arXiv:2611.29827v1 [math-ph] 22 Nov 2026

与环流磁通子耦合的量子比特链中的调制方程与相干性动力学

O.M. Kiselev因诺波利斯大学，俄
罗斯因诺波利斯(日期：2026年11月23日)

我们推导了环流磁通子与交换耦合量子比特链的联合量子振幅调制方程，其中链的端点与场相互作用。幺正通过算符结合了平移波包、真空修饰和离散振荡模。共振正规形将慢振幅演化与非共振修正区分开来。按序排列的发射与返回振幅产生二阶修正，从而改变内部量子比特的布居与相干性。下一个基带系数则为累积误差带来补偿性的对角贡献和近共振非对角贡献。我们对态误差进行了事后估计。在速度选定共振处，直接传播 81 次通过所得到的模贡献为 6×10^{-8} 量级；在测试的可观测量上，三次基带近似与展开后的完整计算结果一致，误差为1.5×10^{-9} 。这些方程描述了源轮廓和场记忆效应如何影响链内的相干性。

I. 引言

约瑟夫森磁通子沿扩展结携带局域相位绕转和磁场。在环形结中，它可以反复经过一个电感耦合磁通量子比特。文献 [1]提出了基于孤子的读出；文献 [2]展示了将运动磁通子与超导量子比特耦合，并通过磁通子振荡频率检测其谱的方案。一次经过期间产生的磁场会影响后续的相遇。环形结的动力学还取决于环流磁通子与其振荡模之间的耦合 [3]。

人们已经研究了孤子介导的量子比特操控，用于磁信号在海森堡链中的传播。经过的磁孤子可以旋转局部耦合的量子比特，其响应由孤子轮廓和耦合几何决定 [4]。亮孤子和暗孤子的控制也可以用一个二能级哈密顿量描述，其矩阵元取决于孤子参数 [5]。在超导电路中，近期提出的孤子数模转换器利用负载环中保持的孤子施加可控磁通，并实现 Transmon 相位门 [6]。

交换将局域扰动传递到链中。充分的可控性判据确立了海森堡链和 Affleck–Kennedy–Lieb–Tasaki 链的边界控制 [7]。对于耦合的超导量子比特，交叉共振驱动以另一个量子比特的跃迁频率作用于一个量子比特，从而产生可调的有效双量子比特操作 [8]。对于环流磁通子，通过频率决定交换耦合链的跃迁。磁通子平移和场振荡在两次相遇之间演化，并进入调制系数。

我们考虑一条交换耦合链，其中第一个量子比特与磁通子相互作用。在每次环流过程中，交换会在端点与内部之间传递激发振幅。于是，一个内部量子比特的环境同时包含磁通子的位置和场模。它们条件态的可区分性取决于链的历史。我们计算联合响应，以及分别的平移响应和辐射响应。

由恢复或测量选取的可观测量决定了量子动力学中可见的部分。解码逻辑可观测量的 Krylov 闭包为量子码提供了一种约化 [9]；傅里叶测量效应的闭包则为量子相位估计提供了相应的约化 [10]。在磁通子—链系统中，激发概率和条件重叠为场分支赋予不同权重。重复通过会通过有限相位和引入进一步的频率依赖，其模平方具有 Fejér 核结构，这种结构也出现在相位估计分布中。

磁通子的微扰理论将集体参数的演化与场形变区分开来 [11]。针对受扰正弦–戈登孤子和非线性克莱因–戈登孤立波，已推导出谱修正的调制规律 [12, 13]。一致的椭圆函数渐近式描述了长环上的近分界轨道剖面 [14]。受扰 Duffing 问题中反复经过近分界轨道时的累积效应也已有研究 [15]。我们将场修正展开为运动环形剖面的正则归一化模，并对平移坐标进行量子化。二者都会在两次相遇之间演化。

时间排序也会影响条件重叠。连续的线性自旋–运动相互作用可以产生非线性有效操作 [16]。在磁通子问题中，这些有序贡献与.....的曲率并存
位置依赖耦合。这两者都会影响条件重叠，同时还包括来自激发模态扇区的返回贡献。它们的相对相位决定了混合响应的符号。

我们推导联合磁通子–链态复振幅的调制方程。其系数由单次通过变分方程计算得出，其中包括真空响应、平移动力学，

以及从激发场分支有序返回的过程。离散正规形将近共振振幅演化与状态的非共振重构区分开来。所得系统确定了内部量子比特在连续多次相遇后的布居和复相干。

源投影和磁通子运动决定调制系统的系数。随着场态在各次通过之间演化，有序的发射振幅和返回振幅会影响内部量子比特的布居与相干性。下一个响应系数给出对角和非对角误差贡献。残差的递推关系为这些贡献的累积提供了界。在链交换固定时，速度决定主要共振。通过在扩展的场空间和平移空间中进行直接传播，可以检验预测的布居和相干性在 81 次通过中的变化。质量和频率变化决定抑制区间；谱投影给出各个场分支的贡献。

II. 磁通子—链联合模型

A. 环形剖面与振荡模 s

空间和时间分别以约瑟夫森穿透长度和等离子体频率倒数为单位。线能量尺度为 E_0，并且 $\hbar_* = \hbar\omega_p/E_0$。这里， ω_p 是约瑟夫森等离子体角频率。无量纲周长为 L；速度 v 以约瑟夫森穿透长度乘以 ω_p为单位测量，其中 $0 < v < 1$。场 ϕ 表示结两端的规范不变相位差。我们将无量纲能量写作 $\mathcal{H} = E/E_0$，将频率哈密顿量写作 $H = \mathcal{H}/\hbar_*$，因此 $i\partial_t\Psi = H\Psi$。以下所有频率均以 ω_p为单位测量。未扰动相位满足

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin\phi = 0, \qquad \phi(x+L,t) = \phi(x,t) + 2\pi. \tag{1}$$

方程（1）的均匀平移单磁通子轮廓为

$$\Phi_v(y) = \pi + 2\,\mathrm{am}\!\left(\frac{y}{k\sqrt{1-v^2}}, k\right), \qquad L = 2k\sqrt{1-v^2}\,K(k), \tag{2}$$

其中 $y = x - vt$， k 为椭圆模数，而 $K(k)$ 为第一类完全椭圆积分；am 表示雅可比振幅。其导数和 $\cos\Phi_v$ 均为周期函数。方程（2）的大环极限趋近于分离轨道轮廓，并与参考文献 [14]中的一致渐近式相连接。

在运动坐标中进行线性化得到

$$\left[-(1-v^2)\partial_y^2 + \cos\Phi_v + 2iv\omega_\nu\partial_y - \omega_\nu^2\right]u_\nu = 0, \qquad u_\nu(y+L) = u_\nu(y). \tag{3}$$

指标 ν 表示一个环模， $u_\nu(y)$ 是其复数空间轮廓， ω_ν 是移动坐标系中的频率。相应的线性扰动具有时间依赖关系 $u_\nu(y)e^{-i\omega_\nu t}$。我们选取具有规范化归一化的正频率模态

$$\int_{-L/2}^{L/2}\left[(\omega_\nu + \omega_\alpha)u_\nu^* u_\alpha - 2iv u_\nu^*\partial_y u_\alpha\right]\mathrm{d}y = \delta_{\nu\alpha}. \tag{4}$$

平移模由中心坐标表示。方程（3）和（4）的其余解定义了离散振子基。在选定平均速度下，惯性系数为

$$M_0 = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}v}, \qquad P(v) = v\int_{-L/2}^{L/2}(\Phi_v')^2\mathrm{d}y. \tag{5}$$

我们对平移涨落采用常数有效质量 M。令 $M = M_0$ 即可将其与方程（5）联系起来；在固定 M 的情况下改变 v，即可定义下文所用的质量诊断。

B. 源投影与哈密顿量

无量纲耦合 κ设定了相互作用能量尺度，单位为 E_0，对应于给定的源轮廓。源振幅包含在 g 中，并在改变 κ 时保持不变。设 $g(x)$为一个零均值的实周期源，且 $G' = g$，其中 G 为周期函数，$\int_0^L G(x)\mathrm{d}x = 0$。在傅里叶变量中，这一约定写作 $G_0 = 0$，且对于 $q \neq 0$有 $G_q = g_q/(iq)$。它确定静态端点偏置：常数位移 $G \mapsto G + C$ 会使能量增加 $2\pi\kappa C Z_1$。传输线–量子比特相互作用能为$\kappa Z_1\int G(x)\phi_x(x)\mathrm{d}x$。将其投影到轮廓及其振荡上，可得

$$J(X) = -\int_{-L/2}^{L/2} G(y+X)\Phi_v'(y)\mathrm{d}y,$$
$$C_{\nu q} = g_q\int_{-L/2}^{L/2} u_\nu^*(y)e^{iqy}\mathrm{d}y, \qquad q = 2\pi m/L,$$
$$h_\nu(X) = -\frac{\kappa}{\sqrt{\hbar_*}}\sum_q C_{\nu q}e^{iqX}, \qquad g(x) = \sum_q g_q e^{iqx}. \tag{6}$$

此处 $J(X)$是与磁通子剖面的标量重叠， $C_{\nu q}$ 是空间傅里叶谐波q 在模态 ν上的投影，而 $h_\nu(X)$是相应的以频率单位表示的振荡器耦合。我们将中心写为 $X = X_{\mathrm{cl}}(t) + \xi$，其中 $X_{\mathrm{cl}} = vt - L/2$ 和 $T = L/v$。位移 $\xi \in \mathbb{R}$ 是关于移动参考中心的局部非绕回坐标。源函数按模 L计算，而数据包则在该覆盖坐标上进行传播。这一描述适用于局域在单个绕行分支内、且与其平移 L后的副本重叠可忽略的数据包。厄米表示实现了这一局域数据包近似。参考中心在时间T内完成一周；其偏离通过数据包哈密顿量演化。所有经过值都是在 $t = NT$处对一次连续联合演化的采样，因此数据包、场模和链会将它们的相关性带入下一次相遇。

该链在其端点具有守恒激发数的交换和纵向耦合。纵向相互作用会改变端点激发能。它与交换的非零对易子允许链本征态之间在总激发数固定时发生跃迁，从而改变内部量子比特布居。我们采用共振量子比特的共同跃迁频率旋转参考系。在该参考系中，共同激发能项被消去；交换和 Z_1 耦合保持不变。以频率单位表示时，其哈密顿量为

$$H_q = \sum_{j=1}^{n_q-1} \mathcal{J}_j(\sigma_j^+\sigma_{j+1}^- + \sigma_{j+1}^+\sigma_j^-), \qquad Z_1 = \sigma_1^z. \quad (7)$$

我们用 K表示保留场模的数量，用 M表示平移质量。数值示例采用三个共振量子比特，$\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}$，以及真空态加单激发扇区。在基底$|0\rangle$、$|1\rangle$、$|2\rangle$、$|3\rangle$中，其中 $|0\rangle$ 是链真空态，$|j\rangle$ 表示量子比特 j上有一个激发，

$$H_q = \mathcal{J}\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}, \qquad Z_1 = \mathrm{diag}(1,-1,1,1). \quad (8)$$

其中，n_q 是量子比特的数量，$\mathcal{J}_j$ 是键$(j, j+1)$上的交换频率，而 σ_j^+ 和 σ_j^- 分别创建和消去一个格点激发。我们的约定是 $\sigma_j^z|0_j\rangle = |0_j\rangle$ 且 $\sigma_j^z|1_j\rangle = -|1_j\rangle$。方程（8）中的矩阵实现了方程（7）的不变子空间。

振子算符满足 $[a_\nu, a_\alpha^\dagger] = \delta_{\nu\alpha}$；$a_\nu^\dagger a_\nu$统计模态 ν 的量子数。联合态属于波包空间 $L^2(\mathbb{R}_\xi)$、振子福克空间和保留链扇区的张量积。每个因子上的算符都通过在其他因子上取恒等算符来扩展。匕首符号表示厄米共轭，星号表示复共轭。联合频率哈密顿量为

$$\begin{aligned} H_0(t) &= -\frac{\hbar_*}{2M}\partial_\xi^2 + H_q - \frac{\kappa}{\hbar_*}J(X_{\mathrm{cl}}+\xi)Z_1, \\ H(t) &= H_0(t) + \sum_\nu \omega_\nu a_\nu^\dagger a_\nu \\ &\quad + \lambda\sum_\nu \left[h_\nu(X_{\mathrm{cl}}+\xi)a_\nu^\dagger + h_\nu^*(X_{\mathrm{cl}}+\xi)a_\nu\right] Z_1. \end{aligned} \quad (9)$$

该参数 λ 用于计数辐射顶点，在数值比较中设为 1。方程（9）保留了 J 和 h_ν 在谐模恒质量集体坐标模型中的完整位置依赖性。其系数随时间周期性变化。附录 E从场作用量推导出集体动能度规，并给出几何相互作用项。图 1 展示了耦合排列。

方程（9）等价于以下耦合方程组：

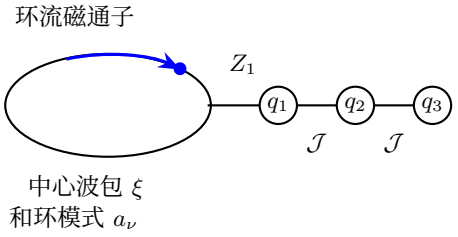

图 1. 磁通子位置和环模式与端点算符 Z_1 耦合。交换作用贯穿整个演化过程。每经过一个周期后，计算内部量子比特 q_2 的条件重叠。

四分量福克振幅 $\Psi_{\boldsymbol{n}}(\xi, t)$:

$$\begin{aligned} i\partial_t\Psi_{\boldsymbol{n}} &= \left[H_0(t) + \sum_\nu n_\nu\omega_\nu\right]\Psi_{\boldsymbol{n}} \\ &\quad + \lambda Z_1\sum_\nu\left[h_\nu\sqrt{n_\nu}\,\Psi_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_\nu} + h_\nu^*\sqrt{n_\nu+1}\,\Psi_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_\nu}\right]. \end{aligned} \quad (10)$$

多重指标 $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_K)$ 列出振子的占据数，而 $\boldsymbol{e}_\nu$ 使占据数 ν 增加 1。占据数为负的振幅均为零。方程（10）的初始条件为

$$\Psi_{\mathbf{0}}(\xi, 0) = \varphi(\xi)c_{\mathrm{in}}, \quad \varphi = \frac{e^{-\xi^2/(4\sigma_X^2)}}{(2\pi\sigma_X^2)^{1/4}}, \quad c_{\mathrm{in}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}, \quad (11)$$

这里，σ_X 是初始中心位置的标准差；该实高斯分布具有零均值动量，动量标准差为 $\hbar_*/(2\sigma_X)$。所有激发模态的振幅初始均为零。链的初态为 $(|0\rangle+|W_3\rangle)/\sqrt{2}$，其中 $|W_3\rangle = (|1\rangle+|\bar{2}\rangle+|3\rangle)/\sqrt{3}$。该态在每个位置都具有非零的真空–激发相干性。

C. 条件相干性与混合贡献

对中心和振子取偏迹，得到链密度矩阵

$$\begin{aligned} \rho_{jk} &= \sum_{\boldsymbol{n}}\int \Psi_{\boldsymbol{n},j}(\xi)\Psi_{\boldsymbol{n},k}^*(\xi)\mathrm{d}\xi, \\ \eta_j &= \frac{|\rho_{j0}|}{\sqrt{\rho_{jj}\rho_{00}}}, \qquad \Gamma_j = -\log\eta_j. \end{aligned} \quad (12)$$

当 $\rho_{jj}\rho_{00} > 0$时，我们使用 η_j 和 Γ_j，并对非零重叠采用有限的 Γ_j。以链态 j 和$\mathbf{0}$为条件的振幅是环境向量；因此 $0 \le \eta_j \le 1$。在不变子空间中，量子比特 j 的局域密度矩阵的非对角元为 ρ_{j0}。其模为

$\eta_j\sqrt{\rho_{jj}\rho_{00}}$。方程（12）将条件环境可区分性与布居因子和相干相位演化分离。以 $|j\rangle$ 和 $|0\rangle$为条件的归一化磁通子–模态态的重叠模为η_j。交换会同时改变它们的重叠和链布居。

我们比较具有相同初始链态的三种演化： X，具有 $\lambda = 0$的平移波包； R，沿预设中心轨迹$\xi = 0$演化的辐射模态；以及 XR，它们的联合演化。带符号的混合响应为

$$\Gamma_{\mathrm{mix},j} = \Gamma_{XR,j} - \Gamma_{X,j} - \Gamma_{R,j}. \tag{13}$$

两个条件量的独立乘积给出方程（13）中的零值。正值和负值分别表示，相对于该乘积，条件相干性损失增强和受到抑制。我们在下方报告 $j = 2$ 。

III. 固定交换耦合下的重求和调制

A. 磁通子速度选定的共振

调制计算采用方程（9）中集体模型的非线性扩展。我们保留三次和四次场能、变换后的场涨落中源项的二次阶贡献，以及正则动量依赖顶角。源轮廓中的平移坐标保持不展开。完整能量见方程（B8）。随后，频率和动量反项将无源激发能隙和平移曲率设定为预定值，如方程（G1）所示。这些选择定义了用于调制构造及其直接数值参照的哈密顿量。

该非线性模型的初始振子态，是零动量下与之匹配的无源基态。它与方程（11）中的同一个高斯波包和链向量相乘。第IV节的谐模型使用谐振子真空态，并用模态发射与返回振幅表示修正项。

我们使用以下展开参数。物理耦合为 κ。场阶数表示哈密顿量中正则涨落的幂次。下文的参数 ϵ_{v} 和ϵ_{t} 表示基态场带内的真空态和平移响应插入次数； ζ 表示该带与其补空间之间的跃迁次数。在系数计算完成后，这三个响应参数均设为 1，同时固定 κ 。对角演化包含具有其物理强度的周期源。下文各近似的阶数均指明所指定的响应参数。

在固定交换耦合下，我们根据链共振条件选择环流周期。频率哈密顿量为 $H = \mathcal{H}^{\mathrm{match}}/\hbar_*$，其中场项和源项见方程（B8）以及附录G中的匹配方案。在此计算中，目标模态能隙为

选定速度下运动环形剖面的固有频率。源几何由方程（53）指定。其傅里叶系数为

$$g_q = \frac{2A_g}{L}\frac{\cos(qa) + r\cos(qb) - (1+r)\cos(qc)}{\cosh(\pi w q/2)}.$$

此处 $q = 2\pi m/L$， $m \in \mathbb{Z}$。参数 a、b、c分别给出瓣位置、 w 其宽度、 r 相对权重和A_g 源振幅；其数值列于方程（53）。方程（8）中的非零链能量为 $E_\pm = \pm\sqrt{2}\mathcal{J}$和 $\langle -|Z_1|+\rangle = -1/2$。令它们的间隔等于第一环流谐波，可得

$$\Omega = \frac{2\pi v}{L} = 2\sqrt{2}\mathcal{J}, \qquad v_{\mathrm{res}} = \frac{\sqrt{2}\mathcal{J}L}{\pi}, \qquad T_{\mathrm{res}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}\mathcal{J}}. \tag{14}$$

方程（14）给出了主导共振对；下面的系数计算保留了所有满足 $|m| \le 18$ 的时间谐波。参数为

$$\begin{gathered}\mathcal{J} = 0.018, \quad L = 12, \quad \kappa = 10^{-5},\\ v = 0.0972341621, \quad T = 123.413415,\\ \sigma_X = 0.2, \quad \hbar_* = 5.96262690\times 10^{-4},\\ M = 126.605671.\end{gathered}$$

这里的 $M = M_0/\mu$（其中 $\mu = 0.0641125286$）是曲率族中预先设定的有效质量。环形剖面决定了 M_0；所选的 μ 独立确定了该数值模型的动能系数。随着保留场基的变化，匹配过程保持所选曲率不变。在附录 B 的第 27 项诊断中使用相同的 μ ，而当前的共振测试使用上文列出的速度和耦合。前三个自然模频率为 1.01370675、1.08522575 和 1.25475807。初始态是高斯波包、零动量处的匹配模基态与方程（11）中的链态的乘积。

大环主导剖面给出

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_v'(x)e^{iqx}\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{\cosh(\pi q\sqrt{1-v^2}/2)}.$$

结合方程（6），可得共振矩阵元 $-i\kappa\mathfrak{g}\ (v)\ e^{iq\xi}$，其中 $q = 2\pi/L$ 以及

$$\mathfrak{g}(v) = \frac{\pi g_q}{\hbar_* q\cosh(\pi q\sqrt{1-v^2}/2)}.$$

对环进行正交积分得到 $\mathfrak{g}_{\mathrm{cl}} = 370.9014876$，而孤立扭结表达式给出 370.8967370。对于 $\xi = 0$，领先阶旋转框架振幅满足

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} b_- \\ b_+\end{pmatrix} = \kappa\mathfrak{g}_{\mathrm{cl}}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_- \\ b_+\end{pmatrix}. \tag{15}$$

振幅 b_- 和 b_+ 分别乘以能量为 E_- 和 E_+ 的链本征态，此时它们的自由相位已

被移除。方程（15）中累积的相位为$\vartheta_N = \kappa \mathfrak{g}_{\rm cl} NT$。对于指定的链制备，这给出了主导布居

$$P_2(N) = \frac{[\cos\vartheta_N + \sqrt{2}\sin\vartheta_N]^2}{6}.$$

它标识出一阶慢尺度 κt 以及加入场修正的振幅交换。相应的非耦合链对照已知其精确形式： $c^{(0)}(t) = e^{-iH_q t} c_{\rm in}$。在方程（14）所示的共振处，受激链本征态获得相同的因子$(-1)^N$，在 $t = NT$处，因此

$$P_2^{(0)}(N) = \frac{1}{6}, \qquad c_2^{(0)}(N) = \frac{(-1)^N}{\sqrt{12}}.$$

这些频闪值为总磁通子诱导的变化提供了参考。领先阶双态公式解析地展现了共振；下文的调制构造则保留其余源谐波、波包动力学和场修正。

B. 真空态和平移响应系数

令 Π 表示所保留的无源基态场带，包括其中的平移态。该带是与含有平移激发的模基态连续相连的低能子空间；依赖于动量的耦合会对这些乘积态进行修饰。其坐标表示由该带与匹配模真空态和波包坐标基的乘积之间重叠的酉极分解因子确定。在这一表示下，将投影后的哈密顿量写作

$$H_{\rm ad}(t) = H_{\rm cl}(t) + \delta H_{\rm v}(t) + \delta H_{\rm t}(t). \tag{16}$$

