arXiv:2611.29830v1 [cs.LO] 22 Nov 2026

高阶对偶理论：几何同伦类型论与分类 ∞-拓扑斯

Yoshihiro Maruyama

京都大学
maruyama@i.h.kyoto-u.ac.jp

摘要。 我们发展了几何同伦类型论（几何 HoTT），为由几何态射的逆像保持的构造提供一种依赖语言。我们为几何 HoTT 建立了同伦相干演算，并将几何逻辑与分类拓扑斯之间的经典对偶性推广到 Grothendieck ∞-拓扑斯。对于每个几何类型论，由其规则生成的上下文的 ∞-范畴都等价于其分类 ∞-拓扑斯。随着理论变化，分类器给出一个 $(\infty, 2)$-范畴之间的对偶性：一侧是带有解释的几何同伦类型论理论，另一侧是带有几何态射的 Grothendieck ∞-拓扑斯。随后，我们构造了一个分类 ∞-拓扑斯的泛族，使得理论的每个呈示处的纤维都是该理论的分类 ∞-拓扑斯。我们还构造了一个分类 ∞-拓扑斯的泛族，并在理论的 Morita 等价之间配备相干传输。因此，几何同伦类型论成为 Grothendieck ∞-拓扑斯的内部语言，将经典拓扑斯理论中几何逻辑的作用扩展到了 ∞-拓扑斯理论领域。

关键词： 高阶范畴对偶 · 几何同伦类型论 · 分类 ∞-拓扑斯

1 引言

几何逻辑描述了由几何态射的逆像保持的构造。其有限合取、小析取和存在量词，都在每个理论的分类拓扑斯中解释。设 T 是一个普通几何理论，其分类拓扑斯为 $\mathbf{Set}[T]$，且 $\mathcal{E}$ 是一个 Grothendieck 拓扑斯。记 $\mathrm{Mod}_T(\mathcal{E})$ 为 $\mathcal{E}$ 中 T 模型及其同态所成的范畴，并以 Geom 表示两个拓扑斯之间的几何态射范畴。经典对应给出了范畴等价 [17,28]

$$\mathrm{Mod}_T(\mathcal{E}) \simeq \mathrm{Geom}(\mathcal{E}, \mathbf{Set}[T]). \tag{1}$$

我们通过引入几何同伦类型论（几何 HoTT），将这一对应推广到 Grothendieck ∞-拓扑斯。在这种语言中，上下文上的类型描述一个族，而依赖项描述该族的一个截面。这种语言包含单位类型、依赖和（Σ）、恒等类型（恒等）以及带依赖消去的小同伦余极限（hocolim）。在同伦余极限上，下降将相容的局部族粘合成整个上下文上的一个族，而依赖消去则将相容的
将该族的局部截面组合为一个全局截面。

设 $W = \mathsf{hocolim}_i D_i$ 是这样一个上下文。一个关于 W 的族限制在每个 A_i 上成为一个族 D_i。对于一条边 $\alpha\colon\ i \to j$ 以及一个点 $x\colon\ D_i$，x 和 $D_\alpha x$ 在 W 中的像由一条路径连接。沿此路径进行传输得到一个等价

$$e_{\alpha,x} : A_i(x) \simeq A_j(D_\alpha x).$$

因此，一个截面限制为局部截面 s_i，其值在传输下相一致，于是 $e_{\alpha,\,x}(s_i(x)) = s_j(D_\alpha x)$。高阶单纯形记录了这些等价和路径之间的相干性。

反过来，下降使我们能够利用带有相干过渡等价的局部族 A_i，在 W 上构造一个族。我们使用这些等价将局部全空间 $E_i = \Sigma_{x:D_i} A_i(x)$ 粘合起来。它们的投影 $E_i \to D_i$ 诱导出一个映射

$$q : \operatorname*{hocolim}_i E_i \longrightarrow W.$$

粘合族为每个 $w : W$ 赋予 q 在 w 上的纤维。

在这种无穷依赖语言中，判断等式指定结构边界，高阶项则为代换比较和计算规则提供见证。第2.1节给出粘合族的类型表达式。第2.2节为每个维数中的项与计算的边界给出一个单一的集合指标化方案。

1.1 主要结果

固定格罗滕迪克宇宙 $\mathbb{U} \in \mathbb{V}$，并用“小”表示 $\mathbb{U}$-小。一个小理论 $\mathbb{T}$ 由生成元、边界方程以及关于指定图表的公理构成的小单纯形呈示给出。对于一个格罗滕迪克 ∞-拓扑斯 $\mathcal{X}$， ∞-范畴 $\mathrm{Mod}_{\mathbb{T}}(\mathcal{X})$ 由$\mathcal{X}$中的图表组成，这些图表对生成元的解释满足上述方程和公理，并包含它们之间的所有自然变换。记$\mathcal{G}_{\mathbb{T}}$ 为 $\mathbb{T}$ 的依赖语法。我们还给出 $\mathbb{T}$ 的第二种呈示，称为边界语法，记作$\mathcal{S}_{\mathbb{T}}$；其规则表达有限极限锥和小余极限余锥的泛性质。下述分类定理将这两种呈示对应起来。

用 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{geo}}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 表示由 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$的保有限极限且保小余极限函子的 ∞-范畴，以及它们之间所有的自然变换。对于几何态射，我们采用逆像约定

$$\mathrm{Geom}(\mathcal{X},\mathcal{B}) = \mathrm{Fun}^{L,\mathrm{lex}}(\mathcal{B},\mathcal{X}).$$

定理 1（分类）。对于每个小理论 $\mathbb{T}$，存在等价

$$\mathcal{G}_{\mathbb{T}} \simeq \mathcal{S}_{\mathbb{T}} \simeq \mathcal{B}_{\mathbb{T}},$$

其中 $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ 是将预层 ∞-范畴在第 *6.1* 节的小集合 $R_{\mathbb{T}}$ 公理比较处进行左正合局部化所得。对于每个 *Grothendieck* ∞-拓扑斯 $\mathcal{X}$，

$$\mathrm{Fun}_{\mathrm{geo}}(\mathcal{G}_{\mathbb{T}},\mathcal{X}) \simeq \mathrm{Mod}_{\mathbb{T}}(\mathcal{X}) \simeq \mathrm{Geom}(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathbb{T}}).$$

在这些等价下，模型同态对应于逆像函子的自然变换，而映射空间记录了它们的高阶识别。

定理 2（对偶性）。令 $\mathbf{Th}^{\mathrm{geo}}$ 表示带解释的小几何类型理论的 $(\infty,2)$-范畴，并令 $\mathbf{Top}_{\infty}$ 表示相对于 $\mathbb{U}$ 、以几何态射为态射的 *Grothendieck* ∞-拓扑斯的 $(\infty,2)$-范畴。该分类器诱导出一个等价

$$\mathbf{Th}_{\mathrm{geo}} \simeq \mathbf{Top}_{\infty}^{\mathrm{op}}, \qquad \mathbb{T} \longmapsto \mathcal{B}_{\mathbb{T}}.$$

$\mathbb{T}$ 在 $\mathbb{T}'$ 中的解释由几何态射 $\mathcal{B}_{\mathbb{T}'} \to \mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ 的逆像实现。解释之间的变换对应于逆像之间的自然变换。对偶反转1-态射，并保持2-态射的方向。

在定理 38 中，下降将生成元的解释扩展为从$\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ 返回语法的几何函子。这个逆将由规则生成的上下文范畴识别为一个可呈示的 ∞-范畴。根据定理 45，相对于 $\mathbb{U}$ 的每个 Grothendieck ∞-拓扑斯都具有一个小呈示。推论 47 将这些呈示与解释之间的对应结合起来，从而证明定理 2。我们构造了两个分类器的泛族。第一个由指标化呈示参数化，其中指定余极限的生成元、公理和形状可以在基上变化（定理49）。第二个由所选理论族的*Morita* 空间参数化。该空间中的一个点表示一个带有其分类器的理论，而两点之间的一条路径表示其分类器之间的几何等价（定理 52）。

重构也能识别泛模型中的依赖证明。记 $E : \mathcal{G}_{\mathbb{T}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ 为在分类器中解释该语法的等价。对于导出类型 $\Gamma \vdash A$ type，其展示 是投影

$p_A\colon \Gamma.A \to \Gamma$，它遗忘扩展上下文 $\Gamma.A$中的变量 $x\colon A$。令 $\mathrm{Tm}_{\mathbb{T}}(\Gamma, A)$表示 Γ 中 A 的项空间及其高阶识别。根据定理 41，取 Ep_A 在 $E\Gamma$ 上的截面可得到一个自然等价

$$\mathrm{Tm}_{\mathbb{T}}(\Gamma, A) \simeq \mathrm{Map}_{(\mathcal{B}_{\mathbb{T}})_{/E\Gamma}}(\mathrm{id}_{E\Gamma}, Ep_A).$$

对于一个普通几何理论 T，其到几何同伦类型论（HoTT）的集合类型翻译 T^{Δ}将原始类型解释为 0-截断类型，并将谓词解释为其上下文的子对象。设 (C_T, J_T) 是呈现 $\mathbf{Set}[T]$ 的小几何语法站。令 $\mathcal{S}_{\mathbb{U}}$ 为小空间的 ∞-范畴，下标 ≤ 0 表示 0-截断对象的全子范畴，则定理 59 给出

$$\mathcal{B}_{T^{\Delta}} \simeq \mathrm{Sh}(C_T, J_T; \mathcal{S}_{\mathbb{U}}), \qquad (\mathcal{B}_{T^{\Delta}})_{\leq 0} \simeq \mathbf{Set}[T].$$

该翻译对普通几何相继式是保守的。

有两种构造将依赖规则与分类器联系起来。对于每个代换 $f\colon X \to Y$，类型

$$y : Y \vdash \mathsf{Fib}_f(y) := \Sigma_{x:X} \mathsf{Id}_Y(fx, y)$$

其总上下文等价于 X 在 Y 上。因此，对类型进行重索引可提供任意代换的拉回。对于一个具有余极限的图表，取局部全空间的余极限是沿构造子映射限制族的左伴随。下降计算通过将指定的局部族识别为粘合族的限制，使单位成为等价。代换稳定性通过将受限全空间的余极限识别为原全空间，使余单位成为等价。这些比较在族映射中是自然的，因此这两种构造给出 ∞-范畴的逆等价。

1.2 相关工作

一个分类 ∞-拓扑斯表示某个理论的模型，同时环境 ∞-拓扑斯发生变化。Lurie 为与某种几何 [23]相关的结构给出了这样的分类器。Di Liberti 和 Meadows 通过加权极限构造分类器，并将可分类的模型预叠刻画为由小型几何图式呈现的预叠 [12]。我们的重构将小型几何类型理论的分类器识别为由其规则生成的上下文及代换的 ∞-范畴。在这一等价下，上下文中的一个类型给出一个族，而其截面空间则恢复该类型的项及其所有高阶识别。为一个闭类型 A 添入一个项，就会从分类器转到其在解释 A的对象上的切片。

对于普通几何理论，句法site展现 Morita 等价 [8], 算术宇宙图式描述基的变化 [52], ，而圆整图式则允许构造分类逻辑斯 [11]。Buchholtz 和 Schipp von Branitz 为命题几何理论的分类空间给出了类型 [7]。Lynch 和 Myers 将几何理论视为带族范畴中的上下文 [26], ，Riley 则给出了集合指标语法的两种处理方式 [41]。我们的演算通过将类型解释为集合、将谓词解释为子对象，恢复普通几何逻辑。该翻译保持并反映几何序列的可推导性，其单局部分类对象中的 0-截断对象构成普通分类拓扑斯。

Kapulkin 和 Lumsdaine 提出了有限极限的内语言问题 [18]。Kapulkin 和 Szumiło 用 tribes 处理了这一问题 [19], ，而 Nguyen 和 Uemura 则表明，带有内涵等同类型的依赖类型论为有限完备的 ∞-范畴提供了一种内语言 [32]。我们的构造有两个先例：外延类型论中代换的纤维表示 [10]，以及利用内涵等同类型对它们进行的分解 [13]。在我们的演算中，通过纤维族表示代换，使我们能够通过重索引构造其拉回。加上终端上下文，这些拉回便给出了所有有限极限。

类型论构造包括图索引同伦极限 [4] 和余极限 [6], ，Hart 和 Hou 构造了类型宇宙余切片中的余极限 [14]。Sojakova 通过同伦初始性刻画 W-悬挂的归纳 [44], ，Lumsdaine 和 Shulman 为高阶归纳类型（包括推出）给出了语义 [21], ，而 Uemura 构造了一个具有有限元高阶归纳

类型 [49]。这里，同一个小单纯形形状既为余极限的构造子编索引，也为其依赖消去子的数据编索引。要构造余极限上的一个截面，需要在每个顶点处给出一个局部截面，在每条边上给出一个比较，并在高阶单纯形上给出相容的高阶比较。

下降说明如何构造承载这些截面的族。Puppe 和 Rezk 将同伦纤维与同伦余极限联系起来 [34,36]。Heindel 和 Sobociński 通过跨度刻画普通的范坎彭余极限 [15], ，而 Rezk 和 Lurie 则给出了高阶拓扑斯的下降判据 [24,37]。Shulman 将全空间余极限与限制之间伴随的单位和余单位，分别识别为下降和稳定性的比较映射 [42]。在类型论中，扁平化引理描述了族的全空间 [51], ；Rijke 通过单值性处理推出下降，并与 Spitters 一起研究自反图余极限的下降 [39,40]。我们的演算将这两个伴随比较实现为对每个小单纯形图的计算。单位将给定的局部族识别为粘合族的限制，并与它们的传输相容。余单位则根据各个限制重构一个全局族。

圆的二重覆盖使下降规则的作用具体可见。HoTT Book 描述了这一覆盖 [51], Licata 和 Shulman 通过万有覆盖中的传输计算基本群 [20]„ 而 Rezk 则比较了集合与空间中的跨度 $1 \leftarrow 2 \rightarrow 1$ 的推出 [38]。我们将恒等和对换用作两点纤维上的两个粘合映射。下降规则将沿生成环路的传输计算为对换。这种传输将该环路与自反性区分开来。其他原始规则都允许一个集合值模型，在该模型中环路就是自反性，因此同一计算证明了下降计算的独立性。

当同态将一种模型中的构造带到另一种模型中时，相干性也很重要。Bauer、Haselwarter 和 Lumsdaine 用规则和推导描述依赖理论 [5], ，而 Uemura 构造初始模型和内部语言 [48]。用于泛锥的代数填充子 [33], 标记图表 [16], ，以及用于代换的局部宇宙 [22] ，提供了相关的相干性处理方法。我们的规则将输入图表扩展到相对于子图上预先指定的输出。将其应用于模型之间的箭头，这种扩展便确定了同态如何作用于导出项。将其应用于高阶单纯形，则会提供相干性，使得限制到生成元构成模型 ∞-范畴之间的等价。

Shulman 在每个 Grothendieck ∞-拓扑斯 [43]中构造带有严格单值宇宙的模型。高阶 tripos 理论从带指标的逻辑数据 [29], 得到具有单值宇宙的初等 ∞-拓扑斯，而合成上同调则测量给定族 [30]的单值性。Uemura 使用模态来表达依赖语法 [50]中 ∞-逻辑斯的图表。我们的分类为每个小几何理论关联一个泛模型。$\mathbb{T}'$ 中的 $\mathbb{T}$ 的解释确定了一个几何态射 $\mathcal{B}_{\mathbb{T}'} \to \mathcal{B}_{\mathbb{T}}$。其逆像将泛 $\mathbb{T}$-模型映为由该解释在$\mathcal{B}_{\mathbb{T}'}$中指定的 $\mathbb{T}$-模型。

从分类器到语法的逆函子正是下降计算参与重构之处。Toën 和 Vezzosi 用吉劳公理 [47], 刻画模型拓扑斯；Stenzel 通过覆盖图表和高阶位点 [45,46], 描述高阶层，而同伦相干图式则呈现可达 ∞-范畴 [9]。Macpherson 研究受关系约束的余极限 [27], ；Anel 和 Lejay 则将每个 ∞-逻辑斯呈现为一个自由逻辑斯的左正合局部化 [3]。我们将 Anel、Biedermann、Finster 和 Joyal 的局部化定理 [1] 应用于表达该理论公理的比较映射。他们的后续工作将局部化与扩展的格罗滕迪克拓扑 [2]联系起来。Raptis 和 Schäppi 通过考察可表对象的有限极限 [35], 检验预层扩张到 ∞-拓扑斯的左正合性。我们以生成语法为目标，通过检验可表对象上的拉回，再对任意基应用下降，证明左正合性。由此得到的函子与泛模型中的上下文解释互为逆函子，因此生成的上下文范畴从局部化继承了可呈现性。相反，将给定 Grothendieck ∞-拓扑斯的局部化映射写成公理，便得到一个呈现它的小依赖理论。这种对应还扩展到解释及其变换，从而给出（∞,2）-对偶性。

1.3 宇宙与记号

我们在带有格罗滕迪克宇宙 $\mathbb{U} \in \mathbb{V}$ 的 ZFC 中工作。$\mathbb{U}$ 的基数记为 κ。一个辅助环境宇宙容纳了 $\mathbb{V}$-小对象的函子范畴。相对于 $\mathbb{U}$ 的格罗滕迪克 ∞-拓扑斯是一个

