $\mathrm{Nrd}_2\,\theta_{E((t))} = N_{E((t))/F}$给出 $\mathrm{Nrd}_{D,2}(x \cdot \{t\}) = N_{E/k}(e) \cdot \{t\} = \mathrm{Nrd}_{B/k,1}(x) \cdot \{t\}$。因此，与 $\{t\}$ 相乘将 $\mathrm{SK}_1(B)$ 映入 $\mathrm{SK}_2(D)$；由于局部化边界 $K_2(D) \to K_1(B)$ 将 $x \cdot \{t\}$ 映到 $\pm x$，故该映射为单射。将 $E((t))$ 替换为 $E(t)$ 后，同样的计算仍然适用。 □

5.3 特殊情形、进一步结果与未解决问题

本小节讨论推论 5.2.1 之外 SK_2 的消失。我们针对三维局部域以及二维和三维整体域陈述猜想，记录一个特殊情形，并汇总关于其适用范围的进一步观察。

猜想 5.3.1。对于每个三维局部域 F 以及每个在 F上的中心除法代数 D，均有 $\mathrm{SK}_2(D) = 0$。

该猜想源于以下事实：在维数至多为二的局部域上，$\mathrm{SK}_2(D)$ 消失：在维数零时， D 根据 Wedderburn 定理是交换的；在维数一和二维时，这分别是定理1.1.1和4.2.1。在维数至少为四时，类似的陈述不成立（见下文注 5.3.3）。在维数三时，推论 5.2.1 在第一剩余域具有特征零的情况下证明了该猜想

。下一条注记记录了一个第一剩余特征为正的混合特征情形。一般情形仍是开放问题。

我们记录若干进一步的结果，其中一些未附证明。列出这些陈述，是为了明确其适用范围，供未来研究参考。

注记 5.3.2。 设 F 是一个三维局部域，其第一剩余域 k 的特征为$p>0$，特征序列为 $(0,\ p,\ p)$。对于一个一致化元 π 和一个剩余为$\bar{u}\notin k^p$的单位 u，每个被$F(\pi^{1/p},\ u^{1/p})$分裂的、定义在 F 上的周期为 p^2 的中心除法代数 D，都满足 $\mathrm{SK}_2(D)=0$。我们略去证明。本文其他部分不会用到这一结果。

注记 5.3.3。 类似的消失结论在维数至少为四时均不成立。设 ℓ是一个素数，k_0 是一个一维局部域，且有两个次数为 ℓ的线性无交循环扩张；这类域在特征零和正特征下都存在。Platonov 构造了一个定义在 $k_0((x))((y))$ 上、指标为 ℓ^2 的中心除法代数 B，其 $\mathrm{SK}_1(B)\simeq\mathbb{Z}/\ell$ [65,定理 4.7 和 5.9]。在四维局部域 $k_0((x))((y))((t))$上，命题 5.2.2 表明，$D=B((t))$ 的 $\mathrm{SK}_2(D)\supseteq \mathrm{SK}_1(B)\cdot\{t\}\neq 0$。对于维数为 $d>4$ 的情形，逐一再添入 $d-4$ 个中心 Laurent 变量 s：限制映射将 SK_2 映入 SK_2, ，而特化映射 $\partial(\{s\}\cdot\ -)$ 会将一个类的限制映回该类（至多相差一个符号），因此非零类仍然非零。这些例子界定了猜想 5.3.1 的适用范围。

注记 5.3.4。 约化范数余核 $C_2(D/F)=\mathrm{coker}(\mathrm{Nrd}_2)$ 在三维时是阶为 $\mathrm{per}[D]$ 的循环群，这是定理 5.1.4 的结论。它被 $\deg D$ 所湮灭，因此当 $\deg D$ 是最后剩余域的特征 p 的幂时，它是 p-主的。在维数至少为四的迭代劳朗级数域上，这个 p-主余核可以是有限的，也可以是不可数的；我们各举一例，不作证明。

1. 设 $F=\mathbb{Q}_2((t_2))((t_3))((t_4))$ 是一个最后剩余域为 $\mathbb{F}_2$ 的四维局部域。设 χ 是分歧二次扩张 $\mathbb{Q}_2(i)/\mathbb{Q}_2$ 经基变换得到的扩张 $F(i)/F$ 的特征，并设 D 是 F 上类为 $(\chi,\ t_2)$ 的四元数除环。在加入外层 Laurent 变量 t_3，t_4 之前，先在 $\mathbb{Q}_2((t_2))$ 上计算 $[D]$ 在 t_2 处的 Brauer 剩余，结果是一个非零特征，因此 D 在 $\mathbb{Q}_2((t_2))$ 上的指标为二；加入 Laurent 变量后这一性质仍保持。于是 $C_2(D/F)\simeq(\mathbb{Z}/2)^3$。

2. 令 $k=\mathbb{F}_q((u))((v))$，其中 q 是素数 p 的幂，并令 $L=k(y)$，其中 $y^p-v^{p-1}y=u$。剩余多项式 X^p-u 不可约，因此 L/k 的分歧指数为一，且具有次数为 p 的纯不可分剩余扩张；根 $y+cv$ 满足 $c\in\mathbb{F}_p$，使得 L/k 成为次数为 p 的循环的扩张。令 D 为循环代数 $(L((t))/k((t))\ \sigma,t)$ 到四维局部域 $F=k((t))((s))$ 的基变换。在 $k((t))$ 上，t 处的 Brauer 剩余是非零循环特征，因此该循环代数的指标为 p。添加 Laurent 变量 s 保持指标不变，所以 D 的指标为 p。于是 $C_2(D/F)$ 包含 $k^\times/N_{L/k}L^\times$ 作为一个直和项，而该群的基数等于 $\mathbb{F}_q((u))$ 的基数；特别地，$C_2(D/F)$ 是不可数的。

猜想 5.3.5. 设 F 是二维或三维整体域，即超越次数为 $h\in\{2,3\}$ 的有限生成域（其底域为有限域），或是超越次数为$h-1$ 的数域。则对于 F上的每个中心除法代数 D，都有 $\mathrm{SK}_2(D)=0$。

备注 5.3.6。 h维整体域是一个有限生成域，其在有限域上的超越次数为 h，或在数域上的超越次数为 $h-1$。我们还证明了以下关于二维整体域 F 及其上的中心除法代数 D（定义在 F 上）的推论；证明略去：

$$v_2(\deg D)\le 3,\qquad v_3(\deg D)\le 2,\qquad v_\ell(\deg D)\le 1\ (\ell\ge 5)\quad\Longrightarrow\quad \mathrm{SK}_2(D)=0.$$

指标为 8 和 9 的情形，包括特征为 2 和 3 的情形，涉及 Adams 运算和 Bott 提升。在四维整体域上，无论特征为零还是正特征，都存在 SK_2 非零的中心除法代数。取 Platonov 代数 B，使其在整体域的纯超越扩张 $k_0(x,\ y)$ 上满足 $\mathrm{SK}_1(B)\neq 0$，其中该整体域为 k_0 [65, （定理 6.2], ），并选取 $0\neq\xi\in \mathrm{SK}_1(B)$。如命题 5.2.2 的证明所示，投影公式给出$\xi\cdot\{t\}\in \mathrm{SK}_2(B(t))$，而其在 $\mathrm{SK}_2(B((t)))$ 中的像由该命题可知非零。这些结果与猜想 5.3.5 相符；该猜想预言，在二维和三维整体域上，任意指标下的 $\mathrm{SK}_2(D)$ 均为零。

6 局部紧模与 Artin 映射

本节比较局部紧 D-模的 K理论与局部紧 F-模的 K理论，并将这一比较与 Artin 映射联系起来。其动机来自 Clausen 对类域论中 Artin 映射的描述：通过局部紧 F-模的 K理论 [19], ，以及 Braunling–Henrard–van Roosmalen 给出的非交换类比 [15], ，后者通过局部紧 D-模的 K_1 描述模去局部约化范数为一的幂等元后的 D 阿代尔类群。Braunling、Henrard 和 van Roosmalen 猜想，对于每个以 F [15, 为中心的有限维单 $\mathbb{Q}$-代数 A，都有 $K_2(\mathrm{LCA}_A)\ \cong\ K_2(\mathrm{LCA}_F)$。猜想 10.2]。对于 $A=D$，下文的定理 6.3.3 给出了整系数下的这一同构；即使 D 在一个实位分歧，结论仍然成立。

我们的比较表明，在正次数中，比较 c_D^{lc} 的纤维恰好是第 3.2 节全局比较纤维的悬挂 ΣZ ；后者是数域上的有限个移位 Eilenberg–Mac Lane 谱之和，在实分歧时将 2 逆转，而且此纤维对 Artin 映射不可见。关于 π_1 ，相容性给出了阿代尔类上 pro-p Artin 映射的公式：先取局部约化范数，再施以全局 Artin 映射，并投影到最大 pro-p 商；在实分歧时，p 为奇数。

局部紧模的 K-理论位于 $K(D)$ 与局部 K-理论的受限乘积之间，构成一个局部化序列；由 D 的公共整模型构造的比较方块，则在余纤维之间诱导出一个比较 c_D^{lc} 。若固定第 3.2 节的整体比较，则可能需要修正此方块。

在本节中， F 是一个数域，并且根据 Morita 等价， D 是 F上的中心除法代数。当 D 在每个实位处分裂时，我们使用整系数。若 D 在某个实位分歧，则本节中的所有谱和群（定理 6.3.3 中的情形除外）均取 $\mathbb{Z}[1/2]$ 系数；下文的受限乘积随后以整系数构造，再将 2 逆转，而非逐个素点进行。我们构造 c_D^{lc} （定理 6.2.2），将其纤维识别为全局比较纤维的悬挂（定理 6.3.1），证明 K_2 上的整同构（定理 6.3.3），并证明它与 Clausen 的 Artin 映射相容（定理 6.4.1）。

6.1 局部紧模与正次数中的局部化

我们首先建立 D 上和F 上的局部紧模在正次数中的局部化纤维序列。其依据是 Braunling–Henrard–van Roosmalen 的定理，我们还需要将其应用于第二可数模。

对于 $R=D,\ F$，令 LCA_R 表示离散环 R上的局部紧右模范畴，其态射为连续的 R-线性映射。赋予它标准正合结构，其中闭嵌入是可容许单态射，开满射是可容许满态射。记 $\mathrm{AB}_R=\mathrm{LCA}_{R,\ \mathrm{ab}}$ 为其由阿代尔块构成的满正合子范畴。具体而言，AB_R 是以下范畴的滤过 2-余极限。对于 R 中的一个极大阶 $\mathfrak{R}$

并取有限处的一个有限集 S，令

$$\mathcal{J}_R^S = \prod_{v|\infty} \mathrm{proj}(R_v) \times \prod_{v\in S} \mathrm{proj}(R_v) \times \prod_{v\notin S,\ v\nmid\infty} \mathrm{proj}(\mathfrak{R}_v).$$

对于 $S \subset S'$，转移函子是在新加入的赋值处进行标量扩张。此描述与极大阶无关。我们以下列形式使用 Braunling–Henrard– van Roosmalen 的定理 [15, 定义 4.3、命题 4.5、定理 6.1、6.2 和 6.13]。

定理 6.1.1. 存在一个自然的纤维序列

$$K(R) \xrightarrow{\lambda_R} K(\mathrm{AB}_R) \longrightarrow K(\mathrm{LCA}_R). \tag{6}$$

第一映射由 $P \mapsto P \otimes_R \mathbb{A}_R$ 诱导。对于中间项，存在一个谱的等价

$$K(\mathrm{AB}_R) \simeq \varinjlim_{S} \left(\prod_{v|\infty} K(R_v) \times \prod_{v\in S} K(R_v) \times \prod_{v\notin S,\ v\nmid\infty} K(\mathfrak{R}_v) \right). \tag{7}$$

特别地，$K_j(\mathrm{AB}_R) = \prod_v K_j(R_v)$，其中限制条件是，对于除有限多个有限处 v 之外的所有有限处，v-分量都属于 $K_j(\mathfrak{R}_v)$ 的像。

(7) 中的受限乘积是在谱范畴中构造的，这里使用了正合范畴的非连通 K-理论的乘积定理，以及 K-理论与滤过余极限的相容性。

引理 6.1.2。设 $R \in \{D, F\}$，令 $\mathcal{C} = \mathrm{LCA}_R$，$\aleph$ 为 LCA_R中由第二可数对象构成的满正合子范畴，并令 $\mathcal{C}_\mathrm{c}$ 为其紧子范畴。

1. 每个阿代尔块都属于 $\mathcal{C}$。
2. *[15, 命题 6.3 和推论 6.6],* 中关于商 $\mathcal{C}_\mathrm{c}$ 以及阿代尔块在正合包 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}_\mathrm{c})^{\mathrm{ex}}$中的像 $\mathcal{V} \simeq \mathrm{AB}_R$ 的局部化序列，将 LCA_R 替换为 $\mathcal{C}$ 后仍成立。
3. *[15, 命题 2.11]* 中的离散商函子 $M \mapsto M/Q(M)$ 诱导出一个等价

$$(\mathcal{C}/\mathcal{C}_\mathrm{c})^{\mathrm{ex}}/\mathcal{V} \simeq \mathrm{Mod}_\aleph(R)/\operatorname{mod}(R),$$

其逆由可数离散模的包含映射诱导；这里，$\mathrm{Mod}_\aleph(R)$是可数离散模的范畴，而$\mathrm{mod}(R)$是有限生成模的范畴。

证明。局部紧群的第二可数性在取闭子群、豪斯多夫商及有限次迭代扩张时均得以保持。第二可数群的离散商是可数的。由于 R 本身可数，每个有限生成的 R-模都是可数的。每个阿代尔块都是第二可数的，因为它是取遍可数多个赋值的有限维局部分量的受限乘积，因此将范围限制到$\mathcal{C}$ 不会改变阿代尔块的范畴。

现在我们说明 Braunling–Henrard–van Roosmalen 的局部化证明如何限制到这个子范畴。设 M_0 是 LCA_R中的一个对象，并选取一个序 $\Lambda \subset R$。如 [15, 命题 2.11], 的证明中一样，在 LCA_Λ中选取一个合流

$$V \oplus C \hookrightarrow M_0 \twoheadrightarrow M_0/(V \oplus C),$$

其中 V 是一个向量 R-模， C 是一个紧 Λ-模，它在 V的某个闭补空间中是开子集，而 $M_0/(V\oplus C)$ 是离散的，因此 $V\oplus C$ 在 M_0中是开子集；直和项 C 不必是一个 R-模，但其下方的饱和是。 [15, 命题 2.11] 中的分裂挠对由开 R-子模 $Q(M_0)=\bigcup_{n\geq 1} n^{-1}(V\oplus C)$ 和离散商 $M_0/Q(M_0)$ 构造而成。若 $M_0\in\mathcal{C}$，则 $Q(M_0)$ 是第二可数的，而 $M_0/Q(M_0)$ 是可数的。 [15, 引理 2.12] 中的分解仅使用闭子模和商，将拟阿代尔部分分裂为紧部分和阿代尔部分，因此两部分都保留在$\mathcal{C}$中。紧 R-模和阿代尔块在整个范畴中是单射对象，限制后仍然是单射对象。

因此，我们可以对该子范畴应用 [15, 命题 6.3] 中关于紧子范畴的局部化，以及 [15, 引理 6.4] 中阿代尔块的全忠实性。事实上，商 $\mathcal{C}/\mathcal{C}_{\mathrm{c}}$ 及其正合包都是内在构造的。范畴$\mathcal{C}$ 具有闭核、豪斯多夫余核以及有限推出和拉回，$\mathcal{C}_{\mathrm{c}}$ 是一个 Serre 子范畴；从紧对象出发的映射的像既闭又紧，因此 [15,§5] 中的第一次局部化可在$\mathcal{C}$内部进行；随后， [15, 引理 6.4、命题 6.5] 中的论证可在该商中使用屋顶来完成。令$\mathcal{V}$ 表示正合包（$\mathcal{C}/\mathcal{C}_{\mathrm{c}}$）^{ex}中阿代尔块的像；于是 $\mathcal{V}\simeq\mathsf{AB}_R$。 [15, 命题 6.5] 中的渗透性验证不变。渗透性的主要条件利用了以下事实：阿代尔块的一个容许像是拟阿代尔的，并且在去掉其紧部分后会成为一个阿代尔块；此外还利用了阿代尔块的单射性。其余条件只涉及有限多个核、余核和推出。因此，我们在该子范畴中得到 [15, 推论 6.6] 的局部化序列。

对于 (3)，我们沿用 [15, 命题 6.8 和推论 6.9]。由 [15, 引理 2.18], 可知，离散商函子 $M\mapsto M/Q(M)$ 除有限生成缺陷外是正合的，因此它诱导出一个到 $\mathrm{Mod}_{\aleph}(R)/\mathrm{mod}(R)$ 的正合函子。反过来，将可数离散模包含进去的映射会消去 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}_{\mathrm{c}})^{\mathrm{ex}}/\mathcal{V}$ 中的 $\mathrm{mod}(R)$，因为对于有限生成投射模， $P\to P\otimes_R\mathbb{A}_R$ 的余核是紧的。这两个函子互为逆：可数离散模就是它自身的离散商；而移除 $Q(M)$ 的紧部分与阿代尔部分后， $M\to M/Q(M)$ 就成为同构。这些操作都不需要不可数对象。

□

引理 6.1.3。 令 $R\in\{D,F\}$。引理 *6.1.2* 中子范畴 $\mathrm{LCA}_{R,\aleph}$ 的包含映射诱导出一个等价

$$K(\mathrm{LCA}_{R,\aleph})\xrightarrow{\sim}K(\mathrm{LCA}_R).$$

定理 *6.1.1* 对将LCA_R 替换为$\mathrm{LCA}_{R,\aleph}$的情形也成立。

证明。 令$\mathcal{C}=\mathrm{LCA}_{R,\aleph}$，并记$\mathcal{C}_{\mathrm{c}}$ 为其紧子范畴。由引理 6.1.2，Braunling–Henrard–van Roosmalen 的局部化及其离散商限制到$\mathcal{C}$。

由于$\mathcal{C}_{\mathrm{c}}$ 对可数积封闭，且 $\mathrm{Mod}_{\aleph}(R)$ 对可数直和封闭，Eilenberg 摆动给出

$$K(\mathcal{C}_{\mathrm{c}})=0,\qquad K(\mathrm{Mod}_{\aleph}(R))=0.$$

由两个商的识别以及引理 6.1.2 的局部化序列，我们得到与 [15, 定理6.2]证明中相同的双笛卡尔方块：

$$\begin{array}{ccc} K(\mathrm{mod}(R)) & \longrightarrow & K(\mathrm{AB}_R)\\ \downarrow & & \downarrow\\ K(\mathrm{Mod}_{\aleph}(R)) & \longrightarrow & K(\mathcal{C}) \end{array}$$

上方箭头由 $P\mapsto P\otimes_R\mathbb{A}_R$ 诱导。使该方块交换的同伦来自一个正合序列，该序列包含一个对角离散格和一个紧商

$$P\longrightarrow P\otimes_R\mathbb{A}_R\longrightarrow(P\otimes_R\mathbb{A}_R)/P.$$