这里 $H_{\rm cl}$ 包含 H_q 以及冻结坐标 ξ处的经典周期源。真空修正 $\delta H_{\rm v}$是对匹配模基态取期望后源的变化。平移修正 $\delta H_{\rm t}$ 包含带动能算符和其余动量依赖源项。其 leading 动能项为 $p^2/(2M\hbar_*)$，其中 $[\xi, p] = i\hbar_*$。这一构造通过匹配本征态和投影顶点纳入了三次和四次场项。

leading 源系数变为 $\mathfrak{g}_{\rm v}$ =370。8830694，因此 $\delta\mathfrak{g} = -0.01841825$。因此，leading 真空相位修正为 $\delta\vartheta_N = \kappa\delta\mathfrak{g} NT$。其关于布居或相干性的泰勒展开包含与 N 和 N^2成正比的项。我们通过在方程（16）中代入独立的响应参数 $\epsilon_{\rm v}$， $\epsilon_{\rm t}$ 来计算相应的算符修正。物理耦合 κ 在每个系数中均保持其指定值。

将单周期演化展开为

$$F(\epsilon_{\rm v}, \epsilon_{\rm t}) = \sum_{a,b\geq 0} \epsilon_{\rm v}^a \epsilon_{\rm t}^b F_{ab}.$$

截至 $a + b = 2$ 的系数可由下式得出

$$\begin{aligned} i\dot{U}_{ab} &= H_{\rm cl} U_{ab} + \delta H_{\rm v} U_{a-1,b} + \delta H_{\rm t} U_{a,b-1}, \\ U_{00}(0) &= I, \qquad U_{ab}(0) = 0 \quad (a+b>0), \\ F_{ab} &= U_{ab}(T). \end{aligned} \tag{17}$$

方程（17）中的负指标表示零。此系数约定包含泰勒阶乘。 F_{11} 同时包含真空态插入和平移插入的两种阶数。

对于一个响应参数，写作 $F = F_{00} + \epsilon F_1 + \epsilon^2 F_2 + \cdots$。$F^N$中的线性项为

$$\sum_{n=0}^{N-1} F_{00}^{N-1-n} F_1 F_{00}^n.$$

如果 $F_{00}|\alpha\rangle = e^{-i\theta_\alpha}|\alpha\rangle$，其矩阵元包含

$$\begin{aligned} D_N(\Delta) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\Delta} \\ &= e^{i(N-1)\Delta/2} \frac{\sin(N\Delta/2)}{\sin(\Delta/2)}, \\ \Delta &= \theta_\alpha - \theta_\beta. \end{aligned} \tag{18}$$

方程（18）在 $\Delta = 2\pi l$ 处的连续值为 N。两次共振插入产生 $N(N-1)/2$。这些因子描述了在生成元中重新求和的久期项。

为 $F_{00} = W_0 e^{-i\Theta} W_0^\dagger$ 选择一个准相位分支，使所需的指数型差商非零。 W_0 的列是正交归一的特征向量，$\Theta = \mathrm{diag}(\theta_\alpha)$包含它们以每次通过的弧度表示的准相位。我们使用差商$f[x,y] = (f(x) - f(y))/(x-y)$和$f[x,y,z] = (f[x,y] - f[y,z])/(x-z)$，当参数相同时取导数极限。令 $f(x) = e^{-ix}$和 $\widehat{F}_{ab} = W_0^\dagger F_{ab} W_0$。首个生成元系数满足

$$(G_x)_{\alpha\beta} = \frac{(\widehat{F}_x)_{\alpha\beta}}{f[\theta_\alpha, \theta_\beta]}, \qquad x \in \{\mathrm{v}, \mathrm{t}\},$$

其中 $F_{\rm v} = F_{10}$ 和 $F_{\rm t} = F_{01}$。纯二次系数为

$$(G_{xx})_{\alpha\beta} = \frac{(\widehat{F}_{xx})_{\alpha\beta} - \sum_\gamma f[\theta_\alpha, \theta_\gamma, \theta_\beta](G_x)_{\alpha\gamma}(G_x)_{\gamma\beta}}{f[\theta_\alpha, \theta_\beta]}.$$

此处 $F_{\rm vv} = F_{20}$ 和 $F_{\rm tt} = F_{02}$。对于混合系数，将求和中的乘积替换为 $(G_{\rm v})_{\alpha\gamma}(G_{\rm t})_{\gamma\beta} + (G_{\rm t})_{\alpha\gamma}(G_{\rm v})_{\gamma\beta}$，并使用 F_{11}。合流差商给出了重复准相位处的极限。在 W_0 带态基底中的重求和离散演化为 $a_{n+1} = e^{-iG_{\rm ad}} a_n$，其中 $n \in \mathbb{N}_0$ 表示已完成的通过次数。对于所选生成元，通过$a(s) = e^{-isG_{\rm ad}} a_0$定义其连续插值，其中 $s \in [0, \infty)$和 $a_0 = W_0^\dagger \Psi_{\rm ad,\ in}$。对实变量 s 求导得到

$$i\frac{{\rm d}a}{{\rm d}s} = G_{\rm ad} a, \qquad G_{\rm ad} = \Theta + G_{\rm v} + G_{\rm t} + G_{\rm vv} + G_{\rm vt} + G_{\rm tt}. \tag{19}$$

向量 $a(s)$ 包含 W_0 基底中的基带态和链振幅，并且 G_{ad} 是无量纲的，单位为每次通过的弧度。恒等算符 $a(s)|_{s=n} = a_n$ 使插值在采样时刻 $t = nT$处与离散序列相匹配。经过 $N \in \mathbb{N}_0$ 次通过后，重构态为 $W_0 e^{-iNG_{\mathrm{ad}}} W_0^\dagger \Psi_{\mathrm{ad,\ in}}$。一个周期内的演化由含时哈密顿量决定。制备的带态 $\Psi_{\mathrm{ad,\ in}}$ 是入射波包的归一化投影。方程（19）保留了非对易的混合响应，并对其重复插入进行求和。

C. 激发分支与有序返回振幅

接下来我们保留激发场扇区 $Q = I - \Pi$ 及其在各次穿越之间的状态。两个投影算符在链上均作用为恒等算符； I 是保留的联合空间上的恒等算符。在本节中， Q 表示互补场投影算符。对于完整的匹配频率哈密顿量，定义

$$H_{\mathrm{d}} = \Pi H \Pi + QHQ, \qquad V = \Pi H Q + QH\Pi, \qquad H_\zeta = H_{\mathrm{d}} + \zeta V. \tag{20}$$

辅助参数 ζ 计数两个场扇区之间的跃迁，并设为一。方程（20）中的对角块保留链交换、平移以及所有源谐波项。基态块等于上述坐标变换下的绝热哈密顿量。为进行如下比较，我们直接积分两个对角块；此前重求和的绝热解与其直接控制解在所测试的可观测量上相差小于 10^{-10} 。

令 $U_{\mathrm{d}}(t)$为对角块演化，并令$V_I(t) = U^\dagger{}_{\mathrm{d}}(t) V(t) U_{\mathrm{d}}(t)$。将完整周期算符展开为 $F_{\mathrm{d}} + \zeta F^{(1)} + \zeta^2 F_{(2)} + \cdots$。系数在一个周期内由下式得到：

$$\begin{aligned} i\dot{U}^{(0)} &= H_{\mathrm{d}} U^{(0)}, & U^{(0)}(0) &= I, \\ i\dot{U}^{(1)} &= H_{\mathrm{d}} U^{(1)} + V U^{(0)}, & U^{(1)}(0) &= 0, \\ i\dot{U}^{(2)} &= H_{\mathrm{d}} U^{(2)} + V U^{(1)}, & U^{(2)}(0) &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

这里 $F_{\mathrm{d}} = U^{(0)}(T)$ 和 $F_{(j)} = U^{(j)}(T)$。定义 $A_j = F^\dagger{}_{\mathrm{d}} F_{(j)}$。系数展开的幺正性给出 $A_1 + A_1^\dagger = 0$ 和 $A_2 + A_2^\dagger + A_1^\dagger A_1 = 0$。因此

$$\begin{aligned} K_1 &= iA_1 = \int_0^T V_I(t)\,\mathrm{d}t, \\ K_2 &= i\left(A_2 - \tfrac{1}{2}A_1^2\right) \\ &= -\frac{i}{2}\int_0^T \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}s\,[V_I(t), V_I(s)]. \end{aligned} \tag{22}$$

是厄米的。我们通过积分方程(21)来计算它们；方程(22)中的对易子考虑了时间排序。

算符 K_1 在 $\Pi + Q$中是非对角的，而 K_2 是块对角的。基带修正为

$$\Pi K_2 \Pi = -\frac{i}{2}\int_0^T \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}s \left[\Pi V_I(t) Q V_I(s) \Pi - \Pi V_I(s) Q V_I(t) \Pi\right]. \tag{23}$$

将 Q分解为场态，可将方程 (23) 表示为对中间分支求和。它们的频率、数据包依赖性以及链动力学都进入这两个有序因子。对 K_1 进行指数化已经产生了二次返回贡献； K_2 则将其调整为实际的有序返回振幅。下文的比较取决于这一区别。

D. 通过调制与可观测量重构

二阶幺正通过近似为

$$F_{\mathrm{eff}} = F_{\mathrm{d}} \exp[-i(K_1 + K_2)], \qquad \Psi_N = F_{\mathrm{eff}}^N \Psi_{\mathrm{in}}. \tag{24}$$

方程 (24) 中的有序乘积保留了与带内演化的对易子。所有系数均在 $0 \le t \le T$上确定；随后，两个扇区中的态都沿这一序列演化。在物理计算中， V 正比于 κ，而 U_{d} 已包含对该耦合的响应。以 ζ 为基础的展开将带间跃迁组织在这一演化参考态周围。

通行映射作用于整数指标处： $\Psi_{n+1} = F_{\mathrm{eff}} \Psi_n$， $n \in \mathbb{N}_0$。在保留的有限维空间中，将其对角化为 $F_{\mathrm{eff}} = W\,\mathrm{diag}(e^{-i\vartheta_\alpha}) W^\dagger$，并为特征相位 ϑ_α 选定实数代表。令$\Theta_{\mathrm{eff}} = \mathrm{diag}(\vartheta_\alpha)$。序列 $a_n = W^\dagger \Psi_n$ 于是满足$a_{n+1} = e^{-i\Theta_{\mathrm{eff}}} a_n$。定义可微插值$a(s) = e^{-is\Theta_{\mathrm{eff}}} W^\dagger \Psi_{\mathrm{in}}$，其中实数 $s \ge 0$。它满足

$$\begin{aligned} i\frac{\mathrm{d}a(s)}{\mathrm{d}s} &= \Theta_{\mathrm{eff}} a(s), & s &\ge 0, \\ \Psi_n &= W a(s)\big|_{s=n}, & n &\in \mathbb{N}_0, \\ G_{\mathrm{eff}} &= W \Theta_{\mathrm{eff}} W^\dagger. \end{aligned} \tag{25}$$

方程（25）是方程（24）中近似通行映射的精确插值： $W e^{-in\Theta_{\mathrm{eff}}} W^\dagger = F_{\mathrm{eff}}^n$对于每个整数 $n \ge 0$。选择实特征相位可确定一个厄米对数。将 ϑ_α 替换为 $\vartheta_\alpha + 2\pi k_\alpha$， $k_\alpha \in \mathbb{Z}$会改变非整数 s 处的插值，但保留所有采样态。下面的计算比较这些整数通行态。第 IIIF节中的离散正规形将缓慢共振振幅分离开来。模记忆通过特征相位和扇区间振幅体现。令 F 表示保留哈密顿量的精确单周期传播子。对于幺正的精确通行映射和近似通行映射，伸缩恒等式给出

$$\|F_{\mathrm{eff}}^N - F^N\| \le N \|F_{\mathrm{eff}} - F\|.$$

这里及下文中，$\|\cdot\|$ 表示向量的希尔伯特空间范数以及算符所诱导的谱范数；$\|\cdot\|_F$ 表示弗罗贝尼乌斯矩阵范数。该不等式将累积误差与局部映射误差联系起来，并根据指定的入射态评估可观测量的准确性。

令 $b_{\alpha j}(N)$ 为方程（8）中正交归一场基和链基下的振幅。我们重构

$$\begin{aligned}\rho_{jk}(N) &= \sum_{\alpha} b_{\alpha j}(N) b^{*}_{\alpha k}(N), \\ P_2 &= \rho_{22}, \qquad c_2 = \rho_{02}.\end{aligned} \tag{26}$$

c_2 是方程（12）中所用相干性取向的复共轭。两个场扇区均对方程（26）有贡献。局部量子比特密度矩阵为 $\left(\begin{smallmatrix} 1-P_2 & c_2 \\ c_2^{*} & P_2 \end{smallmatrix}\right)$。比较复数 c_2 可同时检验其相位和模。

E. 统一的近似通行算符

我们在同一场表示中结合这两种响应构造。令 $\mathcal{S}$ 为从无源基带本征基和链能量基到用于 G_{ad}的波包坐标与格点基的酉映射。若 e_0 为以频率单位表示的无源场基态能量，则定义

$$\begin{aligned}B_{\mathrm{ad}} &= e^{-ie_0 T}\mathcal{S}^{\dagger} W_0 e^{-iG_{\mathrm{ad}}} W_0^{\dagger}\mathcal{S}, \\ \widetilde{F}_{\mathrm{d}} &= B_{\mathrm{ad}} \oplus F_Q, \\ \widetilde{F} &= \widetilde{F}_{\mathrm{d}} e^{-i(K_1+K_2)}.\end{aligned} \tag{27}$$

符号 $\oplus$表示基态场子空间与激发态场子空间上的直和。在相应的分块表示中，

$$\widetilde{F}_{\mathrm{d}} = \begin{pmatrix} B_{\mathrm{ad}} & 0 \\ 0 & F_Q \end{pmatrix}, \qquad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{\mathrm{g}} \\ \Psi_Q \end{pmatrix},$$
$$\widetilde{F}_{\mathrm{d}}\Psi = \begin{pmatrix} B_{\mathrm{ad}}\Psi_{\mathrm{g}} \\ F_Q \Psi_Q \end{pmatrix}.$$

这里 $\Psi_{\mathrm{g}} = \Pi\Psi$和 $\Psi_Q = Q\Psi$ 分别是两个子空间中的分量。每个分量都包含平移自由度和链自由度。算符 B_{ad} 传播基态分量，而 F_Q则传播激发态分量。它们之间的跃迁通过 $e^{-i(K_1+K_2)}$ 在方程（27）中的非对角算 K_1 符进入；分块对角算符 K_2 为发射和返回提供二阶时间排序修正。二者均根据方程（22）计算。方程（27）在占据基带中使用二次真空—平移生成元，并保留访问之间的激发扇区传播。标量相位 $e^{-ie_0 T}$ 使两种构造中的能量约定保持一致。在该变换中使用直接的基带演化，可以复现先前积分得到的对角块，直至 2.43×10^{-12} 在弗罗贝尼乌斯范数意义下。本小节中的所有联合比较均使用相同的 12 态平移表示和场秩 128。

带间系数围绕物理对角块演化求得。这定义了物理通行映射的一种复合近似：基带替换和带间截断分别具有可计算的局部缺陷。它们在方程（27）中的乘积规定了整个序列中的混合插入。

F. 有限时间共振正规形

方程（15）中的共振对已保留在对角块演化中。现在我们将较慢的~带间修正与返回修正分离开来。对角化 $F_{\mathrm{d}} = W_{\mathrm{d}} D W^{\dagger}{}_{\mathrm{d}}$，其中 $D_{\alpha\alpha} = e^{-i\theta_\alpha}$，并令 $k_j = W^{\dagger}{}_{\mathrm{d}} K_j W_{\mathrm{d}}$。将相位差 $\Delta_{\alpha\beta}$ 定义为模 2π $(-\pi, \pi]$）。对于长度为 $N_* = 81$ 的序列，共振掩码为

$$\chi_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & |\Delta_{\alpha\beta}| \le \pi/N_*, \\ 0, & |\Delta_{\alpha\beta}| > \pi/N_*. \end{cases}$$

这些保留对在观测窗口内的相对相位偏移至多为 π。该掩膜指定了振幅系统中的保留项。其宽度将在下文检验。

对于被消去的项，求解第一个离散同调方程：

$$(S_1)_{\alpha\beta} = \frac{(1-\chi_{\alpha\beta})(k_1)_{\alpha\beta}}{e^{i\Delta_{\alpha\beta}} - 1}, \qquad R_1 = \chi \circ k_1. \tag{28}$$

符号 $\circ$ 表示逐项乘法；S_1 在保留项上为零。通过交换 α 和 β 可得厄米性。令 $S_1^{+} = D^{\dagger} S_1 D$。将 $e^{i\zeta S_1} D e^{-i(\zeta k_1 + \zeta^2 k_2)} e^{-i\zeta S_1}$ 展开至二阶，可得修正后的二阶系数

$$L_2 = k_2 + \frac{i}{2}\big([S_1^{+}, k_1] + [S_1^{+}, S_1] - [k_1, S_1]\big). \tag{29}$$

应用方程 (28) 于 L_2，得到 S_2，并令 $R_2 = \chi \circ L_2$。近恒等变换和共振周期映射为

$$\mathcal{T} = e^{-iS_1} e^{-iS_2}, \qquad F_{\mathrm{R}} = W_{\mathrm{d}} \mathcal{T} D e^{-i(R_1+R_2)} \mathcal{T}^{\dagger} W_{\mathrm{d}}^{\dagger}. \tag{30}$$

方程 (29) 和 (30) 保留了被消去的一阶跃迁所产生的二阶效应。

在相互作用表象中，离散调制方程为

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \exp[-i\mathcal{R}(n)] a_n, \\ \mathcal{R}(n) &= D^{-n}(R_1 + R_2) D^{n}, \\ \Psi_n &= W_{\mathrm{d}} \mathcal{T} D^{n} a_n, \qquad a_0 = \mathcal{T}^{\dagger} W_{\mathrm{d}}^{\dagger} \Psi_{\mathrm{in}}. \end{aligned} \tag{31}$$

中的每个矩阵元 $\mathcal{R}(n)$ 都带有$e^{in\Delta_{\alpha\beta}}$ 这一保留对的慢因子。方程（31）演化共振振幅，并通过 $\mathcal{T}$恢复非共振修饰。变量 n 统计完整遍历；在提取出快速对角相位 D^n 后，缓变振幅随之演化。有限时间窗口保留了所有在选定观测区间内相位差累积缓慢的保留对。

在所选宽度下，近恒等变换很小：$\|S_1\|_F = 3.87\times10^{-4}$ 且 $\|S_2\|_F = 1.15\times10^{-6}$。共振系统在 3.2×10^{-13} 个平移过程中，以A2 给出了这些检验。

G. 系数导出的残差及其累积

对于下一个基带系数，引入一个共同参数 ϵ，乘以 $\delta H_{\rm v}+\delta H_{\rm tv}$。沿此方向将方程 (17) 扩展至三阶，并将所得系数记为 $F_{\rm g,\,3}$。在坐标表示中，令

$$B_2(\epsilon)=W_0\exp[-i(\Theta+\epsilon G_1+\epsilon^2G_2)]W_0^\dagger,$$

其中 $G_1=G_{\rm v}+G_{\rm t}$ 且 $G_2=G_{\rm vv}+G_{\rm vt}+G_{\rm tt}$。基带映射的主导缺陷为

$$R_{\rm g,3}=F_{\rm g,3}-[\epsilon^3]B_2(\epsilon). \tag{32}$$

记号 $[\epsilon^3]$ 提取泰勒级数中 ϵ^3 的系数。方程 (32) 中的系数提取通过三角分块矩阵指数计算。在 12 态平移表示中，$\|R_{\rm g,\,3}\|_F=4.02423\times10^{-7}$；同一缺陷的四阶系数范数为$1.41269\times10^{-8}$。这些算子范数包含占据较弱的波包方向。可观测量贡献通过制备态计算。

对于带间贡献，将方程（21）扩展为

$$i\dot U^{(3)}=H_{\rm d}U^{(3)}+VU^{(2)},\qquad U^{(3)}(0)=0,$$

并定义 $A_3=F^\dagger{}_{\rm d}U^{(3)}(T)$。三次厄米系数为

$$K_3=i\left[A_3-\tfrac12(A_1A_2+A_2A_1)+\tfrac13A_1^3\right]. \tag{33}$$

扇区宇称使得 K_3 为非对角形式。对从基带出发的列进行积分，可确定其$Q\Pi$ 块，而厄米性则确定反向块。方程（33）给出了 $\|K_3\|_F=2.76938\times10^{-10}$ 在场秩为 128 时的值。

将 $R_{\rm g,\,3}$ 变换到联合基，包括 e^{-ie_0T}，并将结果记为 $\mathcal{B}(R_{\rm g,\,3})$。复合算子的两个主要局部缺陷为

$$\begin{aligned}E_{\rm g,3}&=[\mathcal{B}(R_{\rm g,3})\oplus0]e^{-i(K_1+K_2)},\\ E_{\rm m,3}&=-i\widetilde F_{\rm d}K_3,\qquad E_3=E_{\rm g,3}+E_{\rm m,3}.\end{aligned} \tag{34}$$

这里的两个三次指标分别指共同基带响应和带间跃迁。方程（34）可通过展开精确有序乘积与近似有序乘积之差得到；其系数的求取独立于长序列参考。

将主导残差与近似态一同传播：

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}&=\widetilde F\psi_n,\qquad \psi_0=\Psi_{\rm in},\\ r_{n+1}&=\widetilde F r_n+E_3\psi_n,\qquad r_0=0,\\ r_N&=\sum_{n=0}^{N-1}\widetilde F^{N-1-n}E_3\widetilde F^n\Psi_{\rm in}.\end{aligned} \tag{35}$$

在 $\widetilde F$的 Floquet基底中，方程（35）恰好包含方程（$D_N(\theta_\alpha-\theta_\beta)$ 的有限和18）。该有限和给出了残差的共振增长和非共振振荡。可观测量修正由 $|r_N\rangle\langle\psi_N|+|\psi_N\rangle\langle r_N|$的偏迹得到；数值重构还保留了 $|r_N\rangle\langle r_N|$。

在这 81 次穿越中，基态三次缺陷对 P_2 的贡献至多为 1.23×10^{-11}，对复数 c_2 的贡献至多为 7.31×10^{-11}。相应的带间三次贡献分别约为 9×10^{-15} 和 1.20×10^{-13}。第一个数值处于积分误差的量级。在所采用的 Floquet基底 中，基态缺陷的对角部分带来的相干性修正最高可达 5.66×10^{-9}。加入近共振的非对角项后，完整修正的最大值降至 7.31×10^{-11}。

基态三次系数本身也可以重求和。定义 G_3 为

$$(G_3)_{\alpha\beta}=\frac{(W_0^\dagger R_{\rm g,3}W_0)_{\alpha\beta}}{f[\theta_\alpha,\theta_\beta]},$$