对于 $\mathbb{U}$-小的 ∞-范畴 C，$\mathcal{P}_{\mathbb{U}}(C)$ 的可达左正合局部化。对于相对于 $\mathbb{U}$ 的可及性和可呈现性，作为见证的正则基数都小于 κ，生成子范畴是 $\mathbb{U}$-小的，而滤过余极限具有 $\mathbb{U}$-小的指标范畴。特别地，$\mathcal{P}_{\mathbb{U}}(C) \simeq$ 函子范畴$(C^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}_{\mathbb{U}})$。我们使用拟范畴作为具体代表。对于小单纯集 K 和拟范畴 $\mathcal{D}$，函子$(K, \mathcal{D})$表示 $\mathcal{D}$ 中由 K 形状的图表构成的拟范畴。在 Joyal模型结构中，纤维化替换 $K \to K'$ 表示 K 的指标 ∞-范畴。限制给出等价 函子$(K', \mathcal{D}) \simeq$ 函子$(K, \mathcal{D})$，因此以 K 为指标的极限和余极限可以在 K' 上计算。

有限单纯集合只有有限多个非退化单形。我们为小形状固定代表元，并为有限形状选取可数多个代表元。另一个副本上的每条规则都沿着指定的同构传输。我们用 hocolim 表示类型构造子，用 colim 表示它在一个 ∞-范畴中的解释，其中余极限都是同伦余极限。第 2.3 节中的胞腔构造使用呈示的普通余极限。

1.4 论文结构

第 2 节介绍依赖语言，为其规则给出单纯形语法，并构造由一个理论生成的语法。第 3 节利用纤维表示构造有限极限，并将同伦余极限上的族粘合起来。第 4 节证明初始性，第 5 节则通过泛锥比较依赖演算及其呈示。

第 6 节通过预层局部化构造分类 ∞-拓扑斯，并利用下降证明它与句法范畴等价。第 7 节根据分类器描述依赖证明空间和上下文扩张。第 8 节给出所有 Grothendieck ∞-拓扑斯的小呈示，并将解释与逆像对应起来，从而得到 Morita 对应和对偶性。随后，它构造两个分类器的泛族。第一个泛族中，一个理论的生成元和公理随基变化。第二个则由一个理论的 Morita 空间参数化。

第 9 节恢复了普通几何逻辑。第 10 节计算了圆的二重覆盖的单值化，并证明了下降规则的独立性。附录 A 给出了依赖运算的明确推导，附录 B 描述了等价参数的相干性。附录 C 给出了两个族的构造和基变换证明。

2 几何 HoTT 的语法

小理论 $\mathbb{T}$ 的语法由其声明以及关于依赖类型和高阶项的规则生成。这些规则的单纯形形式记录了每个新表达式的边界，因此同一构造会在每个维数中生成推导。

2.1 依赖类型与同伦余极限

类型的展示使我们能够通过拉回描述代换，并通过截面描述依赖项。基本判断如下：

$$\Gamma \ \mathsf{ctx}, \qquad \sigma : \Delta \longrightarrow \Gamma, \qquad \Gamma \vdash A \ \mathsf{type}, \qquad \Gamma \vdash a : A.$$

此外，还有关于代换的相干图表、具有指定边界的高阶项以及等价数据的判断。声明的类型 A 绑定 $\Gamma.A$ 一个总上下文以及一个展示

$$p_A : \Gamma.A \longrightarrow \Gamma.$$

类型推导为投影 p_A 提供其展示证书 Disp(p_A)。展示及其边界决定了族及其项，因此，具有相同展示和边界的推导呈示相同的族。纤维表示定理为每个代换构造这样的展示。

项记录一个截面及其截面计算：

$$s_a : \Gamma \longrightarrow \Gamma.A, \qquad p_A s_a \simeq \mathrm{id}_\Gamma.$$

这对对象构成一个带类型的三角判断。一个高阶项记录了此类三角形的相干边界及该边界的一种扩张。第2.2节规定了每个此类判断的边界。类型名称用于标注一个导出展示，因此不同名称可以指向同一个展示。族映射是基上的总上下文之间任意的映射，并附有相应的比较三角形。

上下文理解与重索引。上下文可以命名，也可以通过添加一个变量来扩展。存在一个空上下文 $\mathbf{1}$。上下文类型规则给出一个闭类型 $\mathsf{pack}(\Gamma)$，其总上下文为 Γ。一个望远镜 是由变量声明 $\Gamma = (x_1 : A_1,\ \ldots\ldots,\ x_n : A_n)$ 构成的有限序列，其中每个 A_i 都是以前面的变量 $x_1, \ldots\ldots, x_{i-1}$为上下文的类型。它的迭代依赖和也有总上下文 Γ。由于 $\mathsf{Map}(\Gamma,\ \mathbf{1})$ 可缩，id_Γ 在 $\mathbf{1}$ 上的两个展示之间诱导出一个典范等价。这一约定通常称为民主性：每个上下文都可以用一个闭类型表示。它使同一语法既能表示依赖变量列表，也能表示命名的结构化上下文。

生成元符号的代换在推导树上严格地按函子方式作用。重索引作用于上下文中的类型，并对恒等和复合给出相干比较。我们用 $\equiv$ 表示判断等式，用$a =_A b$ 表示恒等类型 $\mathsf{Id}_A(a, b)$。在类型论计算中，当类型 A 明确时，我们将 $a =_A b$ 缩写为 $a = b$。在对象之间，$\simeq$ 表示一个等价，并带有相干逆数据。对于同一上下文上的族，它表示这些族在该上下文上的切片中的展示之间的等价。对于平行映射，$\simeq$ 表示它们映射空间中的同伦。特别地，$p_A s_a \simeq \mathrm{id}_\Gamma$ 记录了所指定的三角形，该三角形展示了 id_Γ 作为 s_a 和 p_A的复合。

给定 Γ上的一个展示，沿 σ 进行代换：$\Delta \to \Gamma$ 根据形成规则对其进行重索引

$$\frac{\Gamma \vdash A\ \mathsf{type} \qquad \sigma : \Delta \to \Gamma}{\Delta \vdash A[\sigma]\ \mathsf{type}}.$$

It 同时引入一个代换 σ_A：$\Delta.A[\sigma] \to \Gamma.A$ 以及一个交换方形 e

$$\begin{array}{ccc} \Delta.A[\sigma] & \xrightarrow{\ \sigma_A\ } & \Gamma.A \\ {\scriptstyle p_{A[\sigma]}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_A} \\ \Delta & \xrightarrow[\ \sigma\ ]{} & \Gamma. \end{array} \tag{2}$$

其引入规则接受 u：$Z \to \Gamma.A$、v：$Z \to \Delta$，以及一个指定的比较 $p_A u \simeq \sigma v$，并将其代换到新的总上下文中。其计算恢复 $u,\ v$ 以及该比较。高阶比较规则扩展了引入的每个相容边界。在每个比较单纯形中，最后一个顶点携带经过认证的拉回锥，其他锥都与之进行比较。

对截面进行重索引得到 $a[\sigma]$：$A[\sigma]$。当 p_A 沿自身进行重索引时，取 $u = v = \mathrm{id}_{\Gamma.A}$ 并在 p_A 上使用恒等比较，就得到表示 $\Gamma.A$中变量的对角截面。这些比较

$$A[\mathrm{id}] \simeq A, \qquad A[\sigma][\tau] \simeq A[\sigma\tau]$$

由相同的泛引入规则及其高阶比较生成。相对构造子方案 (15) 将一条规则应用于一族输入，同时保留参数子形状上已规定的输出。

单位、依赖和与恒等类型。 单位族 $\Gamma \vdash 1_\Gamma$ 类型具有展示 id_Γ。对于$\Gamma \vdash A$ 类型和 $\Gamma, x: A \vdash B(x)$ 类型，构造

$$\Gamma \vdash \Sigma_{x:A} B(x) \text{ type}.$$

其总上下文是迭代总上下文 $\Gamma.A.B$；其展示是相干指定的复合 $p_A p_B$。因此，该运算为展示的复合生成一个展示。

对于带有截面 $s_a: \Gamma \to \Gamma.A$ 的项 $a: A$，记 $B[a]$ 为 $B[s_a]$。配对规则为

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : B[a]}{\Gamma \vdash (a,b) : \Sigma_{x:A} B(x)}.$$

配对由重索引引入和复合三角形构造。其投影和计算是相应的重索引比较。依赖消去通过 Γ、$z: \Sigma_{x:A} B(x)$ 与 Γ、$x: A$、$y: B(x)$ 的公共总上下文来表达。其所有比较边界都属于同一个普适方案。

要构造 $p_A: E \to \Gamma$ 的恒等类型，首先沿其自身重索引展示，以得到 $Q = E \times_\Gamma E$。普适引入给出其相对对角线 $\delta_A : E \to Q$。恒等类型构造引入一个展示$p_{\mathsf{Id}} : I_A \to Q$ 以及一个自反等价

$$E \xrightarrow{r_A \simeq} I_A \xrightarrow{p_{\mathsf{Id}}} Q, \qquad p_{\mathsf{Id}} r_A \simeq \delta_A. \tag{3}$$

这是族的形成规则

$$\Gamma, x : A, y : A \vdash \mathsf{Id}_A(x,y) \text{ type}.$$

重索引会为指定的项生成 $\mathrm{Id}_A(a, b)$。式 (3) 中的等价将总恒等上下文与自反上下文相对应；p_{Id} 的纤维保留任意端点之间的路径。

对于 $p_C : C \to I_A$，重索引方块和截面三角形给出 $sd : E_A \to E \times_{I_A} C$。使用所提供的 r_A的逆，令$j = \bar{d} r_A^{-1} : I_A \to C$。复合 $cj \simeq r_A r_A^{-1} \simeq \mathrm{id}_{I_A}$ 是其截面三角形。由此得到规则

$$\frac{\Gamma, x : A, y : A, p : \mathsf{Id}_A(x,y) \vdash C \text{ type} \qquad \Gamma, x : A \vdash d : C[x, x, \mathsf{refl}_x]}{\Gamma, x : A, y : A, p : \mathsf{Id}_A(x,y) \vdash J_C(d,x,y,p) : C}.$$

r_A 的逆计算给出了 J_C 在自反性处的计算。第2.2节用二进制字符串编码 r_A 的相干逆数据。字符串 010 和 101 分别表示同伦 $r_A^{-1} r_A \simeq \mathrm{id}$ 和 $r_A r_A^{-1} \simeq \mathrm{id}$。更长的字符串记录高阶相干性。恒等形成规则给出自反等价 r_A，其相干逆给出路径归纳。

同伦余极限类型。 令 K 为一个小外部单纯形形状。它指定了一族前提的形状，以及其边界上的方程。一个判断

$$\Gamma \vdash D : \mathsf{Diag}_K$$

由 D_k 上的类型、其总上下文之间关于 Γ 的代换，以及指定的高阶相干胞腔构成。完整输入是一个关于 Γ 外部索引的类型判断、映射和高阶比较数组。记号 Diag_K 是该数组的缩写，其中胞腔方程在第2.2节中指定。

有一条形成规则

$$\frac{\Gamma \vdash D : \mathsf{Diag}_K}{\Gamma \vdash W := \operatorname*{hocolim}_{k \in K} D_k \text{ type}}.$$

它引入构造子 $\iota_k : D_k \to W$、对应于 K 每个胞腔的一个相容胞腔，以及一份记录其消去规则的形式证书 $\mathrm{HC}_K(\iota)$。固定一个类型族 $\Gamma,\ w : W \vdash B(w)$。该族是依赖消去的动机，并指定消去子的值在每个 w 处的类型 $B(w)$。令 $b^\sharp$ 为一组相容的局部项

$$\Gamma, x : D_k \vdash b_k(x) : B(\iota_k x)$$

连同它们的截面三角形和高阶相干性。对于构造余锥 ι，导出项 $\mathsf{ind}_{\iota,\ B}(b^\sharp)$ 将这些数据扩张到 W 上。对于每个构造子 ι_k，消去子都会限制为给定的局部项b_k，并附有指定的识别。这些识别与$b^\sharp$中的截面三角形和高阶相干性相协调。比较规则将每个相容边界扩张到此类扩张之间。其完整边界格式区分了初始构造余锥。

同伦余极限构造在代换下是稳定的：

$$(\operatorname*{\mathsf{hocolim}}_K D)[\sigma] \simeq \operatorname*{\mathsf{hocolim}}_K (D[\sigma]). \tag{4}$$

稳定性规则指出，重索引后的构造子图表本身带有同伦余极限消去证书。泛比较给出 (4)。该规则包含 $K = \varnothing$。离散形状给出余积，而跨度给出推出类型。

同伦余极限上的粘合族。 假设 $W = \mathrm{hocolim}_K\, D$。一个相容局部族由以下内容组成

$$\Gamma, x : D_k \vdash P_k(x)\ \mathsf{type},$$

每条边 $e : k \to l$ 都配有一个指定等价 $P_k \simeq D_e^* P_l$，并且在所有高阶胞腔上配有指定的相容性。等价地，全空间 $E_k = \Sigma_{x:D_k} P_k(x)$ 到 D 的投影构成一个笛卡尔族，即一个图表映射 $E \to D$，其在 K 的每条边处的自然性方块都是拉回。这些方块就是局部族的重索引方块。这是一个由类型判断、代换和相干计算构成的显式数组。

应用依赖和与同伦余极限构造，得到

$$V := \operatorname*{\mathsf{hocolim}}_{k \in K} E_k, \qquad g : V \longrightarrow W, \tag{5}$$

其中 映射 g 及其构造子比较由局部投影诱导。定义 e

$$\Gamma, w : W \ \vdash\ \mathsf{glue}_D(P)(w) := \Sigma_{v:V} \mathsf{Id}_W(gv, w)\ \mathsf{type}. \tag{6}$$

右侧由 Σ、Id 和 hocolim 构成。对于每个 k，其构造子给出一个比较

$$c_k : P_k \longrightarrow \mathsf{glue}_D(P)[\iota_k].$$

对于 $u :\ P_k(x)$，令 v 为 $(x,\ u)$ 在构造子 $E_k \to V$下的像。于是 $c_k(u)$ 是由v 以及一条指定路径组成的有序对，该路径从 $g(v)$指向 $\iota_k(x)$。

该下降计算规则 证实这些方形

$$\begin{array}{ccc} E_k & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ D_k & \xrightarrow[\iota_k]{} & W \end{array}$$

作为重索引方块，前提是两行均为指定的同伦余极限余锥，且局部族的每个过渡方块都是重索引方块。纤维表示和重索引比较随后给出局部计算等价

$$\beta_k : \mathsf{glue}_D(P)[\iota_k] \simeq P_k, \qquad \beta_k \simeq c_k^{-1}. \tag{7}$$

该规则保留完整的余锥棱柱，即从全空间余锥 $E_k \to V$ 到基余锥 $D_k \to W$的相干映射。上方的方块是将其限制到 k处的构造子边所得。因此，这些比较携带指定的过渡等价及其高阶相干性。相对规则允许我们先固定基余锥，然后构造全空间余锥及其到该基的映射，同时保留参数子形状上规定的输出（第 3.3 节）。同一参数方案给出相干重索引、恒等类型构造，以及两种余极限计算。

对于定义在 W 上的族 B，令 $R_D B$ 表示它沿构造余锥的相干限制。其分量为 $B[\iota_k]$，过渡对比由余锥诱导。全局重构给出导出的等价

$$\mathsf{glue}_D(R_D B) \simeq B. \tag{8}$$

这由代换稳定性推出：沿 $B \to W$ 对构造余锥作拉回，得到以 B 为顶点的受限全空间之余极限。定理 13 表明，取局部全空间的余极限是沿构造子作限制的左伴随。在纤维表示下，单位在 k 处的分量是映射 $c_k : P_k \to \mathsf{Glue}_D(P)[\iota_k]$。其逆是式 (7) 中的局部计算 β_k。B 处的余单位是重构映射 (8)，它将粘合后的限制映至 B。单位与余单位的自然性及其三角恒等式给出了适用于所有族映射和高阶项的计算律。

上下文表示与重索引使构造子 1，Σ，Id，hocolim 能够在每个上下文中作用。因此，表达式 (6) 也能在上下文中组装族。几何逆像将这一构造连同其局部和全局计算一并传输。

为了了解下降如何计算传输，考虑上下文 $A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$ 中的一个跨度。其推出 Γ 具有构造子映射 W、i_B 以及路径

$$\alpha_c : i_A(fc) =_W i_B(gc) \qquad (c : C).$$

给定 P_A 上的族和 A 上的族，一个等价

$$c : C \ \vdash\ e_c : P_A(fc) \simeq P_B(gc)$$

及其对 c 的相容依赖，恰好就是用于粘合的局部输入。对于所得的族 $P = \mathsf{glue}(P_A, P_B, e)$，记作

$$\beta_A : P[i_A] \simeq P_A, \qquad \beta_B : P[i_B] \simeq P_B$$

表示（7）的局部等价。对每个 $c : C$，这些等价通过从 $P(i_A(fc))$ 到 $P_B(gc)$ 的映射之间的同伦，将沿 α_c 的传输 tr_P 与过渡 e_c 联系起来，

$$\beta_B(gc) \circ \mathrm{tr}_P(\alpha_c, -) \simeq e_c \circ \beta_A(fc).$$

一旦 P 构造完成，P_A 的截面 a 和 P_B 的截面 b，只要配备相容路径 $e_c(a(fc)) = b(gc)$，就可通过推出消去粘合为 P 的一个截面。因此，同一个过渡等价既规定了族中的传输，也规定了粘合其截面所需的相容性。在第 10 节中，将一个对换选作过渡之一，便得到圆的二重覆盖。