由于 $K(\mathrm{Mod}_{\aleph}(R)) = 0$，序列 $K(R) \to K(\mathrm{AB}_R) \to K(\mathcal{C})$ 是一个纤维序列。包含映射 $\mathcal{C} \subset \mathrm{LCA}_R$ 与上述正合序列相容，并诱导出纤维序列的一个映射

$$\begin{array}{ccccc} K(R) & \longrightarrow & K(\mathrm{AB}_R) & \longrightarrow & K(\mathcal{C}) \\ \| & & \| & & \downarrow \\ K(R) & \longrightarrow & K(\mathrm{AB}_R) & \longrightarrow & K(\mathrm{LCA}_R) \end{array}$$

其底行是 (6)。因此，右侧的竖直映射也是一个等价。 □

Set

$$X_R = \tau_{\geq 1} K(R), \qquad B_R = \tau_{\geq 1} K(\mathrm{AB}_R), \qquad Y_R = \tau_{\geq 1} K(\mathrm{LCA}_R).$$

映射 $K_0(R) \to K_0(\mathrm{AB}_R)$ 是单射。事实上，若 $R_v = M_{r_v}(\Delta_v)$，其中 Δ_v 是一个除代数，则 $K_0(R)$ 的正生成元映到 r_v 倍的 $K_0(R_v)$ 的正生成元。因此

$$X_R \xrightarrow{\lambda_R} B_R \longrightarrow Y_R \tag{8}$$

也是一个纤维序列。映射 $K_1(R) \to K_1(\mathrm{AB}_R)$ 也是单射：当 $R = D$ 时，这由 $\mathrm{SK}_1(D) = 0$ [87] 以及 $F^{\times}, \to F_v^{\times}$ 得出；当 $R = F$ 时，则由对角映射的单射性得出。因此，对 (8) 的三个项都应用 $\tau_{\geq 2}$，再次得到一个纤维序列[15, 构造 8.2 和备注 8.3]。

6.2 基于公共整模型的局部—整体比较

这两个局部化序列通过 D的一个公共整模型进行比较。困难在于，整体比较和局部比较是分别构造的，因此，联系它们的方块必须在谱的层面上构造，而不能只在同伦群上构造。

引理 6.2.1。设 S_0 是一个有限集，其中包含 D 分歧的有限处，以及位于整除 $\deg D$ 的素数上方的赋值；该有限集取得足够大，使得 D 可延拓为 $U_0 = \mathrm{Spec}\mathcal{O}_{F,S_0}$ 上的阿祖马亚代数 A。U_0 上一个类的几何秩是指其在泛点处的几何秩。设 ℓ 是一个整除 $\deg D$ 的素数；若存在实分歧，则取 $\ell \neq 2$。在分歧实位 v 处（此处 2 可逆），类 $[\mathbb{H}]/2$ 可作为秩为 1 的类；这里，$\mathbb{H}$ 是 D_v 所属布劳尔类中的除代数。

1. 可以选取

$$x_{\ell,U_0} \in \pi_0 L_{K(1),\ell} K(\mathcal{A})$$

其几何秩为 1，并且在每个分裂实点处具有指定的秩为 1 的 *Morita* 类。

2. 对于 $x = x_{\ell,\ U_0}$，乘法映射

$$m_x \colon L_{K(1),\ell} K(U_0) \longrightarrow L_{K(1),\ell} K(\mathcal{A})$$

是一个等价。

证明。在 U_0 上应用命题 3.2.1 的提升，其中 ℓ 可逆。将有限系数的上同调限制到实位，在次数至少为三时是同构 [59, I，定理 4.10(c)]。对于二次，取一个素点 $v \mid \ell$。由局部对偶性$H^2(F_v, M) \to H^0(F, M^D)^{\vee}$是满射，因此由普瓦图—泰特，在实位处任意给定的元组所产生的障碍都可以在 v 处消去，这就给出了到二次实分量的满射性 [59, I，推论 4.16]。因此，实相对纤维的长正合列表明，实相对截面函子的上同调维数至多为二。唯一带有 $\mathbb{Z}/\ell^a$ 系数的几何同伦层是在偶数次数中的 $\mathbb{Z}/\ell^a(b)$ $2b$。如果

不需要指定实位处的取值，则秩边缘映射产生的障碍属于 $H^3(U_0,\mathbb{Z}/\ell^a(1))=0$。在实相对情形中，使用相对截面计算指定的实秩一类元组所产生的障碍。总次数-1 中唯一剩下的项是权零 H^1_{rel}，我们将 δ 记为其中的第二个箭头

$$H^0(U_0,\mathbb{Z}/\ell^a)\longrightarrow\prod_{v\ \mathrm{real}}H^0(F_v,\mathbb{Z}/\ell^a)\longrightarrow H^1_{\mathrm{rel}}(U_0,\mathbb{Z}/\ell^a).$$

障碍 $\delta((1)_v)$消失，因为 $(1)_v$ 是对角元素 1 的限制。因此，对每个 a ，都存在具有所需秩和指定实值的元素。

令 E_a 为周期 étale 超层 $V\mapsto(L_{K(1),\,\ell}K(\mathcal{A}|_V))/\ell^a$；由于 ℓ 在U_0上可逆，其整体截面为 $(L_{K(1),\,\ell}K(\mathcal{A}))/\ell^a$。秩是连通概形 U_0上的常值层的截面，因此泛点处秩为一意味着每个几何点处秩都为一。从 $\Gamma(U_0,\ \tau_{\geq 0}E_a)$ 到指定整体秩及相同秩的实分量的拉回的映射，其纤维为 $R\Gamma_{\mathrm{rel}}(U_0,\ \tau_{\geq 2}E_a)$；由相对上同调维数至多为二可知，其 π_{-1} 消失，且其 π_0 为 $H^2_{\mathrm{rel}}(U_0,\ \mathbb{Z}/\ell^a(1))$。因此，在系数约化 $\ell^{a+1}\to\ell^a$ 下，与先前选择的任何差异都可由权一的 H^2（实相对情形下的相对 H^2 ）加以修正。系数序列中的下一个 H^3 消失，因此在这个有限 H^2 上的约化是满射，我们可以归纳地选取相容提升。有限 S_0 上的有限系数群满足 Mittag–Leffler 条件，因此 Milnor $\varprojlim^1$ 消失，而 $x_{\ell,\,U_0}$ 是这一相容系统的逆极限。

对于 $v\notin S_0$，代数 $\mathcal{A}_v$ 分裂且 $v\nmid\ell$。刚性以及对有限剩余域的计算给出

$$\pi_0L_{K(1),\ell}K(\mathcal{O}_v)=\mathbb{Z}_\ell.$$

因此$x_{\ell,\,U_0}|_v$ 恰为秩 1 莫里田类。在无穷位处也同样成立：在分裂实位处由指定给出，在复位处则由秩的计算给出。在分歧实位处，对于奇数 ℓ，几何秩将高度一局部化的 π_0 与 $\mathbb{Z}_\ell$ 对应起来，而该群中的秩一类为 $[\mathbb{H}]/2$。我们有 $m_{[\mathbb{H}]/2}^{-1}=N_{\mathbb{H}/\mathbb{R}}/2$。因此，取 $x=x_{\ell,\,U_0}$，下文使用的类 $\beta_\ell=N_{\mathcal{A}/U_0}(x)-\deg D$ 在每个无穷位处的限制也为零。由于 $\mathcal{A}$在 étale 局部地是 U_0 上的矩阵代数，且 ℓ 在 U_0上可逆，引理 1.2.2 的证明可应用于 U_0 ，并证明 (2)。乘法映射 m_x 及其逆由公共模型限制而构造，因此我们同时得到表示其与限制相容的同伦，以及其复合映射的相容性。

□

单个元素 $x_{\ell,\,U_0}$ 及其基变换使得整体域、其在有限处的完备化以及 $v\notin S_0$ 处整数环上的完备化比较映射能够与限制映射相容地选取。在 $v\notin S_0$ 处以及分裂无穷位处，这些是通常的 Morita 比较。在分歧实位处，Morita 不变性将比较映射与归一化范数 $N_{\mathbb{H}/\mathbb{R}}/2$相识别；在次数为 $\deg\ D$的中心单代数 D_v 的坐标中，这就是 $N_{D_v/F_v}/\deg\ D$，因为 $N_{D_v/F_v}=(\deg\ D/2)N_{\mathbb{H}/\mathbb{R}}$。

我们还固定这些类的 Morita 对偶。设 ℓ 为一个素数；若 D 在实位处分歧，则假设该素数为奇数，并令 $L_\ell=L_{K(1),\,\ell}$。若 $\ell\mid\deg D$，令 x 为引理 6.2.1 中的类 $x_{\ell,\,U_0}$；若$\ell\nmid\deg\ D$，则令 $x=[\mathcal{A}]/\deg\ D$，它在 ℓ局部有定义，且几何秩为 1。对于 Morita 配对

$$\mu\colon L_\ell K(\mathcal{A})\otimes_{L_\ell K(U_0)}L_\ell K(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})\longrightarrow L_\ell K(U_0),$$

映射 $\mu(x,\ -)$ 是一个等价，并令 $y=\mu(x,\ -)^{-1}(1)$，即 x 的 ***Morita*** 对偶 。若 $\ell\mid\deg D$，则 ℓ 在 U_0 上可逆；在 U_0 上 étale 局部地，简单右模与简单左模的张量积是秩一自由模，而 $\mu(x,\ -)$ 变为与一个单位的乘法，因此由 étale 超下降可得断言。若 $\ell\nmid\deg D$，则我们改用自由模论证。$\mathcal{A}$ 的底层向量丛具有平凡行列式，因为 étale

局部地 $\mathrm{A} \simeq \mathrm{End}(E)$，且 $\det \mathrm{End}(E) \simeq \mathrm{O}$ 在规范意义下成立；由于 PGL_n 没有非平凡特征，这一平凡化可以下降。令 $d = \deg D$，并令 i 和 N 分别表示到 A 的标量扩张和范数。于是 $N \circ i$ 是与 $[\mathrm{A}]$ 的乘法，而 $i \circ N$ 是与 $[\mathrm{A}^\vee]$ 的乘法；后者由 Morita 等价 $\mathrm{A}^e \simeq \mathrm{End}(\mathrm{A})$ 得出；由行列式的平凡性可知，两者都是 $K_0(U_0)$ 中的 d^2。因此 i/d 和 N/d 互为逆，且 $\mu([\mathrm{A}]/d, [\mathrm{A}^{\mathrm{op}}]/d) = [\mathrm{A}]/d^2 = 1$；在相反一侧，$m_{[\mathcal{A}^{\mathrm{op}}]/d}$ 也是一个等价，所以 $\mu(x, -)$ 是一个等价，而该元素就是 Morita 对偶，即 $y = [\mathrm{A}^{\mathrm{op}}]/d$。在这两种情况下，$\mu(x, y) = 1$，映射 $m_y \colon L_\ell K(U_0) \to L_\ell K(\mathrm{A}^{\mathrm{op}})$ 是一个等价，且 $\mu(-, y) \simeq m_x^{-1}$。在 F、其完备化以及整数环上，我们使用 x 和 y 的基变换。

令 $g_D \colon X_D \to X_F$ 为定理 3.2.4 的比较映射，其完备化分量是类 x_{ℓ,U_0} $(\ell \mid \deg D)$ 基变换到 F 后的 m_x^{-1}，而将 $\deg D$ 求逆后的分量是 $N_{D/F}/\deg D$。唯一剩下的选择是算术方块中的粘合同伦，我们将其固定；它不必与局部比较映射相容，因此下方的方块可能需要修正。记 ν_{j,D_v} 为定理 1.1.1 中 D_v 在有限处 v 的同构。在无穷位，我们对上述 Morita 比较，或对分歧实位上的 $N_{\mathbb{H}/\mathbb{R}}/2$，使用相同的记号。

定理 6.2.2。 可以选取一个同伦交换图

$$\begin{array}{ccccc} X_D & \xrightarrow{\lambda_D} & B_D & \longrightarrow & Y_D \\ {\scriptstyle g_D}\downarrow & & {\scriptstyle h_D}\downarrow\simeq & & {\scriptstyle c_D^{\mathrm{lc}}}\downarrow \\ X_F & \xrightarrow{\lambda_F} & B_F & \longrightarrow & Y_F \end{array} \tag{9}$$

其各行都是纤维序列，且中间的垂直映射是等价。此外，对于每个次数 $j \geq 1$，都可以安排使得

$$(h_D)_j = \prod_v{}' \nu_{j,D_v}. \tag{10}$$

h_D 对 g_D 的选择的依赖性将在注 *6.2.3* 中说明。

定理 6.2.2 的证明将在下文引理 6.2.9 之后给出。

注 6.2.3。 如果整体比较是从公共模型同时选取的，h_D 本身可以取为局部谱比较的受限乘积。若固定 g_D 的这一粘合同伦，则可能需要作出一个保持 (10) 的修正；该修正在下文的证明中构造。

我们首先从公共整模型构造一个与局部比较相容的整体比较 g_c（引理 6.2.4–6.2.8），然后利用有理分裂（引理 6.2.9）从 g_c 返回给定的 g_D。在整个过程中，谱之间交换图的交换性均通过显式同伦来建立，而不是由同伦群上的相等性推得。

对于正整数 n 和谱 T，记

$$T_n^\wedge = \prod_{\ell \mid n} T_\ell^\wedge.$$

该有限素数集的算术方块为

$$T \simeq T[1/n] \underset{T_n^\wedge[1/n]}{\times} T_n^\wedge, \tag{11}$$

正如通过有理化和逐素数模比较可以验证的；谱 $T_n^\wedge[1/n]$ 是有理的。

引理 6.2.4。 设 k 是一个 p-进局部域，设 D' 是定义在 k 上的次数为e的中心单代数，不一定是除代数，并设 n 是 e的正倍数。可以选择定理 *1.2.1* 中的等价，使其诱导定理 *1.1.1* 的所有同构，同时在每个 $\ell \mid n$ 处使用指定的几何秩1 类，并使将 n 求逆后的分量等于 $N_{D'/k}/e$。

证明。 令 $X_{D'} = \tau_{\geq 1}K(D')$ 和 $X_k = \tau_{\geq 1}K(k)$。若 $D' \simeq M_r(\Delta)$，则在 Morita 等价下 $N_{D'/k} = r\,N_{\Delta/k}$，因此由定理 1.1.1 可得 $\pi_j N_{D'/k} = r \deg \Delta\, \nu_{j,\ \Delta} = e\,\nu_{j,\ D'}$ 在所有正次数上成立；因此该因子是 D' 的次数 e，而非其指标。

给定的完备化比较映射与 $N_{D'/k}$ 在交叠处除以e后相同，这是由投影公式以及与几何秩为 0 的类相乘所得乘积消失所致（引理 1.2.3）。我们在有理谱范畴中选取一个比较同伦，并使用 (11) 得到一个初始等价 $g^0\colon X_{D'} \to X_k$。定理 1.2.1 的证明中的奇数次数计算以及分裂—转移和 Bockstein 论证表明，g^0在奇数次数上以及在整数同伦中的挠部分上与指定的 $\nu_{j,\ D'}$ 一致。将 n 求逆后的分量一致，二者均为 $N_{D'/k}/e$；在正偶数次上，完备化分量上的差经由一个有理群映入有限群，因此为零。任何剩余的差异都局限于正偶数次 j，并经由无挠商 $K_j(D')/K_j(D')_{\mathrm{tors}}$，该商是一个有理向量空间。

由算术纤维序列的正合性，该差异的目标可识别为

$$V_j/(\Gamma_{n,j} + \Lambda_j), \qquad V_j = \pi_{j+1}(X_k)^\wedge_n[1/n],$$
$$\Gamma_{n,j} = \mathrm{im}(\pi_{j+1}X_k[1/n] \to V_j),$$
$$\Lambda_j = \mathrm{im}(\pi_{j+1}(X_k)^\wedge_n \to V_j).$$

由于 $j+1 \geq 3$ 为奇数，$\ell \neq p$ 处的完备化群是有限的，但 $\pi_{j+1}(X_k)^\wedge_p$ 是一个有限生成的 $\mathbb{Z}_p$-模。因此，当 $p \nmid n$时 $V_j = 0$，但如果 $p \mid n$，则

$$V_j = \pi_{j+1}(X_k)^\wedge_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p, \qquad \Lambda_j = \mathrm{im}(\pi_{j+1}(X_k)^\wedge_p \to V_j) = \pi_{j+1}(X_k)^\wedge_p/(\pi_{j+1}(X_k)^\wedge_p)_{\mathrm{tors}}$$

并且 Λ_j 是 V_j中的一个满 $\mathbb{Z}_p$-格。由于 $\Gamma_{n,j}$ 是 p-可整除的，引理 1.2.4(3)给出

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \Gamma_{n,j} + \Lambda_j) = 0.$$

将引理 1.2.4(1)应用于 (11)，现在可将 g^0 修正为一个等价 g，该等价诱导出所规定的同构，并且该修正保留所规定的分量。 □

引理 6.2.5。 设给定映射 $a_R\colon\ X_R \to B'_R (R = D, F)$、一个等价 $h'\colon\ B'_D \to B'_F$、映射 $u_{\deg D}\colon\ X_D[1/\text{度 } D] \to X_F[1/\text{度 } D]$ 以及 $u_\ell\colon\ (X_D)^\wedge_\ell \to (X_F)^\wedge_\ell$，其中每个素数$\ell \mid$ 度 D对应一组与 h'相容的方形同伦。我们取交叠处两个比较映射之间的差异（包括这些方形同伦），得到一个类

$$\Xi \in \left[X_D[1/\deg D], \mathrm{fib}\{(X_F)^\wedge_{\deg D}[1/\deg D] \to (B'_F)^\wedge_{\deg D}[1/\deg D]\}\right].$$

若 $\Xi = 0$，则可以选择具有指定算术分量和方形同伦的 $g_c\colon\ X_D \to X_F$。

证明。 在箭范畴 Ar $=$ Fun(Δ^1, Sp) 中逐对象应用 (11)。Ar 中的极限是逐对象计算的，而 Ar 的映射空间由同伦拉回给出

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{Ar}}(a_D, a_F) \simeq \mathrm{Map}(X_D, X_F) \underset{\mathrm{Map}(X_D, B'_F)}{\times} \mathrm{Map}(B'_D, B'_F).$$

我们固定分量 $B'_D \to B'_F$ 为 h'；由此得到的同伦纤维若非空，则是映射空间 Map(X_D, fib(a_F)) 上的一个托 ors。通过取这两个比较映射在

交叠处的差，我们从这个未选定基点的托ors转到零纤维，并得到上面的类 Ξ。因此， Ξ 的零伦提供了粘合这两个算术分量所需的同伦；我们选取一个这样的零伦并取拉回，这会保留指定的分量同伦。