并将 $G_{\rm ad}$ 替换为 $G_{\rm ad}+G_3$，代入方程 (27)。表I 比较了原始统一近似、预测的主导残差以及这个基态能带三次生成元。图2 展示了整个序列中的带符号修正和剩余误差。

统一二次生成元的最大相干误差为 7.30×10^{-11}，经过 81 个段落。其主导系数预测了这一累积偏差，而三次重求和将误差降至 1.90×10^{-13}。在任一可观测量中，共振正规形对二次结果的改变量均小于 3.2×10^{-13}。这些误差是在相同有限表示中比较传播所得。全空间及基组细化的比较见附录 A。

H. 物理解释与受控精度

经过调制的量是联合量子态的复系数。其相位和占据数承载着平移响应以及离散环模的振幅，而链交换将端点扰动传递给内部量子比特，并将

表 I. 每个段落窗口中相对于满秩 128 传播的最大误差。每个条目列出$(P_2,\ c_2)$中的误差。所有三种构造均使用相同的场表示。残差列使用方程 (35)；最后一列对计算得到的基态三次生成元进行指数化。

$N_{\max}$	统一二次	采用预测的主导残差	三次基底生成元
27	$(3.48\times10^{-12},\ 2.10\times10^{-11})$	$(3.48\times10^{-13},\ 1.86\times10^{-13})$	$(5.12\times10^{-14},\ 4.66\times10^{-14})$
54	$(7.89\times10^{-12},\ 4.70\times10^{-11})$	$(8.80\times10^{-13},\ 4.34\times10^{-13})$	$(1.12\times10^{-13},\ 1.16\times10^{-13})$
81	$(1.38\times10^{-11},\ 7.30\times10^{-11})$	$(1.47\times10^{-12},\ 6.80\times10^{-13})$	$(1.75\times10^{-13},\ 1.90\times10^{-13})$

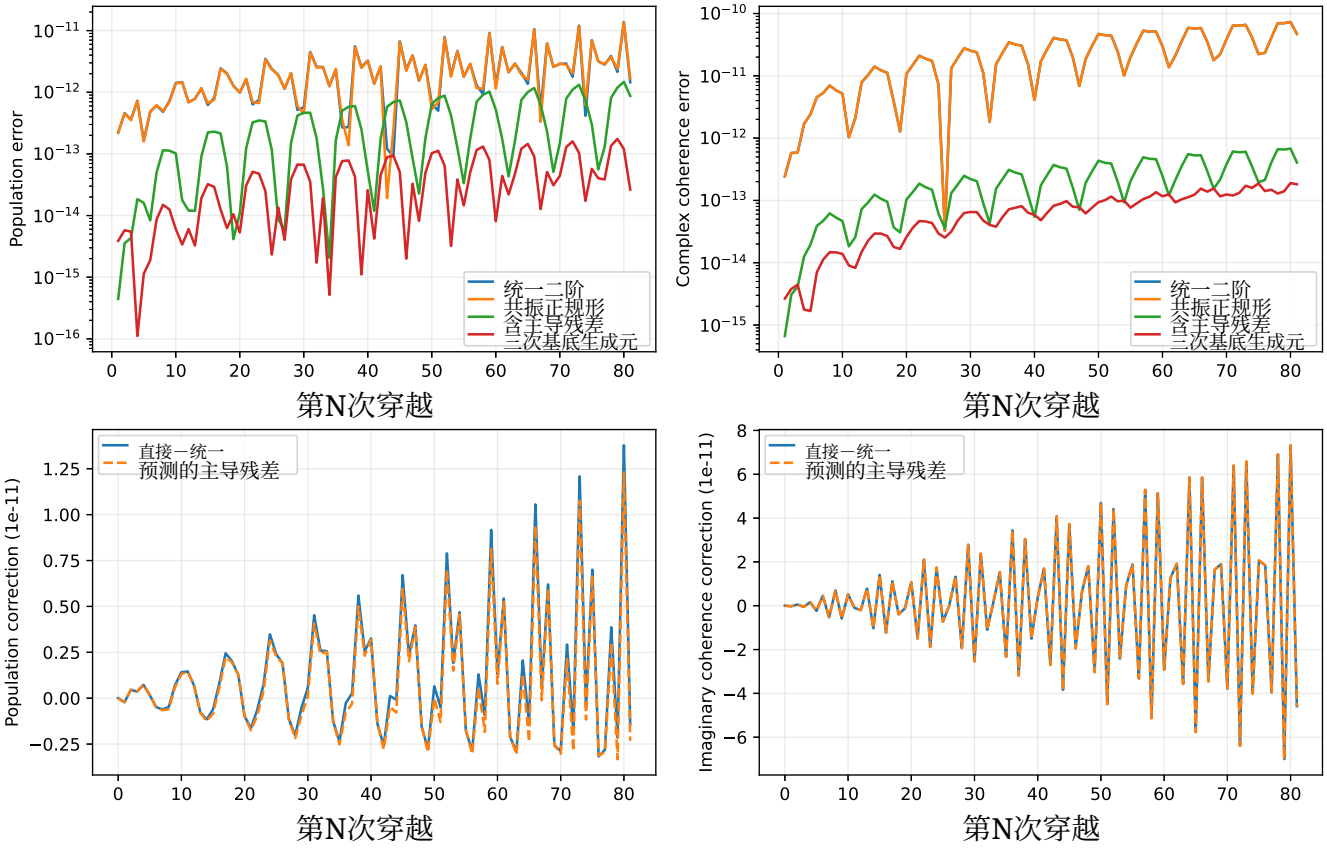

图2。统一穿越近似及其系数导出的修正。上排面板：布居和复相干的误差，其中包括带有非共振修饰的共振正规形。下排面板：相对于直接参考值的带符号差异，以及独立预测的主导残差。三次基底生成元将该有限表示中的可观测量误差降低至约 2×10^{-13} 。

量离散环模的振幅，而链交换将端点扰动传递给内部量子比特。方程（27）和（31）保留了相遇期间的这种耦合演化。方程（23）中的有序返回项计入了内部量子比特响应的首项振荡修正。另一方面，方程（35）重新求解了下一阶基带响应系数：其对角项与非对角项之间的补偿决定了二次响应重求和后剩余的误差。

图 3 展示了布居以及相干性的实部和虚部本身，同时给出了非耦合链对照和重构的调制解。在完整计算中 P_2 范围为 0.00316 到 0.45654（遍历采样通道），与 $P_2^{(0)}=1/6$ 相比。模式分辨计算与绝热计算之间的差异，量化了激发场分支在该驱动响应之上带来的额外贡献。

采用全部 86 个保留的振荡器态和 24 个平移态进行直接传播，相对于在相同参数下的直接绝热基带控制，得到的模修正在布居和复相干性上的差异约为 6.1×10^{-8} 。三次基带近似与这一扩展参考结果的差异至多为 1.5×10^{-9}。将平移基从 16 个态增加到 24 个态后，这些可观测量的变化小于7.6×10^{-12}。事后估计采用独立积分的

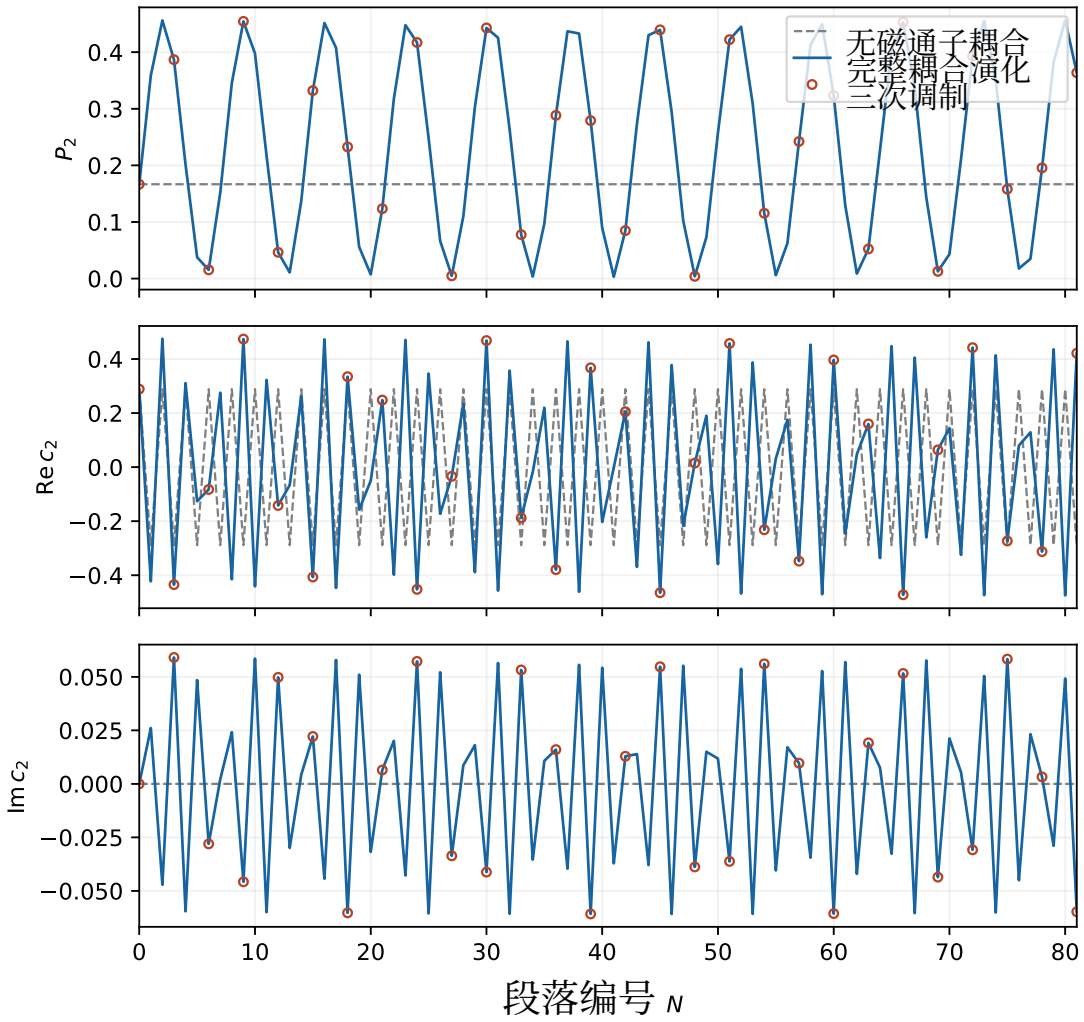

图3。在速度选定共振处的内部量子比特可观测量。实线表示包含24个平移态的完整计算结果；每三次段落编号绘制一次的空心符号表示带有动力学激发模的三次基态响应调制构造。虚线给出 $\kappa = 0$ 的精确链演化，采样时间相同 NT。所有曲线均采用方程（11）中的链制备。相干性在共同频率旋转框架中表示。两种耦合计算之间的差异在图 2 中得到解析。

参考周期映射来评估缺陷递推关系。在投影模型中减去计算得到的首要残差后，得到的第 81 次通过时逐态界为 2.78×10^{-10}。将其与直接测得的表示差异结合，可将可观测量比较误差界定为 2.05×10^{-9}和 1.85×10^{-9}。附录 A 将近似误差、投影误差和积分误差分别处理，并推导出累积界。

IV. 有序辐射展开 ON

方程 (9) 中的谐波集体哈密顿量逐个模式明确展现了发射和返回过程。现在，我们采用其谐振子真空初始条件，并按振子源参数 λ 展开，同时精确保留 H_0 中的平移和链演化。由此得到算符记忆核和混合重叠诊断量，用于后续的质量和频率比较。在上文的非线性调制计算中，类似的返回过程则通过匹配场哈密顿量的激发本征态进行。

A. 发射和返回振幅

展开方程（10）中的 λ，同时精确传播 H_0：

$$\Psi = A|\mathbf{0}\rangle + \lambda \sum_{\nu} B_{\nu}|1_{\nu}\rangle + \lambda^2 \sum_{\nu} C_{\nu}|\mathbf{0}\rangle + \lambda^2 \Psi_{2\mathrm{q}} + \cdots . \tag{36}$$

这里， A、 B_ν和 C_ν 是链–波包向量：分别表示领先阶真空振幅、单量子发射振幅及其真空返回修正。向量Ψ_{2q}汇集了双量子振幅。计算密度矩阵至 λ^2 阶所需的系数满足

$$\begin{aligned} i\dot{A} &= H_0 A, \\ i\dot{B}_\nu &= (H_0+\omega_\nu)B_\nu + h_\nu Z_1 A, \\ i\dot{C}_\nu &= H_0 C_\nu + h_\nu^* Z_1 B_\nu . \end{aligned} \tag{37}$$

其初始数据由方程（11）给出： $A(0) = \varphi c_{\rm in}$ 和$B_\nu(0) = C_\nu(0) = 0$。方程（36）中福克扇区的正交性给出

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_X + \lambda^2 \sum_\nu \Delta\rho_\nu + O(\lambda^4), \\ \rho_X &= \int A A^\dagger \mathrm{d}\xi, \\ \Delta\rho_\nu &= \int \left(B_\nu B_\nu^\dagger + C_\nu A^\dagger + A C_\nu^\dagger \right) \mathrm{d}\xi . \end{aligned} \tag{38}$$

方程（37）中的返回振幅为方程（38）中的干涉项提供了来源，并确保迹保持。

对于相关非零元素的基底密度矩阵，定义

$$\mathcal{L}_{\rho,j}(r) = -\Re\left[\frac{r_{j0}}{\rho_{j0}} - \frac{r_{jj}}{2\rho_{jj}} - \frac{r_{00}}{2\rho_{00}} \right]. \tag{39}$$

将方程（12）展开后，即可得到完整的二阶混合响应

$$\Gamma^{(2)}_{\mathrm{mix},j} = \sum_\nu \left[\mathcal{L}_{\rho_X,j}(\Delta\rho_{X,\nu}) - \mathcal{L}_{\rho_R^{(0)},j}(\Delta\rho_{R,\nu}) \right]. \tag{40}$$

这里的 $\rho_R^{(0)}$ 是沿指定轨迹的纯链演化，上标表示λ^2的系数。方程（40）的数值计算包含方程（38）中的所有项。

B. 算符记忆核

令 $U_0(t)$ 在链与波包空间上传播为 $H_0(t)$，并令

$$\begin{aligned} S_\nu(t) &= U_0^\dagger(t) h_\nu(t,\xi) Z_1 U_0(t), \\ Q_\nu(t) &= \int_0^t e^{i\omega_\nu s} S_\nu(s)\mathrm{d}s, \\ R_\nu(t) &= \int_0^t \mathrm{d}s \int_0^s \mathrm{d}u\, e^{-i\omega_\nu(s-u)} S_\nu^\dagger(s) S_\nu(u). \end{aligned} \tag{41}$$

对于初始链–波包密度算符 $\varrho_{\rm in} = |\varphi c_{\rm in}\rangle\langle\varphi c_{\rm in}|$，相互作用绘景修正为

$$\Delta\varrho_I = \sum_\nu (Q_\nu \varrho_{\rm in} Q_\nu^\dagger - R_\nu \varrho_{\rm in} - \varrho_{\rm in} R_\nu^\dagger). \tag{42}$$

通过 U_0 进行变换，并对方程（42）中的波包进行迹运算，可重现方程（38）。将时间平方区域分成两个三角形，可得

$$R_\nu + R_\nu^\dagger = Q_\nu^\dagger Q_\nu .$$

因此，修正项分解为 Q_ν 的耗散子，以及与 $(R_\nu - R_\nu^\dagger)/(2i)$的对易子。方程 (41) 中的有序核在整个观测时间内保留了波包和链的记忆。

V. 平移、曲率与有限质量

对于 $\lambda = 0$ 处的平移问题，定义$H_c(t,\xi) = H_q - (\kappa/\hbar_*)J(X_{\rm cl}+\xi)Z_1$。对于固定的位移 ξ，令 $U(t)$ 表示 $\xi = 0$ 处的链传播子，$\mathsf{U}_N = U(T)^N$，并令 $W(t,\xi)$ 表示该位移下的传播子。由于在此固定问题中 $H_c(t,\xi) = H_c(t+\xi/v,0)$，

$$\begin{aligned} W(t,\xi) &= U(t+\xi/v)U^\dagger(\xi/v), \\ W(NT,\xi) &= U(\xi/v)\mathsf{U}_N U^\dagger(\xi/v). \end{aligned} \tag{43}$$

对方程 (43) 关于 $H_b = H_c(0,0)$ 求导，得到

$$\begin{aligned} W_\xi(NT,0) &= -\frac{i}{v}[H_b, \mathsf{U}_N], \\ W_{\xi\xi}(NT,0) &= -\frac{i}{v^2}[\dot{H}_b, \mathsf{U}_N] - \frac{1}{v^2}[H_b,[H_b,\mathsf{U}_N]]. \end{aligned} \tag{44}$$

方程（44）约束直接 J'' 顶点与迭代 J' 顶点之和。它们的补偿留下了共轭映射对入射相位的依赖。当 $\rho_{\rm in} = c_{\rm in}c_{\rm in}^\dagger$时，冻结波包密度是 $W\rho_{\rm in}W^\dagger$ 按权重 $|\varphi|^2$取平均的结果。

例如，令 $c = \mathsf{U}_N c_{\rm in}$和 $d_r = \partial_\xi^r W(NT,0)c_{\rm in}$。对于窄高斯波包，

$$1 - \eta_j = \frac{\sigma_X^2}{2}\left| \frac{d_{1,j}}{c_j} - \frac{d_{1,0}}{c_0} \right|^2 + O(\sigma_X^4).$$

当第一个条件导数差恰好为零时，首项为$\sigma_X^4|d_{2,j}/c_j - d_{2,0}/c_0|^2/4$。下面的定量结果使用未展开的 J。

有限质量通过算符值联络引入。令 $p = -i\hbar_*\partial_\xi$，代入 $A = W\chi$ 并定义

$$\mathcal{A} = i\hbar_* W^\dagger \partial_\xi W, \qquad i\dot{\chi} = \frac{(p-\mathcal{A})^2}{2M\hbar_*}\chi. \tag{45}$$

由方程得到的首个逆质量修正为

$$\begin{aligned} \Delta A &= \frac{i\hbar_*}{2M} W\left[t\varphi'' c_{\rm in} + 2\varphi' \mathcal{Q}_1 c_{\rm in} + \varphi \mathcal{Q}_2 c_{\rm in} \right], \\ \mathcal{Q}_1 &= \int_0^t W^\dagger W_\xi \mathrm{d}s, \qquad \mathcal{Q}_2 = \int_0^t W^\dagger W_{\xi\xi}\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{46}$$

对于实数初始 φ， $t\varphi''$ 项对约化密度矩阵的一阶贡献为零。其余项取决于相遇序列中链传播子的空间导数。自由扩散使方差中出现 $\sigma_X^2 + (\hbar_* t/(2M\sigma_X))^2$,，而方程 (46) 还保留了历史依赖的反作用。

VI. 重复通过与共振相位

令 $\mathsf{U}_T = U_0(T)$ 作用于完整链–波包空间。周期性意味着 $S_\nu(nT+s) = \mathsf{U}_T^{-n} S_\nu(s) \mathsf{U}_T^n$。定义$K_\nu = Q_\nu(T)$以及单周期返回 $R_{\nu,1}$。于是

$$Q_{\nu,N} = \sum_{n=0}^{N-1} q_{\nu,n}, \qquad q_{\nu,n} = e^{i\omega_\nu nT} \mathsf{U}_T^{-n} K_\nu \mathsf{U}_T^n,$$
$$R_{\nu,N} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathsf{U}_T^{-n} R_{\nu,1} \mathsf{U}_T^n + \sum_{n>m} q_{\nu,n}^\dagger q_{\nu,m}. \tag{47}$$

方程（47）将各次通过中的发射振幅与返回振幅合成。

在 $\mathsf{U}_T|a\rangle = e^{-i\theta_a}|a\rangle$ 的谱表示中，

$$(Q_{\nu,N})_{ab} = (K_\nu)_{ab} D_N(\Phi_{\nu,ab}), \quad \Phi_{\nu,ab} = \omega_\nu T + \theta_a - \theta_b, \tag{48}$$

其中

$$D_N(\Phi) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\Phi} = e^{i(N-1)\Phi/2} \frac{\sin(N\Phi/2)}{\sin(\Phi/2)}. \tag{49}$$

相位和的平方满足

$$|D_N(\Phi)|^2 = N + 2\sum_{\ell=1}^{N-1} (N-\ell)\cos(\ell\Phi).$$

因此 $|D_N(\Phi)|^2/N$ 是 Fejér 核。对于依赖寄存器指标之差的相干转移系数，量子相位估计分布中也会出现相同的三角谐波项权重 [10]。此处 ℓ 计数通行之间的间隔，相位 Φ 则包含方程（48）中的场频率和链–波包准相位差。对依赖于波包的相位取平均，会对通行间相关性加权，如附录D所示。

链–波包 Floquet 谱的连续部分按其谱测度积分；数值波包基给出有限矩阵表示。对于返回过程，额外的有限和为

$$E_N(A,B) = \sum_{n>m} e^{-inA+imB} = \frac{D_N(-A) - D_N(B-A)}{1 - e^{iB}}, \tag{50}$$

其中，重合相位值由方程（49）和（50）中的有限和定义。将方程（50）代入方程（47）得到

$$(R_{\nu,N})_{ab} = (R_{\nu,1})_{ab} D_N(\theta_a - \theta_b) + \sum_c (K_\nu)^*_{ca} (K_\nu)_{cb} E_N(\Phi_{\nu,ca}, \Phi_{\nu,cb}). \tag{51}$$

方程（48）和（51），再结合方程（39）中的泛函，决定了有符号响应。

当 $|\Phi_{\nu,\ ab} - 2\pi k| = O(N^{-1})$ 时，贡献通道会发生相干累积。令 $z = N(\Phi - 2\pi k)$。主导函数为

$$|D_N(z/N)|^2 \sim N^2 f(z), \quad f(z) = \left[\frac{\sin(z/2)}{z/2}\right]^2,$$
$$N^{-2} E_N(z/N, z/N) \longrightarrow \frac{1 - e^{-iz} - iz}{z^2}. \tag{52}$$

方程 (52) 中第二个函数的实部和虚部为 $f(z)/2$ 和 $-(z - \sin z)/z^2$。它们的系数包含源投影和最终条件链态。符号边界取决于直接项和有序项的组合。

下述参数对应的平均链弗洛凯相位约为 0、0, ± 0.400929。它们提供了共振偏移 0, ± 0.400929和 ± 0.801858 ，位于 $\omega_\nu T$中。利用单周期算符重构指定轨迹响应，与对方程 (37) 进行连续积分的结果一致；在 36 次通过中，每个模式的误差为 1.2×10^{-13}。