2.2 高阶项和计算规则的单纯形语法

为了明确这些运算的高阶计算，我们为每条规则指定一个由输入表达式构成的边界，并描述扩展该边界的胞腔。胞腔的形状记录其维数，而其面则记录类型和计算数据。

单纯形形状是在每个维数上由符号构成，并带有面运算和退化运算的集合。令 Δ^n 为标准单纯形，$\partial\Delta^n$ 为其边界，Λ^n_i 为其 i 阶角。使用普通连接 $K \star L$，其中

$$(K \star L)_n = \coprod_{p+q+1=n} K_p \times L_q, \qquad K_{-1} = L_{-1} = \{*\}.$$

记作 $K^{\triangleleft} = \Delta^0 \star K$ 和 $K^{\triangleright} = K \star \Delta^0$。逆数据区间是显式的单纯集合

$$J_n = \{0,1\}^{n+1},$$

其面通过删除条目构成，退化映射则通过重复条目构成。包含映射 $j\colon \Delta^1 , \to J$ 的像由非递减二进制串组成。

原始结构表达式具有维数：零维包含上下文符号，一维包含带有指定端点的代换符号，而维数为 $n \geq 2$ 时包含带有指定各面的相干符号。对于每个单调映射 $\theta : [m] \to [n]$，语法都包含一个维数变换运算 θ^*。生成元胞和构造子输出是其余的原始表达式。它们的单纯形方程和边界方程列于下文。类型和项判断通过生成的证书和边界要求来细化这些结构表达式。

上下文图表与高阶项。在 K 上的上下文图表是一个形式表达式数组 a_σ ，为每个 $\sigma \in K_n$ 配备一个表达式，并满足方程

$$\theta^* a_\sigma \equiv a_{\theta^*\sigma}. \tag{9}$$

在零维和一维中，这些表达式分别是上下文和代换。在更高维中，它们是具有规定各面的代换相干判断。类型是带有 Disp 推导的代换。 p: $E \to \Gamma$ 的依赖项是一个三角表达式 a ，满足

$$d_0 a \equiv p, \qquad d_1 a \equiv s_0 \Gamma. \tag{10}$$

它剩余的边　　是截面。一个 n 维项是一个 $(n+2)$ 维表达式 a ，其

$$a|_{\{0,\ldots,n,n+2\}} \equiv \mathrm{const}_\Gamma, \qquad a|_{\{n+1,n+2\}} \equiv p. \tag{11}$$

面和退化映射作用于顶点 0、.....、 n ，并固定最后两个顶点，由此高阶项构成单纯集合 $\mathsf{Tm}_{\mathbb{T}}(\Gamma,\ p)$。

形式证书与相对规则。一个呈示是由此类形式符号构成的单纯集合，并配有以下形状的判断集合：

判断	形状 语法角色	
终对象	Δ^0	空上下文比较规则
Disp	Δ^1	良定义族展示
PB	$\Delta^1 \times \Delta^1$	重索引比较规则
HC_K	$K^{\triangleright}$	同伦余极限比较规则
Eq	Δ^1	等价边证书。

证书 HC_K 由任意小形状 K索引。记 $|P|$ 为呈示 P的底层单纯集合。表格的每一行都指定一个形状为 H_t 的证书 t ，因此 $t(m)$ 标记了一个图表m: $H_t \to |P|$。我们用 $\langle K \mid t_1(m_1) \ldots, t_s(m_s) \rangle$ 表示底层单纯集合为 K 且带有所列标记的呈示。记 $K^\flat$ 为未标记形状 K。例如，Disp(01) 将从顶点 0 到顶点 1 的边标记为展示，而 PB(id) 则通过 $\Delta^1 \times \Delta^1$的恒等映射标记整个方形。第 3 节将阐明每种标记所表达的范畴结构。

呈现的映射是保持指定证书的单纯映射。规则由一个证明包 指定，该证明包由输入呈示 A_r、输出呈示 B_r 和一个边界包含组成

$r\colon\ A_r\ ,\ \to B_r$。规则可以引入符号或为现有数组提供证书。对于输入数组 $a\colon\ A_r \to P$，每个输出胞腔 $\sigma \in (B_r)_m$ 都有一个构造器名称 $\mathsf{out}_{r,\ \sigma}(a)$。方程恰好是

$$\mathsf{out}_{r,\sigma}(a) \equiv a_\sigma \qquad (\sigma \in A_r), \tag{12}$$

$$\theta^*\mathsf{out}_{r,\sigma}(a) \equiv \mathsf{out}_{r,\theta^*\sigma}(a), \tag{13}$$

$$\mathrm{id}^* u \equiv u, \qquad \phi^*(\theta^* u) \equiv (\theta\phi)^* u. \tag{14}$$

判断等式是由这些方程和理论中声明的方程生成的最小同余。证书推导许可规则应用；构造器名称取决于规则及其输入数组。每个附加恰好保留其先前胞腔之间的判断等式。证书记录一个形成判断或泛比较判断。依赖项及其高阶恒等式是边界由 (11) 指定的胞腔。

规则也可以作用于输入数组，同时保持指定的输出不变。对于呈示 P 和小形状 I，设 $P \otimes_v I$ 具有底层形状 $|P| \times I$。其证书恰好是满足以下形式的对 $(m,\ i)\colon\ m$ 在 P 中得到证书且 $i \in I_0$ 为常值。对于每个原始规则 $r\colon A_r\ ,\ \to B_r$（属于结构规则和依赖类型规则，或同伦余极限规则）以及每个小单态射 $j\colon J_0\ ,\ \to I$，纳入

$$r \,\square_v\, j : (A_r \otimes_v I) \amalg_{A_r \otimes_v J_0} (B_r \otimes_v J_0) \hookrightarrow B_r \otimes_v I. \tag{15}$$

这一方案为每个构造子提供参数化形式和相对形式。源包含在 I 上的前提，以及已经在 J_0 上给出的输出。所有源证书均从所展示的片段继承而来。情形 $\partial\Delta^n\ ,\ \to \Delta^n$ 指定了一个具有预设高阶边界的计算。

结构规则与依赖类型规则。结构规则为代换提供复合及其高阶相干性。在连续上下文中，两个类型的依赖和复合其展示，而重索引则沿代换拉回展示。对于展示 $p\colon\ E \to \Gamma$，恒等类型构造将相对对角映射 $E \to E \times_\Gamma E$ 分解为先经过一个自反等价，再经过恒等类型的展示。

代换的同伦相干复合。对于 $n \geq 2$ 和 $0 < i < n$，包含

$$(\Lambda^n_i)^\flat \hookrightarrow (\Delta^n)^\flat. \tag{H}$$

因此，复合代换及其高阶相干性都是显式的构造器输出。

空上下文及其比较。包含 $\varnothing \to \langle \Delta^0 \mid \text{终对象}(*)\rangle$ 并且，对于 $n \geq 1$，

$$\langle \partial\Delta^n \mid \mathsf{Terminal}(n)\rangle \hookrightarrow \langle \Delta^n \mid \mathsf{Terminal}(n)\rangle. \tag{T}$$

单位族规则是胞腔上的恒等包含映射

$$(\Delta^0)^\flat \longrightarrow \langle \Delta^0 \mid \mathsf{Disp}(s_0 *)\rangle. \tag{Unit}$$

因此，每个上下文都有其恒等展示。上下文打包为

$$\langle \partial\Delta^1 \mid \mathsf{Terminal}(1)\rangle \hookrightarrow \langle \Delta^1 \mid \mathsf{Terminal}(1), \mathsf{Disp}(01)\rangle. \tag{Pack}$$

它的两个输入顶点分别是要打包的上下文和空上下文。

依赖和。对于可复合的展示 $q\colon\ 0 \to 1$ 和 $p\colon\ 1 \to 2$，包含

$$\langle \Lambda^2_1 \mid \mathsf{Disp}(01), \mathsf{Disp}(12)\rangle \hookrightarrow \langle \Delta^2 \mid \mathsf{Disp}(01), \mathsf{Disp}(12), \mathsf{Disp}(02)\rangle. \tag{Sum}$$

新形成的复合就是和展示。

重索引。 令 $V = \Lambda^2_2$，其箭头为 $0 \to 2 \leftarrow 1$。固定识别

$$\Delta^0 \star V \cong \Delta^1 \times \Delta^1$$

将一个锥与一个方形对应起来。将 V 的顶点标记为 **0**，**1**，**2**，分别对应 E，Δ，Γ。重索引形成是包含映射

$$\langle V \mid \mathsf{Disp}(02)\rangle \hookrightarrow \langle \Delta^0 \star V \mid \mathsf{Disp}(02), \mathsf{Disp}(*1), \mathsf{PB}(\mathrm{id})\rangle,$$

其中 $*$ 是新锥顶点。因此，总上下文、到 Δ 的投影以及重索引方块是同时构造出来的。对于 $n \geq 1$，比较规则为

$$\langle \partial\Delta^n \star V \mid \mathsf{PB}(\{n\} \star V)\rangle \hookrightarrow \langle \Delta^n \star V \mid \mathsf{PB}(\{n\} \star V)\rangle. \tag{Reind}$$

末顶点锥是与引入进行比较的锥。这些规则给出了每个已认证重索引方块的比较。

恒等类型构造。输入是一个展示 $p\colon E \to \Gamma$、沿其自身的重索引，以及一个从恒等锥到该方形的比较 $\delta\colon E \to Q$。以下有限商精确规定了这个数据包。令 u_0，u_1 为 $\Delta^1 \star V$ 的前两个顶点，并用 a，b，c 表示 V 的顶点。令

$$c_0 : \{u_0\} \star V \longrightarrow \Delta^1$$

将 u_0，a，b 映射到 **0**，并将 c 映射到 **1**。构造

$$A_{\mathsf{Id}} = (\Delta^1 \star V) \amalg_{\{u_0\}\star V} \Delta^1. \tag{16}$$

用展示 $0 \to 1$ 为保留边 p 提供证书，并用拉回为第二个锥 $\{u_1\} \star V$提供证书。其顶点为 Q，边 u_0u_1 是 δ。商使第一个锥成为 p上的恒等锥。沿其边 $02 = \delta$附加 Δ^2。新顶点为 I，输出边为

$$E \xrightarrow{r} I \xrightarrow{q} Q. \tag{Id}$$

对于单纯形的顶点集合 S，将由 S张成的面记为 Δ^S。目标为 $A_{\mathsf{Id}} \amalg_{\Delta^{\{0,2\}}} \Delta^2$，并带有继承的证书和 **Eq(01)**，**Disp(12)**。该附加恰好引入 I，r，q 以及三角形$qr \simeq \delta$。由于所附加的边是 Δ^2的单纯子对象，该规则在其底层输入胞腔上是单射的。

等价与表示变换。包含

$$\langle \Delta^1 \mid \mathsf{Eq}(\mathrm{id})\rangle \longrightarrow \langle J \mid \mathsf{Eq}(j)\rangle, \qquad J^\flat \longrightarrow \langle J \mid \mathsf{Eq}(j)\rangle. \tag{E}$$

第一条规则将一条标记边扩展为一个 J-图表，并给出其相干逆数据。第二条规则为任何此类图表的特定边提供证书。对于一个形状为 H_t 且 $\epsilon \in \{$**0**，**1**$\}$的证书 t，令 $\iota_\epsilon\colon H_t \to J \times H_t$ 为端点包含映射 $h \mapsto (\epsilon,\ h)$。包含该规则

$$\langle J \times H_t \mid t(\iota_0)\rangle \longrightarrow \langle J \times H_t \mid t(\iota_0), t(\iota_1)\rangle. \tag{Tr}$$

对于展示，这会沿着族表示的显式等价传输类型推导。J-数组记录了该等价及其高阶见证，其判断边界由 **(12)–(14)** 给出。

同伦余极限的形成与计算规则。 形成规则在一个上下文中构造余极限。**(HC-comp)** 中的余锥比较为依赖消去提供截面及其计算规则。由 **(Stab)**，重索引保留余极限；而 **(Desc)** 则表明，粘合族的限制与指定的局部族相一致。

依赖同伦余极限构造。 对于一个小形状 K 上以 Γ 为指标的类型图表 D，输入的形状为 $K \star \{1\}$。它在 k 处的顶点是 $\Gamma.D_k$，而从 k 到末顶点的边是展示 $p_{D_k} : \Gamma.D_k \to \Gamma$。包括

$$\langle K \star \{1\} \mid \mathsf{Disp}(k1)\ (k \in K_0)\rangle \hookrightarrow \langle K \star \Delta^1 \mid \mathsf{Disp}(k1), \mathsf{HC}_K(K \star \{0\}), \mathsf{Disp}(01)\rangle. \tag{HC}$$

对于 $W = \mathsf{hocolim}_K D$，新顶点 **0** 是总上下文 $\Gamma.W$。边 **01** 是其展示 p_W： $\Gamma.W \to \Gamma$，而 $k01$ 上的三角形给出了 Γ之上的构造子比较。对于 $n \geq 1$，包括

$$\langle K \star \partial\Delta^n \mid \mathsf{HC}_K(K \star \{0\})\rangle \hookrightarrow \langle K \star \Delta^n \mid \mathsf{HC}_K(K \star \{0\})\rangle. \tag{HC-comp}$$

首顶点余锥是特殊的。命题 64 构造了维数 1 中的截面映射及其维度 2 中的截面三角形。在固定外部上下文 Γ 中，进一步的维度 2 比较表达了该截面位于 Γ 之上，而维度 3 比较则使其与截面三角形相容。相对形式 (15) 保留了整个指定的局部计算数组以及任何已指定的输出边界。

代换稳定性。 在形状 $K^{\triangleright} \times \Delta^1$上，将上排记为 P，下排记为 D，其锥顶点记为 $*$。将 $(k \to *) \times \Delta^1$上的方形记为 q_{k*}。加入细胞上恒等规则

$$\frac{\mathsf{HC}_K(D) \qquad \mathsf{PB}(q_{k*})\ (k \in K_0)}{\mathsf{HC}_K(P)}. \tag{Stab}$$

所有小形状（包括空形状）都会出现。

下降计算。 在同一形状 $K^{\triangleright} \times \Delta^1$上，对 K的每条边 e，将 $e \times \Delta^1$上的方形记作 q_e。加入细胞上恒等规则

$$\frac{\mathsf{HC}_K(P) \qquad \mathsf{HC}_K(D) \qquad \mathsf{PB}(q_e)\ (e \in K_1)}{\mathsf{PB}(q_{k*})\ (k \in K_0)}. \tag{Desc}$$

源记录了两个余极限余锥、它们的混合比较胞腔，以及过渡方块上的拉回证书。该规则为此棱柱中的每个锥方块 q_{k*} 提供证书，从而给出纤维表达式 (6) 的局部计算。对于 $K = \varnothing$，锥方块族为空。给定一个指向上下文 **0** 的箭头 $X \to 0$，并且该上下文已获证为一个空余极限，(Stab) 就为 X 提供证书，证明它是一个空余极限，因而也是一个始上下文。

2.3 语法的超限构造与推导上的代换 s

呈示提供了这些规则所适用的生成元和公理。

定义 3（几何依赖语法）。 演算 GHoTT 由第 *2.1* 节的带类型判断、原始边界格式 *(H)–(Desc)*、它们的相对形式 (15)，以及方程 (12)–(14)组成。推导是一棵良基树，由对显式输入数组的规则应用构成，并附有其所需证书的推导。名称 $A[\sigma]$、配对、 J_C 和 hocolim 表示上述输出包及其导出的消去运算。表达式 glue 是复合 (6)；其局部计算可由 *(Desc)* 推导得到。小理论 $\mathbb{T}$ 由一个小的生成呈示 $Q_{\mathbb{T}}$ 指定，该呈示包含常元、边界方程和证书公理。其语法 $G_{\mathbb{T}}$ 是导出上下文图表在判断等式下取商所得的单纯集合，并带有其导出证书。

由依赖声明构造生成呈示时，取其总上下文、展示、项和边界胞腔。 $Q_{\mathbb{T}}$ 的底层单纯集合由声明的胞腔生成，并满足其边界方程；其标记则是声明的证书公理。构造子随后满足（12）–（14）。

设 κ 是 $\mathbb{U}$ 的不可达基数，并在 $\mathbb{V}$中选取一个正则的 $\lambda > \kappa$。规则格式在 $\mathbb{V}$中构成一个集合，且每个源、目标及证书集都是 $\mathbb{U}$-小的。从 $P_0 = Q_{\mathbb{T}}$开始。对于 $\alpha < \lambda$，令 I_α 为由满足以下条件的配对（r，a）组成的集合：$a : A_r \to P_\alpha$，其输入数组和前提证书首次在阶段 α同时可用。沿着每个这样的 a 附加一份 B_r，方法是构造推出

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{(r,a)\in I_\alpha} A_r & \xrightarrow{[a]} & P_\alpha \\ \coprod r \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \coprod_{(r,a)\in I_\alpha} B_r & \longrightarrow & P_{\alpha+1}. \end{array} \tag{17}$$