□

我们固定以下选择，并在引理 6.2.6–6.2.8 中使用。对于每个 $v \in S_0$，将引理 6.2.4 应用于 $D' = D_v$，其中 $n = \deg D' = \deg D$；因此，指定素数全都是$\ell \mid \deg D$，即使局部指标更小也是如此。将完备化分量固定为由 $x_{\ell,\ U_0|v}$所确定的分量，并在将 $\deg\ D$ 取逆的分量上取 $N_{D_v/F_v}/\deg\ D$。若存在实分歧，则完备化分量仅取奇素数 ℓ 处的分量。我们在其余素点使用整环 Morita 比较，并在分歧实位处使用 $N_{D_v/F_v}/\deg\ D$；根据 Morita 不变性，这一选择是 $N_{\mathbb{H}/\mathbb{R}}/2$ 的。从整数环到域的比较同伦由整数环上的选择经基变换得到。因此，每个有限阶段的乘积及其过渡映射给出一个等价$h_0 :\ B_D \to B_F$。

我们将 B'_R 记作从 S_0 中略去有限多个域分量后得到的 B_R 的因子，

$$B'_R = \tau_{\geq 1} \varinjlim_{S \supseteq S_0} \left(\prod_{v|\infty} K(R_v) \times \prod_{v \in S \setminus S_0} K(R_v) \times \prod_{v \notin S,\ v \nmid \infty} K(\mathfrak{R}_v) \right).$$

我们将 $a_R\colon X_R \to B'_R$记作对角映射，将 $h'\colon B'_D \to B'_F$记作这些因子之间的比较映射。固定 h'后，我们使用 $u_{\deg D} = N_{D/F}/\deg\ D$ 以及公共模型上由 m_x^{-1} 得到的 u_ℓ 来拼接整体比较。在整数环因子、有限处的域因子 $v \notin S_0$ 以及 B'_D 的分裂无穷处因子上，次数为 $\deg\ D$ 的矩阵代数的范数等于 $\deg\ D$ 倍的 Morita 比较。在分歧实位上，它等于 $(\deg\ D/2)$ $N_{\mathbb{H}/\mathbb{R}}$。因此等式

$$h'[1/\deg D]\, a_D[1/\deg D] \simeq a_F[1/\deg D]\, (N_{D/F}/\deg D)$$

这些谱之间的映射等式可由这些正合函子的自然同构推出。以下讨论中，存在实分歧时排除 $\ell = 2$。我们取联系 $u_{\deg D}$ 与 u_ℓ 到 h' 的方块图的同伦，这些同伦来自张量积的投影公式以及公共模型的基变换。

对于每个 $\ell \mid \deg D$，元素

$$\beta_\ell = N_{\mathcal{A}/U_0}(x_{\ell,U_0}) - \deg D \in \pi_0 L_{K(1),\ell} K(U_0)$$

在 B'_F 的每个局部分量上都消失。我们从两个给定的平方同伦中取这些零同伦：在每个整数环分量上，它们的差乘以 $\deg D$，与 m_x 复合并在单位处取值后，是 β_ℓ 的一个零同伦；在有限处的域分量上，我们使用其基变换；在无穷位处，则沿 $U_0 \to F_v$ 直接限制这两个平方。乘以 $\deg D$ 的比较映射位于 ℓ-完备侧，这是因为存在自然范数同构 $(\deg\ D)$ $u_{\deg D} = N$ 和 $(\deg D)h'_v \simeq N_v$；我们从范数侧减去秩一侧。这给出了与有限集 $S \supset S_0$ 的变化相容的零同伦。因此， β_ℓ 提升为一个元素 $\beta_{\ell,\ \mathrm{rel},\ S}$，属于

$$\mathcal{F}_\ell^S = \mathrm{fib}\Big(L_{K(1),\ell} K(U_S) \longrightarrow \Pi_\ell^S \Big),$$

其中

$$\Pi_\ell^S = \prod_{v|\infty} L_{K(1),\ell} K(F_v) \times \prod_{v \in S \setminus S_0} L_{K(1),\ell} K(F_v) \times \prod_{v \notin S,\ v \nmid \infty} L_{K(1),\ell} K(\mathcal{O}_v).$$

相对权零 H^0 由到无穷位的对角限制的单射性而消失。奇数几何层也消失，因此该提升的下降滤过至少为 2。

引理 6.2.6。 设 $S \supseteq S_0$ 为有限处的有限集，其中所有位于 ℓ 之上的赋值都包含在 S_0中，并假设 $\ell \neq 2$ （如果存在实分歧）。将相对连续上同调$H^i_{\mathrm{rel},S}(\mathbb{Z}_\ell(t))$ 定义为整体复形在 U_S 上到 Π_ℓ^S中局部复形之积的映射的纤维，其中每个无穷位恰好出现一次。那么

$$H^i_{\mathrm{rel},S}(\mathbb{Z}_\ell(t)) = 0 \quad (i > 3), \qquad H^3_{\mathrm{rel},S}(\mathbb{Z}_\ell(t)) \text{ is finite} \quad (t \geq 2).$$

证明。 对于全局侧的有限 S，利用有限系数群的有限性，可以取逆极限；对于局部侧，导出逆极限与乘积可交换。我们使用 Milne 的整体与局部对偶。对于 $i \geq 2$，整数环因子的 H^i 消失；而对于$v \in S \setminus S_0$，有 $v \nmid \ell$，因此

$$H^2(F_v, \mathbb{Z}_\ell(t)) = \mathbb{Z}_\ell/(q_v^{t-1} - 1)\mathbb{Z}_\ell \quad (t \geq 2)$$

是有限的。从整体上同调到实位的限制在次数至少为三时是同构 [59, I，定理 4.10(c)]。因此，相对长正合列将相对 H^3 表示为映射到上述有限多个有限局部群 H^2 及实位处有限群的直和所得的余核，而更高的相对次数均消失[59, I，定理 4.10 和推论 4.16]。

□

此处及下文中，下降滤过 是由相对几何 Postnikov 塔诱导的滤过；其在次数 j 中的第 s 个分次分量，是 $H^s_{\mathrm{rel},S}(\mathbb{Z}_\ell(t))$ 的一个子商（即 E_∞- 项），其中 $2t - s = j$。由引理 6.2.6，该塔在每个固定次数上收敛，而第四级及更高滤过均无贡献。

引理 6.2.7. 对于公共模型类 x_{ℓ,U_0}，对所有素数 $\ell \mid \deg D$，若存在实分歧，则在比较映射 h'、相对提升 $\beta_{\ell,\mathrm{rel},S}$ 以及上述固定的同伦下，引理 *6.2.5* 的障碍类 Ξ 消失。

证明. 为了在公共模型上计算 Ξ，固定 ℓ 并令 $x = x_{\ell,U_0}$。在交叠上，对满足 deg D 的情形，我们有 $d(u_d - u_\ell) \simeq (m_{N_{D/F}(x)} - d)\ m_x^{-1} = m_{\beta_\ell} m_x^{-1}$，根据投影公式，上述固定的 β_ℓ 零同伦使其成为到相对纤维的映射。对于有限 U_S，投影公式 $N_{\mathcal{A}|_{U_S}/U_S} m_x \simeq m_{N(x)}$ 使我们考虑公共模型上的相对映射

$$m_{\beta_{\ell,\mathrm{rel},S}} m_x^{-1}. \tag{12}$$

我们将此表达式用作从 $\tau_{\geq 1} K(\mathcal{A}|_{U_S})$ 出发的映射，因此它经由 $\tau_{\geq 1}\mathcal{F}_\ell^S$ 分解；根据 β_ℓ 的零同伦的选取，它表示一个到相对纤维的映射 $d\,\Xi_\ell$，而不只是一个公式；其中 Ξ_ℓ 是 Ξ 的 ℓ 分量，在交叠上乘以 d^{-1} 得到 Ξ_ℓ。由于有限 Moore 系数与乘积和滤过余极限可交换，我们对每个有限 S，比较正次数中带有限系数的公共模型图表，在完备范畴中取余极限，然后再转到交叠上。用于检验障碍的每个全局类，都是在这一步之前，回到有限 S 处的相对谱 $\mathcal{F}_\ell^S$ 来计算的。由于目标是有理的， Ξ 的源可以替换为 $X_{D,\mathbb{Q}}$。

正奇数次的全局类 $j = 2m - 1$ 来自某个 U_S。由于 j 是奇数，次数为 j 的几何层消失，因此该类的完备化像的下降滤过至少为 1。映射 m_x^{-1}是 étale 模之间的映射，并且保持下降滤过。相对纤维 $\mathcal{F}_\ell^S$是全局侧上的一个模。对于有限的 S，类$\beta_{\ell,\ \mathrm{rel},\ S}$ 位于至少第 2 阶的相对几何 Postnikov 阶段；经 m_x^{-1}后，奇数次类 j 提升到至少第 $j+1$ 阶的绝对几何阶段。因此，它们在 (12) 中的乘积位于至少第 $j+3$ 阶的相对阶段，即下降滤过至少为 3，而次数为 $j = 2m - 1$ 时唯一可能剩下的项是 $H^3_{\mathrm{rel},\ S}(\mathbb{Z}_\ell(m+1))$. 由于 $m + 1 \geq 2$，这个群是有限的，因此有理化后消失。在正偶数次中，源是 $K_{2m}(D) \otimes \mathbb{Q} = 0$,

因为 $N_{D/F}i_D = i_D N_{D/F} =$(次数 D)^2 给出 $K_{2m}(D) \otimes \mathbb{Q} \cong K_{2m}(F) \otimes \mathbb{Q}$，而根据[13]，它消失。整类生成有理化同伦群，因此 Ξ 在所有同伦群上均为零，进而 $\Xi = 0$，因为有理谱之间的映射由其在同伦群上的作用决定。

□

引理 6.2.8。对于引理 *6.2.1* 中的选择，可以取一个比较映射 $g_c\colon\ X_D \to X_F$，并取一个等价 $h_0\colon\ B_D \to B_F$，使其由局部比较映射的受限乘积给出，从而

$$h_0 \lambda_D \simeq \lambda_F g_c.$$

映射 g_c 和 g_D 具有相同的完备化分量，并且具有相同的、将次 D 反演后的分量。

引理 *6.2.8* 的证明。等价 h_0 已在上文构造。由引理 6.2.7，引理 6.2.5 给出 g_c，而粘合保持 h' 以及完备化正方形上指定的同伦。

最后，我们恢复有限多个素点 $v \in S_0$。对于 $X_{F_v} = \tau_{\geq 1} K(F_v)$，两个局部化映射在完备化分量以及将 $\deg D$ 反演后的分量上相同。提升它们之差的障碍，连同这些指定分量上的同伦，属于

$$[X_D, \Omega(X_{F_v})^{\wedge}_{\deg D}[1/\deg D]] = [X_{D,\mathbb{Q}}, \Omega(X_{F_v})^{\wedge}_{\deg D}[1/\deg D]].$$

有理化的源仅在正奇数次具有同伦，而 $(X_{F_v})^{\wedge}_{\deg D}[1/\deg D]$在正偶数次的同伦为零。因此，上述群消失；等价地，

$$\pi_1 \operatorname{Map}(X_D, (X_{F_v})^{\wedge}_{\deg D}[1/\deg D]) = 0.$$

因此，可以消除两个算术分量上所规定的同伦在交叠处的差，并且可以恢复 S_0 中的赋值，同时保留公共模型所规定的投影公式同伦。

□

引理 6.2.9。映射 $\lambda_{F,\,\mathbb{Q}}\colon\ X_{F,\,\mathbb{Q}} \to B_{F,\,\mathbb{Q}}$ 是分裂单态射。

证明。在一次时，$F^{\times} \to \mathbb{A}_F^{\times}$ 是单射，并且在有理化后仍然是单射。在正偶数次，$K_{2m}(F)_{\mathbb{Q}} = 0$。设 r_1 和 r_2 分别是 F 的实位和复位的个数。对于 $m \geq 2$，若 m 为奇数，则令 $r_m = r_1 + r_2$；若 m 为偶数，则令 $r_m = r_2$。在奇数次 $2m-1 \geq 3$，博雷尔调节子经过无穷位项，

$$K_{2m-1}(F) \longrightarrow \prod_{v|\infty} K_{2m-1}(F_v) \longrightarrow \mathbb{R}^{r_m},$$

在有理全局 K-群 [13] 上是单射。因此，$\lambda_{F,\,\mathbb{Q}}$ 在每个同伦群上都是单射。由于有理谱范畴等价于 $\mathbb{Q}$ 上的复形范畴，并且 $\mathbb{Q}$-向量空间的短正合列分裂，我们可以选择

$$\sigma_F\colon B_{F,\mathbb{Q}} \longrightarrow X_{F,\mathbb{Q}}, \qquad \sigma_F \lambda_{F,\mathbb{Q}} \simeq \mathrm{id}.$$

□

定理 *6.2.2* 的证明。我们取自引理 6.2.8 的 g_c 和 h_0。由于 $g_c - g_D$ 在算术方块的每个分量上都消失，我们选取 $b_0\colon\ X_D \to \Omega(X_F)^{\wedge}_{\deg D}[1/\deg D]$ with$g_c - g_D = \partial_F b_0$，其中 ∂_F 是算术纤维序列中的边界。目标是有理的，因此 b_0 经由 $X_{D,\mathbb{Q}}$分解。令 f 为这一分解与 ∂_F 的复合映射。那么

$$g_c - g_D = f q_D, \qquad f\colon X_{D,\mathbb{Q}} \longrightarrow X_F, \qquad q_F f \simeq 0,$$

其中 q_D 和 q_F 是有理化映射。这里 $q_F f \simeq 0$，因为复合映射 $\Omega(X_F)^{\wedge}_{\deg D}[1/\deg D] \xrightarrow{\partial_F} X_F \to X_F[1/\deg D]$ 消失，且 q_F经由 $X_F \to X_F[1/\deg D]$分解。由于 $g_D[1/\deg D] = N_{D/F}/\deg D$ 且 $N_{D/F} i_D = i_D N_{D/F} = (\deg D)^2$,，映射$g_{D,\mathbb{Q}}$ 是等价，并令

$$t = f(g_{D,\mathbb{Q}})^{-1} \colon X_{F,\mathbb{Q}} \longrightarrow X_F, \qquad \varepsilon = t q_F$$

给出 $q_F t = 0$、$\varepsilon^2 = 0$ 和 $g_c = (1+\varepsilon) g_D$。

利用引理 6.2.9 中的 σ_F，我们定义

$$\zeta = \lambda_F t \, \sigma_F q_{B_F}, \qquad b = 1 + \zeta.$$

恒等式 $\sigma_F \lambda_{F,\,\mathbb{Q}} = 1$ 和 $q_F t = 0$ 给出

$$\zeta^2 = 0, \qquad b^{-1} = 1 - \zeta, \qquad b\lambda_F = \lambda_F (1+\varepsilon).$$

这里我们选取 b_0，并附上在算术分量上（即相应映射空间的纤维中）为 $g_c - g_D$ 指定的零同伦；这些数据给出$b\lambda_F \simeq \lambda_F(1+\varepsilon)$，从而得到关于 h_D 的方块。修正对 $(\varepsilon,\ \zeta)$ 是由 $(t,\ \lambda_F t \sigma_F)$ 和 $\sigma_F \lambda_{F,\,\mathbb{Q}} \simeq 1$ 诱导的箭头范畴映射，因此它经由 $\lambda_{F,\,\mathbb{Q}}$ 分解；特别地，对每个素数 p，高度一局部化 $L_{K(1),\,p}$ 会消去修正及方块的同伦。因此，$h_D = b^{-1} h_0$ 是一个等价，并且

$$h_D \lambda_D \simeq b^{-1} \lambda_F g_c \simeq b^{-1} \lambda_F (1+\varepsilon) g_D \simeq \lambda_F g_D.$$

我们用这个同伦来定义余纤维之间的映射 c_D^{lc}。

最后，我们验证这一修正不会改变同伦群上的范数。对于 $j \geq 1$，t的源是有理的，因此 $K_j(F)$中的 t_*的像，或在实分歧下 $K_j(F)[1/2]$ 中的像，可整除，故由引理 3.2.3 可知其为零。因此，$\zeta_* = 0$ 和 $b_* = 1$，所以 h_D满足与 h_0相同的公式 (10)。此外，ζ 经由一个有理谱分解，故对所有有限系数都消失，因此完备化分量也保持不变。

□

注 6.2.10. 定理 6.2.2 是一个存在性结果，其构造涉及若干选择。我们并不因为修正映射 t 或 ζ 在同伦群上为零，就推断它们作为谱之间的映射也为零。另一方面，由于 $g_c = (1+\varepsilon) g_D$，从$g_c$ 返回 g_D 会使比较映射改变为目标的一个自等价，因此保留比较纤维以及次数至少为二时的分裂。用 Morita 配对 μ在周期完备分量上表示 m_x^{-1}时，我们采用在引理 6.2.1 之后固定的 x 的 Morita 对偶 y 及其基变换。这比仅仅指定几何秩对比较映射作了更强的规范化。(9) 的完备化分量上的同伦也选为投影公式同伦，它们与公共模型的基变换以及对 y 求值相对应。经由有理谱的修正会在高度一局部化下消失，因此修正后 (9) 的高度一局部化保持不变。映射 c_D^{lc} 是指定方块的余纤维映射。我们不声称其独立于交换性同伦的选择。

引理 6.2.11. 设 p 为一个素数；若存在实分歧，则假设它为奇数。设 x 和y 分别为引理 *6.2.1* 之后固定的公共模型及其 *Morita* 对偶上的类。令$L = L_{K(1),\,p}$，并设 h_0 为引理 *6.2.8* 中的等价。在证明中的等价$LB_R \simeq L\Theta_{R,\,p}$下，$Lh_0$ 是求值映射$\Theta_{D,\,p} \to \Theta_{F,\,p}$ 的 L-局部化，该映射逐分量由 $\mu(-, y|_v) \simeq m_{x|_v}^{-1}$ 给出。因此，将 L 应用于(9) 所得的局部化行映射，是通过对 y求值给出的，而 Lc_D^{lc} 则是诱导出的余纤维映射。

证明. 首先注意，对每个有上界谱 T，都有 $LT = 0$。我们选取一个有限型 1 谱，它带有一个正次数 v_1 自映射 [33]。将其望远镜与 T 取楔积，得到一个可缩谱，因为在每个固定次数上，所得序列余极限中的各项最终都会消失。将 $K(1)$ 与这个有限谱取楔积，得到有限个非零 $K(1)$悬挂的直和，而该自映射在其上作用为一个等价。因此，$K(1) \otimes T = 0$，从而 $LT = 0$。这尤其适用于取连通覆盖时被移除的部分。

令 $\mathfrak{R}$ 为公共整模型中的一个极大阶，并在谱的范畴中定义，

$$\Theta_{R,p} = \varinjlim_{S} \left(\prod_{v|\infty} LK(R_v) \times \prod_{v \in S} LK(R_v) \times \prod_{v \notin S,\ v \nmid \infty} LK(\mathfrak{R}_v) \right).$$