VII. 源几何与数值结果

A. 参数与数值方法

方程 (6) 中的源是一个六瓣周期函数。通过对源几何进行初步数值搜索，并考察端点和内部量子比特处的条件重叠，选定了其参数。以下对质量、频率和模式数进行比较时，我们固定这一轮廓：

$$g(x) = A_g \left[P_a(x) + rP_b(x) - (1+r)P_c(x)\right],$$
$$P_d(x) = \frac{1}{\pi w} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left[\operatorname{sech}\frac{x + mL - d}{w} + \operatorname{sech}\frac{x + mL + d}{w}\right]. \tag{53}$$

方程（53）在一个周期内的积分为零。我们使用

$$L = 12, \quad v = 0.54, \quad T = 22.2222222, \quad \mathcal{J}T = 0.4,$$
$$\kappa = 0.003, \quad \sigma_X = 0.2,$$
$$\hbar_* = 5.96262690 \times 10^{-4},$$
$$(a,b,c) = (0.92337631, 3.37867757, 3.93633430),$$
$$w = 0.90884831, \quad r = -1.64758581,$$
$$A_g = 0.42774526.$$

表 II。直接条件重叠损失。各项乘以 10^6；联合计算使用 20 个模态、48 个波包态和双量子截断。

N	L_X	L_R	L_{mix}	L_{XR}
16	0.8028	1.4282	0.1577	2.3886
17	7.5796	1.9228	0.1955	9.6980
31	2.1191	1.7319	0.1676	4.0186
36	50.4895	3.7774	0.2895	54.5564

方程（5）给出 $M_0 = 13.41599877$。这些参数规定了初始质量和频率比较。第III节给出了用于长序列调制测试的速度选择的共振参数。

我们使用 192 个傅里叶配置点对环进行离散化，并采用其正频率、正范数模态。数据包由基于截断厄米基构造的高斯分布离散变量表示。方程（37）使用 DOP853 积分，相对容差 10^{-10}，绝对容差 10^{-12}，最大时间步长为0。12。方程（10）的直接福克空间传播使用容差 2×10^{-12} 和 2×10^{-14}，最大步长为 0。08。联合直接计算最多保留两个总振子量子，并进行选定的三量子检查。本节中的谐振比较使用方程（11）中的初始态。第 III 节中按速度选择的调制测试使用其单独指定的参数以及匹配的振子基态。

在所测试的 20 模态直接序列中，将波包基从 32 个态增加到 48 个态，会使内部量子比特损失变化约 10^{-13}。在一次 14 模态检验中，将总占据数截断从 2 增加到 3，最多使其变化 1.08×10^{-9}，即 0.027%。加入第 21–32 个模态后，经过 36 次通过，二阶辐射增量的变化小于9.5×10^{-11}。二阶辐射结果与 20 模态双量子直接结果的差异至多为 5.75×10^{-9}，即该序列总损失的 0.112%。

B. 补偿与残余损失

图 4 比较了冻结位置平均与有限质量传播。在第 31 次通过时，平动损失从 5.09×10^{-7}（无限质量）上升至 2.12×10^{-6}（质量为 M_0）。经过 M^{-3} 阶的逆质量展开，在整个序列中，内部量子比特平动损失的最大相对误差为 0.24%。将初始宽度替换为自由扩散后的最终值，会得到不同的修正；这正如方程（46）中的历史项所预期的那样。

联合计算见图 5和表 II。对于此表 $L = 1-\eta_2$ 和 $L_{\mathrm{mix}} = L_{XR}-L_X-L_R$。方程（13）中的对数定义消除了与独立重叠相关的乘积修正。在所示的小损耗下，两个带符号诊断量具有相同的符号。

根据方程（38）可以直接解析符号变化。在 $N = 22$ 处，相对于指定轨迹计算，单量子部分的变化对 $\Gamma^{(2)}_{\mathrm{mix}}$贡献 -1.09×10^{-8}，而真空返回部分贡献 -1.44×10^{-7}。在 $N = 27$ 处，对应项分别为 $+7.63\times10^{-7}$ 和 $+2.57\times10^{-8}$。在第 22 次通过时，真空返回干涉是抑制效应的主要来源；而在第 27 次通过时，单量子贡献的变化是增强效应的主要来源。

C. 频率和质量变化下的符号边界

我们改变 $\delta = \omega_1 T - 6\pi$，同时保持源投影、其他频率和 T 不变。质量参数为 $\mu = M_0/M$。由此得到的诊断结果将频率变化与源几何区分开来。图 6显示了四种质量下的 $\Gamma^{(2)}_{\mathrm{mix}}$。频率网格在 δ中的间距为 0.005；扩展网格延伸至 $|\delta| = 0.8$，覆盖了超出中央绘图区的区间。

在 $N = 18$，将质量从无限大降至M_0 会产生一个区间 $-0.23940 < \delta < -0.17947$。在$M_0/2$，该区间变为 $-0.28580 < \delta < -0.16725$。在 $N = 36$，正失谐区间从 $2M_0$ 时的$[0.19269, 0.20480]$ 扩大到 M_0时的 $[0.17423, 0.20946]$，并进一步扩大到 $M_0/2$时的 $[0.15508, 0.21002]$。其频率宽度分别为 0.000545、0.001585 和 0.002472。

在 $N = 27$ 和 $M = M_0/2$，返回会产生一个负区间 $[-0.31812, -0.20975]$。在 $N = 22$，随着质量减小，包含零失谐的区间与相邻的负区间连成一体。该区间的频率宽度从无限质量时的 0.01620 变为 $2M_0$时的 0.03358、M_0 时的 0.03056，以及 $M_0/2$时的 0.02829。零点集取决于共振相位滤波器以及其余通道的带符号贡献。

D. 正则中心–模修正

附录中的场约化E 和 F 给出了三次中心模能量（F3）。我们在物理质量 $M = M_0$处评估其响应，同时保持谐波项参数和源轮廓不变。正规排序通过减去 p的真空系数来确定参考速度。直接传播会增加 $\mathcal{H}_{3,\ \mathrm{cm}}/\hbar_*$ 并加入方程（9）；平移控制包含相同的c_3p^3 项。

在 $N = 18$ 和 $\delta = -0.21$处，混合对数重叠从 -4.66018×10^{-8} 变为 -2.12322×10^{-7}。切线方程（F5）预测 -2.15441×10^{-7}。两者的绝对差为 3.12×10^{-9}。直接计算使用 20 个模态和总占据数截断 2。将波包基从 24 个态扩展到 32 个态，会使联合对数重叠变化 3.25×10^{-12}。单独计算的源动量顶点（F4）

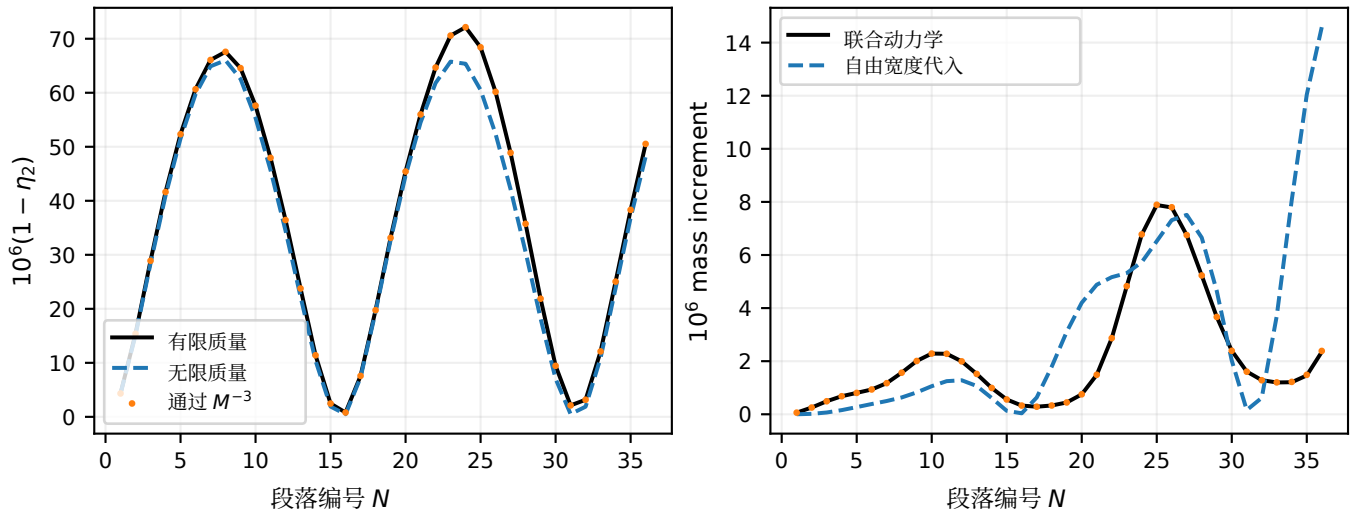

图4. 完整位置依赖耦合下的平动贡献。左：无限质量和有限质量结果，以及截至 M^{-3} 的展开。右：有限质量增量与将自由扩散的最终宽度代入冻结位置公式所得结果的比较。

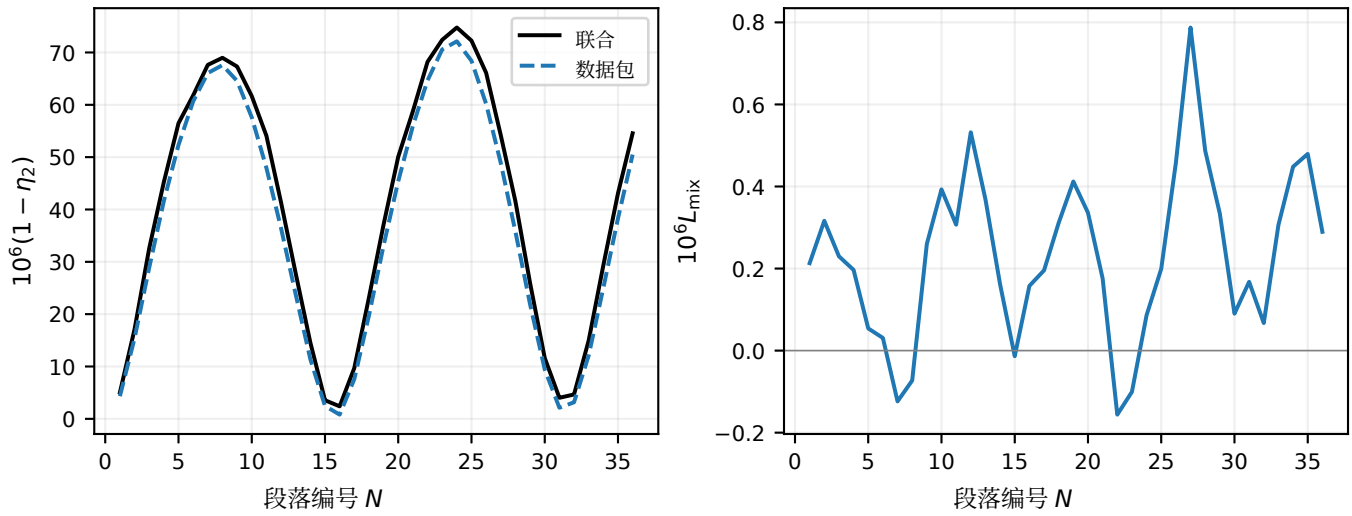

图 5. 内部量子比特的联合损失和带符号的混合贡献。右图展示了通行序列中相长和相消混合响应的变化。

在一阶下对 4.70×10^{-10} 混合响应的贡献为 3.24×10^{-12}。将计算设置从 20 个模态和 32 个波包态联合细化为 24 个模态和 24 个波包态，会使切线修正的混合响应变化 3.24×10^{-12}。在八模态检验中，将总占据数截断从 2 提高到 3，会使联合动能切线变化 2.30×10^{-11}，未微扰对数重叠变化 8.28×10^{-10}。这些比较在固定谐波动力学下解析了三次中心–模贡献。表 III 比较了三种失谐量。在 $\delta = -0.21$ 处的负响应仍然存在，而 $\delta = -0.26$ 出现负响应，$\delta = -0.15$ 则仍为正。

表 III. $N = 18$, $M = M_0$ 处的混合对数重叠。表中数值均乘以 10^7。最后一列是在固定参考速度下，采用三次中心–模顶点进行的直接传播。

δ	谐波项	线性修正	直接三次项
-0.26	1.1061	-1.2322	-1.2168
-0.21	-0.4660	-2.1544	-2.1232
-0.15	1.1436	0.6190	0.6483

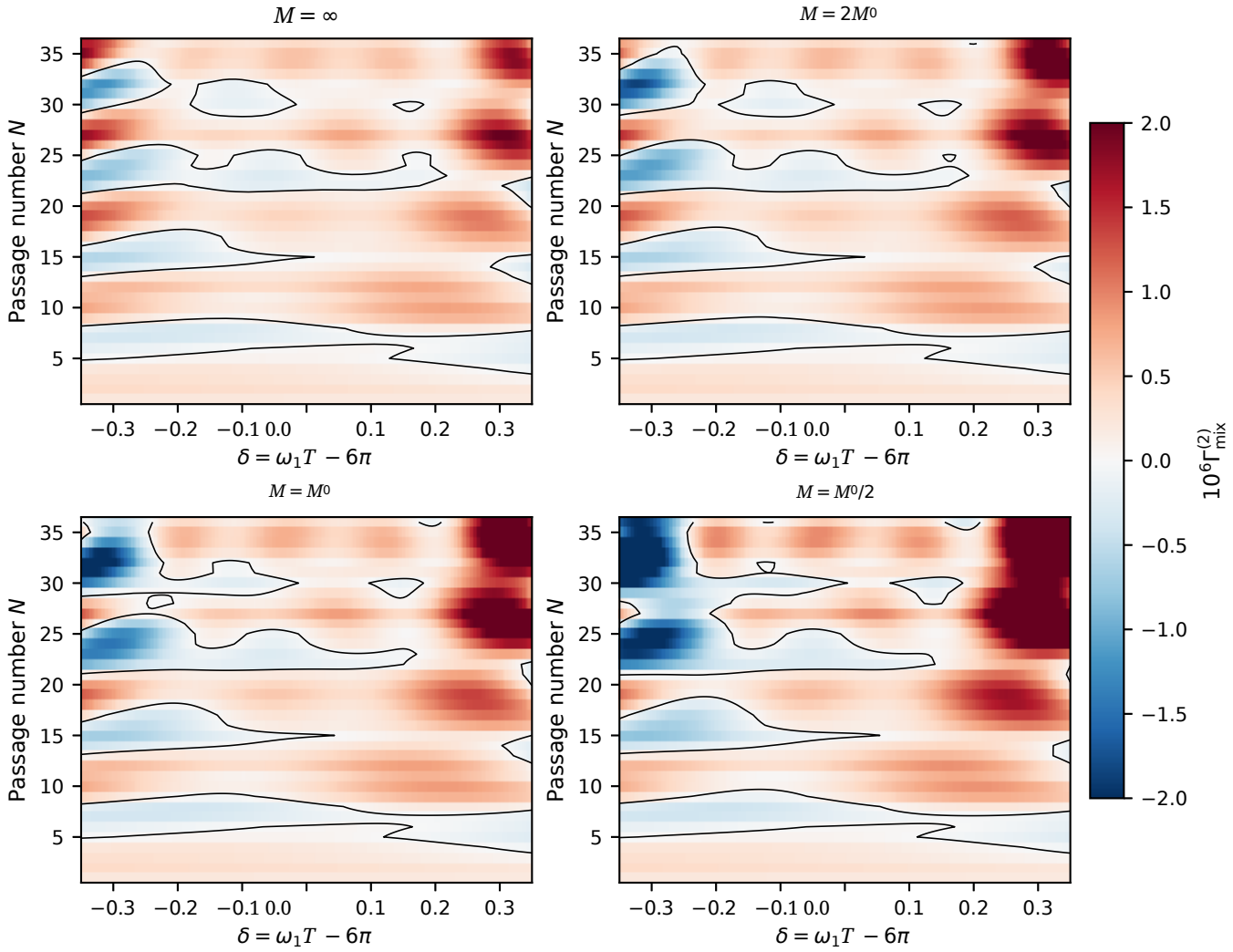

图6. 内部量子比特的混合对数响应。蓝色表示相对于两个重叠独立相乘时的抑制，红色表示增强。黑色曲线在整数次穿越之间插值出零边界。完整的二阶贡献包括全部20个模态及其真空返回。

VIII. 参数依赖性与谱响应

同一发射与返回机制产生了方程（13）中的带符号混合响应。在谐波集体模型中，改变平移质量会产生并合并条件重叠损失较低的区间。折叠处的局部展开给出平方根边界定律。附录 B推导了这些定律，并考察了保留三次和四次场耦合时它们的变化。

匹配激发能隙和平移曲率后，可以比较不同保留模态数下的结果。在诊断性第27次穿越参考点，16、20 和 24 个模态下的混合响应均为负。谱投影区分了携带激发的场分支与携带条件可区分性的场分支：这两种权重对应的主导分支并不相同。

保留平移坐标的基态扇区振幅承载了条件距离中观测到的大部分模态数变化。这些诊断将联合振幅演化的系数与测得的相干响应联系起来；其数值和收敛性检验汇总于附录 B。

IX. 讨论与结论

我们根据由场导出的哈密顿量和单次穿越变分层级，构建了通量子—链联合振幅的调制方程。幺正穿越近似结合了真空修饰、平移波包和激发模态传播。其离散共振正规形演化近共振振幅，并恢复态的非共振分量。布居和内部量子比特的复

相干性可通过对场自由度取迹得到。

带间跃迁二阶生成元给出了在反复遭遇过程中累积的有序返回修正。主导共振导致链内布居和相干性发生变化，而激发分支则增加了已分辨的模贡献。在基带响应的下一阶中，对角项与近共振非对角项在累积近似误差中部分抵消。该系数可预测主导差异，并且自身也可以重新求和。使用独立积分得到的参考映射评估精确的残差递推关系，可在整个通过序列中给出事后状态相关界。

在速度选定共振处，相对于绝热基带演化，模修正在所测试可观测量中的变化约为 6.1×10^{-8}。对 81 个段落进行直接全空间传播表明，投影三次近似的误差为 1.5×10^{-9}，而 16 至 24 状态的平移精化低于 7.6×10^{-12}。累积界与独立测得的表示差异将可观测量比较的误差控制在约 2×10^{-9}。调制解在 81 个段落中再现了内部量子比特布居和相干性，误差如上所述。

附录A：调制近似的验证

1. 81 个段落中的准确性

场构造使用了20个计算模，总占据数最多为2，能量上限为5。在此速度下，有18个单量子模低于该上限；保留振子空间包含86个态。一个12态的厄米表示用于提供平移坐标。场投影包括12个基带态，以及从前两个周期内的源变化轨迹中获得的额外正交方向。我们采用64和128的总场秩，并在中间秩处分别计算完整参考进行检验。秩-128的链–场空间维数为512。

DOP853以相对容差 2×10^{-13}、绝对容差 2×10^{-15}和最大步长 $T/1024$对周期系数方程进行积分。对完整哈密顿量的直接积分提供了独立的参考周期映射，并对相同的81 个段落进行传播。表IV 给出了每个窗口中所有整数段落的最大误差。图7 展示了这些误差随段落的变化。

在绝热模型中，普通的二次响应在 1.31×10^{-6} 和 4.56×10^{-7} 处的第 81 次穿越中产生 P_2 和 c_2误差。对二次生成元进行指数化后，误差降至 1.36×10^{-11} 和 7.31×10^{-11}。相较于全场演化，残差约为 6×10^{-8}，如表 IV所示。仅保留 K_1 会产生以下误差 6.77×10^{-8}和 6.87×10^{-8}。同时保留 K_2后，所得结果与数值积分的精度相当。秩-64计算的最大激发带权重约为 1.49×10^{-8}；尽管该权重很小，有序返回振幅仍能解释可观测量修正。

在秩 64 时将最大步长从 $T/1024$减小到 $T/4096$， P_2 和 c_2 的变化至多为 7.31×10^{-14}和 5.42×10^{-14}。将场投影从秩 64 扩展到秩 128 后，它们分别变化 1.54×10^{-9} 和 2.39×10^{-9}；完整参考中秩 96 到秩 128 的变化分别为 2.38×10^{-10}和 5.03×10^{-10}。这些末尾数值量化了观测到的投影敏感性。在绝热计算中，将平移基从 16 增加到 24 后，可观测量分别变化 4.10×10^{-12} 和 7.44×10^{-12}。这些检验分别考察了穿越展开、平移分辨率和场投影的精度。

对于显式厄米生成元，我们还会在取谱对数之前，将数值积分得到的 F_{d} 替换为其酉极分解因子。所得 F_{eff} 的弗罗贝尼乌斯范数下酉性残差为 9.35×10^{-14}，由 G_{eff} 重构得到的残差为 4.83×10^{-13}。与直接秩-128参考相比，其可观测量最大差异为 1.52×10^{-14} 和 4.14×10^{-14}。积分尺度上的一致性以及场投影检验，验证了整个 81 次穿越序列中累积振荡修正的结果。

2. 正规形精化检验

在所选掩模宽度下，弗罗贝尼乌斯范数为

$$\|S_1\|_F=3.868\times10^{-4},\qquad \|S_2\|_F=1.153\times10^{-6},$$
$$\|R_1\|_F=1.282\times10^{-7},\qquad \|R_2\|_F=3.414\times10^{-6}.$$

共有 152 $|k_1\ \alpha\beta|>$ 个保留的非对角元素对，其满足 10^{-12}()。较大的二阶范数反映了该表示中累积的返回修正。相对于 ~， F_{R} 在 81 个段落中的最大可观测量差异分别为： 3.10×10^{-13} 位于 P_2 中，以及 1.75×10^{-13} 位于 c_2 中。将掩模宽度减半或加倍后，这些差异仍低于 3.14×10^{-13} 和 1.81×10^{-13}。

为检验展开阶数，将 $k_1\mapsto xk_1$ 缩放， $k_2\mapsto x^2k_2$，并使用 xS_1、x^2S_2、xR_1、x^2R_2 ，见方程（30）。对于 $x=1/4,\ 1/2,\ 1,\ 2$，弗罗贝尼乌斯映射误差除以 x^3后介于 2.76848×10^{-10} 和 2.76850×10^{-10}之间。这验证了在固定物理 κ下离散正规形变换的三次余项。

3. 使用扩展平移基的直接传播

我们在全部 86 个保留的振荡器态、平移厄米特基以及四个链态的张量积中，直接传播匹配的四阶哈密顿量。比较过程中始终采用 $n_X=12$，16，24

表IV。布居和复相干上的最大绝对误差 $0 \le N \le N_{\max}$。完整参考的场秩为 128。真空–平移生成元使用 24 个平移态；动态模生成元和参考使用相同的秩-128 场表示。最后两列中的动态模比较采用直接对角块传播，并检验带间截断。这些列处于通过步长细化确立的数值误差尺度上；统一近似在表 I 中进行检验。