在（r，a）-直和项上方，顶映射为 a，左映射则为规则包含映射 $r : A_r, \to B_r$。记录每个已处理的输入及其构造器输出。在每个非零极限序数 $\beta \le \lambda$ 处，令 $P_\beta = \operatorname{colim}_{\alpha<\beta} P_\alpha$。这些呈示的余极限是在底层单纯集合上计算的，其证书恰好继承自各个组成部分。

引理 4（构造与闭包）。呈示 P_λ 是 $\mathbb{V}$-小的，在每个原始规则和相对规则下都闭合，并且呈示定义 *3* 中的推导树语法。所有过渡映射在胞腔上都是单射的。

证明。每个规则包含映射在底层单纯集合上都是单态射。细胞上恒等规则会添加证书；其他规则则将所展示的胞腔及其面附加进来。推出和超限并保持这些单态射。特别地，两个先前构造的胞腔之间的等式在后续阶段成立，当且仅当它在它们共同的较早阶段就已成立。

规则集合是 $\mathbb{V}$ 的一个对象。若 P_α 是 $\mathbb{V}$-小的，则所有规则源到该集合的映射构成 $\mathbb{V}$ 中的一个集合，而它们的目标数据包的余积仍是 $\mathbb{V}$-小的。因此，该推出是 $\mathbb{V}$-小的。在每个极限 $\beta \le \lambda$ 处，该并集以 $\mathbb{V}$ 中的一个序数为指标，因此仍属于 $\mathbb{V}$。这就通过超限归纳证明了大小断言。

设 a: $A_r \to P_\lambda$ 是一个规则输入。它的源包含少于 κ 个胞腔和证书。每个像胞腔都出现在某个阶段，而每个像证书都已在某个阶段与一个推导一同加入。这类阶段少于 λ 个，因此由正则性可得一个共同上界 $\alpha < \lambda$。由于过渡映射是单射，边界方程在 P_α 中已经成立。因此，a 是从呈示到 P_α 的一个映射。若其实例先前已处理，则其输出已在记录中；否则，它会在阶段 $\alpha + 1$ 处理。这就证明了闭包，对相对源以及包含指定旧输出胞腔的源也同样成立。

推出中的新胞腔恰好是构造器输出 $\mathsf{out}_{r,\,\sigma}(a)$。它与旧胞腔之间的识别，以及它的面方程和退化方程，正是 (12)–(13)。记录确保同一规则作用于同一输入数组时，只有一个构造器名称。反过来，对推导进行良基归纳，可将其所有前提置于同一有界阶段，并将其结论置于后续阶段。这就将推导树呈示与 P_λ 及其所述的判断上同余对应起来。□

推导的支撑是其推导树中出现的生成元和规则实例的集合，其中包括推导其前提证书的子树。

引理 5（符号替换与小支撑）。对生成元符号的赋值若尊重其方程并能推出其证书公理，则可扩展到所有推导。此代换在判断上是幺且结合的。每个推导都有 $\mathbb{U}$-小支撑；小族推导的支撑之并也是小的。

证明。 递归地定义代换为

$$\mathsf{out}_{r,\sigma}(a)[\rho] = \mathsf{out}_{r,\sigma}(a[\rho]), \qquad (\theta^* t)[\rho] = \theta^*(t[\rho]).$$

这些前提通过归纳仍然可推导，因此根据引理 4，输出构造子存在。同样的归纳保留生成方程，并证明两个函子性恒等式。推导中的每个节点都有

一族小的直接前提和一个小标签。良基归纳以及 $\mathbb{U}$ 在小指标并下的闭包表明，其依赖树是小的。对于一族小的推导，它们的支撑之并仍然是小的。□

边界方程和输入类型决定了每个具名构造子的输出类型。例如，（和）的输出是一个具有所述总上下文的展示，（HC）的输出是一个指向指定上下文的展示，而（Desc）则证明了导出纤维族的重索引计算。这些类型判断提供了展示和比较映射，我们现在将据此构造有限极限。

3 纤维表示、有限极限与族下降

在$\mathcal{G}_{\mathbb{T}}$中，用纤维表示代换有两个用途。对于一个余扇，它将拉回表示为依赖类型。结合终端上下文，这些拉回便给出有限极限。对于图表上的一个笛卡尔族，我们取从局部全空间的余极限到基的余极限的映射的纤维。下降规则将该族的限制与指定的局部族对应起来。

3.1 代换的纤维表示与有限极限

我们首先识别终端上下文，以及对展示进行重索引的拉回方块。依赖和与恒等类型随后使我们能够用一个展示表示任意代换，并将重索引应用于任意余扇。

引理 6（结构识别）。底层上下文图表构成一个拟范畴。证书 终端 和 等价 恰好指定终对象和等价边。每个经过认证的 拉回 方形都是拉回；对于带有一个经过认证的重索引锥的余扇，其所有拉回锥都经过认证。每个展示都可以沿任意代换进行重索引。任意两个上下文都有一个积。

证明。规则 (H) 是内角条件。对于 (T)，规定的边界扩张及其末顶点 t 是终对象判据。因此，经过认证的 t 是终对象。每个终对象都等价于所选对象，并依据 (Tr) 获得认证。当且仅当一条边可扩张到逆数据区间 J 时，它才是等价边；两个规则 (E) 分别给出两个方向的蕴含。

对于余扇 $a\colon V \to \mathcal{G}_{\mathbb{T}}$，其由连接定义的锥范畴的 n-单形为 $\Delta^n \star V \to \mathcal{G}_{\mathbb{T}}$，并延拓 $a_{\circ}$（重索引）的比较部分说明，经认证的锥在其中是终对象，因此是一个拉回。任何其他拉回锥在锥拟范畴中都与它等价。相应的锥 J-图表是一个映射 $J \star V \to \mathcal{G}_{\mathbb{T}}$。通过前复合，它确定了一个方形映射，其方式为

$$J \times (\Delta^0 \star V) \longrightarrow J \star V. \tag{18}$$

在一个单纯形上，保留其 J 坐标中位于锥顶点块上的条目，并保留其 V 坐标中位于剩余块上的条目。删除和重复条目与此公式相容。端点限制就是这两个锥，因此（Tr）认证了第二个锥。（重索引）的构造部分提供了所需的拉回，只要余扇的一条边是展示即可。最后，（Pack）使 $X \to 1$ 对任意上下文 X 都是展示。沿着 $Y \to 1$ 重索引 $X \to 1$ 得到 $X \times Y$。□

命题 7（相干路径归纳）。令 $r\colon\ E \to I$ 为恒等形成包的自反替换。相干依赖消去性质

$$r^{*} : \mathrm{Map}_{\mathcal{G}_{\mathbb{T}}/I}(\mathrm{id}_I, p) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Map}_{\mathcal{G}_{\mathbb{T}}/I}(r, p)$$

对于每个导出展示 $p\colon\ Z \to I$，等价于 r 是一个等价。反向蕴含利用终端上下文、上下文打包和重索引，构造用于检验路径归纳的乘积展示。

证明。 如果 r 是一个等价，那么它是从对象 r 到切片中的 id_I 的一个等价，并且与其进行前复合会为每个 p 诱导出所展示的等价。它的逆给出消去子；其逆同伦给出自反性处的计算以及高阶比较数据。

反过来，设 T 是任意上下文。将两个上下文打包到终端上下文之上并进行重索引，便得到常值展示 $I \times T \to I$。对于此展示，所展示的映射自然就是前复合映射

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{G}_{\mathbb{T}}}(I, T) \longrightarrow \mathrm{Map}_{\mathcal{G}_{\mathbb{T}}}(E, T).$$

路径归纳使得此映射对每个 T 都是等价。于是，米田引理的协变形式表明 r 是等价。□

因此，（恒等）中的等价性证书恰好记录了完整的相干路径归纳性质。消去与自反性计算是此截面空间限制的逆。附录 A 通过显式的截面胞腔和计算胞腔实现了它们，并赋予其规定的边界。

为了将任意代换表示为展示，我们取其纤维。此族的总上下文还原了该代换的定义域。

定理 8（　　纤维表示）。对于每个代换 $f\colon\ X \to Y$，演算构造出类型 e

$$y : Y \ \vdash\ \mathsf{Fib}_f(y) := \Sigma_{x:X} \mathsf{Id}_Y(fx, y)\ \mathsf{type}. \tag{19}$$

其展示 $p_f\colon\ F_f \to Y$ 有一个等价

$$\alpha_f : X \simeq F_f \quad over\ Y, \qquad x \longmapsto (fx, x, \mathsf{refl}_{fx}).$$

因此，每个代换都获得一个可导出显示证书。此陈述在参数中以及相对于已指定边界时都协调成立。

证明。将 X 和 Y 打包为闭类型。根据引理 6，积存在。对闭类型 Y 应用恒等类型构造。它给出

$$Y \xrightarrow{r_Y} I_Y \xrightarrow{q_Y} Y \times Y, \qquad \mathsf{Eq}(r_Y), \quad \mathsf{Disp}(q_Y), \quad q_Y r_Y \simeq \delta_Y.$$

展示 q_Y 可沿映射 $h\colon\ X \times Y \to Y \times Y, (x, y) \mapsto (fx, y)$ 拉回。所得结果与展示 $X \times Y \to Y$ 复合后，根据（和）是一个展示 p_f，且其类型表达式恰为 (19)。恒等锥和重索引比较给出 α_f 及其在 Y 上的三角形。

为了证明 α_f 是一个等价，我们计算它对从每个测试语境 Z 出发的映射的作用。令 $A = \mathbf{Map}(Z, X)$ 和 $B = \mathbf{Map}(Z, Y)$。积的泛性质以及展示 q_Y 的拉回的泛性质给出

$$\begin{aligned} \mathrm{Map}(Z, F_f) &\simeq (A \times B) \times_{B \times B} \mathrm{Map}(Z, I_Y) \\ &\simeq (A \times B) \times_{B \times B} B \simeq A. \end{aligned}$$

在第二行中，映射 $B \to B \times B$ 是对角映射，因为根据所述三角形，r_Y 是一个等价。最后的等价将 $(x, y, p\colon\ fx = y)$ 投影到 x。它在 x 处的纤维是由成对元素 $(y, p\colon\ fx = y)$ 构成的可缩空间。这里，$A \times B$ 按 (x, y) 的顺序排列坐标，而 $\mathbf{Fib}_f$ 的总上下文则按 (y, x) 的顺序排列它们。因此，逆 $x \mapsto (x, fx, \mathbf{refl}_{fx})$ 在拉回坐标中是 $\mathbf{Map}(Z, \alpha_f)$，且关于 Z 自然。米田证明了 α_f 是一个等价。

在依赖记法中，逆是到 $x\colon\ X$ 的投影，而对 $p\colon\ fx = y$ 进行路径归纳，会将 F_f 上的复合识别为其恒等。路径归纳之所以可用，是因为 (Id) 中的自反映射是等价：将一个截面与其相干逆复合，并利用其逆三角形进行计算。这也识别了依赖描述与映射空间描述。

方形 $(\alpha_f,\ \mathrm{id}_Y)$ 是从箭头 f 到箭头拟范畴$\mathcal{A}$ = 函子范畴$(\Delta^1,\ \mathcal{G}_{\mathbb{T}})$ 中展示 p_f 的一个等价。将它扩展为一个 J-图表，并与交换 0 和 1 的 J 自同构复合。所得图表在端点 0 处为 p_f，在端点 1 处为 f，因此 (Tr) 将 Disp(p_f) 映至 Disp(f)。这个小图表的胞腔和证书见证在某个有界阶段同时出现，从而给出 Disp(f) 的推导。

对于一个小的参数包含 $H_0 ,\ \to H$，相对构造子构成H 上的比较方形，并满足其在 H_0 上的指定限制。根据上述计算，每个方形都是等价。令 $\mathrm{Fun}(\Delta^1,\ \mathcal{A})_{\mathrm{eq}}$ 为以等价边为对象的全子范畴。沿 $j\colon\ \Delta^1 ,\ \to J$ 的限制给出一个平凡范畴纤维化

$$j^* : \mathrm{Fun}(J, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{A})_{\mathrm{eq}}.$$

由于 $\Delta^1 ,\ \to J$ 是单态射且 $\mathcal{A}$ 是拟范畴，限制是一个范畴纤维化。每个J-图表限制后都是等价边，因此将此纤维化拉回到等价边构成的全子范畴，便得到 j^*。

要证明 j^* 是等价，只需在源端求值。对于 J-图表，源端求值是等价，因为 J 等价于一个点。对于等价边，其逆将 x 映射到 id_x。每个等价 $u\colon\ x \to y$都给出箭头 $\mathrm{id}_x \to u$ 的一个自然等价，其分量为 id_x 和 u。由于 j^* 与源端求值相交换，它是范畴等价，因而是平凡范畴纤维化。因此，沿 j^* 提升 H-图表的比较方形，就能恰好延拓 H_0 上指定的 J-图表。同样的端点互换以及 (Tr) 的相对形式现在给出了 H上的展示证书。□

推论 9（由依赖运算得到有限极限）。上下文拟范畴具有有限极限。任意代换 $f\colon\ X \to Z$ 和 $g\colon\ Y \to Z$ 的拉回由依赖类型表示

$$\Sigma_{x:X}\Sigma_{y:Y}\mathsf{Id}_Z(fx, gy).$$

每个拉回方块都有可导出的拉回证书。因此，一般的有限极限形成是一个导出规则。

证明。由定理 8 可知，任意余扇的任一条腿都是一个展示。因此，重索引提供了它的拉回，而锥比较和 (Tr) 则为任意等价的拉回锥提供证书。所展示的表达式具有相同的泛映射空间：其中的一个点是一对映射，附带其复合之间的一条路径，以及完整的高阶识别。具有终对象和拉回的拟范畴拥有所有有限极限 [25]。下一个引理给出了有限图表的构造。□

引理 10（有限同伦记录）。对于每个有限单纯集合 K 和每个相干图表$a\colon\ K \to G_{\mathbb{T}}$，都存在一个导出上下文 $\mathsf{Rec}_K(a)$ ，它带有一个泛锥。它由空上下文、依赖和、恒等类型和重索引构造而成。因此，可以将有限极限锥公理编译为依赖表达式之间的等价公理。

证明。 通过有限次非退化单形附着构造 K 。对于 $K = \varnothing$，取终端上下文。定义在 Δ^n 上的图表的极限就是它在初始顶点处的值，相干锥由该图表提供。在一次附加中

$$K = K' \amalg_{\partial\Delta^n} \Delta^n,$$

令 $\sigma\colon\ \Delta^n \to K$ 表示附着单形。将顶点为 a（σ(0)）的锥限制到边界，得到同伦拉回中的右侧映射

$$\mathsf{Rec}_K(a) = \mathsf{Rec}_{K'}(a|_{K'}) \times_{\mathsf{Rec}_{\partial\Delta^n}((a\circ\sigma)|_{\partial\Delta^n})} a(\sigma(0)). \tag{20}$$

归纳采用字典序：先按 K 的维数，再按其最高维非退化单形的数量。因此， K' 和 $\partial\Delta^n$ 已经处理完毕。对于测试语境 Z，相干锥

以顶点 Z 为对象的锥是自然变换 $\mathsf{const}_Z \to a$。将单形附着映射到上下文拟范畴中，得到严格拉回

$$\mathrm{Fun}(K, \mathcal{G}_{\mathbb{T}}) \cong \mathrm{Fun}(K', \mathcal{G}_{\mathbb{T}}) \underset{\mathrm{Fun}(\partial\Delta^n, \mathcal{G}_{\mathbb{T}})}{\times} \mathrm{Fun}(\Delta^n, \mathcal{G}_{\mathbb{T}}).$$

从最后一个因子进行限制是范畴纤维化，因为 $\partial\Delta^n \,, \to \Delta^n$ 是单射的。因此，这个严格拉回计算了 ∞-范畴的拉回。从 const_Z 到给定 a 的映射空间，是三个因子中相应映射空间的同伦拉回。这些恰好是两个锥空间及其共同的边界锥空间。将 Z 映射到 (20) 得到同一个同伦拉回。这证明了泛锥性质，包括其高阶单纯形。递归中的每个拉回都有推论 9 所述的依赖描述。

指定锥 c 诱导出一个从其顶点到 $\mathsf{Rec}_K(a)$ 的比较，其中包括其锥的相干性。该锥为极限，当且仅当这个比较是等价。记录、比较及其边界数据的构造涉及有限多个泛操作；其相对版本保留指定的面。因此，针对该比较与记录的等价公理，以依赖语法表达了有限极限公理。泛性质将不同附着顺序所产生的记录识别起来。对于输入图表的所有变换，这些比较都是自然的：一个变换会在它们的锥函子之间诱导出映射，而可表性则提供记录之间的映射，且相干选择所成的空间可缩。对任意小参数形状进行扩充后，同样的推理依然适用。□