我们不假设这个对象已经是局部的。自然比较映射 $B_R \to \Theta_{R,\ p}$在次数为 ≥ 2 的模-p 同伦群上诱导同构。事实上，非阿基米德局部域、整数环、 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 上的有限系数比较，在这个统一范围内都成立。对于非阿基米德域分量，使用引理 1.1.5。将余极限限制到 $S \supset S_0$ 后，整数环分量中的每个代数都分裂。在 $v \nmid p$ 处，使用 Hensel 刚性和有限剩余域计算。在 $v \mid p$ 处，局部化序列

$$K(k_v) \longrightarrow K(\mathcal{O}_v) \longrightarrow K(F_v)$$

连同 $K(k_v)/p \simeq H\mathbb{F}_p$ 和 $LK(k_v) = 0$，表明整数环与域上的比较在次数至少为二时一致。对于复分量，使用 Suslin 的有限系数比较。对于 $p = 2$ 处的实分量，使用实代数K-理论与 KO 的比较；在奇素数处，利用 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ 的限制与转移以及 2 的可逆性，将问题归结为复比较。在分歧实分量处， p 为奇数，而 $N_{\mathbb{H}/\mathbb{R}}/2$ 将问题归结为在 $\mathbb{R}$ [66, 21, 79, 40] 上进行相同的计算。有限 Moore 谱是可对偶的，因此与乘积可交换；涉及滤过余极限和正覆盖的比较也保持相同的范围。因此，模- p 余纤维有上界。上文证明的消失性以及在 $K(1)$-局部谱上模- p 约化的保守性给出

$$LB_R \xrightarrow{\sim} L\Theta_{R,p}.$$

对于保守性断言，若 $T/p = 0$，则 p 在 T 上可逆，但在$K(1)$上作用为零，因此 $K(1) \otimes T = 0$；若 T 也是 $K(1)$-局部的，则 $T = 0$。

与公共模型上的完美模张量化与所有局部因子和过渡映射相容，因此 $\Theta_{R,\ p}$ 可以在 $LK(U_0)$-模范畴中构造。对 y 求值可得 $\Theta_{D,\ p} \to \Theta_{F,\ p}$，其局部分量为 $m_{x|_v}^{-1}$。取乘积并对用于构造 h_0 的局部同伦取余极限，可得一个交换方块，其映射为 $B_R \to \Theta_{R,\ p}$。因此， Lh_0 是此求值的高度一局部化。

与完美左 $\mathcal{A}$-模张量积会保留离散模、阿代尔块和局部紧模上的正合结构，并且与局部化自然交换。因此，与公共模型上的完美模张量积也作用于定理 6.1.1 的局部化序列，从而得到由各行及其余纤维组成的单一图表。在上述粘合中，我们已规定了此图表完备化分量上的同伦；若 $p \nmid \deg D$，相关分量就是将 $\deg\ D$ 反演的分量，其中 $y = [\mathcal{A}^{\mathrm{op}}]/\deg\ D$，并且我们对 $N_{D/F}/\deg\ D$ 使用投影公式同伦。在有限个例外赋值处进行提升会保留这些同伦，而将结果返回到固定 g_D 的有理修正会在L下消失。应用 L 会消去交叠；对于 $p \mid \deg D$，p-完备化分量仍然存在；对于$p \nmid \deg\ D$，将 $\deg D$ 反演的分量仍然存在，因此整个方块与规定的求值一致。因此， Lc_D^{lc} 是对同一个 y求值。

□

6.3 比较纤维的悬挂与至少为二的次数中的分裂

T第 3.2 节中的全局分裂传递到比较方块的余纤维上。

定理 6.3.1。 令 $Z = \mathrm{fib}(g_D)$。定理 *6.2.2* 的比较映射满足

$$\mathrm{fib}(c_D^{\mathrm{lc}}) \simeq \Sigma Z. \tag{13}$$

还存在一个非典范等价，其第一投影为 $\tau_{\geq 2} c_D^{\mathrm{lc}}$，

$$\tau_{\geq 2} K(\mathrm{LCA}_D) \simeq \tau_{\geq 2} K(\mathrm{LCA}_F) \oplus \Sigma Z. \tag{14}$$

在 s *econd* 直和项上，局部化边界是自然包含映射 $\Sigma Z \to \Sigma \tau_{\geq 2} K(D)$.

证明。 根据 3×3 引理，(9) 中的垂直纤维构成一个纤维序列

$$Z \longrightarrow \mathrm{fib}(h_D) \longrightarrow \mathrm{fib}(c_D^{\mathrm{lc}}).$$

由于 h_D 是等价，故中间项消失，从而得到 (13)。

在 (8) 之后我们已经验证，对全部三项应用 $\tau_{\geq 2}$ 后仍得到一个纤维序列。根据定理 3.2.11，我们可以写成

$$\tau_{\geq 2} K(D) \simeq \tau_{\geq 2} K(F) \oplus Z, \qquad \tau_{\geq 2} g_D = \mathrm{pr}_1 .$$

通过 $\tau_{\geq 2} h_D$识别阿黛尔项后，我们验证（包括同伦）$\lambda_D \simeq (\lambda_F, 0)$。令 s 为 $\tau_{\geq 2} g_D$ 的一个截面，并令 $i\colon Z \to \tau_{\geq 2} K(D)$ 为纤维包含映射，再使用 $s \oplus i$给出的分解。沿着 s 限制该方形的指定同伦，得到 $\lambda_D s \simeq \lambda_F g_D s \simeq \lambda_F$。沿着 i 限制同一同伦，并与纤维零伦 $g_D i \simeq 0$ 复合，得到 $\lambda_D i \simeq \lambda_F g_D i \simeq 0$。因此，在箭范畴中有 $\lambda_D \simeq (\lambda_F, 0)$，且该等价还将余纤维上的 c_D^{lc} 与第一个投影相对应。取余纤维得到

$$\mathrm{cofib}(\lambda_F, 0) \simeq \mathrm{cofib}(\lambda_F) \oplus \Sigma Z,$$

which 证明了 (14)。最后一个断言由余纤维边界的定义得出 y. □

推论 6.3.2。 令 $e_\ell = \ell^{v_\ell(\text{次数 } D)}$ 和 $G_{\ell,j} = \pi_j Z_{(\ell)}$，如定理 *3.2.30* 中所述。该 n

$$\mathrm{fib}(c_D^{\mathrm{lc}}) \simeq \bigoplus_{\ell \mid \deg D} \bigoplus_{j=4}^{e_\ell - 3} \Sigma^{j+1} H(G_{\ell,j}),$$

并且，对于 $n \geq 2$,

$$K_n(\mathrm{LCA}_D) \cong K_n(\mathrm{LCA}_F) \oplus \bigoplus_{\ell \mid \deg D} G_{\ell, n-1}.$$

这里我们将 $G_{\ell,j} = 0$ 设在所述范围之外，并且如果存在实分歧，则从和式中省略 $\ell = 2$ 。特别地， c_D^{lc} 在次数 1 至 4上是同构，而最早可能出现差异的次数是 5。如果 $e_3 = 9$，那么在 $\ell = 3$ 处，唯一可能出现的差异是三个有限群，分别位于次数 5、6和 7。

证明。 我们将定理 3.2.30 与 (13) 和 (14) 结合起来。次数为一的同构由纤维序列 $\mathrm{fib}(c_D^{\mathrm{lc}})$ $\to Y_D \to Y_F$ 的长正合列得到。这里并未断言这些有限群中的任何一个非零。

□

定理 6.3.3。 对于每个中心除法代数 D *over* F，存在一个同构

$$K_2(\mathrm{LCA}_D) \cong K_2(\mathrm{LCA}_F)$$

取整系数时，即使 D 在实位处分歧也成立。特别地， *[15,* 猜想 *10.2]* 成立。

证明。 根据 [15, 定理 10.5], ，只需证明：对于 D 以及每个完备化 D_v， K_2 上的约化范数是单射，且其像是那些 K_2 在实位处分歧处的希尔伯特符号之核。对于 D ，这就是定理 2.3.2；对于有限处 D_v ，这就是定理 1.1.1。在 D 分裂的无穷处，由 Morita 等价可知结论成立。在 D 分歧的实位处， D_v 与哈密顿四元数 $\mathbb{H}$莫里田等价，其指标为 2。根据 [39, 推论 2], （其假设由范数剩余同构定理 [85], 提供），Nrd_2 在 $K_2(\mathbb{H})$ 上是单射，其像为 $[\mathbb{H}] \cup -$ 的核： $K_2(\mathbb{R}) \to H^4(\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2)$。由于 $[\mathbb{H}] \cup (a) \cup (b)$ 当且仅当 a 和 b 都为负，因此该核就是希尔伯特符号的核。

□

6.4 Selmer K-同调与阿代尔类

我们使用 Selmer K-同调来比较 c_D^{lc} 与 Clausen 的 pro-p Artin 映射，并计算其在阿代尔类上的映射（定理 6.4.1）。

设 p 为素数；若 D 在实位处分歧，则假设该素数为奇数。记 $L = L_{K(1),p}$。如定义 0.2 和 3.2]所述，我们用 $\mathrm{lc}_{\mathbb{Z}}$ 表示第二可数局部紧阿贝尔群 $\mathrm{LCA}_{\mathbb{Z},\aleph}$的有界导出范畴；$\omega = \omega_{K(1),p}$ 表示 $K(1)$-局部对偶化对象；$\mathbb{D}_p(T) = \text{映射}_{\mathrm{Sp}}(T, \omega)$表示函数谱。对于小的幂等元完备 $\mathbb{Z}$-线性稳定 ∞-范畴 P，Clausen 的 p-进 Selmer K-同调 dK_p^{Sel}(P) 是 $\mathbb{D}_pK$(P) $\leftarrow \mathbb{D}_p$TC(P) $\to d_{\mathrm{TC}}$TC(P) 的同伦推出，其中左侧映射是回旋迹的对偶，而 d_{TC} 是 TC 的 Clausen 对偶（定义 2.1]）；若 p 在 P 中可逆，则根据命题 2.11(1)], 它等价于 $\mathbb{D}_pK$(P) [19, 。我们用 $\mathrm{j} \in \pi_0 dK_p^{\mathrm{Sel}}(\mathrm{lc}_{\mathbb{Z}})$ 表示 Clausen 基本类 [19, （定义 1.4 和 4.2]）。按照我们对右 D-模的约定，用于求值的完美复形是左 D-模，即 Perf(D^{op}) 中的对象。因此，定义 Selmer 对象如下：

$$\mathsf{S}_{D,p} = dK_p^{\mathrm{Sel}}(D^{\mathrm{op}}), \qquad \mathsf{S}_{F,p} = dK_p^{\mathrm{Sel}}(F).$$

下面的取值是在第二可数局部紧模上进行的，并利用引理 6.1.3 中包含映射的 K-等价将其转移到整个范畴。事实上，一个第二可数右 D-模 M_0 定义了一个正合函子 Perf(D^{op}) $\to$lc$_{\mathbb{Z}}$ by$P \mapsto M_0 \otimes_D P$。这一对应关系诱导出一个正合函子

$$D^b(\mathrm{LCA}_{D,\aleph}) \longrightarrow \mathrm{Fun}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Perf}(D^{\mathrm{op}}), \mathrm{lc}_{\mathbb{Z}}).$$

沿着此求值拉回 Clausen 基本类，得到

$$\mathrm{Art}_{D,p} \colon Y_D \longrightarrow \mathsf{S}_{D,p}.$$

这是 $\mathrm{lc}_{\mathrm{Perf}(D^{\mathrm{op}})}$ = Fun$_{\mathbb{Z}}$(Perf(D^{op}),lc$_{\mathbb{Z}}$) 的 Artin 映射与上述正合函子的 K-理论的复合映射。稳定范畴本身之间无需等价 [19, 定义 3.2 和 4.2，注 4.3–4.4]。

定理 6.4.1. 设 x 为公共模型上 p 处的类， y 为其 *Morita* 对偶，并按照引理 *6.2.1* 固定。则 $\rho_{D,\,p} = \mathbb{D}_p(m_y)$：$\mathsf{S}_{D,\,p} \to \mathsf{S}_{F,\,p}$ 是一个等价，而比较映射

c_D^{lc}: $Y_D \to Y_F$ 定理 *6.2.2* 的比较映射适配于一个同伦交换方形

$$\begin{array}{ccc} Y_D & \xrightarrow{\mathrm{Art}_{D,p}} & \mathsf{S}_{D,p} \\ {\scriptstyle c_D^{\mathrm{lc}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{D,p}} \\ Y_F & \xrightarrow{\mathrm{Art}_{F,p}} & \mathsf{S}_{F,p}. \end{array} \tag{15}$$

此外，$\mathrm{Art}_{D,p}$ 到 $\mathrm{fib}(c_D^{\mathrm{lc}}) \simeq \Sigma Z$ 的限制为零。根据 ***Clausen*** 的同构 $e_{F,p}$: $G^{\mathrm{ab}}{}_{,F}{}^{\wedge p} \xrightarrow{\sim} \pi_1 \mathsf{S}_{F,p}$，对于 $[(a_v)_v] \in \pi_1 Y_D = \prod_v K_1(D_v)/K_1(D)$，阿代尔类上的映射由下式给出

$$e_{F,p}^{-1}\,\pi_1(\rho_{D,p}\,\mathrm{Art}_{D,p})([(a_v)_v]) = \mathrm{rec}_{F,p}([(\mathrm{Nrd}_{D_v/F_v}(a_v))_v]). \tag{16}$$

这里假设 $a_v \in K_1(D_v)$ 在除有限多个有限处外，均来自整模型。映射 $\mathrm{rec}_{F,p}$ 是全局 ***Artin*** 映射，其规范化方式使得非分歧位置处的一致化元映到几何 ***Frobenius***，随后再投影到最大 ***pro-p*** 商；而 $e_{F,p}$ 的规范化方式与 *[19, 定义 2.37]* 中相同。

我们在两个引理之后证明定理 6.4.1，这两个引理共用以下选取。设 $x \in \pi_0 LK(D)$ 和 $y \in \pi_0 LK(D^{\mathrm{op}})$ 分别为公共模型上 p 处的类及其 Morita 对偶到 F 的基变换，它们在引理 6.2.1 之后固定。我们还固定使 (9) 成立的同伦，该同伦按注记 6.2.10 中的方式选取，并与局部化序列相容。

Lemma 6.4.2. 有了这些选择，m_y: $LK(F) \to LK(D^{\mathrm{op}})$ 是一个等价，因此 *is*

$$\rho_{D,p} = \mathbb{D}_p(m_y)\colon \mathsf{S}_{D,p} \longrightarrow \mathsf{S}_{F,p}.$$

双线性函子 $(M_0, P) \mapsto M_0 \otimes_D P$ 的塞尔默 K-理论定义了一个映射 Ψ_y: $LY_D \to LY_F$，与 y 求值，并将 $Lc_D^{\mathrm{lc}} \simeq \Psi_y$ 视为局部化序列之间的映射。

证明。令 $M = LK(D)$ 和 $M' = LK(D^{\mathrm{op}})$。由于数域上的范畴是 $\mathbb{Z}[1/p]$-线性的，[19, 命题 2.11] 给出

$$\mathsf{S}_{D,p} \simeq \mathbb{D}_p(M'), \qquad \mathsf{S}_{F,p} \simeq \mathbb{D}_p(LK(F)).$$

根据 y 的选择，映射 m_y: $LK(F) \to M'$ 是一个等价，并且 $\mu(-, y) \simeq m_x^{-1}$: $M \to LK(F)$。若 $p \nmid \deg D$，则 $y = [D^{\mathrm{op}}]/\deg D$ 且 $\mu(-, y) \simeq N_{D/F}/\deg D$，其中 $N_{D/F}$ 是第 6.2 节中使用的范数。因此 $\rho_{D,p} = \mathbb{D}_p(m_y)$ 是一个等价。

一般而言，y 并不由实际的完美模表示，因此其作用定义在局部化的 K 理论上。令 $\mathcal{L}_D = D^b(\mathrm{LCA}_{D,\aleph})$ 和 $\mathcal{L}_F = D^b(\mathrm{LCA}_{F,\aleph})$。与有限生成投射左 D-模作张量积，在局部紧模上定义为有限个直和的直和项，并保持第二可数性和正合序列。因此它给出一个正合双线性函子

$$\mathcal{L}_D \otimes_F \mathrm{Perf}(D^{\mathrm{op}}) \longrightarrow \mathcal{L}_F, \qquad (M_0, P) \longmapsto M_0 \otimes_D P.$$

上述范畴以及 $\mathrm{lc}_{\mathrm{Perf}(D^{\mathrm{op}})}$ 都是 $\mathbb{Z}[1/p]$-线性的，因此它们的 p-完备化拓扑循环同调为零，这与 [19, 命题 2.11] 中的塞尔默 K-同调相同。因此，对于这些范畴中的每一个 $\mathcal{P}$，塞尔默 K 理论的定义给出

$$K_p^{\mathrm{Sel}}(\mathcal{P}) \simeq LK(\mathcal{P}).$$

因此，该函子的 Selmer K-理论定义了 $LK(F)$ 上谱的配对，

$$LK(\mathcal{L}_D) \otimes_{LK(F)} M' \longrightarrow LK(\mathcal{L}_F).$$

对 y 求值，通过在第二个变量中代入 m_y，得到 $\Psi_y\colon\ LK(F) \to M'$。

局部极大序是遗传的，且没有负次数的 K-群，因此 (7) 中的每个因子以及滤过余极限都是连通的。由于 $K(D)$ 和 $K(F)$ 都是连通的，局部化序列表明 $K(\mathrm{LCA}_D)$ 和 $K(\mathrm{LCA}_F)$ 也都是连通的。因此，取正覆盖只会移除 $H(K_0)$，而它在高度一局部化下消失。利用引理 6.1.3，我们由此得到 $LK(\mathcal{L}_D) \simeq LY_D$ 以及 $LK(\mathcal{L}_F) \simeq LY_F$。在本引理之前，已固定使 (9) 可交换的同伦；引理 6.2.11 因而给出作为整个局部化序列之间的映射的

$$Lc_D^{\mathrm{lc}} \simeq \Psi_y.$$

□

引理 6.4.3. 采用引理 *6.4.2* 中的选择，

$$\rho_{D,p}\,\mathrm{Art}_{D,p}^{L} \simeq \mathrm{Art}_{F,p}^{L}\,\Psi_y \simeq \mathrm{Art}_{F,p}^{L}\,Lc_D^{\mathrm{lc}},$$

其中上标 L 表示经由高度一局部化的分解。

证明。 [19, 定义 4.2] 中的 Artin 映射是 Selmer K-理论求值配对与基本类 $\mathbf{j}$ 的复合映射。我们首先将 $\mathbf{j}_F\colon\ LK(D^b(\mathrm{LCA}_{F,\aleph})) \to \omega$ 定义为沿着到 $\mathrm{lc}_{\mathbb{Z}}$ 的遗忘函子对 $\mathbf{j}$ 作拉回，并在与同一个 $\mathbf{j}_F$ 复合后比较两边。求值的结合律，

$$(M_0 \otimes_D P) \otimes_F P' \simeq M_0 \otimes_D (P \otimes_F P'),$$

是此函子与 $\mathrm{Perf}(F)$ 的作用之间的双线性函子的自然同构，其中$P\prime\in\mathrm{Perf}(F)$。转到 Selmer K-理论并与 $\mathbf{j}$ 配对后，所讨论的两个伴随为

$$LY_D \otimes M' \longrightarrow LY_F \xrightarrow{\mathbf{j}_F} \omega \qquad \text{and} \qquad LY_F \otimes LK(F) \longrightarrow LY_F \xrightarrow{\mathbf{j}_F} \omega,$$