$N_{\max}$ 真空–平移：	P_2 真空–平移：	c_2 采用 K_1+K_2：	P_2 采用 K_1+K_2：	c_2
27	1.92×10^{-8}	2.26×10^{-8}	7.27×10^{-15}	9.43×10^{-15}
54	4.06×10^{-8}	4.04×10^{-8}	1.00×10^{-14}	1.63×10^{-14}
81	6.19×10^{-8}	6.01×10^{-8}	1.27×10^{-14}	2.30×10^{-14}

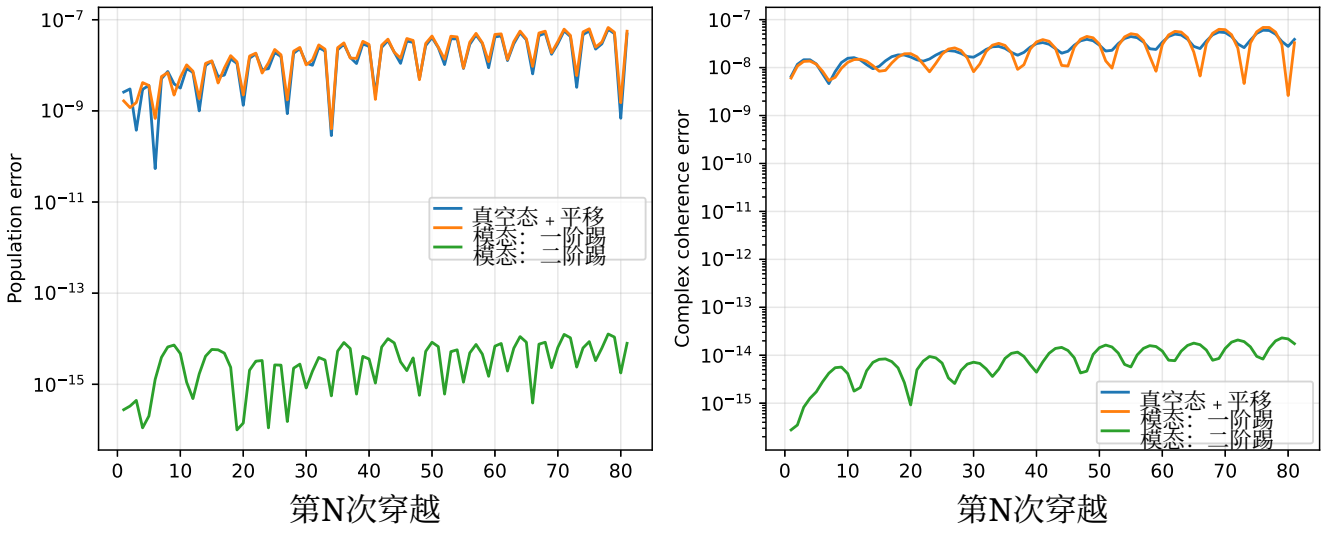

图 7。布居（左）和复相干（右）相对于完整传播的误差。真空–平移生成元会留下累积的模修正。仅加入一阶带间生成元所得到的误差大小相当。有序二阶项再现了这一修正；绿色曲线处于数值误差尺度上。所有比较均采用第 III 节中的固定参数。

$0 \le t \le 81T$，并采用相同的模间隙、匹配质量、源谐波和初始制备。 $n_X = 24$计算包含 8256 个复振幅。这种连续积分提供了一个独立于秩 128 周期映射投影的参考。

源作用通过合并相同动量块并应用其精确的稀疏 Fock 矩阵来计算。在一个周期内的三个时刻，所得右端项在归一化随机态上的相对差异为 1.1×10^{-16} 。DOP853 使用的相对容差为 2×10^{-11}，绝对容差为 2×10^{-13}，最大步长为 0.5。精细化后的 24 态计算分别使用 2×10^{-12}、 2×10^{-14} 和 0.25。整个序列中，精细化使 P_2 的变化最多为 5.33×10^{-14}，使 c_2 的变化为 6.59×10^{-14} 。精细化后的范数漂移为 1.13×10^{-14}。

将 n_X 从 16 增至 24， P_2 的变化至多为 4.32×10^{-12} ，而 c_2 变化了 7.53×10^{-12}。保留的最高四个厄米特态中的最大概率从 6.25×10^{-8} 降至 5.33×10^{-12}。用共同的厄米特基表示的态矢量，其范数差异至多为 2.02×10^{-5}；这些微小变化链可观测量量化了它们对这种场态差异的敏感性。表 V 将平移变化与固定$n_X = 12$下的秩-128联合场投影区分开来。

平移态数从 12 增至 16 时，相干性的变化达到 1.22×10^{-9} ，下一次精细化则达到 7.53×10^{-12}。在固定 $n_X = 12$时，恢复完整的振子–平移空间会使 P_2 和 c_2 分别变化 1.27×10^{-9} 和 8.60×10^{-10}。相对于完整的 24 态参考，这两者的综合影响为 1.49×10^{-9} 和1.28×10^{-9}。这些比较分别揭示了有限表示误差的两种来源。

相较于直接24态绝热控制，完整的24态演化在布居上产生了 6.17×10^{-8} 的模修正，在复相干上产生了 6.09×10^{-8} 的模修正。相对于这一完整参考，三次地态生成元近似的最大误差分别为 1.49×10^{-9}和 1.28×10^{-9}。

表 V. 全部 81 个段落中的可观测量最大差异。完整传播保留全部 86 个振子态。秩比较中固定 $n_X = 12$；24 态参考采用了更精细的积分容差。

比较	P_2	复数 c_2
完整传播：$n_X = 12 \to 16$	7.00×10^{-10}	1.22×10^{-9}
完整传播：$n_X = 16 \to 24$	4.32×10^{-12}	7.53×10^{-12}
秩 128 与 $n_X = 12$ 处的完整传播比较	1.27×10^{-9}	8.60×10^{-10}
在 $n_X = 12$ 处的秩 128 到 $n_X = 24$	1.49×10^{-9} 处的完整传播	1.28×10^{-9}
完整 $n_X = 24$：积分细化	5.33×10^{-14}	6.59×10^{-14}

4. 扣除主导残差后的累积误差

设 F 为所选~有限域表示中的完整幺正周期映射，$A = F$ 为统一幺正近似，$E = E_3$ 为计算得到的首阶局部缺陷。定义

$$\Delta = F - A, \qquad R_{\mathrm{loc}} = \Delta - E.$$

对于归一化初始态，传播 $\psi_n = A^n \Psi_{\mathrm{in}}$ 和 r_n，依据方程 (35。重构后剩余的误差为 $q_n = F^n \Psi_{\mathrm{in}} - \psi_n - r_n$。直接代入可得精确恒等式

$$q_{n+1} = F q_n + d_n, \qquad d_n = R_{\mathrm{loc}} \psi_n + \Delta r_n, \qquad q_0 = 0. \tag{A1}$$

d_n 中的第一项是作用于入射近似状态的下一个局部缺陷；第二项则反映映射差异对累积首阶修正的重复作用。由方程 (A1) 中的幺正性可得逐态界

$$\|q_N\| \le B_N := \sum_{n=0}^{N-1} \|d_n\| \le \sum_{n=0}^{N-1} \big(\|R_{\mathrm{loc}} \psi_n\| + \|\Delta r_n\| \big). \tag{A2}$$

它保留了传播子空间的实际占据数。相应的一致界由 $\|r_n\| \le n \|E\|$ 得出：

$$\|q_N\| \le N \|R_{\mathrm{loc}}\| + \frac{N(N-1)}{2} \|\Delta\| \|E\|. \tag{A3}$$

一致精度的一个充分条件是方程（A3）中的两项都足够小。方程（A2）针对指定制备给出了更精确的估计。

对于布居算子或定义复相干的算符，其算子范数均为 1。对于 $u_N = \psi_N + r_N$，可观测量误差满足

$$\big| \langle O \rangle_{F^N \Psi_{\mathrm{in}}} - \langle O \rangle_{u_N} \big| \le (1 + \|u_N\|) B_N \le 2B_N + B_N^2. \tag{A4}$$

通过 $O = I_{\mathrm{field}} \otimes |2\rangle\langle 0|$，相同的界也适用于复相干的非对角元素。

我们使用独立积分得到的参考映射与近似映射的极分解酉因子，并采用相同的归一化投影初态，来评估这些界。

表 V. 秩-128 模型中减去主导残差后的累积误差。测量误差是 $0 \le n \le N$ 上 $\|q_n\|$ 的最大值。单调界 B_N 控制了整个窗口。

N	测量误差	B_N	可观测量界
27	7.28×10^{-12}	1.44×10^{-11}	2.89×10^{-11}
54	1.65×10^{-11}	7.48×10^{-11}	1.50×10^{-10}
81	3.44×10^{-11}	2.78×10^{-10}	5.57×10^{-10}

初始态。参考周期采用 DOP853 积分，相对容差为 2×10^{-13}，绝对容差为 2×10^{-15}，最大步长为 $T/4096$。在谱范数下，

$$\|\Delta\| = 1.59240 \times 10^{-7}, \qquad \|E\| = 1.59226 \times 10^{-7},$$
$$\|R_{\mathrm{loc}}\| = 5.69083 \times 10^{-9}.$$

在 $N = 81$处，方程（A3）给出 4.61×10^{-7}，而方程（A2）的轨迹界为 2.78×10^{-10}。重复插入范数之和 $\sum_n \|\Delta r_n\|$ 为 7.45×10^{-16}；下一个局部缺陷决定了本次计算中的界。表VI 比较了该界与每个段落窗口上直接测得的态误差。

将参考最大步长从 $T/2048$改为 $T/4096$，传播后的参考态至多改变 1.74×10^{-13}，并且 B_{81} 相对改变 2.87×10^{-5}。对于这些酉映射和归一化态，重构后的可观测量误差在 P_2 中至多为1.08×10^{-12}，在 c_2 中至多为 5.16×10^{-13}。

表示比较可以在可观测量层面进行。令$\eta_{O,\,N}$ 表示归一化的秩-128参考与完整精细24态参考在 $0 \le n \le N$ 上的最大差异。三角不等式和方程（A4）给出

$$\max_{n \le N} \big| \langle O \rangle_{\mathrm{full},n} - \langle O \rangle_{u_n} \big| \le \eta_{O,N} + 2B_N + B_N^2.$$

对于 $N = 81$，计算得到的右端为 2.05×10^{-9}，对于 P_2 以及 1.85×10^{-9}，对于 c_2。这些是用于与明确测试的完整有限模型进行比较的后验界。图8 展示了沿该序列的基组差异和逐态余项界。

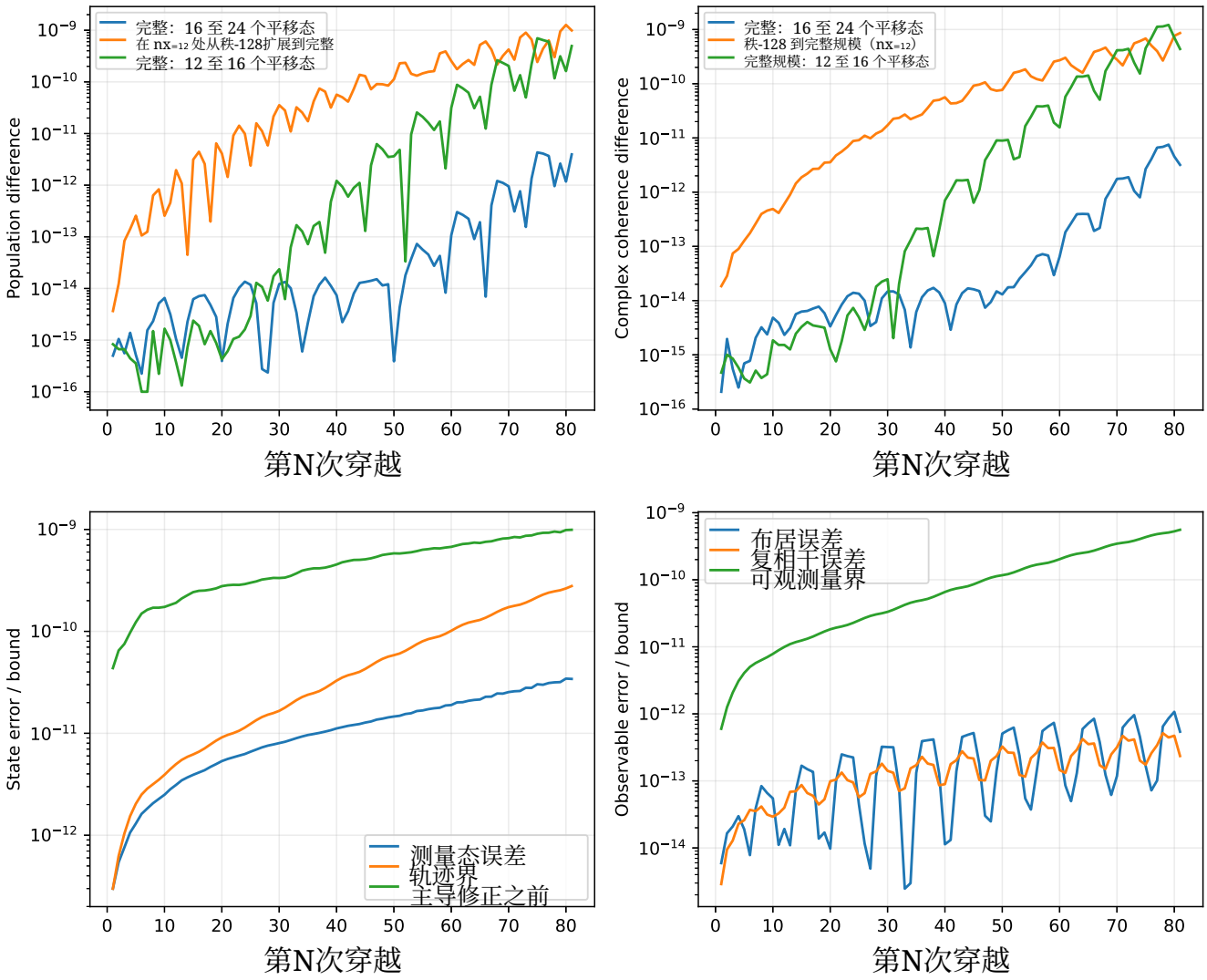

图 8. 上方各图：直接平移基组细化误差和联合场投影误差，分别按布居和复相干进行分解。下方各图：扣除主导残差后的实测误差，以及根据公式（A2）和（A4）得到的逐态界。使用场秩为 128 时数值构造的酉映射计算这些界；通过单独的可观测量表示误差，纳入对完整 24 态系统的比较。

附录 B：质量依赖响应与谱诊断

下面的计算使用三个连续的哈密顿量。谐模型给出二阶辐射响应及其局部零边界。中心–模态族加入依赖动量的三次顶角，并跟踪其强度增加时的边界。四次模型还包括纯模顶角和变换后的源项；其最终比较在不同模态数下匹配激发能隙和平移曲率。每个阶段都使用联合演化及其在方程（13）中的两个自身控制量。

写出 $\mathcal{F}(\delta,\mu;\ N)=\Gamma^{(2)}_{\text{混合}}$。临界点满足

$$\mathcal{F}(\delta_c,\mu_c;N)=0,\qquad \mathcal{F}_\delta(\delta_c,\mu_c;N)=0. \tag{B1}$$

我们计算局部导数

$$A=\mathcal{F}_\mu,\quad B=\mathcal{F}_{\delta\delta},\quad C=\mathcal{F}_{\mu\delta},\quad D=\mathcal{F}_{\delta\delta\delta}$$

在方程（B1）中。当 $d=\mu-\mu_c$ 且 $y=\delta-\delta_c$时，

$$\mathcal{F}=Ad+\tfrac{1}{2}By^2+Cdy+\tfrac{1}{6}Dy^3+O(d^2,dy^2,y^4). \tag{B2}$$

对于 $AB\neq 0$，代入方程（B2）可得

$$\begin{aligned}\delta_\pm&=\delta_c+bd\pm\sqrt{-2Ad/B}+O(|d|^{3/2}),\\ b&=-\frac{C}{B}+\frac{AD}{3B^2}.\end{aligned} \tag{B3}$$

计算出的四个点均具有 $A<0$。在 $B>0$ 下，$d>0$ 处产生了一个负区间。在 $B<0$ 下，$d<0$ 处的根围成一个正间隙，该间隙在两个

表 VII. 完整二阶混合响应的临界点。随着 M 减小，会出现产生和合并。

N	Type	μ_c	δ_c	M_c/M_0
18	产生	0.655623	−0.201975	1.525266
22	合并	0.143801	−0.210282	6.954059
27	产生	1.022757	−0.247415	0.977750
36	产生	0.434304	0.199826	2.302532

表 VIII. 方程 (B3) 的系数。这里 $s=\sqrt{|2A/B|}$，平方根项为 $s\sqrt{|d|}$。

N	10^7A	10^4B	s	b
18	−1.329057	1.046369	0.050402	−0.022899
22	−2.417149	−0.763155	0.079590	0.025675
27	−5.409696	2.716976	0.063104	−0.023937
36	−1.276637	4.587744	0.023591	−0.016828

负区间合并时闭合。这些是条件响应零水平集的折叠。

表 VII 和VIII 给出了方程（B3）中的临界参数和系数。数值曲面直接在三点质量网格和九点失谐网格上计算。我们分别使用质量上的局部二次拟合和失谐上的六次拟合来计算导数。将质量间距从 0。01减半至 0。005 并将失谐间距从 0。0025 减小至 0。0015后，在本计算中μ_c 的变化小于 4×10^{-10} 。

频率宽度为（$\delta_+-\delta_-$）/T。对于产生，$M<M_c$ 和 $d=\mu_c$（M_c-M）/M_c+O（（$M-M_c$）^{2}），因此

$$\Delta\omega\sim\frac{2s\sqrt{\mu_c}}{T}\sqrt{\frac{M_c-M}{M_c}}. \tag{B4}$$

对于合并，在方程（B4）中用 $M-M_c$ 替换 M_c-M 即可得到剩余正间隙的宽度。在 $|d|=0.0025$、0.01、0.04 处进行的独立积分确认了图 9 中的边界。这些点上的最大相对宽度误差分别为 0.20%、0.017%、0.48% 和 0.11%，对应于 $N=18$、22、27、36。

更高的辐射阶数会使临界参数发生偏移。如果 $\Gamma_{\rm mix}=\lambda^2\mathcal{F}_2+\lambda^4\mathcal{F}_4+\cdots$，对方程（B1）进行延拓可得

$$\mu_c^{(4)}=-\frac{\mathcal{F}_4}{A},\qquad \delta_c^{(4)}=-\frac{\partial_\delta\mathcal{F}_4+C\mu_c^{(4)}}{B}. \tag{B5}$$

对 $N=18$进行直接的 20模计算，采用联合占据截断 2，并进行三量子预设轨迹计算，可得到局部控制估计 $\mu_c\simeq0.67034$，$\delta_c\simeq-0.20134$，或 $M_c\simeq1.492M_0$。此估计采用直接频率曲率，以及用于方程（B5）最终修正的二阶质量导数。质量偏移约为 −2.2%；局部曲率仍为正。表VII和VIII列出了上述边界展开所检验的渐近临界点。

1. 中心—模三次响应的延拓

为在逆质量中继续计算修正后的响应，以能量单位定义诊断族

$$\mathcal{H}_{\mu,\epsilon}=\mathcal{H}_{\rm harm,1}+\frac{\mu-1}{2M_0}p^2+\epsilon\mathcal{H}_{3,\rm cm},\qquad \mu=M_0/M. \tag{B6}$$

此处 $\mathcal{H}_{\rm harm,\ 1}$ 是在 $M=M_0$处、以能量单位表示的谐哈密顿量。方程（B6）将源、环模式和三次系数保持在 $v=0.54$时的取值。参数 μ 改变二次平移曲率； ϵ 控制三次顶点。联合传播子和平移控制传播子均采用相同的规定。在 $\mu=1$， $\epsilon=1$它重现了上文的规范响应检验。

令 $F_N(\delta,\ \mu,\ \epsilon)$ 表示直接传播的混合对数重叠。折叠满足 $F_N=\partial_\delta F_N=0$。在非退化折叠处，对$\epsilon$ 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}\mu_c}{\mathrm{d}\epsilon}=-\frac{F_\epsilon}{F_\mu},\qquad \frac{\mathrm{d}\delta_c}{\mathrm{d}\epsilon}=-\frac{F_{\delta\epsilon}+F_{\delta\mu}\,\mathrm{d}\mu_c/\mathrm{d}\epsilon}{F_{\delta\delta}}.$$

所有导数均在折叠处计算。这些方程在 $F_\mu F_{\delta\delta}\neq0$ 时建立局部延拓。临界质量的相对敏感度为

$$\frac{1}{M_c}\frac{\mathrm{d}M_c}{\mathrm{d}\epsilon}=-\frac{1}{\mu_c}\frac{\mathrm{d}\mu_c}{\mathrm{d}\epsilon}=\frac{F_\epsilon}{\mu_cF_\mu}. \tag{B7}$$

方程（B7）将响应灵敏度 F_ϵ/F_μ与放大效应 $1/\mu_c$区分开来。对于产生误差 ΔF 和 ΔF_δ 的数值截断变化，在折叠处，一阶位移为

$$\Delta\mu_c=-\frac{\Delta F}{A},\qquad \Delta\delta_c=-\frac{\Delta F_\delta+C\Delta\mu_c}{B},$$

这里 $A=F_\mu$， $B=F_{\delta\delta}$和 $C=F_{\delta\mu}$。这些表达式将响应误差与临界参数的偏移联系起来。在中心-模式族中 $\epsilon=1$，通过直接传播方程（B6）求解两个零条件。所得局部边界具有方程（B3）的形式，其中使用了修正响应的导数。

对于 $N=18$ 和 $\mu=1$，直接三次项传播将所跟踪的边界夹在

$$-0.278658<\delta_-<-0.277000,$$
$$-0.161000<\delta_+<-0.159995.$$

在左侧区间端点处，混合响应为9.87×10^{-9} 和 -3.86×10^{-9}；在右侧端点处，它们为 -2.60×10^{-9} 和 3.43×10^{-9}。失谐宽度介于 0.11600 和 0.11866 之间，而上文引用的谐波二阶区间为 0.05993。线性插值得到近似边界位置 −0.27747 和 −0.16057。