3.2 族的拉回稳定性与下降

$\mathcal{G}_{\mathbb{T}}$ 中的每个拉回方块现在都有可推导的证书。这使我们能够将代入稳定性规则应用于沿任意映射拉回余极限余锥。

引理 11（同伦余极限识别）。上下文拟范畴具有所有小余极限，且HC 证书恰好标示其余极限余锥。这些余极限在任意拉回下稳定。

证明。对于一个小图表 $a : K \to \mathcal{G}_{\mathbb{T}}$，将其扩展为终端上下文中的一个余锥。由于映入终对象的映射构成可缩空间，因此可以相干地完成此操作。根据定理 8，其边都是展示。应用 (HC)。规则 (HC-comp) 是余锥范畴中的始对象边界判据，因此所得余锥是一个余极限。每个其他余极限余锥都与它等价，而 (Tr) 可推导出其证书。反过来，比较规则表明，每个已认证余锥都是泛的。

给定余极限余锥的任意拉回，其顶点方块都是拉回，并且根据推论 9 可推导出拉回证书。规则 (Stab) 为上余锥提供证书。这证明了所有小余极限（包括空余极限）的泛性质。每个图表都具有小形状，因此其证书可在有界阶段导出。□

两条同伦余极限计算规则描述了双向的粘合。下降计算粘合族在每个片段上的纤维，而代换稳定性则根据这些纤维及其过渡映射重构族。

定义 12（几何宇宙）。一个几何宇宙是一个 $\mathbb{V}$-小的 ∞-范畴 D，具有有限极限和所有 $\mathbb{U}$-小余极限，并且其中每个 $\mathbb{U}$-小余极限都是范坎彭的。明确地说，对于每个 $\mathbb{U}$-小图表d： $K \to D$ 及其余极限 W，沿余极限余锥的限制是 ∞-范畴之间的一个等价

$$R_d : \mathcal{D}_{/W} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Cart}(d).$$

这里，$\mathrm{Cart}(d)$ 是$\mathrm{Fun}(K, D)_{/d}$ 中由图表的映射 $P \to d$ 构成的全子范畴，其中自然性方块是拉回。

沿着 d 的箭头进行拉回，会得到一个切片图表，其极限为

$$\mathrm{Cart}(d) \simeq \lim_{k \in K^{\mathrm{op}}} \mathcal{D}_{/d_k}.$$

为此，令 $\mathcal{E} \;=$ 函子范畴$(K,\mathcal{D})$。通过柯里化，余域纤维化在 d 上的截面构成肥切片函子范畴$(\Delta^1,\mathcal{E}) \times_{\mathrm{ev}_1,\mathcal{E}} \{d\}$。普通切片到肥切片的比较 [24] 的对偶是一个等价，并且对于这个单顶点基图表，它在对象上是恒等的。它限制在过渡方块为拉回的全子范畴上。笛卡尔截面公式 [24] 现在给出了所展示的极限，其中包含其各族之间的所有映射。对于单纯形指标形状，所展示的范畴极限取自其表示的指标 ∞-范畴。根据针对 ∞-拓扑斯的吉罗定理的下降形式，Grothendieck ∞-拓扑斯是几何宇宙 [24]。

定理 13（下降计算与全族下降）。令 D 具有有限极限和小余极限，并假设余极限在拉回下稳定。对于每个小图表 $d\colon K \to D$ 及其余极限余锥 $d : d \to W$，以下条件等价。

(i) 在任意余极限余锥之间的棱柱中，K 边上的笛卡尔过渡方块 $P \to d$蕴含锥边 $k \to *$上的笛卡尔方块。(ii) 每个笛卡尔族 $P \to d$ 都可延拓为 W 上的一个族，使其锥方块为拉回。(iii) 限制 $R_d : D_{/W} \to \mathrm{Cart}(d)$ 是 ∞-范畴之间的一个等价。

其逆为全空间余极限。代换稳定性给出可逆余单位，而条件(i) 连同其预先指定的余锥比较给出可逆单位。

证明。 对于 $p : P \to d$，定义 $L_d(P) =$(colim$_K P \to W$)为自然变换 p 以及指定识别colim$_K\, d \simeq W$的余极限。箭范畴中的余极限按点计算，因此该构造包含笛卡尔族的每个映射及其高阶相干性。对于 $y : Y \to W$，余极限泛性质将从 $L_d(P)$到 y 的映射识别为在指定复合$p_W : P \to \mathsf{const}_W$之上的同伦纤维，即

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{Fun}(K,\mathcal{D})}(P, \mathrm{const}_Y) \longrightarrow \mathrm{Map}_{\mathrm{Fun}(K,\mathcal{D})}(P, \mathrm{const}_W).$$

逐点拉回 $d \times_{\mathrm{const}_W} \mathsf{const}_Y$是 R_dY。其拉回泛性质将同一纤维识别为从 P到 R_dY、位于 d 之上的映射。这两种识别都是自然的，并给出

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{D}_{/W}}(L_dP, Y) \simeq \mathrm{Map}_{\mathrm{Fun}(K,\mathcal{D})_{/d}}(P, R_dY). \tag{21}$$

由于 Cart(d) 在其对象上是满的，因此这是所述范畴之间的一个伴随 $L_d \dashv R_d$。有限极限定义了限制函子，而余极限函子定义了它的左伴随。特别地，如果 R_d 是等价，那么对每个 $Y \to W$，其余单位 $L_dR_d(Y) \to Y$都是等价。此余单位表明 Y是拉回后余锥的余极限，因此 Van Kampen余极限在拉回下稳定。

对于一个族 $Y \to W$，沿着 Y拉回构造余锥。代换稳定性使其顶行成为顶点为 Y的余极限。余单位

$$\epsilon_Y : L_dR_dY \longrightarrow Y$$

是从该顶行的余极限到其指定顶点的比较，因此是等价。因此，R_d 是全忠实的。

假设 (i)。单位

$$\eta_P : P \longrightarrow R_dL_dP$$

具有分量 $P_k \to d_k \times_W \mathsf{colim}_K\, P$。其比较方块恰好是用于定义 L_dP 的余极限棱柱的锥方块。条件 (i) 使每个这样的方块都是拉回。因此，η_P 的每个分量都是等价。图表的等价可逐点判定，因此 η_P 是 Cart(d) 中的等价。单位和余单位都是等价，这就证明了 (iii)。

假设 (iii) 成立。(21) 中的左伴随是一个逆，因此其单位是等价。给定 (i) 中的任意棱柱，其上方余极限余锥将其顶点识别为 $\operatorname{colim}_K P$，且这一识别与完备下方余锥相容。在此识别下，单位的各分量恰好就是它的锥方形比较。它们都是等价，因此这些方块都是拉回。这就证明了 (i)，取顶点 $L_d P$ 也可证明 (ii)。

最后，假设 (ii)。顶点为 $G \to W$ 的扩张给出比较 $P_k \simeq d_k \times_W G$。完整棱柱使它们构成自然等价 $P \simeq R_d G$。因此 R_d 本质满，而其已证明的全忠实性给出 (iii)。

自然单位和余单位满足

$$\epsilon_{L_d P}\, L_d(\eta_P) \simeq \mathrm{id}_{L_d P}, \qquad R_d(\epsilon_Y)\, \eta_{R_d Y} \simeq \mathrm{id}_{R_d Y}$$

以及它们的伴随相干性。因此，局部计算和整体计算在所有态射及高阶单纯形上都是相容的。对于 $K = \varnothing$，代换稳定性将始对象上的切片识别为终对象范畴；同样的伴随和证明也适用。□

推论 14（类型化语法的识别）。语法 $G_{\mathbb{T}}$ 是一个几何宇宙。其可推导的展示 判断包括每个代换；其终对象、拉回、等价和同伦余极限证书恰好是相应的泛结构。

证明。结构性断言由定理 8 以及引理 6 和 11 得出。对于两个余极限余锥之间的一个变换，若其对指标形状 K 的限制是笛卡尔的，则结构识别给出两个 HC 证书和过渡 PB 证书。随后，规则 (Desc) 提供所有锥方形 PB 证书。因此，定理 13 的条件 (i) 成立。该定理直接由生成规则证明范坎彭性质。□

3.3 通过全空间的同伦余极限粘合族

为了在依赖语言中实现限制的逆，我们取局部全空间的余极限，并构造其到基底余极限的映射的纤维。下面的引理使我们能够在保留指定基底余锥的同时构造此映射。

引理 15（相对闭余极限构造）。闭余极限包

$$K^{\flat} \hookrightarrow \langle K^{\triangleright} \mid \mathsf{HC}_K(\mathrm{id}_{K^{\triangleright}}) \rangle$$

及其所有逐顶点相对形式，均由 (T)、(HC) 和依赖运算导出。更准确地说，对于一个小单态射 $J_0 \hookrightarrow I$，一个定义在

$$P = (K \times I) \cup_{K \times J_0} (K^{\triangleright} \times J_0)$$

上的数组，其在 J_0 的顶点上的指定余锥均为经认证的余极限，则可扩张到 $K^{\triangleright} \times I$，使所有参数顶点处都有经认证的余极限，同时保持原数组整体不变。

证明。取一个终端上下文 t。将给定数组扩张到 $P \star \{t\}$。此扩张是由 (T) 比较构成的一个显式序列：按维数顺序，对每个非退化单形 $\sigma\colon \Delta^n \to P$，沿其边界附加 $\sigma \star \{t\}$。其最后一个顶点是 t，其对面是指定单形 σ，其余各面则已在较低维数时附加。因此，每一步都是维数为 $(n+1)$ 的终比较，且所有已有胞腔均保持不变。这些步骤构成的小集合给出了完备终余锥。根据定理 8，指向 t 的每个箭头都有可导出的展示证书。

在常值上下文 t 上，以参数 I 构造上下文余极限时，输入为 $(K \star \{1\}) \times I$。将其映射到 $P \star \{t\}$，方法是保留 $K \times I$ 部分，并将末顶点块压缩到 t。在 J_0 上，已指定的输出是 $(K \star \Delta^1) \times J_0$ 上的一个数组：保留 P 内的 $(K \star \{0\}) \times J_0 = K^{\triangleright} \times J_0$，并将

末顶点-1 块压缩到 t。这些都是单纯映射。在每个单纯形上，其第一个联结坐标将 $K\star\{0\}$ 中的初始块与位于 1 的末块分隔开；第一个块保留其参数坐标，第二个块则映射到 t。删除或重复条目与这一构造相容。这两个数组在其公共子形状 $(K\star\{1\})\times J_0$ 上一致。

在 J_0 中的一个参数顶点处，$K\star\{0\}$ 上的余锥正是指定的经认证的余极限。所有通向固定上下文 t 的边都是经认证的展示。因此，我们已指定 $J_0\hookrightarrow I$ 的相对（HC）规则的完整源。其输出是一个定义在 $(K\star\Delta^1)\times I$ 上的数组，且等于所给的两部分。将其限制到 $(K\star\{0\})\times I$。这就是所需的闭余极限数组，其中保留了每个原有的混合单形以及此前给定的每个余锥单元。□

用 $\mathsf{Fam}_{\mathbb{T}}(\Gamma)$ 表示 $(\mathcal{G}_{\mathbb{T}})_{/\Gamma}$ 中由 Γ 上的导出展示构成的全子范畴。对于 $d\colon K\to\mathcal{G}_{\mathbb{T}}$，用 $\mathsf{Cart}_{\mathbb{T}}(d)$ 表示 $\mathcal{G}_{\mathbb{T}}$ 中的 $\mathsf{Cart}(d)$，即 $\mathsf{Fun}(K,\mathcal{G}_{\mathbb{T}})_{/d}$ 中由变换 $E\to d$ 构成的全子范畴，其自然性方块均为拉回。

定理 16（语法粘合与重构）。对于一个导出余极限余锥 $d\to W$ 和一个笛卡尔族 $E_k=\Sigma_{x:d_k}P_k\,(x)\to d_k$，依赖表达式

$$\mathsf{glue}_d(P)(w)=\Sigma_{v:V}\mathsf{Id}_W(gv,w),\qquad V=\operatorname*{hocolim}_k E_k,\quad g:V\to W, \tag{22}$$

是一个具有所规定局部计算的族。类型限制与该粘合构造诱导出逆等价

$$\mathrm{Fam}_{\mathbb{T}}(W)\simeq\mathrm{Cart}_{\mathbb{T}}(d)\simeq\lim_{k\in K^{\mathrm{op}}}\mathrm{Fam}_{\mathbb{T}}(d_k). \tag{23}$$

这些计算是

$$\mathsf{glue}_d(P)[\iota_k]\simeq P_k,\qquad \mathsf{glue}_d(R_dB)\simeq B,$$

对所有族映射和高阶项都自然。该构造保留任意指定的基余锥，并相对于指定的输出参数子形状进行扩展。对于固定的族 B，

$$\mathrm{Tm}_{\mathbb{T}}(W,B)\simeq\lim_{k\in K^{\mathrm{op}}}\mathrm{Tm}_{\mathbb{T}}(d_k,B[\iota_k]). \tag{24}$$

证明。给定的局部族与整个指定的基余锥构成一个数组 n

$$A_K=(K\times\Delta^1)\cup_{K\times\{1\}}(K^{\triangleright}\times\{1\}).$$

应用引理 15 于 $I=\Delta^1$ 和 $J_0=\{1\}$。它将这个精确的数组扩展为 $K^{\triangleright}\times\Delta^1$。其上行是一个经认证的余极限 $E\to V$，其顶点边为 $g\colon\ V\to W$。两行都带有 HC 证书；过渡方块保留输入的拉回证书。规则 (Desc) 为每个顶点方块提供证书。这样便通过导出规则应用构造出完整的余极限棱柱，同时固定每个原始混合单形。

定理 8 通过族 (22) 给出 g，其总上下文与 V 在 W 上等价。沿每个 ι_k 重索引这一等价，并比较两个已认证的拉回锥，即可得到与 P_k 的局部等价。余极限棱柱提供完整一致的过渡数组。应用参数化重索引比较，可得到局部族图表的等价，其中包括指定的边比较和所有高阶面。附录 A.6 详细说明了两个方向及其逆向计算。

由定理 8，每个箭头都是一个展示，因此 $\mathsf{Fam}_{\mathbb{T}}(\Gamma)$ 就是整个切片。式 (22) 中的族表示定理 13 的全空间余极限函子 L_d。正向比较 c_k 是纤维表示后单位的分量。它们的逆 β_k 给出了第一个展示的计算。对于 $B\to W$，规则 (Stab) 认证了顶点为 B 的拉回构造余锥。因此，它将其限制的全余极限与 B 在 W 上的全余极限识别起来。这就是余单位，并给出第二个展示的计算。定理 13 中的自然性和三角恒等式证明了这些断言对整个族范畴都成立。

对于额外的一对参数 H_0 ，$\to H$，应用闭余极限引理，其中

$$I = \Delta^1 \times H, \qquad J_0 = (\{1\} \times H) \cup (\Delta^1 \times H_0).$$

其输入恰好是 H 上的原始棱柱、 H 上的整个基余锥，以及 H_0 上已指定的上余锥和混合胞腔。(Desc)、纤维表示和重索引比较的相对形式保留了所有这些胞腔和证书。这就证明了所述的相对断言。

$\mathsf{Cart}_{\mathbb{T}}(d)$ 的极限描述是余域纤维化 $\mathsf{Ar}(\mathcal{G}_{\mathbb{T}}) \to \mathcal{G}_{\mathbb{T}}$ 的笛卡尔截面描述：其笛卡尔边是拉回方块，而在 d_k 处的纤维是切片。笛卡尔截面计算出所指的范畴极限 [24]。指定的笛卡尔截面之间的所有态射均予以保留。

最后，边界公式 (11) 正是切片中的映射空间公式：

$$\mathrm{Tm}_{\mathbb{T}}(\Gamma, p) = \mathrm{Map}^{R}_{(\mathcal{G}_{\mathbb{T}})_{/\Gamma}}(\mathrm{id}_{\Gamma}, p). \tag{25}$$

因此它是一个 Kan复形。限制将恒等族映到相容的局部恒等族。在 (23) 中取从这些对象出发的映射空间，即可证明 (24)。□

命题17（和、恒等类型与依赖项空间）。设 $\Gamma \vdash A$ 类型，设 Γ， $x:\ A \vdash B(x)$ 类型，并设 a， b 是 A 在上下文 Γ 中的项。投影

$$\mathrm{Tm}_{\mathbb{T}}(\Gamma, \Sigma_{x:A} B(x)) \longrightarrow \mathrm{Tm}_{\mathbb{T}}(\Gamma, A)$$

其同伦纤维为 $\mathrm{Tm}_{\mathbb{T}}(\Gamma, B[a])$ ，位于 a 之上。存在一个自然等价

$$\mathrm{Tm}_{\mathbb{T}}(\Gamma, \mathsf{Id}_A(a,b)) \simeq \mathrm{Path}_{\mathrm{Tm}_{\mathbb{T}}(\Gamma, A)}(a, b). \tag{26}$$

这两种描述都与代换和高阶项相容。

证明。设 $p\colon E \to \Gamma$ 和 $q\colon F \to E$ 为这些展示。和展示是所选的复合 pq。在 Γ 上的切片范畴中，从 id_{Γ} 取映射，会将沿截面 a 对 q 作拉回，转化为所展示映射的同伦纤维。公式 (25) 将此纤维等同于所述依赖项空间。