其中 $M' = LK(D^{\mathrm{op}})$，而最前面的箭头分别是求值配对和$LK(F)$ 的作用。分别与 $1 \otimes m_y$ 和 $\Psi_y \otimes 1$ 复合后，它们作为 谱之间的映射 $LY_D \otimes LK(F) \to \omega$ 一致，这是由求值配对关于 $LK(F)$ 的平衡性所致：

$$\mathrm{ev} \circ (\mathrm{Art}_{D,p}^{L} \otimes m_y) \simeq \mathrm{ev} \circ ((\mathrm{Art}_{F,p}^{L}\,\Psi_y) \otimes \mathrm{id}_{LK(F)}).$$

由内部 Hom 伴随以及 $\rho_{D,p} = \mathbb{D}_p(m_y)$，

$$\rho_{D,p}\,\mathrm{Art}_{D,p}^{L} \simeq \mathrm{Art}_{F,p}^{L}\,\Psi_y \simeq \mathrm{Art}_{F,p}^{L}\,Lc_D^{\mathrm{lc}}.$$

第二个等价是引理 6.4.2。 □

定理 *6.4.1* 的证明。 将引理 6.4.3 应用于相应的选择以及引理 6.4.2 的等价 $\rho_{D,p}$，得到 $\rho_{D,p}\,\mathrm{Art}_{D,p}^{L} \simeq \mathrm{Art}_{F,p}^{L}\,Lc_D^{\mathrm{lc}}$。两个 Selmer 对象都是高度一局部的，因此与 $Y_D \to LY_D$ 复合便得到 (15)。 x、 y 的选择以及局部化序列的交换性同伦是同时固定的；并未断言选择 $\rho_{D,p}$ 或 c_D^{lc} 的独立性（见定义 4.2 和注 4.3–4.4]）。

我们甚至可以更直接地验证，$\mathrm{Art}_{D,\,p}$ 在 $\mathrm{fib}(c_D^{\mathrm{lc}})$ 上的限制为零。根据定理 3.2.30， $Z_p^{\wedge}$ 是一个系数取自有限 p-群的有限 GEM。高度一局部化在 p-完备化下保持不变，并且会湮灭每个 Eilenberg–Mac Lane 因子，因此 $L(\Sigma Z) = 0$。因此，

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{Sp}}(\Sigma Z, \mathsf{S}_{D,p}) \simeq \mathrm{Map}_{\mathrm{Sp}}(L\Sigma Z, \mathsf{S}_{D,p}) \simeq *.$$

因此，$\mathrm{Art}_{D,\,p}$ 在 $\mathrm{fib}(c_D^{\mathrm{lc}})$ 上的限制为零，即使不考虑分裂方式的选择也是如此。

最后，由于 $\pi_0 X_D = 0$，纤维序列 (8) 给出 $\pi_1 Y_D =$ 余核$(K_1(D) \to \prod'_v K_1(D_v))$，对 F 也同样如此，因此 $\pi_1(c_D^{\mathrm{lc}})$ 是由 $(h_D)_1$ 诱导的映射。若存在实分歧，我们先取整数余核；由于目标具有 p 奇数，2 在其中可逆，故该公式唯一地延拓到 $\mathbb{Z}[1/2]$ 系数。这里，对于每个 v，都有 $\nu_{1,D_v} =$Nrd$^{D_v/F_v}$：在有限处由定理 1.1.1 得出；在分裂无穷位，这是因为 K_1 上的 Morita 比较就是行列式；在分歧实位，则因为 $\pi_1 N_{\mathbb{H}/\mathbb{R}} = 2\mathrm{Nrd}^{\mathbb{H}/\mathbb{R}}$ 在 $K_1(\mathbb{H})$ 上成立。因此，第 6.2 节中 (10) 的 $j = 1$ 情形给出 $\pi_1(c_D^{\mathrm{lc}})([(a_v)_v]) = [(\mathrm{Nrd}^{D_v/F_v}(a_v))_v]$。在域这一侧，阿代尔在 $\pi_1 Y_F$ 中的类由在 $\mathbb{A}_F$ 上的乘法表示，这正是 Clausen 比较映射 [19, 命题 3.28(1) 和推论 3.29(1)] 中所采用的描述。令$e_{F,p}$ 定义为 Pontryagin 对偶边缘映射的负值，则 [19, 定理 0.9] 在阿代尔类 [19, 定义 2.37 和引理 4.5] 上，将 $e_{F,p}^{-1} \circ \pi_1(\mathrm{Art}_{F,p})$ 识别为按定理中的规范化所定义的 rec$_{F,p}$。将此与 (15) 结合，即得 (16)。 □

弗罗贝尼乌斯与有限系数的比较映射

本附录讨论特征为 p 且具有[F 的域 F 上的特征主部分：$F^p] = p$，其中包括局部函数域和全局函数域；下文始终固定这样一个域 F。其主要结果命题 A.3 比较了权为$w \geq 1$ 的扭曲循环复形与普通循环复形，并证明当 D 具有 p-幂周期时，对于每个中心除法代数 D，$K_i(D;\mathbb{Z}/p^a) = 0 \quad i \geq 2$；这就是第 1.1、2.3、3.1 和 3.2 节在特征素数处所使用的输入。

循环复形的比较映射使用代数单纯形上的坐标 Frobenius，其拉回产生的重数可被指标整除。K-理论上的推论还需要非完美域上的支撑塔，我们在引理 A.2 中建立了这一点。对于域 F 上的中心除法代数 D 和 $w \geq 0$，根据约化秩（定义 2.3.3），约化循环映射 ρ 将 $z^w(F,\bullet;\ D)$ 识别为 $z^w(F,\bullet)$ 的子复形，该子复形由满足以下条件的循环组成：对于每个生成元 $[W]$，其系数都可被 ind$(D_{\kappa(W)})$ 整除。

引理 A.1。设 D 是 F 上的一个中心除法代数，其周期 $q = p^c$ 是 p 的幂；对于 $n \geq 0$，设 $f_n\colon\ \Delta^n \to \Delta^n$ 是将每个重心坐标提升到 q 次幂的有限平坦映射。在每个权 $w \geq 1$ 中，拉回 f_n^* 将普通循环复形z^w（$F,\bullet$）映射到子复形 ρ（z^w（$F,\bullet$；D））中；该子复形由这样的循环组成：在每个生成元$[W]$ 处的系数都能被 $\mathrm{ind}(D_{\kappa(W)})$ 整除。普通循环复形的单位映射与 $f_\bullet^*$ 单纯同伦，且所经过的映射都保持该子复形。

证明。设 W 是余维为 w的一个生成元，设 L 是 W 的逆像的约化函数域，并设 e 是该逆像的重数。映射 f_n 是次数为 q^n 的有限、平坦且纯不可分映射，而 W 的函数域与 FL^q 同构；因此$e[L\colon\ FL^q] = q^n$。由于 L 在 F 上的超越次数为 $n-w$，且 $[F\colon\ F^p] = p$，有限扩张下 p-秩的不变性给出 $[L\colon\ L^q] = q^{1+n-w}$。$q$ 次幂同构将 $LF^{1/q}/L$ 映射到 FL^q/L^q，因此 $[L\colon\ FL^q] = [L\colon\ L^q]/[LF^{1/q}\colon\ L]$。结合这些等式，我们得到

$$e = q^{w-1}[LF^{1/q} : L].$$

最后一个次数是 ind(D_L) 的倍数：在 q 次幂同构 $F^{1/q} \to F$ 下，限制通过乘以 q 作用于布劳尔类，因为它将定义用的 2-余循环提升到 q 次幂，所以 $LF^{1/q}$ 分裂 D_L。由于 $w \geq 1$, 我们得到 ind(D_L) $\mid e$，因此 f_n^* 将普通循环复形映入具有指标可整除系数的子复形。

对于单调映射 $\alpha\colon [n] \to [1]$，令 $s = \sum_{\alpha(i)=1} t_i$，并令 $h_\alpha(t)_j = (1-s)t_j + st_j^q$。像坐标之和为 $(1-s) + s\sum_j t_j^q = (1-s) + s(\sum_j t_j)^q = 1$。在几何纤维上，方程 $\sum_{\alpha(i)=1} h_\alpha(t)_i = s - s^2 + s^{q+1}$ 只留下有限种可能

s，且对每个固定的 s，每个坐标也只有有限种可能。因此，h_α 以及通过同样的计算得到的它在每个面的限制，都是同维光滑单形之间的准有限映射；由于源是 Cohen–Macaulay 的，而目标是正则的，根据奇迹平坦性，它们是平坦的 [78, Tag 00R4]。每个面上的平坦性，以及沿 Cartier 面适当相交的循环的 Tor 长度的复合公式，给出了 h_α^* 与面映射的相容性 [39, §§5.6, 5.9]。这些映射与退化映射中出现的坐标和相交换，因为 q 次幂映射是可加的。因此，h_α^* 在单位映射和 $f_\bullet^*$之间诱导出一个单纯同伦。由于经过平坦拉回后，每个剩余域上的指标都整除原指标，h_α^* 保留了具有指标可整除系数的子复形。

□

引理 A.2。设 k 为无限域，且设 A 为 k上的中心单代数。对于每个 $a \geq 0$，$K(-;\ A)$ 在$\operatorname{Spec} k$ 处的同伦余维塔的第 a层，通过 *[39, §6.2]*, 的循环映射，可与 A 权为 a的扭曲循环复形所对应的谱相识别。特别地，*[39,* 备注 *6.1.2*、推论 *6.1.4]* 中的强收敛谱序列在 k 上成立，而无需假设 k 是完美的。

证明。所引用的识别仅通过 [51,推论 4.2.3–4.2.4]中的几何纯性以及 [51, §5.2]才涉及完美性；我们用扭曲G-理论中的局部化替代前者，并且仅使用后者中的论证。其他输入，即 [51, 推论 3.2.2、定理 4.1.1], 、移动引理 [50, 定理 3.3.5], 以及 [39, 推论 6.3.3、命题 B.5]，连同 [39, 引理 6.4.3], 证明中的计算，只要求基域是无限域。一个 k-概形的每个剩余域都包含 k，因此都是无限域；而下文在剩余域 $\kappa(z)$ 上的塔均以 $\kappa(z)$ 作为基域。

对于一个 k-概形 X 和 $d \in \mathbb{Z}$，令 $G_{(d)}(X; A)$ 表示如下单纯谱的几何实现：其 n-单形是对闭子集 $W \subset X \times \Delta^n$ 取余极限所得，其中 $\dim(W \cap (X \times \Delta^f)) \leq d + \dim \Delta^f$ 对每个面 Δ^f均成立；该余极限取自支撑在 W上的 G-理论的 A-模。对于纯维数为 m的 X，记 $G_a(X) = G_{(m-a)}(X; A)$，并记 $\mathrm{gr}_a = \operatorname{cofib}(G_{a+1} \to G_a)$。对于 $b \geq 0$，G_a 的第 b 个外层阶段 $G_a^{(b)}$是如下单纯谱的几何实现：其 n-单形是对闭子集 $W \subset X \times \Delta^n$ 取余极限所得，其中 $\operatorname{codim}_{X \times \Delta^f}(W \cap (X \times \Delta^f)) \geq b$ 对每个面 Δ^f均成立；该余极限取自 $\operatorname{fib}\big(G_a(X \times \Delta^n) \to G_a((X \times \Delta^n) \setminus W)\big)$；$G_a$内的支撑条件与外部支撑 W 分别施加。更一般地，对于适用此外层构造的函子 E，记 $E^{(b)}$ 为其第 b 个外层阶段，记 $E^{(b/b+1)} = \operatorname{cofib}(E^{(b+1)} \to E^{(b)})$ 为其第 b 个外层层；特别地，$E^{(0/1)} = \operatorname{cofib}(E^{(1)} \to E^{(0)})$。设 $Q_{a,b} = G_a^{(b/b+1)}$。对于 X 中纯余维数为 c 的闭子概形 $Z \subset X$，[39, 推论 6.3.3] 给出 $(G_a)_Z(X) \simeq G_{a-c}(Z)$。设 $Z_n = Z \times \Delta^n$；两次取限制映射的纤维后，外部支撑变为 $W \cap Z_n$，它在 Z_n的每个面上余维至少为 $b - c$；反过来，Z_n 上的每个此类支撑都来自某个 W。从现在起，设 X 在 k 上光滑且纯维；闭子概形 Z 不必光滑。$U = X \setminus Z$ 上的可容许支撑未必在 X中有可容许的闭包；我们首先用从 X 继承的支撑计算双重纤维，然后在几何实现之后，利用应用于 $E = G_a$的 [51, 推论 3.2.2]，将其与 U 上的所有可容许支撑进行比较。于是，G_a 是$K(-; A)$的一个 coniveau 阶段，并且 [51, 定理 4.1.1] 适用。对每个外部支撑 $W \subset Z \times \Delta^n$ 应用相同的局部化，会将每个面上的余维条件从 (a, b) 移至 $(a - c, b - c)$；闭嵌入推前与到各面的拉回相容，因为将 $Z \times \Delta^n$ 拉回到单纯形各面所得到的乘积方块是 Tor-独立的。按余维过滤（在 X中度量），并转至泛点后，第 b 个外层层在余维为 c 的点 z 处的带支撑项，是 $\kappa(z)$上的指标为 $(a - c, b - c)$ 的项。为转至泛点，我们从环境光滑 X中移去余维更高的闭子集，取闭支撑之差，并对开子集取极限；这并不要求闭分层光滑。这替代了 [51, 推论 4.2.3–4.2.4]中使用的几何纯性。

我们断言，当 $0 \le b < a$ 时，外层层 $Q_{a,b}$ 消失；证明对 a 使用归纳法。在余维为 $c > 0$ 的点 z 处，$Q_{a,b}$ 的带支撑项是 $Q_{a-c,b-c}$ 在 $\kappa(z)$ 上的项。当 $b - c < 0$ 时它消失，因为此时相邻两个外层阶段的支撑条件重合；当 $b - c \ge 0$ 时则由归纳假设消失，因为此时 $0 \le b - c < a - c < a$。将有限多个面上的维数条件缩至稠密开子集，可为转至泛点提供依据。对于 $b = 0$，在 [51, 引理 5.2.1], 的证明中所用的半局部单纯形计算——其中支撑避开顶点，并使用移动引理——应用于同时施加内面条件和外面条件的外层第 0 层$G_a^{(0/1)}$，可直接得到 $Q_{a,0} = 0$ 。对于$b > 0$，归纳法表明 $Q = Q_{a,b}$ 是双有理的，因此其正余维处的带支撑纤维消失，而 $\mathbb{A}^1$-不变性给出 $Q(K) \simeq Q^{(0/1)}(K)$。由取层的正合性，右侧是 $(G_a^{(b+1)})^{(0/1)} \to (G_a^{(b)})^{(0/1)}$ 的余纤维；将相同的半局部单纯形计算分别应用于 $G_a^{(b)}$和 $G_a^{(b+1)}$，并同时施加内面条件和外面条件，可知这两项都消失。这就是 [51,命题5.2.2],中的论证，只是将几何 Gersten 项替换为上述带支撑项。另外，gr_a 在余维为 $c > a$ 的点处的带支撑项消失，因为此时 G_{a-c} 和 G_{a+1-c} 都是G-理论，且维数条件一致。

对于光滑的 X，将外部第 a 层应用于 $G_a \to K(-; A)$，可在余维至少为 a的支撑上得到一个等价。将其应用于 $G_a \to \mathrm{gr}_a$ 也得到一个等价，因为根据该断言， G_{a+1} 的贡献消失；带有 $b < a$ 的外层也同样消失，因为 $Q_{a、b} = Q_{a+1、b} = 0$。由于 gr_a 在外部余维至少为 $a+1$ 时消失，外部第a层恢复了 gr_a。为计算它，注意在每个单纯形次数 n中，高余维处的消失排除了支撑的交，而有限个不相交支撑的可加性给出了 $\mathrm{gr}_0(\kappa(w); A_{\kappa(w)})$ 在余维为a 的点 w 上的直和，其中这些点属于 $X \times \Delta^n$ ，且其闭包满足所有面条件。每一项都可识别为 $\sim K(\Delta^\bullet; A_{\kappa(w)})$，即关于半局部单纯形（定义在 $\kappa(w)$ 上、且针对避开顶点的支撑进行局部化）的 K-理论。 [39, 引理 6.4.3]的证明中的半局部单纯形计算给出 $\mathrm{gr}_0(\kappa(w); A_{\kappa(w)}) \simeq H(K_0(A_{\kappa(w)}))$: 其他次数由对完整半局部单纯形及其边界的计算而消失，而 $\pi_0 = K_0(A_{\kappa(w)})$ 则是因为半局部 1-单纯形的两个顶点求值在约化秩上相等。该计算仅使用 Vorst 定理中边界的K_1-正则性，以及 [39, 命题 B.5], 从半局部环到边界的 GL 满射性和在 K_0上的单射性；这些性质在任意剩余域上都成立。我们只使用了对 HK_0的这一计算，而不使用该引理中的层的识别，因为后者依赖于 [39, 定理 3.2.4]。 π_0 上的映射是到泛点的限制，也就是 [39,§6.2]的循环映射。总之，对于光滑的 X ，我们有

$$K(-; A)^{(a/a+1)}(X) \xleftarrow{\sim} G_a^{(a/a+1)}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_a^{(a/a+1)}(X) \xleftarrow{\sim} \mathrm{gr}_a(X).$$

□

命题 A.3。 令 D 为 F上的中心除法代数。

1. 若 D 的周期是 p的幂，则对每个权 $w \ge 1$ ，从 D 的扭曲循环复形到 F 的普通循环复形的约化循环映射是一个整系数拟同构。*2.* 对于 $i \ge 2$ 及任意 $a \ge 1$，有 $K_i(D; \mathbb{Z}/p^a) = 0$，且乘以 p 在 $K_i(D)$ 上是一个同构。

证明。 (1) 如引理 A.1 前所述， ρ 将扭曲循环复形与子复形 $\rho(z^w(F, \bullet; D))$ 识别起来，该子复形属于 $z^w(F, \bullet)$；根据[39, 引理 5.9.1], 这一识别与面映射相容。由引理 A.1，普通循环复形的单位映射与 $f_\bullet^*$ 单纯同伦，且该同伦由保持此子复形的映射构成，因此同伦可下降到

商上，而 $f_\bullet^*$ 在商上诱导零映射。在交错面复形上，它给出了从商的单位映射到零映射的链同伦，因此该商是无环的。

(2) 由于 $[F\colon F^p]=p>1$，域 F 是不完备的，因此是无限的。通过限制到一个次数与 p 互素、能分裂这些布劳尔分量的有限可分扩张，可以消去与 p 互素的布劳尔分量；这保持了 $[F\colon F^p]=p$，而对于模 p的比较映射，该限制是一个分裂单射，因为限制与余限制的复合映射是乘以次数的映射。由 Morita 等价，我们可以进一步假设 D 的周期是 p的幂。根据引理 A.2， D 的扭曲循环复形的强收敛谱序列在 F上可用，并且塔的连通性估计在采用 Moore 系数时仍然成立。在权 $w\geq 1$下，(1) 将模 p 层与交换情形的层等同起来；这些层集中在次数 w，在那里它们是 $K_w^M(F)/p$ [27]。对于 $w\geq 2$，它们为零： $K_w^M(F)/p$ 通过 d对数映射 [11, 推论 (2.8)],嵌入 Ω_F^w，且 $\Omega_F^w=0$ ，因为 $[F\colon F^p]=p$。权重零层集中在零次。因此，对于 $i\geq 2$， $K_i(D;\mathbb{Z}/p)=0$ 。关于 $\mathbb{Z}/p\to\mathbb{Z}/p^{a+1}\to\mathbb{Z}/p^a$ 的系数序列给出：通过对 a作归纳法，对 $i\geq 2$ 及所有 $a\geq 1$ ，都有$K_i(D;\mathbb{Z}/p^a)=0$ 。在 Bockstein 正合列$0\to K_i(D)/p\to K_i(D;\mathbb{Z}/p)\to K_{i-1}(D)[p]\to 0$中， $i\geq 2$ 的消失给出：对 $i\geq 2$ ，有 $K_i(D)/p=0$ ；对 $j\geq 1$，有 $K_j(D)[p]=0$ 。因此，对 $i\geq 2$，乘以 p 的映射是 $K_i(D)$上的同构。