针对 $N=18$ 和 $N=22$ 的质量延拓在 $\mu=0.005$ 处达到极限，附近的响应为负

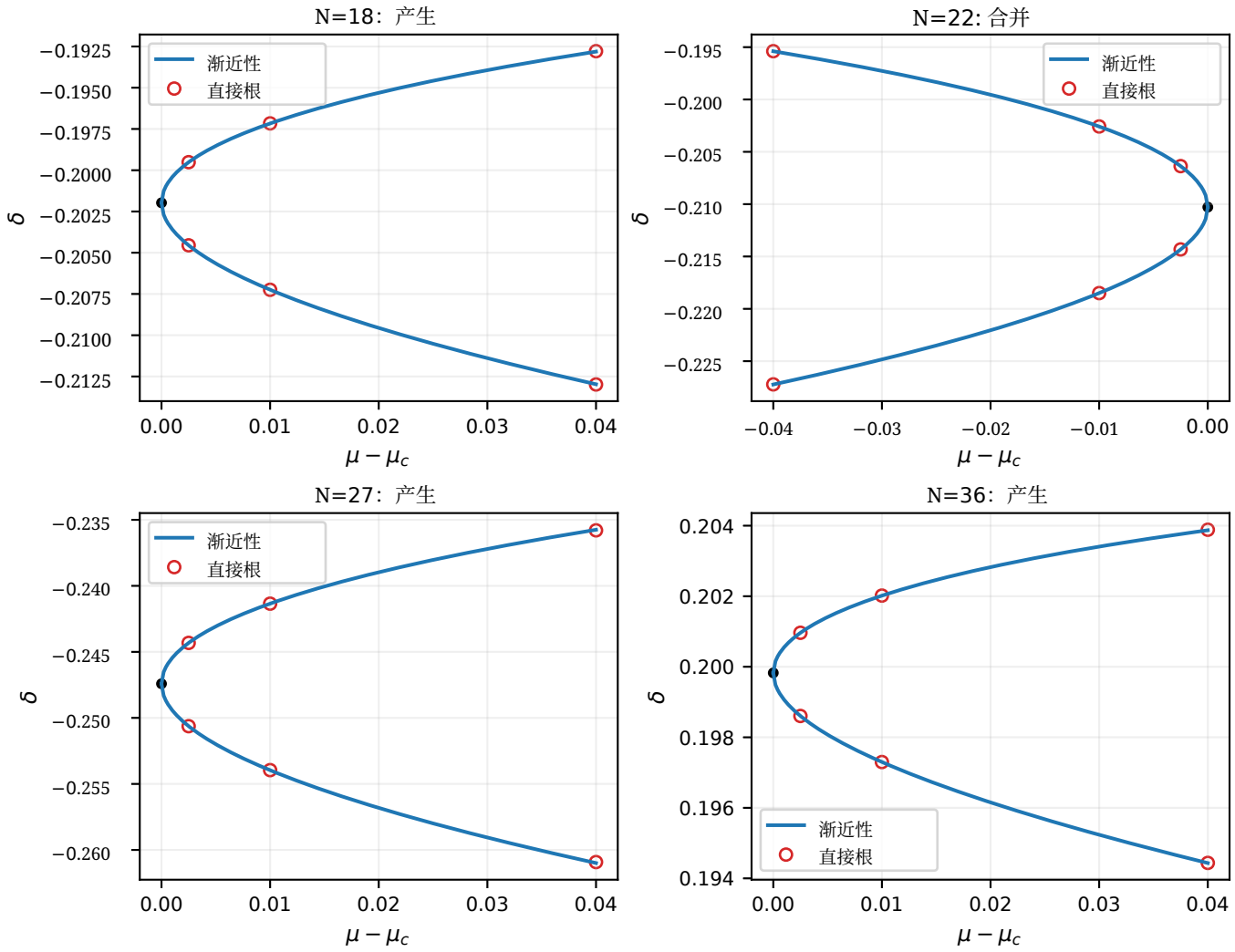

图 9. 局部边界展开与完整二阶层级的独立积分。红色圆圈表示根据每个边界两侧的直接计算推断出的根；曲线使用方程 (B3)。合并会闭合一个正间隙，而其他三个面板则显示负区间的产生。

在所追踪的最小值和最大值附近。诊断边界$\mu = 0$处的直接 24 状态数据包计算给出 $F_{18}(-0.2022483,\ 0,\ 1) = -8.14 \times 10^{-8}$和$F_{22}(-0.175331502,\ 0,\ 1) = -6.59 \times 10^{-8}$。这些数值刻画了正逆质量域边界处延拓后的局部分支。

对于 $N = 27$ 和 $N = 36$，修正后的响应具有表 IX中的非退化折叠。二者均满足 $A = F_\mu < 0$和 $B = F_{\delta\delta} > 0$。因此，增大 μ 至μ_c 会产生一个具有局部边界的负区间

$$\delta_\pm = \delta_c \pm s\sqrt{\mu - \mu_c} + O(\mu - \mu_c), \qquad s = \sqrt{-2A/B}.$$

相应的转变通过减小M来实现。直接传播采用 20 个环模式、占据数联合截断为 2，以及 24 个平移态。相对和绝对积分容差分别为 2×10^{-12}和 2×10^{-14}，无量纲时间变量中的最大时间步长为 0.08。相位导数采用中心

表 IX. 占据数截断为二时，直接传播的中心模三次响应的折叠，与二阶谐波临界质量的比较。逆质量族由方程 (B6) 定义；所有三次系数均固定为其参考值。

N	M_c/M_0 （谐波项）	M_c/M_0 （三次）	δ_c	s
27	0.978	15.8	−0.24095	0.0664
36	2.303	3.0	0.19545	0.0206

采用步长为 0.001 的居中差分，逆质量导数则采用步长为 0.01 的前向差分。在表列各点，$|F| \le 2.0 \times 10^{-10}$ 和 $|F_\delta| \le 5.4 \times 10^{-9}$。质量值的舍入精度根据这些残差确定。

独立的直接传播用于检验每个折叠附近的符号。对于 $N = 27$，取 $e = 0.01$；对于 $N = 36$，取

表 X. 采用直接传播得到的第27次穿越临界点，计算使用了20个环模式、24个平移态，以及总占据数截断为二。系数 A 和 B 分别是混合响应的逆质量斜率和相位曲率。

ϵ	μ_c	M_c/M_0	δ_c	$10^7 A$	$10^4 B$
0.00	1.03174	0.9692	-0.24727	-5.360	2.751
0.25	0.77764	1.2859	-0.24530	-5.339	2.639
0.50	0.53090	1.8836	-0.24353	-5.349	2.557
0.75	0.29260	3.4176	-0.24207	-5.388	2.502
1.00	0.06314	15.84	-0.2410	-5.453	2.471

$e = 0.02$。在按顺序排列的点集中

$$(\mu_c - e, \delta_c), \quad (\mu_c + e, \delta_c), \quad (\mu_c + e, \delta_c \pm 2s\sqrt{e}),$$

响应值以 10^{-9} 为单位，分别为

$$N = 27: \quad (5.46, -5.45, 16.18, 16.25),$$
$$N = 36: \quad (2.83, -2.43, 6.93, 9.45).$$

两个校正后的折叠点都保留了负区间的产生：中心点从正变负，而两个外侧点仍为正。表 IX 中的比较同时纳入了三次中心–动量贡献，以及从二阶辐射层级到直接占据数截断传播的变化。

2. 三次强度的延拓与数值敏感性

对于第27次穿越，在 $\epsilon = 0$ 处进行直接传播，得到谐波折叠点 $\mu_c = 1.03173988$、$\delta_c = -0.24727472$或 $M_c = 0.96924 M_0$。同一传播器在 $\epsilon = 1$处得到表 IX中的三次临界点。此比较固定了两个端点处的辐射占据数截断和传播方法。

表 X 给出了三次强度下的直接延拓。在所有五个采样点，$A < 0$ 和 $B > 0$。A 的幅值变化约为2.1%，而 B 从 2.75×10^{-4} 平滑地下降至 2.47×10^{-4}。行列式 AB 保持在 -1.48×10^{-10} 和-1.34×10^{-10}之间。负区间的局部产生在这些点仍保有其非退化折叠结构。

临界质量倒数从1.03174 降至0.06314，两个端点之间的质量比为16.34 。在 ϵ连续四分之一间隔内，μ_c 的割线斜率分别为 -1.0164、-0.9870、-0.9532和 -0.9178。较大的质量偏移伴随着平滑的逆质量位移，其响应斜率有限。方程（B7）指出，其放大效应由 $1/\mu_c$确定。采用最后一个割线斜率，可得局部相对敏感度估计约为14.5 每单位 ϵ。图 10展示了这两个变量及其对模式截断的依赖性。

通过分别将环模的数量从 20 增至 24，检验 $\epsilon = 1$ 处的端点，并

表 XI. $\epsilon = 1$处第27次穿越时中心—模态族的临界质量估计。数据包表示平移态的数量；截断限制总模式占据数。变化量均相对于20模态、24态的双量子参考值。牛顿估计采用局部折叠位移公式；直接结果满足两个折叠方程，且残差在所述容差范围内。

模态	数据包	截断	M_c/M_0	$\Delta M_c/M_0$	方法
20	24	2	15.84	0	直接
24	24	2	15.84	+0.0009	牛顿
20	32	2	15.84	+0.0027	牛顿
20	24	3	15.60	−0.24	直接

将平移基从 24 个态增至 32 个态。在原始临界坐标处，这些细化分别得到 $F = -1.86 \times 10^{-12}$ 和 $F = -5.82 \times 10^{-12}$。应用局部折叠位移公式，得到临界质量估计 $15.8377 M_0$ 和 $15.8395 M_0$。这些是根据细化后的响应和相位导数得到的牛顿估计。在 $\epsilon = 0$处，将模态数增至 24 会使临界点处的响应改变 7.22×10^{-13}。

在三次端点处进行的时间积分检验将最大步长从 0.08 减半至 0.04，并将相对容差从 2×10^{-12} 收紧至 2×10^{-13}，绝对容差设为相对容差的百分之一。混合响应变化了 5.75×10^{-14}。

占据数截断细化采用 20 个环模式和 24 个平移态。总占据数截断为二和三时，分别保留 231 个和 1771 个福克态。新增扇区允许来自线性模顶点的 $2 \leftrightarrow 3$ 次跃迁，以及来自 $p : \mathcal{W}_2 :$的配对部分的 $1 \leftrightarrow 3$ 次跃迁。联合演化和控制演化均采用相同的占据数截断。

在第27次穿越的双量子临界坐标处，提高截断使 $\Gamma_{XR,\,2}$ 变化了 5.00×10^{-9}，并使 $\Gamma_{R,\,2}$ 变化了 4.47×10^{-9}，其中 $|\Delta\Gamma_{X,\,2}| < 2 \times 10^{-15}$。两者之差给出 $\Delta F = 5.30 \times 10^{-10}$。两个截断均采用相同的中心相位步长 0.0005 时，$\Delta F_\delta = -1.82 \times 10^{-8}$，且相位曲率增加了 0.427%。相应的十二模态截断增量在 F 中为 5.12×10^{-10}。

三量子折叠的直接迁移给出

$$\mu_c \simeq 0.06411, \qquad \delta_c \simeq -0.24092, \qquad M_c \simeq 15.60 M_0.$$

在计算坐标处，$F = -4.48 \times 10^{-14}$ and$F_\delta = 8.10 \times 10^{-10}$。根据残差推得的线性化质量修正为 $2.0 \times 10^{-5} M_0$。导数 $A = -5.450 \times 10^{-7}$ 和 $B = 2.481 \times 10^{-4}$ 保留了负区间的非退化产生，其开启系数为 $s = 0.06628$。与双量子结果相比，临界质量降低了 $0.2392 M_0$，即 1.51%。

表 XI比较了各项独立的数值细化结果。占据数截断的变化在这些测试中产生了最大的质量位移。三量子计算给出了细化端点

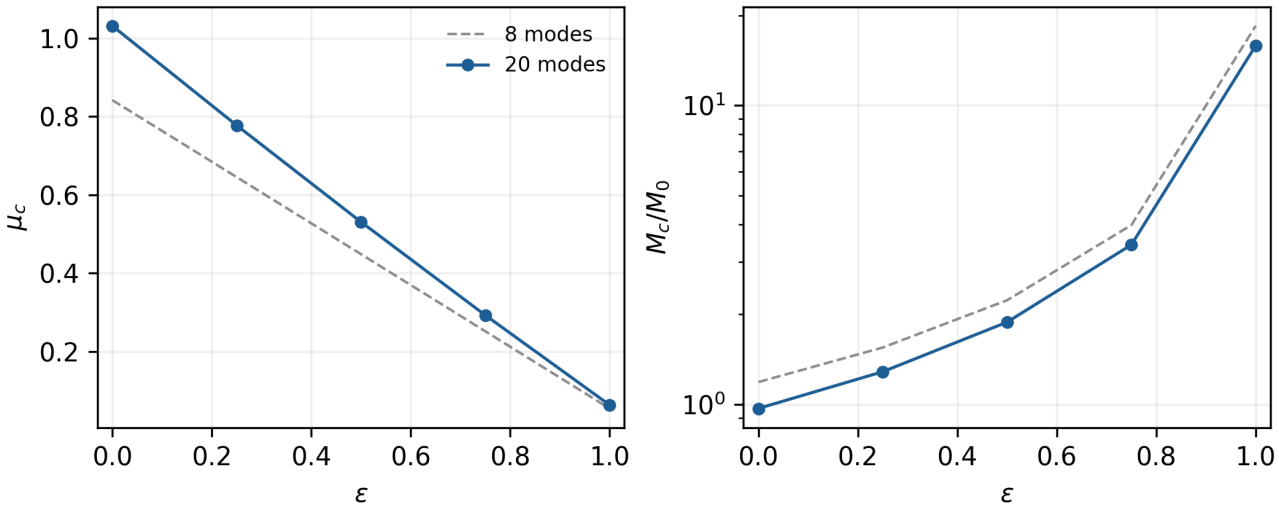

图 10. 三次强度中第27次穿越折叠的延拓：临界质量倒数（左）和对数尺度下的临界质量（右）。实线连接表 X中的直接二十模态临界点；虚线给出八模态延拓。两项计算均采用 24 个平移态和总占据数截断 2。

$\epsilon = 1$，而表X规定了占据数截断为二时的延拓。

将空间网格从 192 个点细化至 256 个点，并在对齐复相位后比较前 24 个模态。最大变化分别为：模态频率 8.74×10^{-14} 、源投影 1.36×10^{-13} 以及三次系数 3.3×10^{-16} 。27 次穿越期间相应的最大频率相位变化为5.25×10^{-11}。

3. 固定模态截断下的场阶数完备化

我们将二十模态场约化推进至四次阶，

$$\mathcal{H}_{\mathrm{f4}} = \mathcal{H}_2(\mu,\delta) + \hbar_* H_q + \widetilde{\mathcal{H}}_3 + \mathcal{H}_4 - \kappa Z_1 \,\mathrm{Op_W}(S_0 + S_1 + S_2). \tag{B8}$$

~此处 $\mathcal{H}_3$ 采用附录F中的固定参考速度减法； $\mathcal{H}_4$ 以及 S_n 分别由方程（E7）和（E8）给出。所有场系数均保留其参考值，而 μ和诊断失谐发生变化。对方程（B8）的直接传播包含重复的三次相互作用及其与源的干涉。联合演化和两个控制量均从同一哈密顿量中获得相应项。设 $X_Q = vt - L/2 + Q$，并令 c_4 为正则四次能量中 p^4 的系数。此处使用的平移控制为

$$\mathcal{H}_X = \frac{\mu p^2}{2M_0} + c_3 p^3 + c_4 p^4 + \hbar_* H_q - \kappa Z_1 \left[J(X_Q) + \tfrac{1}{2}\{g_\alpha(X_Q), p\} \right].$$

它保留纯动量多项式和动量源，并在正则符号中将振子坐标设为零

。辐射控制是取值于 $Q = p = 0$ 的联合哈密顿量，作用于链和保留模态。在匹配比较中，它使用与联合演化相同的频率反项，以及相同的初始模态状态。平移控制的二次曲率为 μ/M_0 ，并保留所示的 p^3 和 p^4 项。下文的平均源控制则将这一平移哈密顿量中的源替换为其在匹配模基态中的期望值。

比较是在三量子中心模端点处进行的，

$$N = 27, \qquad \mu = 0.06411253, \qquad \delta = -0.24092163.$$

魏尔多项式在投影到振子基之前通常先按正规序排列，并保留其真空收缩。由坐标测度导出的动能排序势形式为 $\hbar_*^2 V_{\mathrm{ord}}(q)$。其与涨落无关的部分在四阶贡献一个公共相位，而其首个变量项在附录 $\hbar_*^{5/2}$的计数下具有E阶能量。

传播时，我们使用 24 个平移态，以及满足 $\sum_\nu n_\nu \le 4$ 和 $\sum_\nu \omega_\nu^{\mathrm{ref}} n_\nu \le E_{\max}$的振子态。后一个界限采用未平移的参考频率，使基底在相位微分过程中保持固定。二十模真空收缩在此投影之前计算。在表列的能量界限内，全部二十个单量子态均包含在内。DOP853 积分采用相对容差10^{-9}、绝对容差 10^{-11}和最大步长 0.4。

表XII在相同基底下解析了附加块的贡献，其中 $E_{\max} = 4$。补全三次能量和动量源后， F变化了 -4.6586×10^{-7}。加入四次能量和二次源后，又产生了一个补偿变化：

表 XII。在一个包含 231 个态的通用振子基中，第27次穿越时的场块比较（$E_{\max}=4$）。中间行在中心–模模型中加入了纯模三次块和动量源。最后一行进一步包含 $\mathcal{H}_4$ 和 S_2。

模型	$10^5\Gamma_{XR,2}$	$10^5\Gamma_{R,2}$	$10^5\Gamma_{X,2}$	10^7F
中心–模	5.61007	1.37405	4.23620	−0.01748
完整三次	5.98630	1.84202	4.19104	−4.67608
四次	4.99069	0.83611	4.19104	−3.64636

表 XIII。前一个中心–模折叠点处四次哈密顿量的能量截断检验。占据数上限为 4，波包基包含 24 个态。相位增量取自无源模块的最低激发态。

$E_{\max}$	振子态		10^7F	$\Delta\omega_1 T$
4		231	−3.64636	0.0283402
4.5		403	−3.90355	0.0260648
5		665	−3.88949	0.0260122

$+1.0297\times10^{-7}$。所得点满足 $F<0$，因此属于开放抑制区域。其总条件损失也从 5.61007×10^{-5} 降至 4.99069×10^{-5}。

表XIII 报告了能量截断检验。我们还计算了无源模块的谱。其最低激发态与第一裸模态的重叠平方为 0。9876，频率增量约为 1.17×10^{-3}。随着 $E_{\max}$ 增加到 5。5，相应的通道相位增量趋近于 0。02598，使得到第 27 个通道时累积相位尺度达到 0。70。 p^2 的四次真空系数还给出了逆曲率增量 $2M_0\langle0|\mathcal{H}^{(p^2)}{}_4|0\rangle=$0。00279754。这些谱学和动力学贡献共同影响传播响应。

将相对容差收紧至 10^{-11}，并将最大步长减小至 0。2，会使 F 在 $E_{\max}=4$处变化 4.49×10^{-12}。在该能量上限下，步长为 0。005 的中心相位差分给出 $F_\delta\simeq4.61\times10^{-6}$ 和$F_{\delta\delta}\simeq1.25\times10^{-4}$；步长为 0。02 的前向逆质量步长给出 $F_\mu\simeq-4.36\times10^{-7}$。在诊断曲率族的边界 $\mu=0$ 处，相同相位给出$F=-3.36\times10^{-7}$。在相邻的两个相位以及 $\mu=0.08411$处也存在负响应。

正规序收缩还取决于模态总数。另一个无源比较在每种模态数下都保留至三个量子的所有态，并采用相同的裸参考系数。第一激发态的穿越相位增量0。02598、0。03645和0。06467 分别对应 20、24 和 32 个模态。能量截断细化和总模式数细化会改变受规制哈密顿量的不同部分。表 XII和XIII 给出了参考系数固定时的二十模态响应。

表 XIV。第27次穿越时的匹配参数混合响应。两种初始制备均使用24个波包态，且总模式占据数至多为四。最后两列分别对应零动量下的谐振子真空态和匹配基态。物理相位和质量固定为 $\delta_{\rm phys}=-0.24092163$ 和 $M/M_0=15.5976$。

模态	$E_{\max}$	$10^7F_{\lvert0\rangle}$	$10^7F_{\lvert g_K\rangle}$
16	5	−3.15270	−5.16148
20	4.5	−4.73956	−7.71349
20	5	−4.70206	−7.70667
24	5	−6.45096	−10.57414

4. 在固定激发能隙和固定平移质量下的比较

对于每种模态数，我们将无源的单粒子激发能隙和基态分支能量的曲率指定为有限模式模型的物理参数。附录G 给出了施加这些条件的反项。物理穿越相位为 $\delta_{\rm phys}=\omega_{1,\ \rm phys}T-6\pi=-0.24092163$，参考逆质量为 $\mu=0.06411253$。源几何、非线性顶点、链哈密顿量、穿越周期和初始高斯波包对所有计算均相同。我们比较两种因子化初始模式态：谐振子真空态和在$p=0$处的匹配基态。

表 XIV 比较了 $N=27$时的混合响应。在两种初始制备下，16、20和24个模态时负号均持续存在。由于有限维传播子连续依赖于相位和质量，每个严格为负的数值都处于一个开放抑制区域内。在固定为20个模态时，将能量上限从 4.5 提高到 5 会使 F对于谐振子真空态变化 3.75×10^{-9}，而对于匹配基态变化 6.82×10^{-10}。在能量上限为5时，将模态数从20增加到24，会使相应的幅值变化约37%。在这些模态数下，符号保持不变，而幅值发生变化。

将相对积分容差和绝对积分容差分别收紧至 10^{-11} 和 10^{-13}，并将最大步长从 0.4 减小至 0.2，会使 20 模态的 $E_{\max}=4.5$谐波项-真空态结果改变 4.439×10^{-12}。

在相同的物理相位和 $\mu=0.1$ ($M=10M_0$) 下，20 个模态和 24 个模态的谐波项-真空态响应分别为 $F=-4.96104\times10^{-7}$ 和 $F=-6.73584\times10^{-7}$。

方程 (13) 中的平移控制在零模坐标处计算源。对于匹配基态制备，我们还通过计算$|g_K\rangle$中源算符的期望值，构造一个单独的控制量：

$$\overline{S}_K(Q,p)=\langle g_K|\,\mathrm{Op_W}(S_0+S_1+S_2)|g_K\rangle.$$

该控制保留了相同的波包色散和链

哈密顿量。将其损耗记为$\Gamma_{X,\,2}$，定义

$$\overline{F}=\Gamma_{XR,2}-\Gamma_{R,2}-\overline{\Gamma}_{X,2},\qquad F=\overline{F}+\overline{\Gamma}_{X,2}-\Gamma_{X,2}.$$