对于恒等类型，令 $S = \mathsf{Tm}_{\mathbb{T}}(\Gamma, A)$。恒等类型构造给出等价 $r\colon E \simeq I_A$ ，其位于 $E \times_{\Gamma} E$ 之上，并与对角映射作比较。沿截面对 (a, b) 作恒等展示的拉回，再从 id_{Γ} 取映射，因此得到

$$\mathrm{Tm}_{\mathbb{T}}(\Gamma, \mathsf{Id}_A(a,b)) \simeq \{(a,b)\} \times_{S \times S} S,$$

其中 $S \to S \times S$ 是对角映射。这个同伦纤维是从 a 到 b 的路径空间，包含其高阶路径。这两种计算都使用映射函子和拉回，因此它们的自然性给出了所断言的代换比较和高阶项比较。□

因此，依赖表达式 (22) 形成该族，(Desc) 计算其限制，而 (Stab) 则从这些限制重构出已有的族。局部下降定理表明，可以将族形成作为一条原始规则。在 §4 中，我们确立生成语法的泛性质，并在 §5 中用它来比较这两种呈示。

4 几何 HoTT 演算的初始性

模型为理论的生成元赋予值。初始性将这一赋值扩展到每个导出上下文、代换和项。将同样的扩张应用于模型图表，即可确定模型同态如何作用于导出表达式。对于几何宇宙 $\mathcal{D}$ （定义 12），为每个箭头赋予一个展示证书，并恰好认证终对象、拉回方块、余极限余锥和等价。将此呈示记为 $\mathcal{D}^{g}$。对于呈示 P，令 $\mathsf{Mod}_P(\mathcal{D})$ 为 $\mathsf{Fun}(|P|, \mathcal{D})$ 的全子范畴

其对象为保留证书的映射 $P \to \mathcal{D}^g$。取 $P = Q_{\mathbb{T}}$，得到理论$\mathbb{T}$的模型 ∞-范畴 $\mathrm{Mod}_{\mathbb{T}}(\mathcal{D})$。将 $\mathcal{C}^{\simeq}$ 记为 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 的最大子群胚，并定义 P-模型的空间为

$$M(P, \mathcal{D}) = \mathrm{Mod}_P(\mathcal{D})^{\simeq}.$$

它是 函子范畴$(|P|, \mathcal{D})^{\simeq}$ 的一个分量并，因为证书条件在自然等价下保持不变。

4.1 标记模型与严格纤维

引理 18（逐点几何结构）。对于每个小单纯形形状 I，函子范畴$(I, \mathcal{D})$ 都是一个几何宇宙。终对象、有限极限、小余极限以及下降比较均在 I的顶点处计算。

证明。图表 ∞-范畴中的极限和余极限是逐点计算的。特别地，一个方形是拉回，当且仅当每个顶点处的求值都是拉回；一个余锥是余极限，当且仅当每个顶点处的求值都是余极限。因此，对余极限余锥作拉回会得到另一个余极限余锥，这是由$\mathcal{D}$中的同一性质所保证的。

考虑 函子范畴$(I, \mathcal{D})$ 中余极限余锥之间的一个变换，其在指标形状K 上的限制是笛卡尔的。在每个 $i \in I_0$ 处求值，得到$\mathcal{D}$ 中的两个余极限余锥，其过渡方块均为笛卡尔的。$\mathcal{D}$ 中的下降使锥顶点处的每个比较方块都是拉回。因此，这些方块在 函子范畴$(I, \mathcal{D})$ 中也是拉回。于是全余极限–限制伴随 (21) 的单位和余单位均可逆：前述计算给出了其单位，而拉回稳定性给出了其余单位。它是整个族范畴之间的等价，这证明了范坎彭条件。此论证也适用于空指标图表。逐点等价性检测证明了所有已述的识别断言。□

对于一个呈示 P，令 $\mathscr{M}_P(\mathcal{D})$ 表示全子范畴 $\mathrm{Mod}_P(\mathcal{D})$，并将其视为下文提升论证所用的单纯集合。证书是图表的一种性质，在自然等价下保持不变。因此，$\mathscr{M}_P(\mathcal{D})$ 的顶点指定了保持证书的图表，而这些顶点之间的所有单形均予以保留。

引理 19（模型及其核的限制）。设 D 为拟范畴，并假设 D 中图表上的每个证书条件在自然等价下保持不变。若 $A \hookrightarrow B$ 是呈示的单态射，则限制是范畴纤维化

$$p : \mathscr{M}_B(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathscr{M}_A(\mathcal{D}). \tag{27}$$

其在最大子群胚上的映射是 *Kan* 纤维化。因此，其在核上的严格纤维在每个给定输入上都计算其同伦纤维。对于每个呈示图表 (P_i)，

$$\mathscr{M}_{\mathrm{colim}_i\, P_i}(\mathcal{D}) \cong \lim_i \mathscr{M}_{P_i}(\mathcal{D}), \qquad M(\operatorname*{colim}_i P_i, \mathcal{D}) \cong \lim_i M(P_i, \mathcal{D}). \tag{28}$$

证明。环境限制函子

$$\mathrm{Fun}(|B|, \mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(|A|, \mathcal{D})$$

是范畴纤维化。事实上，笛卡尔 Joyal 模型结构以单态射为余纤维化，且每个单纯集合都是余纤维化对象。$|A| \hookrightarrow |B|$ 与平凡余纤维化的推出积仍是平凡余纤维化。因此，伴随给出了到纤维对象 $\mathcal{D}$ [24] 的上述限制所需的提升性质。

我们验证其对标记模型的限制。拟范畴的全子范畴仍是拟范畴。对于 (27) 给定一个内角提升问题，在环境函子范畴中求解。该

解中的每个顶点已经是该角的顶点，因此每个顶点都是一个 B-模型。满性意味着整个解都属于 $\mathscr{M}_B(\mathcal{D})$。其限制是 $\mathscr{M}_A(\mathcal{D})$ 中给定的单纯形。因此，(27) 是一个内纤维化。

接下来，指定一个源为 B 的模型 b，以及在 $\mathscr{M}_A(\mathcal{D})$ 中一个源为 $b|_A$ 的等价。将此等价扩展为一个 J-图表，并利用环境范畴纤维化将其提升，使源为 b。每个由此得到的顶点都与 b 自然等价。对于每个证书 $m: H_t \to B$，将此自然等价在 m 上求值，会得到它的两个像图表之间的对应。因此，证书不变性意味着每个由此得到的顶点都是一个 B-模型。这就证明了等价提升。拟范畴的内纤维化与等价提升判据表明，(27) 是一个范畴纤维化。

在最大子群胚上，内角具有上述构造的提升。外角则依据等价-角判据进行提升：源核中的一条边是等价，因此可以将其求逆，再用内角填补剩余的复合问题。对于一维角，所需的提升恰好就是等价提升。所得单纯形的每条边都是等价；对于新形成的边，这由三取二性质保证。这些就是 Kan 提升性质。因此，核上的严格纤维是 Kan 复形，并且计算出它们的同伦纤维。

最后，模型范畴的一个 n-单纯形是映射 $|P| \times \Delta^n \to \mathcal{D}$，其顶点图表保留这些证书。与 Δ^n 的笛卡尔积保留单纯集合的余极限。因此，从 $\operatorname{colim}_i P_i$ 出发的底层映射恰好是来自 P_i的底层映射所组成的相容组。余极限呈示的证书恰好是从其各部分继承而来的证书。这逐次证明了（28）的第一个同构。自然变换是等价，当且仅当它在每个对象处都是等价。余极限中的每个对象在某个部分中都有代表。取所有参数边都是这类等价的单纯形，即可证明第二个同构。□

命题 20（边界相容的联接比较）。固定拟范畴中的一个图表 $d\colon\ K \to \mathcal{D}$。令 $\mathcal{C}_d^{\diamond}$ 为其胖锥范畴，其特征在于

$$(\mathcal{C}_d^{\diamond})_n = \{f : \Delta^n \diamond K \to \mathcal{D} \mid f|_K = d\}.$$

对于任意单纯集合 A，置

$$\mathcal{E}_A(d) = \operatorname{Fun}(A \star K, \mathcal{D}) \times_{\operatorname{Fun}(K,\mathcal{D})} \{d\}.$$

存在一个自然的范畴等价

$$\rho_A : \mathcal{E}_A(d) \longrightarrow \operatorname{Fun}(A, \mathcal{C}_d^{\diamond}). \tag{29}$$

它与对 A 的限制以及保留锥顶点的函子 $\operatorname{Fun}(A,\mathcal{D})$ 相交换。对于一个顶点 $v \in A_0$，它限制为以下全子范畴之间的等价：其对象分别是 v-锥为极限的数组，以及在 v 处取终对象的图表。因此，对于包含 v的 A'、$\to A$，这些等价在每个指定的边界数组处识别相应标记限制映射的同伦纤维。对偶陈述对于余锥、余极限和始对象成立。

证明。 胖连接是推出

$$A \diamond K = (A \amalg K) \amalg_{A \times K \times \partial\Delta^1} (A \times K \times \Delta^1),$$

两个端点分别通过投影附接到 A 和 K。令 $c_A\colon\ A \diamond K \to A \star K$ 为自然映射。它在 $A \amalg K$ 上是恒等映射，并且是一个范畴等价 [24]。因此，前复合给出一个范畴等价

$$\operatorname{Fun}(A \star K, \mathcal{D}) \longrightarrow \operatorname{Fun}(A \diamond K, \mathcal{D})$$

在 $\operatorname{Fun}(A、\mathcal{D})$ $\times\operatorname{Fun}(K、\mathcal{D})$ 上。到 $\operatorname{Fun}(K、\mathcal{D})$ 的限制映射是范畴纤维化，因为 K 的包含映射是单射的。因此，在 d 处取它们的严格纤维会保留这一等价。

胖连接对应的严格纤维为 Fun(A、$\mathcal{C}_d^{\triangleright}$)。为在 m 次验证这一点，将常值K-行通过构造推出而压缩

$$\big((A \diamond K) \times \Delta^m\big) \amalg_{K \times \Delta^m} K \;\cong\; (A \times \Delta^m) \diamond K. \tag{30}$$

两侧都由 $A \times \Delta^m$、 K 的固定副本以及圆柱 $A \times \Delta^m \times K \times \Delta^1$ 组成，并通过相同的端点投影附接。因此，两侧上限制为 d 于 K 的映射完全相同。根据 $\mathcal{C}_d^{\triangleright}$ 的定义性伴随，它们恰好是映射 $A \times \Delta^m \to \mathcal{C}_d^{\triangleright}$。此验证与每个面、退化映射和限制映射相容，从而证明 (29) 是所示拟范畴之间的自然函子。

普通锥范畴 $\mathcal{D}/d$ 等价地映至 $\mathcal{C}_d^{\triangleright}$ [24]。其终对象是 d 上的极限锥。将 c_A 限制到 $\{v\} \diamond K$ 得到 $c_{\{v\}}$，因此 ρ_A 恰好将指定的极限 v-锥映至终对象。将等价限制到相应的全子范畴，仍得到等价。

对于 $A' \hookrightarrow A$，方形

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_A(d) & \xrightarrow[\simeq]{\rho_A} & \mathrm{Fun}(A, \mathcal{C}_d^{\triangleright}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}_{A'}(d) & \xrightarrow[\simeq]{\rho_{A'}} & \mathrm{Fun}(A', \mathcal{C}_d^{\triangleright}) \end{array} \tag{31}$$

它严格交换，包括在 v 处施加泛锥条件之后。取核得到一个空间方形，其水平映射为等价。因此，在边界 b 处诱导出的同伦纤维映射是一个等价，且右侧边界恰好为 $\rho_{A'}(b)$。由引理 19，在固定 K 行之后，左侧限制是范畴纤维化；其核是 Kan 纤维化。因此，其严格纤维表示该规定边界上的同一同伦纤维，包括 K 图表与特异泛锥。取对偶即证明余锥情形。 □

引理 21（锥比较纤维）。 设 $d : K \to D$ 为一个图表。若 d 容许极限，则其极限锥构成一个可缩空间。若 $\partial\Delta^n \star K$ 上的边界比较具有一个特异的极限末顶点锥，则其到 $\Delta^n \star K$ 的扩张空间是可缩的。这两个空间都是在指定输入上的限制的严格纤维。对偶断言对余极限余锥以及一个特异的第一个顶点成立。取 $K = \varnothing$ 给出终对象形成与比较。

证明。 命题 20 将固定图表的带标记数组与胖锥范畴 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_d^{\triangleright}$ 中相应的图表对应起来。极限锥对应于终对象。当终对象非空时，其上的全子群胚是可缩的：其映射空间是可缩的，并且每个这样的映射都是等价。这给出了形成纤维。

作为比较，同一命题将其同伦纤维识别为下列对象的同伦纤维

$$\mathrm{Fun}(\Delta^n, \mathcal{C})^{\simeq}_{n\text{-terminal}} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\partial\Delta^n, \mathcal{C})^{\simeq}_{n\text{-terminal}}$$

在诱导边界 b 处。令 $t = b(n)$。考虑肥切片 $\mathcal{C}^{/t}$ 及其源投影 $\pi : \mathcal{C}^{/t} \to \mathcal{C}$。这是一个右纤维化 [24], ，其在 x 处的纤维将 Map$_{\mathcal{C}}(x, t)$ 建模。由于 t 是终对象，这些纤维是可缩的。因此，该投影在 $\mathcal{C}$ 上等价于恒等右纤维化，并且是平凡范畴纤维化；特别地，它对每个单纯单态射都具有右提升性质。

记 $A = \Delta^{n-1}$ 和 $A_0 = \partial\Delta^{n-1}$。普通边界分解为

$$\partial\Delta^n = A \cup_{A_0} (A_0 \star \{n\}), \qquad \Delta^n = A \star \{n\}.$$

沿胖连接比较将 b 的锥部分拉回，得到图表 $a : A \to \mathcal{C}$，以及其边界的提升 $A_0 \to \mathcal{C}^{/t}$。其胖连接延拓问题恰好是

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^{n-1} & \longrightarrow & \mathcal{C}^{/t} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \pi \\ \Delta^{n-1} & \xrightarrow[a]{} & \mathcal{C}. \end{array} \tag{32}$$

对于 $n = 1$，左上角为空。其完整解对象是下列对象的纤维：

$$\mathrm{Fun}(A, \mathcal{C}^{/t}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(A, \mathcal{C}) \times_{\mathrm{Fun}(A_0, \mathcal{C})} \mathrm{Fun}(A_0, \mathcal{C}^{/t}).$$

此映射是平凡纤维化。事实上，针对任意单态射的提升问题，伴随地对应于针对其与 $A_0 \,,\to A$ 的推挽积提升 π，而该推挽积仍是单射的。因此，解对象是可缩 Kan 复形，其中包括每个高阶比较参数。

要将此对象与原始普通单纯形扩张纤维识别，需对单元素集图表 $t : \Delta^0 \to \mathcal{C}$ 应用命题 20。其等价与 $A_0 \,,\to A$ 以及保留 A-图表的函子均相容。因此，它们在固定 a 时比较限制映射，并将其同伦纤维识别为精确拉回的边界处的纤维。等价地，肥边界 $A \cup_{A_0} (A_0 \diamond \Delta^0)$ 通过自然的连接比较映射到普通边界，并与相应的完整锥相容。由此得到的映射范畴方形在两行上都是等价。引理 19 将普通标记核限制转化为 Kan 纤维化，因此其在原始数组上的严格纤维就是同一个可缩同伦纤维。

这一计算通过（31）适用于 $\partial\Delta^n \star K \,,\to \Delta^n \star K$；商 (30) 记录了每个参数次数中固定的 K-行。它也是 [16] 的标记锥计算。取对偶会将终端锥与始端锥互换，并反转指定顶点，从而证明余极限断言。取 $K = \varnothing$ 可得到终对象形成与比较。□

连接比较和锥纤维计算统一适用于依赖形成与比较数据包。余极限计算规则为固定棱柱上的图表提供见证。它们的延拓纤维由这些图表的余极限性质与拉回性质决定。

4.2 原始规则扩张空间的可缩性

引理 22（泛规则延拓）。对于每个原始类型化规则 r： A、$\to B$ 以及每个几何宇宙 $\mathcal{D}$，限制映射

$$M(B, \mathcal{D}) \longrightarrow M(A, \mathcal{D}) \tag{33}$$

是一个平凡 *Kan* 纤维化。其在指定输入上的纤维包含所有输出胞腔、所有计算见证及其高阶识别。

证明。根据引理 19，每个限制映射都是 Kan 纤维化。其严格纤维是给定标记边界的扩张空间，其中包含指定的顶点和退化映射。我们逐一计算每条规则对应的该纤维。
结构规则、单位、打包和和。 对于 (H)，内角包含是范畴论平凡余纤维化。将其映射到 $\mathcal{D}$ 中给出范畴等价，因而在核上给出等价。终对象的形成及其比较正是引理 21 的情形 $K = \varnothing$。对于 (Pack)，目标终对象 t 和源X 已经固定，纤维是 Map$_{\mathcal{D}}(X, t)$，它是可缩的。指向 t 的每个箭头都携带一个展示证书于 $\mathcal{D}^{g}$中。
(Unit) 规则保留所有胞腔，并增加一份证书，表明每个恒等箭头都满足该规则。对于 (Sum)，纤维是由两条固定边及其复合三角形构成的复合空间。根据内角计算，它是可缩的，并且这三条箭头都是$\mathcal{D}^{g}$中的展示。