□

B 相对拓扑循环同调与整类提升

定理 4.2.2 的证明将极大阶中的一个类与有限截断处的拓扑循环同调进行比较，然后用一个整类表示该类，其在 $K_2(D)$中的像受到控制；定理 5.1.4 的证明则运用了关于深层主单位和相对 K_1的结果。B.1 节和 B.2 节在有限截断处提供迹比较，并证明深层同余核在 $K_2(D)$中的像由一个固定分裂域上的转移构成；其余小节则证明，在固定截断中，来自足够深截断的像可由整类表示。

B.1 支撑与同余塔

在极大阶的有限截断处，我们使用相对圆分迹来比较整的相对 K-类。

引理 B.1.1. 设 Λ 是一个含幺结合环，其中 p 是幂零的，并设 $I\subset\Lambda$ 是一个幂零双边理想。那么每个 $K_i(\Lambda,I)$ 都是一个 p-主挠群，且指数有界，其界取决于 i；此外， $K(\Lambda,I)$ 的同伦群在经 p完备化后保持不变。相对迹

$$K(\Lambda,I)^\wedge_p\xrightarrow{\sim}\mathrm{TC}(\Lambda,I)^\wedge_p$$

是一个等价；特别地 $K_i(\Lambda,I)\simeq\pi_i\mathrm{TC}(\Lambda,I)^\wedge_p$对所有 i均成立。

证明。 第一个断言是 Geisser–Hesselholt 的定理 A [26], ，第二个断言由此推出。这个等价是关于幂零理想的相对迹比较 [24]。 □

设 F 是完备离散赋值域， D 是 F 上的中心除法代数， $P=\mathcal{O}_D$ 是其极大阶； J 是 P 的 Jacobson 根， $\Delta=P/J$ 是 D 的剩余除代数。局部化和分层归约给出纤维序列

$$K(\Delta)\longrightarrow K(P)\longrightarrow K(D).$$

设 π 是中心的一致化元，并令 $P_s = P/\pi^s P$ 和 $J_s = J/\pi^s P$。于是 J_s 是幂零的，且 $P_s/J_s = \Delta$。若 p 是剩余特征，则 p 在 P_s 中是幂零的，因此引理 B.1.1 适用于 $(P_s,\ J_s)$，也适用于 Iwahori 和交换截断，并在固定截断处将相对类识别为整数类。此比较不能直接应用于 $P \to P_s$ 的核 $\pi^s P$。为了比较同余塔中的相对项与带支撑的项，我们使用它们各自的连续性结果 [24, 26, 25, 21]。

引理 B.1.2. 设 R 为离散赋值环，其一致化元为 π；设 C 为在 R上有限自由的极大阶，并令 $\Delta = C/J(C)$。设 H 为 $r \times r$ *Iwahori* 阶，其对角线及对角线上方的项为 C，对角线下方的项为 $J(C)$。令 $J_H = J(H)$，并设 f为最后一个对角幂等元。设 $H_s = H/\pi^s H$ 和 $C_s = C/\pi^s C$。相对角余纤维之间的过渡映射 $Z_s \to Z_j$

$$Z_s = \operatorname{cofib}\big(K(C_s, \Delta) \longrightarrow K(H_s, H/J_H)\big)$$

当 $s > j$时为零同伦。在截断之前，相对角映射 $K(C, \Delta) \ \to K(H, H/J_H)$ 是一个等价。

证明。 证明仅用到 C 在 R 上有限自由以及 $\pi C \subset J(C)$这一事实。在 Z_s中，映射 $K(C_s)$ $\to K(H_s)$对右模是 $- \otimes_{C_s} fH_s$，而 $K(\Delta) \to K(\Delta^r)$是最后一个因子的包含映射，其中 $H/J_H = \Delta^r$。首先考虑截断之前的序。角 $fHf = C$ 上的右 C-模 Hf 是自由的，因此 $Hf \otimes^{\mathbb{L}}_C fH = Hf \otimes_C fH$，且乘法映射 $Hf \otimes_C fH \to H$ 是单射。该乘法映射的余核$\mathcal{E}$ 是剩余 $r-1$ 个顶点上的 Δ 上的上三角代数，因此导出商$H/^{\mathbb{L}}(HfH)$（由 f 得到）等价于 $\mathcal{E}$。根据其使 f 成为零对象的泛性质，导出商与沿中心的导出基变换相交换。因此

$$H_s/^{\mathbb{L}}(H_s f H_s) \simeq \mathcal{E}_s, \qquad \mathcal{E}_s = \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_R R/\pi^s R.$$

由于 H, C 在 R上是平坦的，左侧的角就是实际的环 C_s。对于微分分次代数$\mathcal{E}'$，例如$\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}_s$，我们将 Perf($\mathcal{E}'$) 中完美$\mathcal{E}'$-模范畴的 K-理论记为 $K(\mathcal{E}')$。此识别与过渡映射 [14]相容。

$R/\pi^s R$ 的两项 Koszul 模型给出$\mathcal{E} \ \oplus \mathcal{E}\epsilon_s$，作为$\mathcal{E}_s$的$\mathcal{E}$-代数模型，其中$|\epsilon_s| = 1$、 $\epsilon_s^2 = 0$和 $d\epsilon_s = 0$。对于 $s \geq j$，过渡由 $\epsilon_s \mapsto \pi^{s-j}\epsilon_j$给出。由于 $\pi\mathcal{E} \ = 0$，对于 $s > j$，过渡分解为

$$\mathcal{E}_s \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_j,$$

其中第一映射是增广映射 $\epsilon_s \mapsto 0$，第二映射是到零次部分的包含映射，也是$\mathcal{E}_j$的增广映射的一个截面。因此， $K(\mathcal{E}_s,\mathcal{E}) \ \to K(\mathcal{E}_j,\mathcal{E})$ 是零同伦的。

我们比较导出商的局部化序列与剩余环 $H/J_H = \Delta^r$ 的角局部化序列。上三角代数的 K 理论就是其对角线的 K 理论，因此 $K(E_n\text{群}) \ \simeq \bigoplus_{i=1}^{r-1} K(\Delta)$。将 $K(C_s) \ \to K(H_s)$ $\to K(E_n\text{群}_s)$ 置于 $K(\Delta) \ \to K(\Delta^r) \ \to K(\Delta^{r-1})$ 之上，其中右侧垂直映射是先施加增广映射，再施加对角投影；垂直纤维便给出与过渡映射相容的 $Z_s \simeq K(E_n\text{群}_s,\ E_n\text{群})$。由此得到所需的零伦。截断之前，同一比较的余纤维为零。

□

引理B.1.3. 设 R 是一个剩余域为 k、特征为 p的交换 *Hensel* 局部环， Λ 是一个含幺结合 R-代数，且 $I \subset \Lambda$ 是一个幂零理想。设 $a \geq 1$。对于有限 *étale* k-代数 U，令 R_U 为其 *Hensel* 提升，并记 $\Lambda_U = \Lambda \otimes_R R_U$和 $I_U = I \otimes_R R_U$。令 $\boldsymbol{X}$ 为通过有限 *étale* 基变换定义的谱层

$$U \longmapsto K(\Lambda_U, I_U)/p^a.$$

特别地，$X(k) = K(\Lambda, I)/p^a$。令 $X_{\bar{k}}$ 为 X 的几何茎。那么存在一个自然的短正合列

$$0 \longrightarrow H^1(k, \pi_3 \mathcal{X}_{\bar{k}}) \longrightarrow \pi_2 \mathcal{X}(k) \longrightarrow (\pi_2 \mathcal{X}_{\bar{k}})^{G_k} \longrightarrow 0.$$

证明。 Hesselholt–Larsen–Lindenstrauss 证明了对任意结合R-代数 [32, ，étale 基变换成立（命题 3.1，补遗 3.2]）。他们的推论 3.3 表明，对于具有群 G 的有限伽罗瓦 étale 扩张 $R \to R'$，

$$\mathrm{TR}^n_i(\Lambda; p) \simeq H^0(G, \mathrm{TR}^n_i(\Lambda_{R'}; p)), \qquad H^q(G, \mathrm{TR}^n_i(\Lambda_{R'}; p)) = 0 \quad (q > 0).$$

Hesselholt–Larsen–Lindenstrauss 的这些结果既不要求剩余域有限，也不要求 $p \neq 2$。我们比较有限 Postnikov 截断，然后取逆极限，得到 $\mathrm{TR}^n(\Lambda; p) \simeq \mathrm{TR}^n(\Lambda_{R'}; p)^{hG}$。沿限制映射和弗罗贝尼乌斯取极限，得到 $\mathrm{TC}(\Lambda; p) \simeq \mathrm{TC}(\Lambda_{R'}; p)^{hG}$。由于同伦不动点保持谱的有限极限和有限余极限，这种下降对相对项和 Moore 系数也成立。

由于 I 是幂零的，相对迹比较给出 $K(\Lambda, I)/p^a \simeq \mathrm{TC}(\Lambda, I)^\wedge_p/p^a$，因此上述有限 étale 下降对 X 也成立。TC 模 p^a 与滤过余极限可交换，这意味着 $\mathrm{X}_{\bar{k}} \simeq \operatorname{colim}_{k'} \mathrm{X}(k')$，且 $\mathrm{X}_{\bar{k}}$ 的每个同伦群都是离散的 G_k-模，其中 k' 遍历 k [24]中 k 的有限可分扩张（定理 2.7]）。X 和 $\mathrm{X}_{\bar{k}}$ 的同伦群均被 p^{2a}湮灭，因为它们是由 $\pi_j K/p^a$扩张而成的 $\pi_{j-1} K[p^a]$；特别地，它们是 p- 主的。根据推论 3.3] ，较高阶群上同调消失；每个 TR^n 的 Eilenberg–Mac Lane 层都是层，因此有限 Postnikov 截断是超层，而连通性、定义 TC 的极限、相对纤维和 Moore 系数都保持这一性质。由于 k 的特征为 p，$\mathrm{cd}_p(k) \leq 1$ [77, II, §2.2, 命题 3], ，因此每个有限 Postnikov 截断的下降谱序列只有零次和一次上同调次数。截断尾项在下降过程中至多损失一个连通次数，所以其连通性仍趋于无穷；连续下降谱序列收敛，从而得到所显示的短正合列。

□

B.2 固定分裂域的同余分离

接下来我们证明， $K_2(P)$ 的足够深层同余核在 $K_2(D)$ 中的像由来自某个固定分裂域的转移构成。这使我们能够在正文中使用有限截断。

引理 B.2.1. 设 F 是完备离散赋值域， D/F 是中心除法代数，而 M/F 是有限可分裂域。对所有充分大的 s,

$$\operatorname{im}\big(\ker[K_2(P) \to K_2(P_s)] \longrightarrow K_2(D)\big) \;\subseteq\; \theta_M K_2(M).$$

证明。 局部环 P 和 P_s 的 Bass 稳定秩均为 1。事实上，左幺模对中至少有一个分量是单位；如果第一个分量不是单位，加上第二个分量即可使其成为单位。因此，Suslin–Tulenbaev 的非交换稳定性定理允许我们固定一个与 s无关的 $n \geq 5$，使得 $K_2(P) \simeq \ker(\mathrm{St}_n(P) \to E_n(P))$，并且对 P_s 和 D [81]也有类似的同构。

如有必要扩大 n ，这不会影响这些稳定化同构，因此我们可以假设推论 2.1.7 适用于 $E = M$。由于稳定化将 $\mathrm{St}_n(D) \to E_n(D)$ 的核和稳定万有中心扩张的核与 $K_2(D)$ 识别起来，群 $\mathrm{St}_n(D)$ 是将该稳定扩张拉回至 $E_n(D)$所得的拉回。置

$$\Gamma_m = E_n(D) \cap (1 + \pi^m \operatorname{Mat}_n(P)).$$

根据推论 2.1.7，当 m 足够大时，在 Γ_m 上存在一个群同态截面 σ，其取值于 $\mathrm{St}_n(D)/\theta_M K_2(M) \to E_n(D)$。

我们取 $s \geq 2m$。根据 Steinberg 群的表示，$\mathrm{St}_n(P)$ 到 $\to \mathrm{St}_n(P_s)$ 的核是由满足 $t \in \pi^s P$ 的根元素 $x_{ij}(t)$ 生成的正规闭包。事实上，在模掉该正规闭包的商中，系数可以写成 P_s 的元素，并且 P_s 上的三类 Steinberg 关系可以利用任意提升加以验证。对于互异的 i、j、k，

$$x_{ij}(t) = [x_{ik}(\pi^m), x_{kj}(\pi^{-m}t)].$$

令 $\gamma \in \mathrm{St}_n(P)$，并令 u_1 和 u_2 分别为 $\gamma x_{ik}(\pi^m)\gamma^{-1}$ 和 $\gamma x_{kj}(\pi^{-m}t)\gamma^{-1}$ 的矩阵像。由于 $s \geq 2m$，$x_{ik}(\pi^m)$ 和 $x_{kj}(\pi^{-m}t)$ 的矩阵像属于 Γ_m，而且由 γ 的像进行共轭会保持 $E_n(D) \cap (1 + \pi^m \mathrm{Mat}_n(P))$，因此 u_1、$u_2 \in \Gamma_m$。在中心扩张中，将任一提升替换为中心元素与其的乘积不会改变交换子。因此，$\gamma x_{ij}(t)\gamma^{-1}$ 在 $\mathrm{St}_n(D)/\theta_M K_2(M)$ 中的像为 $[\sigma(u_1)\ \sigma(u_2)] \in \sigma(\Gamma_m)$。

$\ker[K_2(P) \to K_2(P_s)]$ 中的每个元素都属于这个正规闭包，且其矩阵像为平凡元。因此，它在 $\mathrm{St}_n(D)/\theta_M K_2(M)$中的像属于 $\sigma(\Gamma_m)$，并映射到 $E_n(D)$中的单位元。根据截面性质，这个像是平凡的，因此该元素的泛纤维像属于 $\theta_M K_2(M)$。 □

B.3 深主单位与有限截断处的相对类

引理 B.3.1 控制深层主单位上的约化范数。

对于相对类 y，z，幂零理想的相对迹比较（引理 B.1.1）表明，在固定截断处，它们在相对 $\mathrm{TC}_p^\wedge$ 中的像相等，意味着它们在该截断处的积分 K_2 像相等。对于来自交换子域和零次循环轨道的修正，我们将使用下文的引理 B.4.1 和推论 B.5.1。

引理 B.3.1. 设 T 为完备离散赋值域，B/T 为中心除法代数，令 $C = O_B$，并设 π 为 T 中一个具有正赋值的中心元素。令 $U_s(C) = \mathrm{im}(1 + \pi^s C \to K_1(C))$。存在整数 s_0 和 t，使得对所有 $s \geq s_0$，约化范数在 $U_s(C)$ 上是单射，并且

$$1 + \pi^{s+t}\mathcal{O}_T \subseteq \mathrm{Nrd}_1(\mathcal{U}_s(C)) \subseteq 1 + \pi^s \mathcal{O}_T.$$

此外，对于每个 j，每个深度足够大的约化范数为 1 的单位都可以写成$\prod_i [b_i, c_i]$，其中 $b_i \in C^\times$ 和 $c_i \in 1 + \pi^j C$固定。对于满足以下条件的有限非分歧扩张，这些深度可以统一选取：C 的基变换是一个次数相同的除代数的极大阶。当 B/T 是中心单代数，且 $C \subset B$ 是满足 $C \otimes_{\mathcal{O}_T} T = B$的有限 O_T-子代数时，单射性、范数像的两个包含关系以及交换子表示仍然成立。

证明。 固定整单位 b_i，使其在 T 上张成 B。换位子乘积在单位元处的微分为$\sum_i (\mathrm{Ad}\ b_i - 1)c_i$。由约化迹配对的非退化性，微分像的正交补是 T b_i的公共中心化子，因此微分满射到 $\ker \mathrm{Trd}^{B/T}$ 上。消去分母后，我们使用带有固定右逆的逆函数定理，利用 c_i 中任意预先指定的深度，实现每一个足够深的约化范数为一的元素。由于交换子在 $K_1(C)$中消失，每一个足够深的约化范数为一的元素在 $K_1(C)$中的类都是平凡的；这证明了约化范数在$\mathcal{U}_s(C)$上的单射性。我们通过沿约化迹非零的方向应用亨泽尔引理得到左包含映射，并由具有整系数的约化特征多项式得到右包含映射。由于非分歧扩张不会改变固定雅可比矩阵及其右逆的分母的赋值，因此一个

深度对所有这类基变换都成立。对于一般的有限子代数 C，其单位仍在 T 上张成B，因为对于每个格基元素 a 以及所有充分大的 m，$1+\pi^m a \in C^\times$。因此，同样的约化迹配对和固定雅可比行列式论证仍然适用。 □

B.4 相对有限群轨道的稳定像

在固定截断下，我们证明，足够深的截断的相对同伦轨道在 π_2 上的像，与积分相对同伦轨道的像一致。

在本小节中，设 F 为完备离散赋值域，设 T/F 为有限伽罗瓦扩张，置 $G=\mathrm{Gal}(T/F)$，并设 $\pi \in F$具有正赋值。设 B/T为中心除法代数，并置 $C=\mathcal{O}_B$。设 H 为 C 或正文中使用的、具有角 C的 Iwahori 阶，并记 $J_H=J(H)$、$H=H/J_H$和 $H_s=H/\pi^s H$。我们假设 G 半线性地作用，保持该序、其剩余及其截断不变，并在一般中心 T上诱导指定的伽罗瓦作用。通过对模范畴的相应作用，我们也使用由环自同构表示、并由单位给出相容同构的弱作用。对于 Iwahori 覆盖，我们同样使用在由所有顶点的直和构成的代数上的实际作用，顶点平移在该代数上作用；在这种情况下，H 表示此代数。在正文的齐次单位型中，通过单位 x 的幂来识别顶点得到 $H \simeq M_r(C)$，而通过 Morita 等价传递到 C 上的弱作用属于 $H=C$的情形。该 Morita 等价与剩余及每个截断相容，并将顶点平移对应到角上的弱作用；在泛点处，覆盖侧为 $M_r(B)$，角侧为 B。对于这两种类型，在泛点处均有 $H_T=H\otimes_{\mathcal{O}_T} T \simeq M_r(B)$，且 $N_{T/F}\,\mathrm{Nrd}^{H_T/T}$ 在$K_1(H_T)$上是 G-不变的，因此它将下文所用、在余不变元中消失的边界映到 1。