在参考质量和能量上限 5 时，$\Gamma_{X,\,2}=4.11847\times10^{-5}$ 适用于 20 个模态，4.09159×10^{-5} 适用于 24 个模态。相应的残差分别为 $F=-4.50\times10^{-8}$ 和-6.30×10^{-8}。平均源分布解释了大部分负的基态响应，而在两种模态数下，残差也均为负。平均二次源的傅里叶表示与直接计算的基态矩阵元之间的差异小于 10^{-18}。

5. 激发概率和条件谱权重

我们在零动量下无源模态哈密顿量的本征基中解析附录 B4 中的匹配基态计算。令 K 表示保留模态的数目，$|g_K\rangle$ 表示其基态，$|r;\ K\rangle$表示保留振子空间中的一组完备正交归一本征基。通过与参考谐振子态 r_ν 的重叠来确定单粒子分支 $|1_\nu\rangle$，采用与附录 G中相同的指派方式。对于归一化联合态，定义

$$A_{rj}(Q)=\langle r;K|\Psi_j(Q)\rangle,\qquad P_r=\sum_j\int|A_{rj}(Q)|^2\mathrm{d}Q. \tag{B9}$$

这里 $j=0,\ 1,\ 2,\ 3$ 表示链的真空态和单激发态。初始的因子化制备具有 $P_g=1$。方程（B9用于衡量联合演化过程中匹配本征分支的激发情况。

令 $p_j=\rho_{jj}$ 和 $\vartheta=\arg\rho_{20}$。相应的条件谱权重为

$$D_r=\frac12\int\left|\frac{A_{r2}(Q)}{\sqrt{p_2}}-e^{i\vartheta}\frac{A_{r0}(Q)}{\sqrt{p_0}}\right|^2\mathrm{d}Q,$$
$$D_g+\sum_{\nu=1}^{K}D_{r_\nu}+D_{\rm rest}=1-\eta_2. \tag{B10}$$

其余部分对其他本征态求和。根据正交性，直接通过求解两个归一化条件环境向量之间的平方距离，便可得到方程（B10）。其基态项保留了对平移坐标的依赖 Q。

为与参考谐振子基进行比较，我们还记录了 $n_\nu=\langle a_\nu^\dagger a_\nu\rangle$ 和条件均值

$$\alpha_{\nu|j}=p_j^{-1}\langle\Psi_j|a_\nu|\Psi_j\rangle.$$

图11 展示了这些时刻，以及第27次穿越时的本征分支概率和距离。物理相位、质量、源和初始波包均与表XIV中的一致，$E_{\max}=5$ 并采用匹配基态制备。

表 XV. 匹配基态制备在第27次穿越时的本征分支诊断。求和范围为已识别的单粒子分支。 $D_{\rm rest}$ 包含所有其他激发本征态。

量	20 个模态	24 个模态
$10^4\sum_\nu P_{r_\nu}$	2.90538	2.90880
$10^5\sum_\nu D_{r_\nu}$	1.40204	1.40168
$10^5 D_g$	4.08511	4.05821
$10^8 D_{\rm rest}$	4.66718	4.53081
$10^5(1-\eta_2)$	5.49181	5.46442

对于20和24个模态，第九本征分支分别占总单粒子激发概率的75。65% 和75。68%。第一本征分支分别占总单粒子条件距离的85。66% 和85。83% 。这两个可观测量选出的主导分支各不相同。对测量量的这种依赖性也出现在逻辑信道的约化 [9]和量子相位估计 [10]中。在本计算中，方程（B9）和（B10）根据联合态明确给出了权重：激发测量的是被占据分支的范数，而条件距离测量的是两个归一化条件振幅之间的距离。

表 XV 量化了模数比较。单粒子概率总和变化了 0.118%，在 20 个模态和 24 个模态之间，而单粒子距离总和变化了 -0.0258%。新增的分支 21–24 的总概率为 1.32×10^{-10}，距离为 1.97×10^{-12}。基态投影占完全条件距离变化的98.18% 。方程（B10）将这一变化归因于基态扇区和激发扇区。

谐振基态占据数为背景形变提供了另一种衡量方式。其总和分别为0.00919027 和 0.01757328，对应 20 个模态和 24 个模态，而新增谐振模的贡献为9.77×10^{-6}。每个初始占据数求和中，超过 99.99% 可由平均振幅的平方解释。附录 H 将这一位移与三次真空收缩联系起来，并报告了逐段解析的占据数变化。在这两个截断之间，单粒子激发权重和距离权重总和的变化小于 0.12% 。附录B4中的平均源控制衡量了平均相互作用轮廓的相应变化。

附录 C：分扇区条件距离

令 $E_j^{(n)}$ 表示在链态 j 和振子总占据数 n条件下的环境向量，其中包括其对 ξ 的依赖关系。设 $p_j=\rho_{jj}$，并令 $\vartheta_j=\arg\rho_{j0}$。

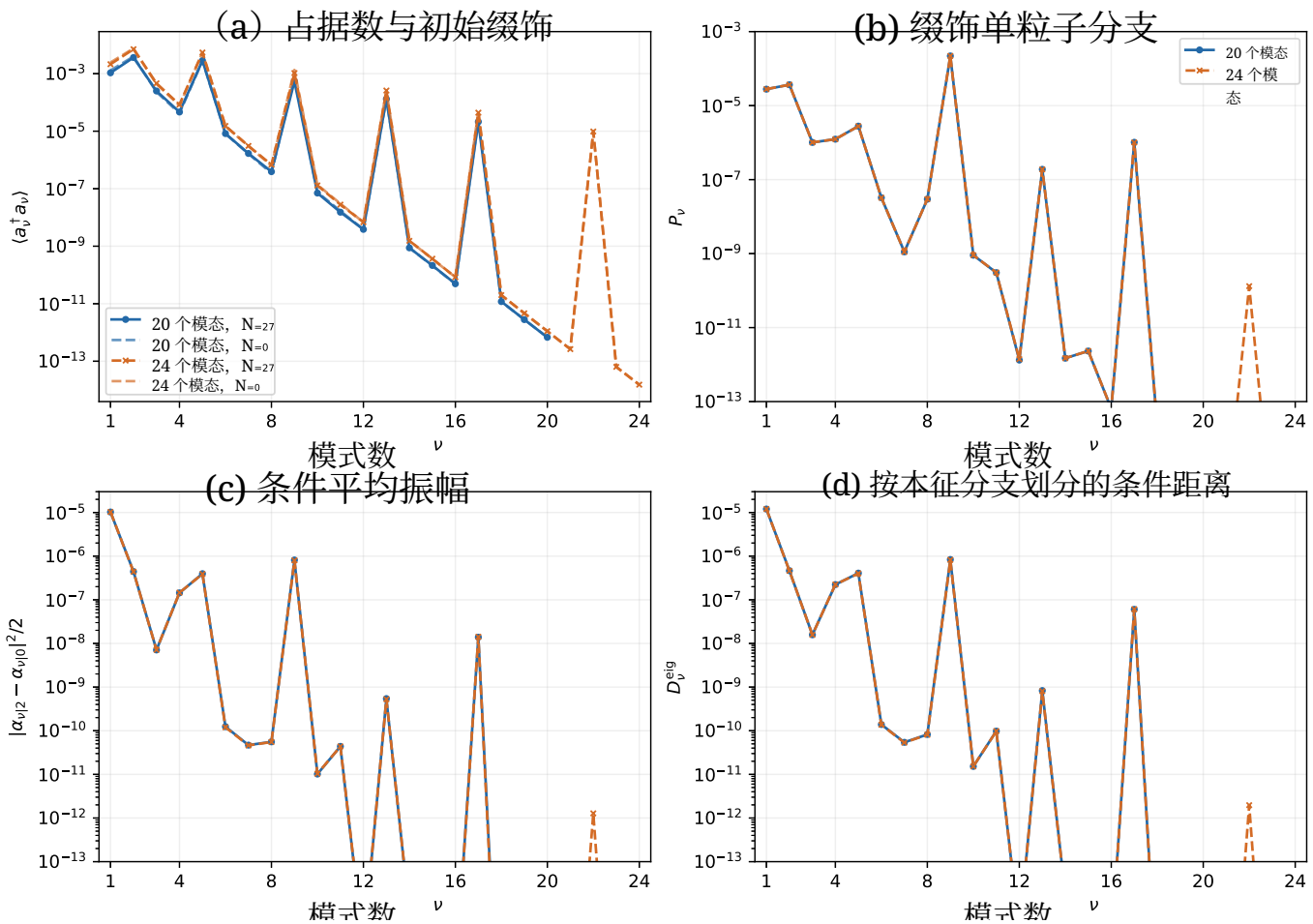

图11. 第27次穿越时，20 和 24 个模态的谱诊断，激发能隙和平移曲率相匹配。(a) 制备时及传播后的参考谐振占据数。(b) 单粒子本征分支概率 P_{r_ν}，来自方程（B9）。(c) 条件谐振均值之差。(d) 本征分支贡献 D_{r_ν}，对应方程（B10）。本征分支标签根据其谐振单量子重叠确定。(b)–(d) 面板显示大于 10^{-13} 的值。

平方范数的直接展开给出

$$1-\eta_j=\frac{1}{2}\sum_n\left\|\frac{E_j^{(n)}}{\sqrt{p_j}}-e^{i\vartheta_j}\frac{E_0^{(n)}}{\sqrt{p_0}}\right\|^2.$$

这个恒等式将损失表示为非负扇区贡献之和。在 $N=16$ 处，量子比特2的零量子、一量子和二量子贡献分别为 0.7946×10^{-6}、1.5880×10^{-6}和 0.0060×10^{-6}。在 $N=31$ 处，它们分别为2.1211×10^{-6}、 1.8902×10^{-6}和 0.0073×10^{-6}。这些数值来自联合的20模、双量子计算。真空扇区包括平移波包，以及来自激发扇区的返回贡献。

附录 D：穿越记忆丧失的运动学尺度

对于孤立的空间傅里叶顶点 $e^{iq\xi}$ 和自由平动动能，反冲会增加相位

$$\Delta\phi(p)=\frac{T[(p+\hbar_*q)^2-p^2]}{2M\hbar_*}=\frac{Tqp}{M}+\frac{\hbar_*Tq^2}{2M}.$$

在本附录中，δ 是所选标量傅里叶通道的失谐相位，并按模 2π 取值。宽度为 $\hbar_*/(2\sigma_X)$ 的高斯动量分布给出平均反冲 $\delta_{\rm rec}=\hbar_*Tq^2/(2M)$ 和相位展宽 $s_\phi=\hbar_*T|q|/(2M\sigma_X)$。对标量滤波器取平均，得到

$$\overline{G}_N=N+2\sum_{\ell=1}^{N-1}(N-\ell)e^{-\ell^2s_\phi^2/2}\cos[\ell(\delta+\delta_{\rm rec})].$$

高斯分布因子 $e^{-\ell^2s_\phi^2/2}$ 是波包诱导的相位展宽在谐波项 ℓ 处的特征函数。

它们根据间隔 ℓ 圈的两次通过之间仍然存在的相关性，对 Fejér 和进行加权。在量子相位估计的相干性传递表示中，谐波项权重由相位通道 [10]决定。而在这里，它们由磁通子波包的动量分布决定。

对于 $z = N\delta$、 $\rho = N\delta_{\rm rec}$ 和 $\beta = Ns_\phi$，

$$\frac{\overline{G}_N}{N^2} \longrightarrow 2\int_0^1 (1-u)e^{-\beta^2u^2/2}\cos[(z+\rho)u]\mathrm{d}u.$$

在小 ρ、β 下的展开为 $f(z) + \rho f'(z) + (\rho^2 + \beta^2)f''(z)/2$。这给出了运动学记忆尺度 $N \sim 1/s_\phi$。模态 1、5 和 9 的源加权均方根波数在 M_0 处给出的估计值分别为 $36s_\phi \simeq 0.078$、0。049 和 0。092。上文完整的符号边界由算符响应得出，其中包括源权重变化和真空返回。

附录 E：场约化与平移–模耦合的阶次

1. 约束坐标与动能度量

本附录采用无量纲能量单位 E_0 ；将哈密顿量除以 $\hbar_*$ 可得到方程 (9) 中的频率单位。对于归一化的链向量 c，作用量为

$$\mathcal{L} = \int_0^L \left[\frac{\phi_t^2}{2} - \frac{\phi_x^2}{2} - (1-\cos\phi)\right]\mathrm{d}x + i\hbar_* c^\dagger \dot{c} - \hbar_* c^\dagger H_q c - \kappa(c^\dagger Z_1 c)\int_0^L G(x)\phi_x \mathrm{d}x. \tag{E1}$$

方程（E1）以有效链哈密顿量为输入。其场部分决定集体动能和源投影。选择满足 e_a 的实周期函数

$$\langle e_a, e_b\rangle = \delta_{ab}, \qquad \langle e_a, \Phi_v'\rangle = 0, \qquad \langle f, g\rangle = \int_0^L fg\mathrm{d}y.$$

在固定参考速度 v下，引入局部坐标图

$$\phi(x,t) = \Phi_v(y) + \eta(y,t), \qquad y = x - X(t), \qquad \eta = \sum_a q_a(t)e_a(y). \tag{E2}$$

在本附录中， $q = (q_a)$ 表示实形变坐标，而 $\pi = (\pi_a)$ 表示其共轭动量；撇号表示对 y求导。方程 (E2) 中的正交性在局部确定了中心。通过对二次动力学进行辛对角化，可将实坐标基转换为运动法向模。代入

可得 $\phi_t = \sum_a \dot{q}_a e_a - \dot{X}(\Phi_v' + \eta')$。定义

$$I_0 = \langle \Phi_v', \Phi_v'\rangle, \quad f_a = \langle \Phi_v', e_a'\rangle, \quad D_{ab} = \langle e_a, e_b'\rangle = -D_{ba}, \quad C_{ab} = \langle e_a', e_b'\rangle, \quad b_a = \sum_b D_{ab}q_b,$$

$$I(q) = I_0 + 2f^Tq + q^TCq.$$

这些积分定义了标量 I_0、向量 f和矩阵 C， D，其中 $b = Dq$。在本附录中， T 表示动能。动能及其舒尔补为

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}^T\dot{q} - \dot{X}b^T\dot{q} + \frac{1}{2}I(q)\dot{X}^2, \qquad m(q) = I(q) - b^Tb. \tag{E3}$$

对于完备的横向基，完备性给出 $C - D^TD = ff^T/I_0$，因此 $m(q) = (I_0 + f^Tq)^2/I_0$在局部成立。在有限模态截断下，方程（E3）中的定义直接给出伽辽金度量。

2. 勒让德变换和运动坐标系展开

动量为 $\pi = \dot{q} - \dot{X}b$ $P = I\dot{X} - b^T\dot{q} = m\dot{X} - b^T\pi$ 和 $B = b^T\pi$。写作，经典集体哈密顿量为

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^T\pi + \frac{(P+B)^2}{2m(q)} + V(q) + \hbar_* H_q + \mathcal{V}_{\rm int}(X,q), \tag{E4}$$

其中

$$V(q) = \int_0^L \left[\frac{1}{2}(\Phi_v' + \eta')^2 + 1 - \cos(\Phi_v + \eta)\right]\mathrm{d}y,$$

$$\mathcal{V}_{\rm int} = -\kappa Z_1\left[J(X) + \sum_a q_a g_a(X)\right],$$

$$g_a(X) = \int_0^L g(y+X)e_a(y)\mathrm{d}y.$$

分部积分得到该源项和方程 (6)。在此坐标图中，源项恰好关于场形变呈线性。

对于 $X = vt - L/2 + \xi$、 $P = vI_0 + p$和 $d(q) = m(q) - I_0$，$\mathcal{H} - vP$的动能部分（忽略常数项）恰好为

$$\frac{1}{2}\pi^T\pi + vB - \frac{v^2d}{2} + \frac{[p+B-vd]^2}{2[I_0+d]}. \tag{E5}$$

方程 (E5) 给出了对角化之前的所有动能顶点。例如，其二次项包含 $-2vpf^Tq/I_0$；其高阶项包括 pB/I_0和 $-p^2f^Tq/I_0^2$，以及来自同一平方项和分母的其余项。它们的系数必须一并变换。场势还包含

$$V_3 = -\frac{1}{6}\int_0^L \sin\Phi_v\,\eta^3\mathrm{d}y, \qquad V_4 = -\frac{1}{24}\int_0^L \cos\Phi_v\,\eta^4\mathrm{d}y.$$

轮廓的速度依赖性在二次阶时已经体现了部分动能耦合。在本附录中，用K 表示横向刚度矩阵。定义如下：

$$K_{ab} = \langle e_a, [-(1-v^2)\partial_y^2 + \cos\Phi_v] e_b \rangle .$$

在固定周长下对轮廓方程求导，选择中心使得 $\chi = \partial_v \Phi_v$ 为横向的。于是$K\chi = 2vf$ 在横向坐标中。因此，

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}v} = I_0 + 4v^2 f^T K^{-1} f = M_0. \tag{E6}$$

方程（E6）中的逆作用于横向子空间。在 $L = 12$且 $v = 0.54$时，刚性轮廓度规为$I_0 = 9.50534199$，而方程（E6）给出 $M_0 = 13.41599870$。包含 96、192 和 384 个点的傅里叶网格在后一个值上吻合至 2×10^{-11}；步长为 10^{-5}的 P（v）中心有限差分吻合至 4×10^{-9}。该关系给出了方程（5）中的轮廓弛豫贡献。二次约化将这一弛豫与陀螺项 vB 结合起来，从而得到移动正则模问题。对角化的二次哈密顿量包含由 pq 顶点产生的轮廓弛豫。同一正则变换作用于源和物理中心可观测量。

在正则化有限维层次上，这些坐标中的量子化使用场诱导测度$\sqrt{\det \mathsf{g}}\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}q$，其中

$$\mathsf{g} = \begin{pmatrix} I & -b^T \\ -b & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \qquad \det \mathsf{g} = m.$$

继承自平直场动能的坐标动能算符为

$$\widehat{T} = -\frac{\hbar_*^2}{2\sqrt{\det \mathsf{g}}} \partial_A \left(\sqrt{\det \mathsf{g}}\, \mathsf{g}^{AB} \partial_B \right).$$

对方程（E4）的量子化通过同一个场正则化器同时确定测度和算符排序。

3. 场阶数与多次通过过程中的累积

参数 λ 在方程（9）中计数产生或移除振子量子的源顶点。方程（E4）中的度规相互作用在场涨落中具有独立的展开。将一个几何顶点插入双源响应中，会在相同的源阶数λ^2 下产生贡献，如方程（40）所示。

完整的三次能量由方程 (F2) 给出。令 $s = f^T q$，$d_2 = q^T(C - D^T D)q$，$r = p - 2vs$，以及 $t_2 = B - v d_2$。展开方程 (E5) 可得齐次四次能量

$$\mathcal{H}_4 = \frac{t_2^2}{2I_0} - \frac{2srt_2}{I_0^2} + \left(\frac{2s^2}{I_0^3} - \frac{d_2}{2I_0^2} \right) r^2 - \frac{1}{24} \int_0^L \cos\Phi_v \, \eta^4 \mathrm{d}y. \tag{E7}$$

同一个正则映射 (F1) 作用于方程 (E7) 中的所有项。将其动能多项式与沿三个独立相空间方向的精确有理动能进行比较，可得五次余项：振幅减半会使误差约缩小32倍。量子化沿用上文指定的场动能算符及其测度；其排序项必须与四次能量一并保留。标量能量偏移会在条件重叠中抵消。

源展开也可由该映射得到。写作 $\xi = Q + \zeta$，其中 Q 是正则中心坐标，而 ζ 是其在方程（F1）中的依赖振子的位移。令 $q = \alpha p + \widetilde{q}$，其中 $\widetilde{q}$ 是形变的振子部分，并且 $g_a(X) = \int_0^L g(y+X)\, e_a(y)\, \mathrm{d}y$。令所有函数均取值于 $X_Q = vt - L/2 + Q$，其维尔符号为 $-\kappa Z_1 \sum_{n\ge0} S_n$，其中

$$\begin{aligned} S_0 &= J, \qquad S_1 = J'\zeta + g^T(\alpha p + \widetilde{q}), \\ S_n &= \frac{J^{(n)}}{n!}\zeta^n + \frac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!}(g^{(n-1)})^T(\alpha p + \widetilde{q}), \quad n \ge 2. \end{aligned} \tag{E8}$$

此处 Q 保持精确。该项 S_2 同时包含 $J''\zeta\ /2$和 $\zeta(g')^T(\alpha p+\widetilde{q})$。[2]方程（E8）中的线性项给出了方程（F4）中的振子源和动量源。

对于 q，π，$p = \overline{O}(\sqrt{\hbar_*})$ 和 $\kappa/\hbar_* = O(1)$，频率哈密顿量具有一个 $O(\sqrt{\hbar_*})$ 块

$$A_1 = (\mathcal{H}_3 - \kappa Z_1 S_1)/\hbar_*$$

以及一个 $O(\hbar_*)$ 块 $A_2 = (\mathcal{H}_4 - \kappa Z_1 S_2)/\hbar_*$，其中包含继承而来的排序贡献。主导传播子包含二次能量、链哈密顿量以及 $-\kappa Z_1 S_0$。其相互作用绘景展开到频率阶数 $\hbar_*$ 时，包含

$$-i\int A_{1,I}\mathrm{d}t - i\int A_{2,I}\mathrm{d}t - \int_{t_1>t_2} A_{1,I}(t_1)A_{1,I}(t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2.$$

这一阶包括完整的三次相互作用、四次相互作用、前两个变换后的源项，以及三次项和线性源项插入的有序配对。正规形构造将非共振三次项转移到四次系数中，并同时变换源项和端点态。参考文献 [17]中还发展了包含动力学反冲的集体坐标约化。

此处采用的数据包具有 $\sigma_p = 0.001491 = 0.06105\sqrt{\hbar_*}$。在一致时间界 $p = O(\hbar_*)$ 下，主导的中心模态项 $p\mathcal{W}_2/\hbar_*$ 为 $O(\hbar_*)$；纯模态三次项仍为 $O(\sqrt{\hbar_*})$，其二次插入项和纯模态四次项为 $O(\hbar_*)$。这种反冲计数保留了这些模态项以及主导的中心模态项。初始波包宽度为所需动量矩界提供初始条件。

累积由加权插入求和决定。设 $\mathcal{V}(t)$ 为一个能量顶点，$U_0(t,0)$ 为保留的耦合传播子，且 $U_T = U_0(T,0)$。对于一个周期性的