重索引和每个比较维度。 一个形成输入固定整个余扇及其展示腿。输出是其上的一个极限锥，带有投影和拉回证书。其纤维是引理 21 的形成纤维。对于每个 $n \geq 1$，比较格式（重索引）恰好是该引理中的末顶点延拓问题。方程（32）表明，在每个给定的比较边界上，填充子的空间是可缩的。

恒等类型构造。 数据包（16）固定 $\delta : E \to Q$ 及其所有输入胞腔。一个输出是

$$E \xrightarrow{r \simeq} I \xrightarrow{q} Q, \qquad qr \simeq \delta.$$

在 $\mathcal{D}^{/Q}$ 中，这是一个源为 δ 的等价。令 $S = (\mathcal{D}^{/Q})^{\simeq}$。其输出空间是 S 中以 δ 为初始点且终点自由的路径空间；通过收缩到恒等路径，它是可缩的。等价地，具有固定源的等价箭头构成一个可缩的 ∞-群胚。命题 20 在固定边 02 的情况下，将这一普通连接 / 胖切片计算与沿 02 附加的标记三角形对应起来。每个这样的 q 都在$\mathcal{D}^{g}$中携带其显示标记，因此该纤维对给定恒等数据包的扩张进行分类。

上下文同伦余极限构造。 将固定输入写作 $b\colon\ K \star \{1\} \to \mathcal{D}$，其底层图表为 d，目标为 Γ。将底层扩张分解为

$$K \star \{1\} \ \hookrightarrow\ K \star \partial\Delta^1 \ \hookrightarrow\ K \star \Delta^1.$$

在中间阶段，将第一个余锥标记为余极限。从这个中间呈示到输入的限制，是在 d 上沿余极限构造限制的拉回。根据引理 21 的对偶，它是一个平凡 Kan 纤维化。从最终呈示到中间呈示的限制是 $n = 1$ 余极限比较限制，同样是一个平凡 Kan 纤维化。它们的复合就是 (HC) 限制。具体而言，其数据包括余锥范畴 $\mathcal{D}^{d/}$ 中的一个始对象 c 以及一个箭头 $c \to b$。c 的选择空间是可缩的，并且对于每个这样的 c，箭头 $c \to b$ 的空间也是可缩的。该分解通过保留到 Γ 的所有相容性胞腔，证明了这一点的整体成立。当 K 为空时，同样的论证会选择一个始对象及其指向固定 Γ的箭头。

高阶同伦余极限比较。 对于维数为 n 的 (HC-comp)，命题20 将带标记的普通连接扩张纤维与其余锥范畴纤维对应起来，并且顶点 0 处的余锥是初始的。令 $\mathcal{C} = \mathcal{D}^{d/}$，并令 c 为所选的初始余锥。将以 c 为源的箭头之胖余切片记为 $\mathcal{C}^{c/}$。公式 (32) 的对偶是关于目标投影 $\mathcal{C}^{c/} \to \mathcal{C}$ 的相对提升问题。该投影是平凡纤维化。完整边界包含此前指定的所有比较；在固定此边界的情况下，相对提升计算给出一个可缩纤维。因此，高阶比较格式与形成具有相同的扩张性质。

逆数据与证书传递。 从 J 到 Δ^1 的限制，将 J-图表范畴识别为等价箭头的全子范畴，且这种识别是范畴等价。事实上，对任一所选顶点求值，对于这两个范畴都是等价：J 是以两个对象为对象的可缩群胚，而每个等价箭头都等价于其源的恒等箭头。限制与此求值相容。因此，引理 19 表明，在每个固定等价边上，其严格纤维都是可缩的。这证明了第一个规则 (E)。对于其识别规则，每个 J-图表都已使所指示的边成为等价，因此两个模型范畴相同。在 (Tr) 中，J-参数通过自然等价将这两个带标记的图表对应起来。证书不变性再次使限制成为同一模型子范畴上的恒等映射。根据余极限的泛性质，规则 (Stab) 也具有相同的性质，包括空余极限。

下降计算。 (Desc) 的输入是具有笛卡尔变换方块的余极限余锥之间的一个棱柱。在几何宇宙 $\mathcal{D}$ 中，定理 13(i) 使每个锥方块都成为一个拉回。因此，源和目标在该棱柱上定义了相同的图表全子范畴。限制在这些图表及其所有变换上都是恒等的。对于 $K = \varnothing$，锥方块的集合为空，限制再次是恒等的。

因此，每个映射 (33) 都是具有非空可缩纤维的 Kan 纤维化，因而是平凡 Kan 纤维化。□

4.3 RelativeRule 扩张与初始性

引理 22 为原始规则的每个输入模型给出了一个可缩的扩张空间。为了同时恢复任意同态，我们在箭范畴 $\mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{D})$ 中应用相同的计算。对一对模型进行端点评估，其同伦纤维给出了它们的映射空间。

引理 23（模型图表）。 对于每个小形状 I，都存在典范的单纯同构

$$\mathscr{M}_P(\mathrm{Fun}(I, \mathcal{D})) \cong \mathrm{Fun}(I, \mathscr{M}_P(\mathcal{D})), \tag{34}$$

$$\mathscr{M}_{P \otimes_v I}(\mathcal{D}) \cong \mathrm{Fun}(I, \mathscr{M}_P(\mathcal{D})). \tag{35}$$

第一个使用逐点证书结构。在这两个公式中，参数箭头是任意自然变换。取最大子群胚可得到相应的 *Kan* 复形恒等类型。

证明。 (34) 两边的一个 n-单纯形在交换因子后，都是一个数组 $|P| \times I \times \Delta^n \to \mathcal{D}$。对于每个顶点 $v \in (\Delta^n)_0$, ，在 Fun$(I,\mathcal{D})$ 中保持 P 的证书，等价于在每个 $i \in I_0$处保持该证书。这由逐点的终对象、拉回、余极限和等价性识别推出；展示条件是自动满足的。因此，两边所需的顶点完全相同。满性保留完全相同的高阶单纯形，面映射和退化映射也一致。对于 (35)， $P \otimes_v I$ 的证书恰好是 I各顶点处的每个 P 证书的副本。这是逐次数相同的检验。函子范畴中的等价是逐点的，因此在核上的识别也一致。□

引理 24（任意相对参数）。对于一个原始规则 $r:\ A, \to B,$ 其限制

$$p : \mathscr{M}_B(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathscr{M}_A(\mathcal{D})$$

是一个平凡范畴纤维化。对于每个小单态射 $j : J_0 ,\to I,$ 与(15)相关联的限制是一个平凡范畴纤维化，且其在最大子群胚上的映射是一个平凡 *Kan* 纤维化。每个提升都严格限制为指定的输入和规定的输出胞腔，并保留所有规定的证书。

证明。 由引理 19， p 是一个范畴纤维化。基本纤维计算使用命题 20 的边界相容的联接比较；(Stab) 和 (Desc) 对完整模型子范畴保持恒等。对每个 $m \geq 0$，将引理 22 应用于 Fun$(\Delta^m,\mathcal{D})$，并使用引理 23。我们得到弱等价

$$\mathrm{Fun}(\Delta^m, \mathscr{M}_B(\mathcal{D}))^{\simeq} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\Delta^m, \mathscr{M}_A(\mathcal{D}))^{\simeq}. \tag{36}$$

它们是 p 的分类图的各个层级。

情形 $m = 0$ 给出本质满射性。为得到全忠实性，取 $m = 1$。对于源中的顶点 x, y ，考虑两个端点映射

$$\mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathscr{M}_B(\mathcal{D}))^{\simeq} \longrightarrow \mathscr{M}_B(\mathcal{D})^{\simeq} \times \mathscr{M}_B(\mathcal{D})^{\simeq}$$

以及 A 的相应映射。它们是 Kan 纤维化，其在 (x, y) 和 (px, py) 上的纤维给出完整的映射空间模型。 $m = 1$ 的公式 (36) 在它们的全空间上给出一个弱等价；其情形 $m = 0$ 则在它们的基上给出一个弱等价。比较同伦纤维可得

$$\mathrm{Map}_{\mathscr{M}_B(\mathcal{D})}(x, y) \simeq \mathrm{Map}_{\mathscr{M}_A(\mathcal{D})}(px, py).$$

映射空间等价表明 p 是完全忠实的，而情形 $m = 0$ 给出了本质满射性。因此， p 是模型的 ∞-范畴之间的等价。它同时还是范畴纤维化，因此是 Joyal模型结构中的平凡纤维化。此类映射对每个单纯单态射都具有右提升性质。在 (35) 下，(15) 中源呈示的模型的 ∞-范畴是严格拉回

$$\mathrm{Fun}(I, \mathscr{M}_A(\mathcal{D})) \times_{\mathrm{Fun}(J_0, \mathscr{M}_A(\mathcal{D}))} \mathrm{Fun}(J_0, \mathscr{M}_B(\mathcal{D})).$$

在此识别下，限制映射为

$$\mathrm{Fun}(I, \mathscr{M}_B(\mathcal{D})) \longrightarrow \mathrm{Fun}(I, \mathscr{M}_A(\mathcal{D})) \times_{\mathrm{Fun}(J_0, \mathscr{M}_A(\mathcal{D}))} \mathrm{Fun}(J_0, \mathscr{M}_B(\mathcal{D})). \tag{37}$$

对于另一个单态射 $L, \to K$，(37) 的一个提升问题伴随于 p 的一个具有定义域包含的提升问题

$$(L \times I) \amalg_{L \times J_0} (K \times J_0) \hookrightarrow K \times I. \tag{38}$$

这个包含映射逐次是单射的。 p 的右提升性质解决了这个问题。因此，（37）本身是一个平凡纤维化。它的核心映射是一个平凡 Kan 纤维化。

顶点提升是一个映射 $B \times I \to \mathcal{D}$，其限制与 $A \times I$ 和 $B \times J_0$ 上给定的映射相等。单纯形推出在两部分及其交集上给出了这些等式。在每个参数顶点处，该提升都是一个 B-模型，因此既保持目标证书，也保持从两部分继承的证书。对于语法中的解释，方程（12）–（13）将这些相同的等式表述为构造子的判断边界方程。取 $L = \partial \Delta^n$ 即可验证，对每个给定的高阶边界也有同样的断言。□

定理 25（依赖演算的初始性）。对于每个几何宇宙 $\mathcal{D}$，限制会诱导出一个自然等价

$$\mathrm{Fun}_{\mathrm{geo}}(\mathcal{G}_{\mathbb{T}}, \mathcal{D}) \simeq \mathrm{Mod}_{\mathbb{T}}(\mathcal{D}), \tag{39}$$

它将几何函子之间的自然变换映到相应的模型同态。在所展示的单纯形模型中，限制是一个平凡范畴纤维化。特别地，相对于任意给定的小参数子形状，解释都可以延拓。

证明。对于（17）的每个阶段 P_α，考虑整个模型拟范畴 $\mathscr{M}_{P_\alpha}(\mathcal{D})$。由（28），在后继阶段，其到 P_α 的限制是对新处理的实例（r，a）取积后再作拉回所得的

$$\mathscr{M}_{B_r}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathscr{M}_{A_r}(\mathcal{D}).$$

根据引理 24，对于原始格式和相对格式，这些映射都是平凡范畴纤维化。积和拉回保留了它们相对于所有单态射的右提升性质。因此，每个后继阶段的限制都是单纯集合的平凡纤维化。

在极限序数 β 处，（28）将模型单纯集合识别为前面各项的严格逆极限。为了使单态射 $L, \to K$ 相对于到 P_0 的最终限制得到提升，先取给定的 K-图表（其对象为 P_0-模型）以及给定的完整模型 L-图表。在后继阶段，解出该阶段的提升问题，同时保留 L-限制。在极限阶段，取前面各个解组成的相容元组。超限递归给出一个 P_λ-模型的 K-图表，其边界恰好是指定的边界。因此

$$\mathscr{M}_{P_\lambda}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathscr{M}_{Q_{\mathbb{T}}}(\mathcal{D}) \tag{40}$$

对每个单态射都具有右提升性质。这就是所断言的平凡范畴纤维化；取核也会得到相应的平凡 Kan 纤维化。

根据推论 14，P_λ 上的证书恰好是其终对象、拉回方块、等价、小余极限余锥，以及作为展示的所有箭头。因此，其保留证书的函子恰好是保有限极限和小余极限的函子。因此，(40) 将从 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{geo}}(\mathcal{G}_{\mathbb{T}},\ \mathcal{D})$ 到 $\mathrm{Mod}_{\mathbb{T}}(\mathcal{D})$ 的限制识别为平凡范畴纤维化。其提升性质给出相对扩张，而复合使 (39) 关于 $\mathcal{D}$ 自然。□

4.4 定义扩张与上下文展开

定义26（定义扩张）。呈示的初等定义扩张是沿着一个指定的可导出输入，对一个原始构造子规则或相对构造子规则取推出。小型定义扩张是这些附加的小型超限复合，且所得呈示为小。以某种方式命名一个导出表达式，意味着按此方式命名其依赖图表，并将指定的输出胞腔作为其名称。

引理 27（小导出图表的胞腔实现）。设 P 是一个小呈示，并记 G_P 为由 P 生成的依赖语法。G_P 的一个小胞腔阵列，连同一小组可推导证书以及来自 P 的指定胞腔，包含于一个小型定义扩张 $P \hookrightarrow P^{\mathrm{def}}$ 中。存在一个保留证书的映射 $P^{\mathrm{def}} \to G_P$，它在 P 上是恒等映射，并将选定胞腔与给定胞腔对应起来。因此，选定的阵列可经由该扩张分解，且满足其给定的面方程和退化方程。

证明。使用 $\mathcal{G}_P$ 的记录胞腔构造。对每个选定胞腔，选取其记录的构造器及其边界表达式；对每个所需证书，选取一个推导。收集它们的依赖子树。引理 5 表明，它们的并是小的。每当这些依赖中出现已处理的规则实例时，就保留其完整的目标数据包。也保留其源胞腔、其前提证书的推导以及这些推导的依赖项。这些本来就是所收集推导的子树；再添入完整的输出数据包，只会增加一个小集合族的小并。于是得到一个由先决条件闭合的小型已处理实例集合 S 。

按构造阶段对 S 排序，并在每个阶段内任意排序。出现的阶段构成一个小集合，因此其序型小于 $\mathbb{U}$ 的不可达基数。每个实例的所有输入数据都位于已构造的部分中：每个前置条件在原始构造中都先于该实例可用。从 P 开始，按此顺序执行相同的这些推出。在给定阶段中，不同规则实例添加的新增胞腔集合彼此不相交。所得呈示在胞腔上嵌入原始构造的相应部分，因为所有规则包含映射和所有构造转换都是单射的。规定的面识别和退化识别恰好就是相同的推出识别。

实例数量少于 κ ，每个实例所含胞腔和证书数量都少于 κ 。 κ 的正则性使所得扩张保持小。每个选定的证书都保留其推导，而每个选定的胞腔都保留其原始构造器名称和边界。因此，该扩张将选定的相干图表及其边界方程命名为一体。□

对于第 2.3 节的构造，若每个输入胞腔和前提证书均已出现的规则实例最终都会得到处理，就称该调度公平 。以极限序数 δ 为指标的调度，若最终并 P_δ 中的每个规则输入都经由某个 P_α 分解，且 $\alpha<\delta$成立（包括其所有前提证书），则称其足够长 。由于每个规则源所含的胞腔和证书都少于 κ 个，余终性至少为 κ 便已足够，如引理 4 所示。公平性和足够长这两个条件确保最终并在规则下封闭。

推论 28（定义与相干性）。小型定义扩张保留整个模型∞-范畴和句法几何宇宙。任何小集合的导出表达式都可以通过此类扩张命名。对所选相对相容运算进行附加时，结论也相同。不同的足够长的公平构造调度会给出在签名下等价的语法，且相容等价所成的空间可缩。

证明。对于单次定义性附加，应用相应的泛扩张引理。推出会在模型核心上给出拉回，而小型复合会给出逆塔。将此论证应用于所有函子范畴目标，即可恢复完整的 ∞模型范畴。将初始性应用于以这两种语法为目标的情形，便可沿两个方向扩展它们的生成元解释。完全忠实的限制会将两个复合分别识别为恒等映射。引理 27 给出了对任意指定的小集合导出表达式及其所需证书的直接胞腔实现。相同的证明也适用于其他构造调度和相对相容运算的附加，并将选择空间识别为一个可缩扩张纤维。□

命题 29（几何宇宙的切片与重新索引）。如果 $\mathcal{D}$ 是一个几何宇宙，那么每个切片 $\mathcal{D}/\Gamma$都是一个几何宇宙。对于 $f\colon\ \Delta\to\Gamma$，重新索引函子 f^*保有限极限、小余极限以及粘合比较。

证明。切片中的拉回在总体对象上计算；其终对象是 id_Γ。余极限同样在总体对象上计算。对于切片中一个余极限为 $W\to\Gamma$ 的图表，恒等式 $(\mathcal{D}/\Gamma)/W\simeq\mathcal{D}/W$和 $(\mathcal{D}/\Gamma)/d_k\simeq\mathcal{D}/d_k$ 将其下降比较与 $\mathcal{D}$ 中的下降比较对应起来。重新索引保持终对象和拉回，并依据其泛性质保持余极限。粘合是带有其笛卡尔比较的全余极限，因此这些也得到保持。□