引理 B.4.1。设 $Y=K(H,H)$ 和 $Y_s=K(H_s,H)$。对每个 j 以及所有充分大的s，

$$\mathrm{im}[\pi_2((Y_s)_{hG}) \to \pi_2((Y_j)_{hG})] = \mathrm{im}[\pi_2(Y_{hG}) \to \pi_2((Y_j)_{hG})].$$

当 $G=1$时，绝对谱 $Y=K(H)$ 和 $Y_s=K(H_s)$也有相同的结论。

若剩余特征为 p，则对每个 j 和每个 $x \in \pi_2((\mathrm{TC}(H,H)^\wedge_p)_{hG})$ 存在 $y \in \pi_2(Y_{hG})$ 使得 x 与 $\mathrm{tr}(y)$ 在 $\pi_2((\mathrm{TC}(H_j,H)^\wedge_p)_{hG}) \simeq \pi_2((Y_j)_{hG})$中的像相同。

证明。序 H 的整体维数为一，且环 H_s 和 H 是阿廷环，因此 H、H_s和 H 的负 K-群消失 [88, III，第 4 节及练习 4.3]。由于 H 完备，幂等元可分别模 $\pi^s H$ 和模 J_H提升，由此得到 K_0上的同构；结合 K_1上的满射性，可知 $K(H,\pi^s H)$、Y和 Y_s 都集中在次数至少为一的部分。因此，对 G-等变纤维序列$K(H,\pi^s H) \to Y \to Y_s$取同伦轨道后，我们看到 $\pi_2((Y_s)_{hG})$中每个元素的边界都属于$K_1(H,\pi^s H)_G$，且可由 $u \in 1+\pi^s H$ [88, III，引理 2.4(1)]表示。此边界在 $(\pi_1 Y)_G$中的像为零，因此 G-不变范数 $\lambda = N_{T/F}\circ \mathrm{Nrd}^{H_T/T}$给出 $\lambda(u)=1$。

我们将引理 B.3.1 的论证应用于 F。我们选取固定的 $b_i \in H^\times$，使其张成 T 上的 H_T，并考虑到 $\ker \lambda$ 的映射

$$\Phi((c_i),(a_\sigma)) = \prod_i [b_i,c_i] \prod_{\sigma\in G} \sigma(a_\sigma)a_\sigma^{-1}.$$

其微分为 $\sum_i$(共轭作用 $b_i-1)x_i + \sum_\sigma(\sigma-1)y_\sigma$。对于非退化配对 $(x,\ y)\mapsto \mathrm{Tr}^{T/F}\mathrm{Trd}^{H_T/T}(xy)$，该微分之像的正交补在交换子项之后为 T，再在 G 项之后为 $T^G=F$。因此，其像为 $\ker(\mathrm{Tr}^{T/F}\mathrm{Trd}^{H_T/T})$。由于 $d\lambda = \mathrm{Tr}^{T/F}\circ \mathrm{Trd}^{H_T/T}$，且两个迹映射均为满射，即使特征整除次数，$d\lambda$ 仍非零，并且 $\ker\lambda$ 在单位元处是光滑的。

使用具有固定雅可比矩阵的同一个逆函数定理，我们看到，对于每个 j 以及所有充分大的 s，每个满足 $\lambda(u) = 1$ 的 $u \in 1 + \pi^s H$，都可写成 $u = \Phi((c_i), (a_\sigma))$，其中 $c_i,\ a_\sigma \in 1 + \pi^j H$。

取相对初等关系 $[1 + bx] = [1 + xb]$[88, III 中的 $b = b_i$ 和 $x = (c_i - 1)b_i^{-1}$，练习 2.4] 表明 $[b_i, c_i]$ 在 $K_1(H, \pi^j H)$ 中消失。 $\sigma(a_\sigma)a_\sigma^{-1}$的类在 $K_1(H, \pi^j H)_G$ 中也消失，因此原边界在截断 j处为零。由正合性，给定元素在截断 j 处于 $\pi_2((Y_s)_{hG})$ 中的像，来自 Y的轨道。深度仅取决于 j 和固定数据。反向包含成立，因为从 Y 到 Y_j 的映射经由 Y_s分解。

对于 $G = 1$，同样的论证适用于 $Y = K(H)$ 和 $Y_s = K(H_s)$；从 $\mathrm{Nrd}_1(u) = 1$ 出发，因为边界在 $K_1(H)$ 中映为零。元素 π 可以是任意正赋值的中心元素。

在剩余特征为 p 时，根据引理 B.1.1，有限截断的相对 K-群在每个次数上都是 p-主挠群，且指数有界。每个轨道次数中只有有限多个项有贡献，因此 p-完备化不会改变 $(Y_s)_{hG}$ 的同伦群。我们在一个足够深的截断处应用同一引理中的迹等价，然后利用刚刚证明的像相等性，在固定截断处得到一个整代表元。

□

推论 B.4.2。设 T 为完备离散赋值域，设 B/T 为中心除法代数，置 $C = O_B$ 并令 $\Delta = C/J(C)$，再设 $\pi \in T$ 为任意具有正赋值的中心元素。令 $C_s = C/\pi^s C$。对于每个 j 以及所有充分大的 s，

$$\mathrm{im}[K_2(C_s) \to K_2(C_j)] = \mathrm{im}[K_2(C) \to K_2(C_j)].$$

相对群 $K_2(C_s, \Delta)$ 和 $K_2(C, \Delta)$也满足同样的等式。

证明。 我们将引理 B.4.1 的绝对与相对结论应用于 $G = 1$ 和$H = C$。

□

B.5 交换赋值环上的整代表元

最后，我们记录引理 B.4.1 的交换情形，该情形用于通过交换子域进行修正。

推论 B.5.1. 设 R 是剩余域为 κ 且特征为 p的完备离散赋值环。对于 $j \geq 1$，令 R_j 为 R 模一个固定一致化元的 j次幂所得的商。对于每个 $j \geq 1$ 以及每个 $x \in \pi_2$拓扑循环同调$(R, \kappa)^\wedge_p$，存在 $y \in K_2(R, \kappa)$ 使得 x 和$\mathrm{tr}(y)$ 在 π_2拓扑循环同调$(R_j, \kappa)^\wedge_p \simeq K_2(R_j, \kappa)$中的像相同。

证明。 我们将引理 B.4.1 的最后一个结论应用于 $G = 1$ 和 $H = R$。 □

C 带系数零循环与分裂转移的共同输入

本附录旨在证明推论 C.5 和引理 C.6，二者共同给出命题 4.2.3：在二维局部域上，约化范数将由分裂转移生成的子群同构地映到 $K_2(F)$。在特征之外，我们计算塞韦里–布劳尔簇乘积上的米尔诺 K系数零循环；在特征素数处，我们使用弗罗贝尼乌斯。

在本附录中，对于域 k 上的光滑簇 X，$M(X)$ 表示其整系数有效动机，而 Hom 表示以下类别中的态射：

有效动机。对于中心单代数 B/k，带转移的层 $\mathbb{Z}_B$ 在光滑整簇 U/k 上取值为 $\mathrm{ind}(B_{k(U)})\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$，而 $\mathbb{Z}_B(q) = \mathbb{Z}_B \otimes \mathbb{Z}(q)$ 表示其泰特扭曲。对于固定的、不同于特征的素数 ℓ，我们使用 $\mathbb{Z}_{(\ell)}$ 系数进行动机计算；若 $\operatorname{char} k = p > 0$，则 p 在这些系数下可逆。引理 C.6 中的弗罗贝尼乌斯计算使用整系数。回忆（定义 2.1.1），$I_F(D) = \sum_E \theta_E K_2(E)$ 是对所有有限分裂域 E/F 求和，无论其是否可分，并且 $\mathrm{Nrd}_2\,\theta_E = N_{E/F}$。

定义 C.1. 对于有限型 k-概形 Z 和 $j \geq 0$，令 $Z_{(a)}$ 表示闭包维数为 a的点集。罗斯特复形的低次项为

$$C_a(Z, K_j^M) = \bigoplus_{z \in Z_{(a)}} K_{j+a}^M(\kappa(z)) \quad (a = 0, 1), \qquad A_0(Z, K_j^M) = \operatorname{coker}(C_1 \xrightarrow{\partial} C_0).$$

微分是对一维点闭包的正规化取剩余映射之和，再接上剩余域上的范数。若像的维数相同，适当推前由剩余域范数定义；若维数下降，则定义为零；它与微分可交换。特别地，当 Z 在 k上适当时，结构映射给出次数映射 $\deg_Z\colon A_0(Z, K_j^M) \to K_j^M(k)$ [73]。

引理 C.2. 设 $f\colon X \to Y$ 是有限型 k-概形之间的适当态射，且设 $j \geq 0$。假设对于每个闭点 $y \in Y_{(0)}$，映射

$$A_0(X_y, K_j^M) \xrightarrow{\deg} K_j^M(\kappa(y))$$

是同构，并且对于每个 $\eta \in Y_{(1)}$，$A_0(X_\eta, K_{j+1}^M) \to K_{j+1}^M(\kappa(\eta))$ 是满射（分别将纤维 X_y 和 X_η 视为在 $\kappa(y)$、$\kappa(\eta)$上的概形）。则 $f_*\colon A_0(X, K_j^M) \to A_0(Y, K_j^M)$ 是同构。若将纤维上的两个假设和结论都取为带 $\mathbb{Z}_{(\ell)}$ 系数的情形，则结论同样成立。

证明。 满射性可由将零循环在每个闭点处的系数从相应纤维提升得到。对于单射性，取 $z \in C_0(X, K_j^M)$，并写作 $f_* z = \partial b$。根据假设，每个一维点 η 处 b 的系数都可从支撑在 X_η 的有限多个闭点上的系数 K_{j+1}^M 提升。我们在 X 中取这些点的闭包，并赋予其函数域上相同的系数，从而得到一条链 $\widetilde{b} \in C_1(X, K_j^M)$。这些闭包是曲线，且 $\widetilde{\ }$ 在 $\{\eta\}$ 上适当且泛有限。由这些闭包的正规化上的留数与域范数相容，即由适当推前的链映射性质，可得 $f_* \partial b = \partial b$。

因此 $f_*(z - \partial\widetilde{b}) = 0$ 属于 $C_0(Y, K_j^M)$。闭纤维上的 $z - \partial\widetilde{b}$ 的每一部分次数都为零，因此闭纤维上次数映射的单射性表明，它是$C_1(X_y, K_j^M)$ 中一条链的边界。沿闭浸入 $X_y \to X$ 将这些链推前并将其相加 $\widetilde{\ }$，可得 $z - \partial b$，从而 z 是一个边界。

□

引理 C.3. 假设 $\ell \neq$ 特征 k, $j \geq 1$, 且 $\mathrm{cd}_\ell\, k \leq j + 1$，并设 B/k 是一个次数为 ℓ 的中心单代数。那么次数映射

$$A_0(\mathrm{SB}(B), K_j^M)_{(\ell)} \xrightarrow{\sim} K_j^M(k)_{(\ell)}$$

是一个同构。

证明。 本证明中的所有同构均是在 ℓ-局部化后理解的。首先假设k 是完美的，并令 $X = \mathrm{SB}(B)$。考虑计算下式的锥维谱序列

$\mathrm{CH}^{\ell-1+j}(X,\ j)$; 由于 $n=$维数为 $X+j$，其 E_1-项为 $E^{a,\ -a}=\bigoplus_{x\in X^{(a)}} H^{b-a}(\kappa(x)\ \mathbb{Z}(n-a))$。在目标对角线上，次数减去权等于 $\dim X-a$；而在 d_r 的源处，该值等于 $r-1$，因此余维为 $a<\ell-1$的项以及进入目标项的微分 d_r（其中 $r\geq 2$）均消失，因为域上的上同调次数大于权。只剩下闭点处的K_j^M以及来自一维点处 K_{j+1}^M 的留数，因此由对偶性[39, 推论 C.7.3] 和消去定理可得

$$A_0(X,K_j^M)=\mathrm{CH}^{\ell-1+j}(X,j)=\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},M(X)(j)[j]).$$

根据有限塔 [39, (8.1)], ，其中 $f_\ell M(X)=0$， $M(X)$ 的第 s 层是$\mathbb{Z}_{B^{\otimes(s+1)}}(s)[2s]$，对于 $0\leq s\leq \ell-1$。对于 $s>0$，起作用的群

$$H^{j+2s}(k,\mathbb{Z}_{B^{\otimes(s+1)}}(j+s))$$

以及次数高一阶的群均消失，因为次数超过权。因此 $A_0(X,\ K_j^M)\simeq H^j(k,\ \mathbb{Z}_B(j))$；在底层，结构映射为 $\mathbb{Z}_B\ ,\to\mathbb{Z}$，所以次数映射对应于由该包含映射诱导的约化范数 [39, 引理 5.4.2、8.1.1(3)、定理 6.5.3、7.4.2]。范数剩余同构定理为 Kahn–Levine 正合列在每个所需权 [85] 下提供了 Beilinson–Lichtenbaum 假设。该序列使次数映射成为单射，其余核包含于 $H^{j+2}{}_{\mathrm{et}}(k,\ \mathbb{Z}/\ell(j+1))$ 中；根据上同调维数假设，该余核消失，因此次数映射是同构[39,定理 8.2.2(2)]。

若 k 的特征为正且并非完美域，则转至其完美闭包；有限étale位点等价，因此 cd_ℓ 保持不变。带系数零循环及其关系由有限多个数据定义，因而可下降到某个有限纯不可分阶段。单射性和满射性都可下降到 k，因为限制之后再作转移，等于乘以该阶段的次数；这是 p的幂，在 ℓ局部化后可逆。 □

命题 C.4. 设 $\ell\neq$特征 k, $j\geq 1$，且 $\mathrm{cd}_\ell k\leq j+1$。对于任意由中心单代数的塞韦里–布劳尔簇组成的有限乘积Z/k，次数映射

$$\deg_Z: A_0(Z,K_j^M)_{(\ell)}\xrightarrow{\sim} K_j^M(k)_{(\ell)}$$

是一个同构。

证明。 我们对满足假设的所有数对(k,j)同时证明该断言。对于有限型 k概形 W的一个 a维点，其剩余域 κ 满足 $\mathrm{cd}_\ell\kappa\leq\mathrm{cd}_\ell k+a\leq(j+a)+1$ [77, II, §4.2, 命题 11]。因此，在将引理 C.2 应用于一个投影时，两类纤维的基域都满足该界：闭点处的系数为 K_j^M，一维点处的系数为 K_{j+1}^M。对于因子 SB(B_i) 且 $\deg B_i=\ell$的乘积，逐纤维应用引理 C.3，并对因子个数归纳，即可得出次数映射是一个同构。

现在考虑任意中心单代数 B/k 的 $X=$SB(B)。我们可以扩张到一个次数与 ℓ 互素、能使其他主布劳尔分量分裂的有限可分扩张，并添入 μ_ℓ，这需要一个次数整除 $\ell-1$ 的扩张。限制与转移可将次数同构下降到原域。以下假设$[B]$ 的周期为 ℓ^r，并对 r 归纳。对于 $r=0$，使用射影丛公式。我们将$\ell^{r-1}[B]$ 表示为次数为 ℓ的符号代数类之和，并令 Y 为其塞韦里–布劳尔簇 [55, 85] 的乘积。

投影 $f\colon X\times Y\to X$的每个纤维都是若干个次数为 $B_i=\ell$ 的 SB(B_i) 因子的乘积，因此由前面的计算和引理 C.2 可知， f_* 是一个同构。在 Y 的每个剩余域 $\kappa(y)$ 上，点 y 都分裂每个符号代数因子，因此 $\ell^{r-1}[B]=0$ 在 $\kappa(y)$ 上。

因此，关于周期的归纳法适用于 $g\colon X\times Y\to Y$ 在闭点和一维点上的纤维，系数分别为 j 和 $j+1$，故由同一个引理可知 g_* 是一个同构。适当推前的传递性给出 $\deg_X=\deg_Y\circ g_*\circ f_*^{-1}$，这是一个同构，因为 $\deg_Y$ 本身已经是同构。最后，我们每次加入一个任意的代数因子，并使用相同的逐纤维论证，证明该断言对一般的有限乘积成立。

□

推论 C.5。设 $\ell\neq$ 特征 F 且 上同调维数$_\ell F\le 3$。对于每个D 上的中心除法代数 F，

$$\mathrm{Nrd}_2: I_F(D)_{(\ell)}\xrightarrow{\sim} K_2(F)_{(\ell)}$$

是一个同构。

证明。令 $X=$SB(D)。将每个闭点处由泛右理想给出的 Morita 等价与适当推前复合，得到 $\bigoplus_{t\in X_{(0)}}K_2^M(\kappa(t))\to K_2(D)$。在每个一维点的闭包的正规化上，泛理想的拉回使阿祖马亚代数分裂。在此处，从 Milnor K_3 到 Quillen K_3的映射与局部化边界及适当推前的复合为零，因为局部化序列中的连续映射复合为零。因此，Rost 边界关系消失，从而得到映射 $\Theta:A_0(X,K_2^M)\to K_2(D)$。每个闭点 t 都分裂 D，且 Θ 在 t 处的分量就是分裂转移 $\theta_{\kappa(t)}$。反之，X 在有限分裂域 E/F 上的一个有理点映射到闭点 t，并且有 $\theta_E=\theta_{\kappa(t)}N_{E/\kappa(t)}$。因此 im $\Theta=I_F(D)$。由于约化范数在每个闭点处都与域范数相容，我们有 $\mathrm{Nrd}_2\Theta=\deg_X$ [73, 68, 39]。由命题 C.4 及 $j=2$，次数映射在经过 ℓ-局部化后是一个同构，因此像 $I_F(D)_{(\ell)}$ 上的约化范数 $\Theta_{(\ell)}$ 是一个同构。

□

引理 C.6. 假设 特征 $F=p$ 且 $[F\colon F^p]=p^2$。令 $q=p^a$ 和 $L=F^{1/q}$，并令$\varphi\colon L\xrightarrow{\sim}F$ 为 $x\mapsto x^q$。那么

$$N_{L/F}=\varphi_*: K_2(L)\xrightarrow{\sim}K_2(F).$$

此外，对于任意定义在 F 上的中心除法代数 D，约化范数给出一个同构

$$\mathrm{Nrd}_2: I_F(D)_{(p)}\xrightarrow{\sim}K_2(F)_{(p)}.$$

证明。我们使用松本同一 $K_2=K_2^M$。由于 $[L\colon F]=q^2$，有$N_{L/F}\mathrm{res}_{L/F}=q^2$，并且对符号也有 $\varphi_*\mathrm{res}_{L/F}=q^2$。由于符号生成 $K_2(L)$，且每个 $q^2\{u,v\}=\{u^q,v^q\}$ 都属于限制的像，因此可得 $q^2(N_{L/F}-\varphi_*)=0$。由于 $K_2(F)$ 没有 p-挠，我们有 $N_{L/F}=\varphi_*$ [53], [35, §2.4，定理 6]。