保留哈密顿量和顶点，定义

$$K_{\mathcal{V}} = \frac{1}{\hbar_*}\int_0^T U_0(t,0)^\dagger \mathcal{V}(t) U_0(t,0)\mathrm{d}t, \\ K_{\mathcal{V}}^{(N)} = \sum_{n=0}^{N-1} (U_T^\dagger)^n K_{\mathcal{V}} U_T^n. \tag{E9}$$

如果 $U_T|a\rangle = e^{-i\theta_a}|a\rangle$，方程 (E9) 的一个矩阵元包含因子

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{in\Delta\theta} = e^{i(N-1)\Delta\theta/2}\frac{\sin(N\Delta\theta/2)}{\sin(\Delta\theta/2)}, \qquad \Delta\theta = \theta_a - \theta_b.$$

其大小由 $\min(N,\ |\sin(\Delta\theta/2)|^{-1})$ 界定，在共振时的极限值为 N。单周期矩元确定权重。对于频率差为 Ω 的无源能级之间的静态顶点，完整权重为 $(e^{i\Omega NT}-1)/(i\Omega)$。当 $\Omega T = 2\pi m$ 且 m 为非零整数时，单周期积分为零。共振判据采用插入矩元与穿越求和的乘积。累积量达到显著大小的共振贡献应纳入传播生成元。对于能量余项 R 和保留态 ψ_{ret}，杜哈梅尔公式给出态误差界

$$\|\psi(NT) - \psi_{\mathrm{ret}}(NT)\| \le \frac{1}{\hbar_*}\int_0^{NT} \|R(t)\psi_{\mathrm{ret}}(t)\|\mathrm{d}t.$$

一致涨落矩界和有界系数给出名义余项尺度 $NT\hbar_*^{3/2}$，此时四次能量和二次源已被保留。对于指定的态和相干性可观测量，我们计算加权和与切向响应。

分别在第 27 次和第 36 次通过时，$NT\sqrt{\hbar_*} = 14.65$、19.53 和 $NT\hbar_* = 0.358$、0.477。这些是幂次计数因子；谱权重决定实际累积的振幅。作为直接诊断，将维尔排序的纯模三次块 $\mathcal{H}_{3,\mathrm{rad}} = \mathcal{H}_3|_{p=0}$ 投影到二十个模态上，并保留其线性维克收缩。采用无源频率时，该块对裸真空的一阶作用范数在第 18、27 和 36 次通过时分别为 0.1156、0.0950 和 0.1529。从真空加单量子输入空间到四个量子以内各扇区的相应算符范数分别为 0.2006、0.1654 和 0.2666。这些量度量了无源诊断中的累积态振幅。耦合链修正由方程 (F5) 得出，其中每个定义混合响应的对照项都包含同一个顶点。

对于折叠而言，这种可观测量层面的检验尤其严格。如果在临界点处 $A = F_{\mu}$、$B = F_{\delta\delta}$ 和 $C = F_{\mu\delta}$，一个微小的附加贡献 ΔF 会使其位移为

$$\Delta\mu_c = -\frac{\Delta F}{A}, \qquad \frac{\Delta M_c}{M_0} = \frac{\Delta F}{A\mu_c^2}, \\ \Delta\delta_c = -\frac{\partial_\delta \Delta F + C\Delta\mu_c}{B}.$$

在三量子端点处，$\mu_c = 0.0641125$ 和 $A = -5.44988\times10^{-7}$。质量位移 $0.2392M_0$（即最后一次占据数精化的幅度）在一阶近似下对应于 $|\Delta F| \simeq 5.36\times10^{-10}$。这为场阶比较提供了一个定量的灵敏度尺度。附录 B3 中完成的响应超过了该尺度，并将原先的中心–模态端点置于负响应区域内。方程（E7）–（E9）规定了附加顶点及其累积阶数。

附录 F：正则分离与残余中心–模顶点

附录 E 的坐标图允许进行显式的线性正则分离。令 $\chi = 2vK^{-1}f$、$\alpha = \chi/M_0$ 和 $\beta = -vD\alpha$。对于每个归一化运动模，定义

$$z_\nu = -\langle \Phi_v', u_\nu\rangle/I_0, \\ U_{a\nu} = \langle e_a, u_\nu\rangle, \\ V_{a\nu} = \langle e_a, -i\omega_\nu u_\nu - v u_\nu' - v z_\nu \Phi_v''\rangle.$$

这里，内积在第二个自变量上作线性延拓。取 $X = vt - L/2 + \xi$ 时，该变换为

$$\xi = Q + \sqrt{\hbar_*}\sum_\nu (z_\nu a_\nu + z_\nu^* a_\nu^\dagger), \\ q = \alpha p + \sqrt{\hbar_*}\sum_\nu (U_\nu a_\nu + U_\nu^* a_\nu^\dagger), \\ \pi = \beta p + \sqrt{\hbar_*}\sum_\nu (V_\nu a_\nu + V_\nu^* a_\nu^\dagger). \tag{F1}$$

这里，Q 是正则分离的中心坐标，而 U_ν、V_ν 是所显示模矩阵的列。总动量涨落仍为 p。方程（F1）给出 $[Q,p] = i\hbar_*$ 和 $[a_\nu, a_\mu^\dagger] = \delta_{\nu\mu}$，并将二次能量化简为

$$\mathcal{H}_2 = \frac{p^2}{2M_0} + \sum_\nu \hbar_*\omega_\nu a_\nu^\dagger a_\nu$$

除真空能外。在包含 20 个模态的 192 点环形网格上，最大的辛残差为 1.1×10^{-12}。在随机相空间方向上对二次型进行的六次独立评估，与其对角形式的一致度达到 1.1×10^{-11}。

取 $s = f^T q$，$d_2 = q^T(C - D^T D)q$，以及 $r = p - 2vs$。由方程（E5）和场势得到的齐次三次能量为

$$\mathcal{H}_3 = \frac{r(B - v d_2)}{I_0} - \frac{s r^2}{I_0^2} - \frac{1}{6}\int_0^L \sin\Phi_v\, \eta^3 \mathrm{d}y. \tag{F2}$$

方程（F2）中的势能项与动能项一起变换。代入方程（F1）并减去

在 $p=0$ 处的值定义了所有包含中心动量的三次顶点：

$$\mathcal{H}_{3,\mathrm{cm}} = c_3 p^3 + p^2 \mathcal{W}_1 + p\mathcal{W}_2. \tag{F3}$$

算符 $\mathcal{W}_1$ 是线性的，并且 $\mathcal{W}_2$ 关于模算符为二次形式。方程 (F2) 通过场积分指定其系数。Weyl排序给出二次算符；减去其真空期望值即可定义固定参考速度约定。在此约定下，方程 (F3) 使用 $:\mathcal{W}_2:$。

自由传播族提供了一个独立的检验：

$$c_3 = \frac{E'''(P_0)}{6} = -\frac{M_0'(v)}{6M_0^3}.$$

这里，$E(P)$ 是自由传播剖面的能量，而$P_0 = P(v)$ 是其参考动量。三次投影给出 $c_3 = -0.002118003878$，而对该族求导则得到 -0.002118004033。这一比较检验了动能项和势能项的同时变换。

$:\mathcal{W}_2:$ 的守粒子数对角项有一个直接的谱检验：

$$\frac{\mathcal{H}_{3,\mathrm{diag}}}{\hbar_*} = p\sum_\nu \frac{\partial\omega_\nu}{\partial P} a_\nu^\dagger a_\nu, \qquad \frac{\partial\omega_\nu}{\partial P} = \frac{1}{M_0}\frac{\partial\omega_\nu}{\partial v}.$$

在 $v \pm 10^{-5}$ 处对环本征值问题求导，与全部 20 个投影对角系数在 3.4×10^{-10} 下吻合。对于模 1，$\partial_P\omega_1 = -0.0619737940$。初始动量宽度 $\sigma_p = \hbar_*/(2\sigma_X)$ 在 $N = 18$ 处产生自由波包相位尺度 $NT|\partial_P\omega_1|\sigma_p = 0.03695$。这一相位衡量色散贡献对穿越记忆的影响。

源也会发生变换。在模态和动量涨落的一阶近似下，取 $X_Q = vt - L/2 + Q$，它变为

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{\mathrm{int}} =& -\kappa J(X_Q)Z_1 + \hbar_*\sum_\nu [h_\nu(X_Q)a_\nu^\dagger + \mathrm{H.c.}]Z_1 \\ &- \frac{\kappa}{2}\{g_\alpha(X_Q), p\}Z_1 + \cdots, \\ g_\alpha(X) =& \int_0^L g(y+X)\frac{\partial_v\Phi_v(y)}{M_0}\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{F4}$$

恒等算符 $J'z_\nu + \sum_a g_a U_{a\nu} = \int g(y+X)u_\nu(y)\mathrm{d}y$ 恢复了原始模源。方程(F4)还给出了一个依赖于动量的源顶点。两种响应均在相同的正则坐标中计算。

对于任一扰动 $\mathcal{V}$，令 ψ_0 求解保留哈密顿量，并由下式计算其切向量 ψ_1

$$i\dot\psi_1 = H\psi_1 + \frac{\mathcal{V}}{\hbar_*}\psi_0, \qquad \psi_1(0) = 0. \tag{F5}$$

对 $\psi_1\psi_0^\dagger + \psi_0\psi_1^\dagger$ 求迹得到 $\delta\rho$。将方程 (39) 应用于该矩阵，可计算方程 (F5) 的条件重叠响应。相应的混合响应减去平移控制的切线；规定轨迹控制具有 $p=0$。

1. Weyl投影与真空态收缩

对于静态场顶点，写作 $b = (p, a_1, \ldots, a_K, a_1^\dagger, \ldots, a_K^\dagger)$，并令 $T^{(r)}$ 为次数为 r的对称系数张量，其中包含正则映射中的因子 $\sqrt{\hbar_*}$。带横线的模式指标表示产生算符。在进行 Fock投影之前，Weyl排序给出

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_3 =& :\sum_{ijk} T^{(3)}_{ijk} b_i b_j b_k: + 3\sum_{\nu k} T^{(3)}_{\nu\bar\nu k} b_k, \\ \mathcal{H}_4 =& :\sum_{ijkl} T^{(4)}_{ijkl} b_i b_j b_k b_l: \\ &+ 6\sum_{\nu ij} T^{(4)}_{\nu\bar\nu ij} :b_i b_j: + 3\sum_{\nu\mu} T^{(4)}_{\nu\bar\nu\mu\bar\mu}.\end{aligned}$$

收缩指标的求和遍及所有保留模态。随后对这些算符施加能量和占据投影时，收缩结构得以保留，其中也包括激发态高于能量上限的模态所产生的贡献。这种构造产生了附录 B3中解析出的模数依赖性。由对称张量重构的中心–模态系数，在经过测试的四模情形下，与其独立表达式的差异小于 5×10^{-19}。关闭额外区块后，单次通过传播重新得到先前的条件损失，精度达到 2.3×10^{-16}。将源耦合设为零后，链与环境因子化；三次通过的检验得到的条件损失均低于 2.5×10^{-15}。

附录 G：匹配物理谱与平移质量

我们使用对角频率反项和标量动量反项，在每个有限调节器下定义共同的物理参考。匹配能量哈密顿量为

$$\mathcal{H}_K^{\mathrm{match}} = \mathcal{H}_{\mathrm{f4},K} + \hbar_*\sum_\nu d_{\nu,K} n_\nu + c_{1,K}p + c_{2,K}p^2. \tag{G1}$$

所有非线性顶点和源算符均保留其场导出系数。目标能隙为参考频率，其中 $\omega_{1,\ \mathrm{phys}}T = 6\pi + \delta_{\mathrm{phys}}$。目标平移曲率为 μ/M_0。

设 $e_{r,\ K}(\mathbf{d})$ 和 $|r,\ K\rangle$ 分别为无源模块在 $p=0$ 处的频率本征值和态。其基态为 $|g_K\rangle$。每个单粒子分支均通过与相应参考单量子态的重叠来识别。我们由下式确定$\mathbf{d}$

$$e_{\nu,K}(\mathbf{d}) - e_{0,K}(\mathbf{d}) = \omega_{\nu,\mathrm{phys}}. \tag{G2}$$

方程（G2）的牛顿迭代使用 Hellmann–Feynman 雅可比矩阵

$$J_{\nu j} = \langle \nu, K|n_j|\nu, K\rangle - \langle g_K|n_j|g_K\rangle.$$

分支分配通过最大化单量子重叠总和获得。在能量上限 5 下，20 个模态中最小的已分配重叠平方为 0.9827，24 个模态中则为 0.9674。

将动量依赖的相互作用能写为 $A_1p + A_2p^2 + A_3p^3 + A_4p^4$，其中 A_j 包含三次和四次场块的相应系数。对基态本征值求导可得

$$\begin{aligned} c_{1,K} &= -\langle g_K|A_1|g_K\rangle, \\ c_{2,K} &= -\langle g_K|A_2|g_K\rangle \\ &\quad - \sum_{r\neq 0} \frac{|\langle r,K|A_1|g_K\rangle|^2}{\hbar_*(e_{0,K}-e_{r,K})}. \end{aligned} \tag{G3}$$

方程（G1）的无源基态分支能量满足

$$\mathcal{E}'_{0,K}(0) = 0, \qquad \mathcal{E}''_{0,K}(0) = \frac{\mu}{M_0}.$$

方程（G3）中的虚跃迁项包含三次动量-模顶角的影响。对于参考相位和能量上限为 5 的 20 个模态，直接二次系数和虚跃迁二次系数分别为 1.26194×10^{-4} 和-7.12432×10^{-7}。由此得到的反项为 $(c_1,\ c_2) = (1.28918\times10^{-6},\ -1.25481\times10^{-4})$。对于 24 个模态，它们为 $(2.49895\times10^{-6},\ -1.74043\times10^{-4})$。

在能量上限为 5 的情况下，保留全部 20 个或 24 个单量子态。两种情况下的最大间隙残差均为 1.1×10^{-14}。在动量 ±0.0015 和 ±0.00075 处独立计算基态能量差，再进行 Richardson 外推，分别得到 μ/M_0 至 2.0×10^{-13} 和 9.4×10^{-13}。匹配在链传播之前的无源系统中完成。

预设轨迹控制在 $p = 0$ 处使用相同的匹配模块。平移控制直接具有指定的自由曲率 μ/M_0 。对于初始模态态，我们将参考谐振子真空态 $|0\rangle$ 与零动量下的 $|g_K\rangle$ 进行比较。在这两种制备中，初始态均分解为相同的高斯平移波包、所选模态态和链态。该比较将参数匹配产生的响应与初始真空态制备产生的响应区分开来。

附录 H：模态矩与谱投影检查

模态诊断使用与传播相同的保留福克空间和平移空间中的归一化联合态

降低保留的占据数向量不会超出能量上限。因此，直接占据数求和与 $\|a_\nu\Psi\|^2$ 对同一 n_ν进行评估。在全部 27 次通过中，占据数恒等式和条件距离恒等式的结果相差不超过 5×10^{-14}。完备本征基投影将归一化保持在 2×10^{-15} 以内，并将条件平方距离保持在2×10^{-18}以内。该基中的初始激发概率低于 2×10^{-31}。

正态协方差矩阵为

$$C_{\nu\mu} = \langle a_\nu^\dagger a_\mu\rangle - \langle a_\nu\rangle^*\langle a_\mu\rangle.$$

其对角线元素和半正定性为模态矩提供了相互独立的检查。在第27次穿越时，对于 20 个模态，$\mathrm{Tr}\,C = 1.58198\times10^{-4}$；对于 24 个模态，$\mathrm{Tr}\ 1.59352\times10^{-4}$。相应的谐波项占据数之和分别为 0.00855050 和 0.01657733。

初始平均振幅可根据三次真空收缩产生的线性项进行估算。令

$$\ell_\nu = \hbar_*^{-1}\langle 1_\nu|\mathcal{H}_3(p=0)|0\rangle.$$

将初始基态平均值 $\langle a_\nu\rangle$ 记为 $\alpha_\nu^{(0)}$，则领先阶位移估计为

$$\alpha_\nu^{(0)} \simeq -\frac{\ell_\nu}{\omega_{\nu,\mathrm{phys}}}. \tag{H1}$$

相对于精确匹配基态平均值向量，方程 (H1) 的欧几里得相对误差为 0.108% （20 个模态）和 0.155% （24 个模态）。对保留模态求收缩和会改变这些线性系数，进而改变低阶模态的位移。

图12 展示了每次通过时的带符号增量 $n_\nu(N) - n_\nu(0)$。占据数围绕变形后的参考态演化：经过 27 次通过后，对于两种模态数，其总和分别减少了6.96%和5.67% 。图 11 中的本征分支概率给出了相对于该参考态的激发情况。条件均值和协方差矩阵保留了模态振幅的相位信息。

[1] A. Fedorov、A. Shnirman、G. Schön 和 A. Kidiyarova-Shevchenko，《利用约瑟夫森传输线孤子读出磁通量子比特的状态》，《物理评论B》**75**，224504，2007101103752245O4( )，doi:./PhysRevB..。

[2] K. G. Fedorov、A. V. Shcherbakova、M. J. Wolf、D. Beckmann 和 A. V. Ustinov，《超导量子比特的磁通子读出》，物理评论快报**112**，160502（2014），doi:10.1103/PhysRevLett.112.160502。

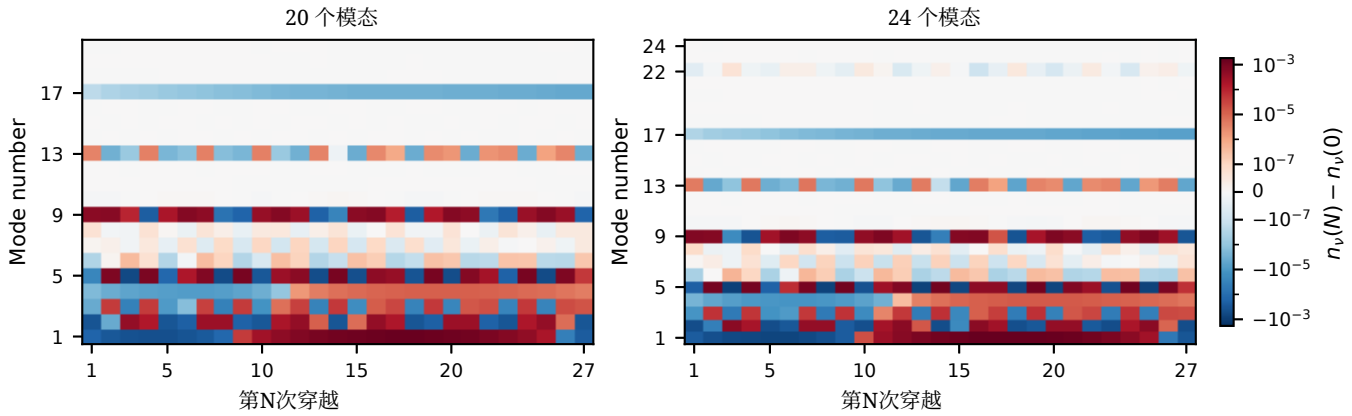

图 12. 匹配基态制备下通道分辨的谐波占据增量，该制备与图 11 中所用的相同。两个面板使用相同的对称对数色标，线性区间为 $|n_\nu(N) - n_\nu(0)| \le 10^{-7}$。

[3] A. V. Ustinov、B. A. Malomed 和 E. Goldobin，《磁场中环形约瑟夫森结的回弯电流-电压特性》，《物理评论B》60，1365（1999），doi:10.1103/PhysRevB.60.1365。[4] A. Cuccoli、D. Nuzzi、R. Vaia 和 P. Verrucchi，《通过磁孤子作用于量子比特》，《新物理学杂志》17，083053（2015），doi:10.1088/1367-2630/17/8/083053。[5] S. Varbev、I. Boradjiev、R. Kamburova 和 H. Chamati，《通过在海森堡自旋链中传播的孤子控制量子比特态》，《物理评论E》105，034207（2022），doi:10.1103/PhysRevE.105.034207。[6] D. Reitz、T. X. Zhou、A. Sharma、R. Bilotta、J. McFarland、A. Fouladi、J. Glasby、A. Ramanayaka、Z. Stegen、A. Pesetski、M. Covington、G. Boyd 和 J. Clark，《由超导孤子 DAC 控制的 Transmon 相位门》，arXiv:2607.05072（2026）。[7] D. Burgarth 、 S. Bose 、 C. Bruder 和 V. Giovannetti，《量子网络的局部可控性》，《物理评论A》79，060305(R)（2009），doi:10.1103/PhysRevA.79.060305。[8] C. Rigetti 和 M. Devoret，《具有线性耦合和固定跃迁频率的超导量子比特中的全微波可调通用门》，《物理评论B》81，134507（2010），doi:10.1103/PhysRevB.81.134507。[9] M. Gordeychuk 和 O. Kiselev，《量子码中的码可见李乌维尔模态与相干逻辑错误》，arXiv:2609.18978（2026）。[10] M. O. Gordeichuk 和 O. M. Kiselev，《量子相位估计算法中开放动力学的测量依赖约化：可见子空间与

阻尼 Fejér 核，arXiv:2610.35332 (2026)。[11] D. W. McLaughlin 和 A. C. Scott，磁通子动力学的微扰分析，《物理评论A》18，1652 (1978)，doi:10.1103/PhysRevA.18.1652。[12] O. M. Kiselev，受扰正弦-戈登方程的 kink渐近行为，《理论与数学物理》93，1106–1111 (1992) [《理论与数学物理》93(1)，39–48 (1992)], doi:10.1007/BF01016468。[13] O. M. Kiselev，非线性克莱因–戈登方程孤立波的微扰，《西伯利亚数学杂志》41，281–293 (2000) [《西伯利亚数学杂志》41(2)，345–358 (2000)], doi:10.1007/BF02674598。[14] O. M. Kiselev，正弦振幅的一致渐近性，Itogi Nauki i Tekhniki, Ser. Sovrem. Mat. Prilozh., Temat. Obz. 163，25–38 (2019)；英文译本：椭圆正弦的一致渐近性，《数学科学杂志》258，23–36 (2021)，doi:10.1007/s10958-021-05534-9。[15] O. M. Kiselev，Duffing 方程分界线附近的振荡，Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN 18(2)，141–153 (2012)；英文译本：《斯捷克洛夫数学研究所论文集》281，增刊 1，S82–S94 (2013)，Math-Net.Ru: timm815。[16] R. T. Sutherland 和 R. Srinivas，囚禁离子中的通用混合量子计算，《物理评论A》104，032609 (2021)，doi:10.1103/PhysRevA.104.032609。[17] I. V. Melnikov、C. Papageorgakis 和 A. B. Royston，加速孤子，《物理评论D》102，125002 (2020)，doi:10.1103/PhysRevD.102.125002。