首先假设 D 是 p-主的，并选取 q 使其可被周期整除。沿q次幂弗罗贝尼乌斯映射的拉回在 Br(F) 上作用为乘以 q，因为它将定义用的 2-余循环提升到 q次幂。由于复合映射 $F\subset L\xrightarrow{\varphi}F$ 是 $x\mapsto x^q$，我们有 $\varphi_*[D_L]=q[D]=0$ 属于 Br(F)，且 D_L 分裂，因为 φ 是同构。由于 $I_F(D)$的定义包含有限纯不可分分裂域，因此分裂转移 θ_L 有定义。

对于任意有限扩张 $F\prime/F$，由塔公式以及 $[F\prime^p\colon F^p]=[F'\colon F]$，可得 $[F'\colon F\prime^p]=p^2$，因此将第一个断言应用于 $F\prime$，可知 $N_{F'^{1/q}/F'}$是同构。由于$F\prime L\subset F\prime^{1/q}$，此范数就是复合映射 $N_{F'L/F'}N_{F'^{1/q}/F'L}$，故 $N_{F'L/F'}$是满射。特别地，对于每个有限分裂域 E/F 以及 $z\in K_2(E)$，写作 $z=N_{EL/E}w$。分裂转移的传递性给出

$$\theta_E z=\theta_{EL}w=\theta_L N_{EL/L}w.$$

因此 $I_F(D)=\theta_L K_2(L)$，且 Nrd_2 映射将其同构地映到 $K_2(F)$，因为 $\mathrm{Nrd}_2\theta_L=N_{L/F}$ 是一个同构。

对于一般的 D，取一个次数与 p 互素的有限扩张 F'/F，使布劳尔分量中素数与 p 互素的部分分裂。限制与转移保持相应的分裂转移子群，而这两个映射的复合是乘以该次数的映射。我们使用 $\mathrm{Nrd}_2 \circ \mathrm{cor}_{F'/F} = N_{F'/F} \circ \mathrm{Nrd}_2$ [39, 命题 6.6.1(1)]。为证明满射性，给定 $z \in K_2(F)_{(p)}$，$\mathrm{res}_{F'/F}\, z$ 在 F' 上的一个原像的转移是 $[F' : F]z$，且 $[F' : F]$ 是 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 中的一个单位。为证明单射性，出于相同原因，限制在 $I_F(D)_{(p)}$ 上是单射，因此只需证明其在 F' 上的单射性。

□

参考文献

[1] E. Aljadeff、J. Sonn 和 A. R. Wadsworth，亨泽尔域的射影 Schur 群，J. Pure Appl. Algebra 208（2007年），833–851。doi:10.1016/j.jpaa.2006.03.019。[2] T. Annala、M. Hoyois 和 R. Iwasa，动机谱的 Atiyah 对偶，预印本，2024年，arXiv:2403.01561。[3] T. Bachmann、E. Elmanto 和 M. Morrow，概形的 $\mathbb{A}^1$-不变动机上同调，预印本，2025年，arXiv:2508.09915。[4] A. Bak 和 U. Rehmann，Hasse 范数定理的 K_2 类比，《赫尔维数学评论》59（1984年），1–11。doi:10.1007/BF02566335。[5] D. Barnes，有限 G 的有理 G-谱分类，《同调、同伦与应用》11（2009年），141–170。doi:10.4310/HHA.2009.v11.n1.a7。[6] C. Barwick，谱 Mackey 函子与等变代数 K 理论（I），Adv. Math. 304（2017年），646–727。doi:10.1016/j.aim.2016.08.043。[7] C. Barwick、S. Glasman 和 J. Shah，谱 Mackey 函子与等变代数 K 理论（II），《突尼斯数学杂志》2（2020年），97–146。doi:10.2140/tunis.2020.2.97。[8] H. Bass 和 J. Tate，整体域的 Milnor 环，载于：代数 K 理论 II：“经典”代数 K 理论及其与算术的联系，Lecture Notes in Math. 342，施普林格，1973年，第349–446页。doi:10.1007/BFb0073733。[9] M. Bernardara，Brauer–Severi 概形的半正交分解，《数学新闻》282（2009年），1406–1413。doi:10.1002/mana.200610826。[10] B. Bhatt 和 P. Scholze，Witt 向量仿射 Grassmannian 的射影性，《数学发明》209（2017年），329–423。doi:10.1007/s00222-016-0710-4。[11] S. Bloch 和 K. Kato，p-adic étale 上同调，《高等科学研究所数学出版物》63（1986年），107–152。doi:10.1007/BF02831624。[12] A. J. Blumberg、D. Gepner 和 G. Tabuada，乘法圆分迹的唯一性，Adv. Math. 260（2014年），191–232。doi:10.1016/j.aim.2014.02.004。[13] A. Borel，算术群的稳定实上同调，Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 7（1974年），235–272。doi:10.24033/asens.1269。[14] C. Braun、J. Chuang 和 A. Lazarev，代数与模的导出局部化，Adv. Math. 328（2018年），555–622。doi:10.1016/j.aim.2018.02.004。[15] O. Braunling、R. Henrard 和 A.-C. van Roosmalen，关于阿代尔类群的 Clausen 观点的非交换类比，《Jussieu 数学研究所杂志》23（2024年），2777–2824。doi:10.1017/S1474748024000100。

[16]V. Chernousov 和 A. Merkurjev，域类的连通性与射影齐性簇上的零循环，Compos. Math. 142（2006年），1522–1548。doi:10.1112/S0010437X06002363。[17] T. Chinburg、M. Kolster、G. Pappas 和 V. Snaith，整数环的 K-群的伽罗瓦结构， K理论 14 （1998 年），319–369。doi:10.1023/A:1007751422988。[18] I. D. Chipchakov，Hensel 离散赋值稳定域，Turkish J. Math. 46（2022年），1735–1748。doi:10.55730/1300-0098.3229。[19] D. Clausen，Artin 映射的 K论方法，预印本，2017年，arXiv:1703.07842。[20] D. Clausen 和 A. Mathew，超下降与 étale K理论，《数学发明》225（2021年），981–1076。doi:10.1007/s00222-021-01043-3。[21] D. Clausen、A. Mathew 和 M. Morrow，亨泽尔对的 K理论与拓扑循环同调，《美国数学会杂志》34（2021年），411–473。doi:10.1090/jams/961。[22] P. Deligne，《Weil 猜想 I》，《高等科学研究所数学出版物》43（1974年），273–307。doi:10.1007/BF02684373。[23] M. Demazure 和 A. Grothendieck（编），群概形 III：约化群概形的结构（SGA 3），Lecture Notes in Math. 153，施普林格，1970年。doi:10.1007/BFb0059027。[24] B. I. Dundas、T. G. Goodwillie 和 R. McCarthy，代数K理论的局部结构，Algebra and Applications 18，施普林格，2013年。doi:10.1007/978-1-4471-4393-2。[25]B. I. Dundas 和 M. Morrow，拓扑 Hochschild 同调与循环同调的有限生成性和连续性，Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 50（2017年），201–238。doi:10.24033/asens.2319。[26] T. Geisser 和 L. Hesselholt，有限特征环的相对与双相对代数 K理论，J. Amer. Math. Soc. 24（2011年），29–49。doi:10.1090/S0894-0347-2010- 00682-0。[27] T. Geisser 和 M. Levine，特征为 p的域的 K理论，《数学发明》139（2000年），459–493。doi:10.1007/s002220050014。[28] D. R. Grayson，有限域上曲线的 K-群的有限生成性（根据 Daniel Quillen），载于：代数 K理论，第一部分（Oberwolfach，1980），Lecture Notes in Math. 966，施普林格，1982年，第69–90页。doi:10.1007/BFb0062167。[29] G. Harder，函数域上算术群的上同调，Invent. Math. 42（1977年），135–175。doi:10.1007/BF01389786。[30] H. Hasse，关于一般范数剩余符号的一个定理的证明及一个猜想的反驳，Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. I（1931年），64–69。[31] R. Hazrat 和 A. R. Wadsworth，SK_1 分次除代数，Israel J. Math. 183（2011年），117–163。doi:10.1007/s11856-011-0045-1。[32] L. Hesselholt、M. Larsen 和 A. Lindenstrauss，局部域上除代数的 K理论，《数学发明》219（2020年），281–329。doi:10.1007/s00222-019-00909-x。[33] M. J. Hopkins 和 J. H. Smith，幂零性与稳定同伦论 II，Ann. of Math. (2) 148（1998年），1–49。doi:10.2307/120991。

[34] Y. Hu 和 Z. Wu，关于上同调维数为 3 的 Hensel 离散赋值域的 Rost 可除性，Ann. K-Theory 5（2020年），677–707。doi:10.2140/akt.2020.5.677。[35] O. Izhboldin，特征为 p 的域的 Milnor K 群的 p 主部分及伽罗瓦上同调，载于：《高阶局部域导论》，Geom. Topol. Monogr. 3，Geom. Topol. Publ.，2000年，第 19–29 页。doi:10.2140/gtm.2000.3.19。[36] U. Jannsen，高维域的 Hasse 原理，Ann. of Math. (2) 183（2016年），1–71。doi:10.4007/annals.2016.183.1.1。[37] B. Kahn，数域的伽罗瓦下降与 K_2，K-Theory 7（1993年），55–100。doi:10.1007/BF00962794。[38]B. Kahn，中心单代数的 SK_1 与 SK_2 的上同调方法，Doc. Math. Extra Vol.: Andrei A. Suslin 六十华诞（2010年），317–369。doi:10.4171/dms/5/10。[39] B. Kahn 和 M. Levine，阿祖马亚代数的动机，J. Inst. Math. Jussieu 9（2010年），481–599。doi:10.1017/S1474748010000022。[40] M. Karoubi 和 C. Weibel，实簇的代数与实 K 理论，Topology 42（2003年），715–742。doi:10.1016/S0040-9383(02)00069-1。[41] K. Kato，利用 K 群对局部类域论的推广 I，J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 26（1979年），303–376。doi:10.15083/00077072。[42] K. Kato，利用 K 群对局部类域论的推广 II，J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 27（1980年），603–683。doi:10.15083/00077073。[43] K. Kato，完备离散赋值域的伽罗瓦上同调，载于：代数 K-Theory，第二部分（Oberwolfach，1980），Lecture Notes in Math. 967，施普林格，1982年，第 215–238 页。doi:10.1007/BFb0061904。[44]K. Kato，高维局部域的存在定理，载于：《高阶局部域导论》，Geom. Topol. Monogr. 3，Geom. Topol. Publ.，2000年，第 165–195 页。doi:10.2140/gtm.2000.3.165。[45] D. Kirstein 和 C. Kremer，局部化不变量的扭曲 Bass–Heller–Swan 分解，预印本，2024年，arXiv:2410.22877。[46] B. Köck 和 F. Zanchetta，概形高阶 K 理论上外幂运算的比较映射，Math. Z. 309（2025年），文章 63。doi:10.1007/s00209-025-03681-2。[47] A. O. Kuku，数域上群环及代数中的序的高阶代数 K 理论，Comm. Algebra 10（1982年），805–816。doi:10.1080/00927878208822751。[48]M. Kurihara，Kato 的高维局部类域论，载于：《高阶局部域导论》，Geom. Topol. Monogr. 3，Geom. Topol. Publ.，2000年，第 53–60 页。doi:10.2140/gtm.2000.3.53。[49] M. Levine，Bloch 高阶 Chow 群再探，《Astérisque》226（1994年），235–320。[50] M. Levine，Chow 移动引理与同伦余维塔，K-Theory 37（2006年），129–209。doi:10.1007/s10977-006-0004-5。[51]M. Levine，同伦余维塔，J. Topol. 1（2008年），217–267。doi:10.1112/jtopol/jtm004。

[52] A. Mathew、N. Naumann 和 J. Noel，等变稳定同伦论中的幂零性与下降，Adv. Math. 305（2017年），994–1084。doi:10.1016/j.aim.2016.09.027。[53] H. Matsumoto，关于分裂半单群的算术子群，Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 2（1969年），1–62。doi:10.24033/asens.1174。[54] A. S. Merkurjev，单代数的 K 理论，载于： K-理论与代数几何：与二次型和除代数的联系（加利福尼亚州圣巴巴拉，1992），Proc. Sympos. Pure Math. 58，第 1 部分，美国数学会，1995年，第 65–83 页。doi:10.1090/pspum/058.1/1327281。[55]A. Merkurjev 和 A. Suslin，塞韦里–布劳尔簇的 K 上同调与范数剩余同态，苏联科学院数学辑报 46（1982年），1011–1046，1135–1136；英文译本，Math. USSR-Izv. 21（1983年），307–340。doi:10.1070/IM1983v021n02ABEH001793。[56]A. Merkurjev 和 A. Suslin，域上的群 K_3 ，苏联科学院数学辑报 54（1990年），522–545；英文译本，Math. USSR-Izv. 36（1991年），541–565。doi:10.1070/IM1991v036n03ABEH002034。[57] A. Merkurjev 和 A. Suslin，Rost 簇单纯形动机的动机上同调，J. Pure Appl. Algebra 214（2010年），2017–2026。doi:10.1016/j.jpaa.2010.02.006。[58] J. S. Milne，《Étale Cohomology》，Princeton Math. Ser. 33，普林斯顿大学出版社，1980年。doi:10.1515/9781400883981。[59] J. S. Milne，《算术对偶定理》，第 2 版，BookSurge，2006年。[60] T. Nakayama 和 Y. Matsushima，关于 $\mathfrak{p}$ 进除代数的乘法群，东京帝国学士院纪要 19（1943年），622–628。doi:10.3792/pia/1195573246。[61] Yu. P. Nesterenko 和 A. A. Suslin，局部环上全线性群的同调及 Milnor 的 K 理论，苏联科学院数学辑报 53（1989年），121–146；英文译本，Math. USSR-Izv. 34（1990年），121–145。doi:10.1070/IM1990v034n01ABEH000610。[62] T. Nikolaus 和 P. Scholze，论拓扑循环同调，Acta Math. 221（2018年），203–409。doi:10.4310/ACTA.2018.v221.n2.a1。[63] S. Oka，Moore 谱上的乘法，九州大学理学部纪要A辑 38（1984年），257–276。doi:10.2206/kyushumfs.38.257。[64] S. Otabe，关于具有普遍平凡零循环的 Chow 群的簇的模 p 非分歧上同调，Manuscripta Math. 171（2023年），215–239。doi:10.1007/s00229- 022-01381-3。[65] V. P. Platonov，Tannaka–Artin 问题与约化 K 理论，苏联科学院数学辑报 40（1976年），227–261；英文译本，Math. USSR-Izv. 10（1976年），211–243。doi:10.1070/IM1976v010n02ABEH001686。[66] D. Quillen，有限域上一 般线性群的上同调与 K 理论，Ann. of Math. (2) 96（1972年），552–586。doi:10.2307/1970825。[67] D. Quillen，代数整数环的群 K_i 的有限生成，载于：代数K-Theory I：高阶 K-理论，Lecture Notes in Math. 341，施普林格，1973年，第 179–198 页。doi:10.1007/BFb0067056。

[68] D. Quillen，高阶代数 K理论：I，载于：《代数 K理论 I：高阶 K理论》，Lecture Notes in Math. 341，施普林格，1973年，第 85–147 页。doi:10.1007/BFb0067053。[69] I. Reiner，《极大阶》，London Math. Soc. Monogr. (N.S.) 28，牛津大学出版社，2003 年。doi:10.1093/oso/9780198526735.001.0001。[70] B. Richter，Brown–Peterson谱上的相容性的一个下界，《Algebr. Geom. Topol.》6（2006），287–308。doi:10.2140/agt.2006.6.287。[71] J. Riou，代数 K理论、A^1同伦与Riemann–Roch定理，《J. Topol.》3（2010），229–264。doi:10.1112/jtopol/jtq005。[72] J. Rognes 和 C. Weibel，数域整数环的二主代数 K理论，附 M. Kolster 撰写的附录，《美国数学会杂志》13（2000），1–54。doi:10.1090/S0894-0347-99-00317-3。[73] M. Rost，带系数的Chow群，《Doc. Math.》1（1996），319–393。doi:10.4171/dm/16。[74] J. Scholbach，数环上的混合Artin–Tate动机，《J. Pure Appl. Algebra》215（2011），2106–2118。doi:10.1016/j.jpaa.2010.11.019。[75] S. Schwede，代数三角范畴与拓扑三角范畴，载于：《三角范畴》，London Math. Soc. Lecture Note Ser. 375，剑桥大学出版社，2010 年，第 389–407 页。doi:10.1017/CBO9781139107075.010。[76] J.-P. Serre，《局部域》，Graduate Texts in Math. 67，施普林格，1979 年。doi:10.1007/978-1-4757-5673-9。[77]J.-P. Serre，《伽罗瓦上同调》，Springer Monographs in Math.，施普林格，2002 年。doi:10.1007/978-3-642-59141-9。[78] The Stacks Project作者，Stacks Project，https://stacks.math.columbia.edu。[79] A. Suslin，关于代数闭域的 K理论，《数学发明》73（1983），241–245。doi:10.1007/BF01394024。[80] A. Suslin，域的 K_2 中的挠，K理论 1（1987），5–29。doi:10.1007/BF00533985。[81] A. A. Suslin 和 M. S. Tulenbaev，Milnor K_2函子的稳定化定理，《苏联科学院通报》288（1986），832–836；英文译文载于《苏联数学通报》33（1986），794–798。doi:10.1007/BF01091768。[82] A. Suslin 和 A. Yufryakov，局部除法代数的 K理论，《苏联科学院通报》288（1986），832–836；英文译文载于《苏联数学通报》33（1986），794–798。[83] G. Tabuada 和 M. Van den Bergh，可分代数的非交换动机，《Adv. Math.》303（2016），1122–1161。doi:10.1016/j.aim.2016.08.031。[84] J. Tate，数域上伽罗瓦上同调中的对偶定理，载于：《国际数学家大会会议录》（斯德哥尔摩，1962），Inst. Mittag-Leffler，1963 年，第 288–295 页。[85] V. Voevodsky，带 $\mathbb{Z}/\ell$系数的动机上同调，《Ann. of Math.》（第 2 辑）174（2011），401–438。doi:10.4007/annals.2011.174.1.11。[86] A. R. Wadsworth，有限维除法代数上的赋值理论，载于：《赋值理论及其应用 I》，Fields Inst. Commun. 32，美国数学会，2002 年，第 385–449 页。doi:10.1090/fic/032/21。

[87] S. Wang，单代数的交换子群，《美国数学杂志》72（1950），323–334。doi:10.2307/2372036。[88] C. Weibel，《K：代数 K理论导论》，数学研究生教材 145，美国数学会，2013 年。doi:10.1090/gsm/145。[89] T. Yamazaki，*Brauer–Manin* 配对、类域论与动机同调，《名古屋数学杂志》210（2013），29–58。doi:10.1017/S0027763000010722。[90] V. I. Yanchevskii，具有满射约化范数的单代数的交换子子群，《苏联科学院通报》221（1975），1056–1058；英文译文载于《苏联数学通报》16（1975），492–495。[91]A. B. Zheglov，幂级数域上的野除代数，《数学文集》195（2004），第 6 期，21–56；英文译文载于《数学文集》195（2004），783–817。doi:10.1070/SM2004v195n06ABEH000825。