命题 30（上下文展开）。每个具名运算都存在一个相对于给定 Γ 的上下文形式，并保留其给定的类型和项边界。特别地，$(G_{\mathbb{T}})/\Gamma$ 中余极限图表上的笛卡尔族，在同一上下文中具有一个句法粘合族，并且其局部计算与重构均与沿每个 $\Delta\to\Gamma$ 的重索引相容。

证明。命题 29 表明 $(\mathcal{G}_{\mathbb{T}})_{/\Gamma}$ 是一个几何宇宙。根据切片的定义，形状为 A 的图表是 $\mathcal{G}_{\mathbb{T}}$ 中以 Γ 为末顶点、定义在 $A \star \Delta^0$ 上的数组。将泛规则延拓及其相对形式应用于以该切片为目标的情形，即可得到一个以该末顶点为末顶点、且所有指定边界数据均保持不变的输出数组。

其胞腔是现有的句法胞腔。根据推论 14，切片中的拉回和余极限证书可在其总图表上得到证明。切片中关于 $q : X \to \Gamma$ 的终对象证书由等价(q) 表示：对象 q 是终对象，当且仅当它等价于单位族 id_{Γ}。切片中的等价可通过总体对象来判定。根据定理 8，每个相关箭头都有展示证书。因此，输出由原始演算中的句法胞腔和可推导的类型判断组成。小性使输出胞腔及这些推导处于有界的构造阶段。

根据命题 29，切片之间的重索引保持有限极限和小余极限。因此，它保持每个具名运算的泛解释。相对扩张引理为所有参数边界提供其比较，从而证明了所述的相容性。□

5 粘合规则与边界语法作为等价呈现

我们首先证明，粘合可以作为原始规则引入，也可以从下降导出，且两者具有相同的局部计算。随后，我们比较依赖演算与一种用泛锥表述的语法。第二种比较保留了族、其项空间，以及第一种比较所确立的粘合计算。

5.1 原始粘合与导出粘合的等价

导出粘合运算还给出了一种呈示，其中族的组装及其局部计算一并引入。对于每个小的 K，令

$$A_K = (K \times \Delta^1) \cup_{K \times \{1\}} (K^{\triangleright} \times \{1\}), \qquad B_K = K^{\triangleright} \times \Delta^1.$$

在 A_K 上，用 HC_K 为底部余锥提供证书，用 Disp 为 K_0 上的每条竖直边提供证书，并用 PB 为 K_1 上的每个过渡方块提供证书。族形成数据包是包含映射 $A_K \,, \to B_K$ ，其目标证书为

$$\mathsf{Disp}(* \times \Delta^1), \qquad \mathsf{PB}(q_{k*}) \quad (k \in K_0), \tag{Glue}$$

连同继承的源证书。令 $\mathcal{G}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{gl}}$ 为采用此数据包及其相对形式、以此替代 (Desc) 的演算。所有其他原始规则和判断等式均保持不变。

定理 31（原始粘合与导出粘合）。存在一个几何等价

$$\mathcal{G}_{\mathbb{T}} \simeq \mathcal{G}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{gl}}$$

在共同的生成理论下。这一等价保留了局部粘合计算、全局重构以及完整的依赖项空间。在下降计算呈示中，数据包 (Glue) 通过同伦余极限构造、(Desc)和纤维表示来实现。在族形成呈示中，(Desc) 由(Glue) 和 (Stab)导出。

证明。 对于任意给定的（Glue）输出参数子形状，（Stab）首先证明上余锥是一个余极限。在$\mathcal{G}_{\mathbb{T}}$中，定理 16 随后相对于给定输入构造整个棱柱，其中包括这些指定的输出胞腔，并证明其锥方块。其顶点映射通过纤维表示拥有展示证书。因此，所构造的棱柱相对于指定的参数边界实现了（Glue）。

在族形成演示中，有限极限和同伦余极限识别的证明使用了共享规则。(Glue) 的输出提供了定理 13 的条件 (ii)。因此，该定理使$\mathcal{G}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{gl}}$

成为一个几何宇宙，并证明条件 (i)。对于给定的 (Desc) 输入，所得锥方块是拉回，而结构识别会推导出它们的证书。具体而言，将 (Glue) 应用于其局部棱柱。规则 (Stab) 使构造出的上余锥成为余极限。它与原先指定的上层余极限之间的比较，是固定下余锥上的一个等价；传输锥方块证书后，恰好得到 (Desc) 的结论。该比较是在基余锥上的余锥范畴中进行的，因此保留了完整的混合相干数据。每个小型参数化实例都是由句法胞腔和证书推导组成的小型数组。

我们将在模型的完整 ∞-范畴上验证族形成语法的泛性质。在几何宇宙 $\mathcal{D}$ 中，闭余极限形成限制

$$\mathrm{Fun}(K^{\triangleright},\mathcal{D})_{\mathrm{colim}} \longrightarrow \mathrm{Fun}(K,\mathcal{D})$$

是一个平凡范畴纤维化。其核心纤维就是引理 21 中的余极限形成纤维；在每个函子范畴 $\mathrm{Fun}(\Delta^m,\ \mathcal{D})$ 中应用该计算，即由引理 24 得到完整的范畴论断。相对形式借助$\{1\} \to \Delta^1$ 将给定的图表扩展为 B_K 上的一个棱柱，其顶行为一个余极限。加入指定的过渡方形证书后，基被限制为一个完整子范畴，并对这个平凡纤维化取拉回。

根据 (Stab)，如果锥边上的方形都是拉回，那么上余锥就是一个余极限。$\mathcal{D}$ 中的下降给出了反向结论。因此，这两个输出条件在给定的输入范畴上方，选出了 $\mathrm{Fun}(B_K,\ \mathcal{D})$ 的同一个完整子范畴。$\mathcal{D}$中的每个箭头都满足锥顶展示条件。因此，(Glue) 的限制也是这个平凡范畴纤维化。此论证也适用于空形状；在这种情况下，$\mathcal{D}^{/0}$ 是可缩的。引理 24 提供了所有相对参数形式，而定理 25 的超限证明给出

$$\mathrm{Fun}_{\mathrm{geo}}(\mathcal{G}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{gl}},\mathcal{D}) \simeq \mathrm{Mod}_{\mathbb{T}}(\mathcal{D}).$$

因此，两种语法具有相同的完整模型值泛性质。在彼此之中解释各自的生成元，并利用初始性将解释延拓。全忠实限制将两个复合都识别为恒等映射。它们的切片映射空间等价，而共同的全余极限–限制伴随则识别它们的局部与整体计算。□

5.2 依赖语法与边界语法的等价

我们首先令 $\mathbb{T}$ 为一个小的边界呈示，并将其语法记作 $\mathcal{S}_{\mathbb{T}}$。与前文一样，$\mathcal{S}_{\mathbb{U}}$ 表示小空间的 ∞-范畴。有限同伦记录将每个有限图表的极限表示为依赖类型。它们给出了从关于有限锥的公理到依赖语法中公理的转换。该边界呈示包含有限 K 的 Lim_K 证书、小 K 的 Col_K 证书，以及等价证书。终对象证书为 $\mathsf{Lim}_{\varnothing}$。我们将拉回证书 Lim_V 记作 PB，并使用 $\Delta^0 \star V \cong \Delta^1 \times \Delta^1$ 将其锥识别为一个方形。

其结构规则为 (H)、(E) 和 (Tr)。其形成规则和比较规则为

$$K^{\flat} \hookrightarrow \langle \Delta^0 \star K \mid \mathsf{Lim}_K(\mathrm{id})\rangle, \qquad K \text{ 有限}, \tag{41}$$

$$\langle \partial\Delta^n \star K \mid \mathsf{Lim}_K(\{n\}\star K)\rangle \hookrightarrow \langle \Delta^n \star K \mid \mathsf{Lim}_K(\{n\}\star K)\rangle, \qquad n \geq 1, \tag{42}$$

$$K^{\flat} \hookrightarrow \langle K \star \Delta^0 \mid \mathsf{Col}_K(\mathrm{id})\rangle, \qquad K \text{ small}, \tag{43}$$

$$\langle K \star \partial\Delta^n \mid \mathsf{Col}_K(K\star\{0\})\rangle \hookrightarrow \langle K \star \Delta^n \mid \mathsf{Col}_K(K\star\{0\})\rangle, \qquad n \geq 1. \tag{44}$$

它具有 用 Col 表示的 (Stab) 和 (Desc)。后者是 $K^{\triangleright}\times$上的细胞上恒等规则 Δ^1:

$$\frac{\mathsf{Col}_K(P) \quad \mathsf{Col}_K(D) \quad \mathsf{PB}(q_e)\ (e\in K_1)}{\mathsf{PB}(q_{k*})}, \qquad k \in K_0. \tag{45}$$

所有这些都是显式标记形状的集合索引包含。现在针对这些规则，采用与 (17) 相同的良基构造来定义边界语法。相对版本既可以包含在内，也可以保守地附加。

命题 32（边界识别与初始性）。边界语法是一个几何宇宙，并满足

$$\mathrm{Fun}_{\mathrm{geo}}(\mathcal{S}_{\mathbb{T}}, \mathcal{D}) \simeq \mathrm{Mod}_{\mathbb{T}}(\mathcal{D})$$

对于每个几何宇宙 D，都带有所有自然变换。

证明。 内角给出一个拟范畴。末顶点比较（42）刻画有限锥范畴中的终对象，而首顶点比较（44）刻画余锥范畴中的始对象。形成规则给出所需的极限和余极限。传输为所有等价的万有锥提供证书，而 (E) 恰好识别等价。

对于余极限 $d \to W$，全空间余极限是由（21）给出的限制的左伴随。规则 (Stab) 使其余单位成为等价。规则（45）通过为所有顶点拉回提供证书，使其单位成为等价。这给出下降，因此该语法是一个几何宇宙。

对于目标几何宇宙，每条形成规则都有一个可缩的解释空间，并且每条比较规则都具有引理 22 中所使用的终锥或始锥提升性质。两条下降规则保留底层胞腔，并添加有效证书。因此，每条规则在带标记映射核上诱导一个平凡 Kan 纤维化。胞腔塔论证证明了核上的初始性。在 $\mathrm{Fun}(\Delta^m, \mathcal{D})$ 中重复该论证，即可证明所断言的 ∞-范畴等价。引理 24 的论证证明了相对版本及其保守性。□

命题 33（理论编译）。小型依赖呈示与小型边界呈示可以相互转换，并且其模型的 ∞-范畴自然等价。转换新增的定义具有可缩的选择空间，在参数族中亦如此。

证明。对于依赖呈示，保留其底层胞腔常元和方程。将 Terminal 转换为 $\mathrm{Lim}_{\varnothing}$，将 PB 转换为 Lim_{V}，将 HC 转换为 Col，并将 Eq 保持不变。在几何宇宙中，显示公理会自动得到解释，因为每个箭头都表示一个族。项声明保留其截面和截面三角形，作为选定数据。由此得到一个边界呈示，其底层模型函子和变换完全相同。

对于边界呈示，将 a 上的每个有限极限公理：$K^{\triangleleft} \to Q$ 通过比较 on

$$a_* \longrightarrow \mathsf{Rec}_K(a|_K)$$

来转换，并将其声明为 Eq。根据引理 10 中的泛构造，为记录、其锥以及此比较命名。直接转换余极限公理和等价公理。任何意图作为类型的箭头，都可以用其纤维表示命名，或赋予其可导出的展示证书。新增常元及其所有必要的相干性根据引理 5 都是小型的。根据引理 22 和 24，辅助定义的泛解释是可缩的。锥恰好在其与记录的比较为等价时是极限锥，因此，转换后的公理施加的条件与原模型条件完全相同。

辅助选择空间上的等价在将目标替换为 $\mathrm{Fun}(\Delta^m,\ \mathcal{D})$ 后仍然是等价。因此，翻译在对象、同态及其高阶单形上识别出模型 ∞-范畴，并且关于目标自然。□

定理 34（依赖–边界比较）。对于任一呈示中的理论，通过命题 *33* 进行解释后，存在一个几何等价

$$\mathcal{G}_{\mathbb{T}} \simeq \mathcal{S}_{\mathbb{T}} \tag{46}$$

在其生成数据之下。它保持类型族、完整的依赖项空间、代换比较，以及局部和全局粘合计算。

证明。 每种语法都是一个几何宇宙，并且根据定理 25 和命题 32，具有相同的模型值泛性质。在另一种语法中解释各自的生成元。初始性在两个方向上都给出几何扩张。它们的复合限制在原始生成元解释上。因此，全忠实限制将这两个复合分别识别为相应的恒等函子。

上下文 ∞-范畴之间的等价会诱导出它们的切片之间的等价，以及所有切片映射空间之间的等价。根据 (25)，切片映射空间上的等价识别了依赖项空间。粘合由带有其笛卡尔局部比较的全空间余极限刻画。几何函子保持这些构造以及由此得到的伴随，包括其重构映射和三角恒等式。□

在类型层面，比较给出了两个方向上的项，以及见证其逆律的高阶项。构造子的边界方程决定了每个呈示中的判断等式。

6 分类 ∞-拓扑斯及其与句法范畴的等价

将预层范畴局部化于公理的比较映射，便可直接从小理论构造分类器。局部化中的泛模型给出了从句法范畴到分类器的几何函子。我们利用在$\mathcal{G}_{\mathbb{T}}$中对同一组生成元的解释来构造其逆。

6.1 预层局部化与公理比较

引理 35（小自由有限极限完备化）。对于每个 $\mathbb{U}$-小单纯集 Q，存在一个 $\mathbb{U}$-小有限极限 ∞-范畴 C_Q 以及 $j\colon Q \to C_Q$，使得对于每个有限极限 ∞-范畴 $\mathcal{D}$，

$$\mathrm{Fun}_{\mathrm{lex}}(C_Q, \mathcal{D}) \simeq \mathrm{Fun}(Q, \mathcal{D}). \tag{47}$$

限制函子在图表模型中是平凡范畴纤维化。因此，泛性质包含所有自然变换以及每个预先指定的相对参数边界。

证明。 保留内角、有限极限形成和比较格式（41）–（42），以及有限极限证书的传输。将这一集合称为 R_{lex}。这些无参数规则格式生成 C_Q。所得的限制函子是平凡范畴纤维化，这也给出了在任意相对参数形状上的扩张。规则格式有可数多个：有限单纯形状具有可数多个代表元，比较维数是自然数，而区间 J 是可数的。每个源和目标都具有可数多个单形（包括退化映射），以及可数多个证书。它们全都是 $\mathbb{U}$的对象。

要在 $\mathbb{U}$ 内构造完备化，取

$$\mu = \max\left(\aleph_0, \left|\coprod_{n\geq 0} Q_n\right|\right), \qquad \theta = \omega_1.$$

基数 θ 是正则不可数基数，并且属于 $\mathbb{U}$。参数 μ 独立记录签名大小和闭包序数 θ。从具有空证书集的 Q 开始，使用 R_{lex} 对 θ 个阶段执行记录的一次性输入胞腔构造。将其各阶段记为 P_α，$\alpha \leq \theta$。

令 m_α 为一个无限基数，用来界定阶段 α的单形和证书数量。对于可数源，底层数组至多有 $m_\alpha^{\aleph_0}$个；保持所需证书是关于这类数组的一个条件。将它们的可数输出添加进来，便得到界

$$m_{\alpha+1} \leq (2 + m_\alpha)^{\aleph_0} \cdot \aleph_0.$$

在极限 $\beta \leq \theta$处，可以使用

$$m_\beta \leq \max\left(\aleph_0, |\beta|, \sup_{\alpha<\beta} m_\alpha\right).$$

归纳给出 $m_\alpha < \kappa$：后继界由 κ 的强极限性质推出，极限界则由其正则性和 $\theta < \kappa$ 推出。因此 P_θ 是 $\mathbb{U}$-小的。

P_θ 处每个规则输入的胞腔和经认证图表构成一个可数集合（也可能是有限集合）。选取它们出现的阶段。它们的上确界小于 θ，这是由正则性得出的。因此，该输入会出现在某个P_α中； $\alpha < \theta$，并且要么已经处理过，要么会在下一个阶段处理。这证明了对 R_{lex} 中每条规则的闭包。内角使 P_θ 成为一个拟范畴。构造给出每个有限极限，比较识别其泛锥，而传输则认证所有等价的极限锥。令 $C_Q = |P_\theta|_\circ$

对于有限极限目标 $\mathcal{D}$，根据引理 21 和 22 的有限极限情形， R_{lex} 中的每条规则在模型核心上都有平凡 Kan 限制。同样的计算也适用于 $\mathsf{Fun}(\Delta^m, \mathcal{D})$，因为其中的有限极限是逐点计算的。因此，引理 24 中的 $m = 0$，1 映射空间论证表明，每条规则限制在完整的模型 ∞-范畴上都是平凡范畴纤维化。在每个胞腔阶段，取其拉回和积；在极限阶段，取逆极限。定理 25 的超限提升论证给出从 P_θ-模型到 Q-图表的平凡范畴纤维化。前者恰好是保有限极限函子。这证明了 (47)，包括所述的变换和相对边界。□

对于带类型理论，使用命题 33 中的直接边界翻译；对于原始边界理论，则保留该理论。令 $C = C_{|Q_{\mathbb{T}}|}$，并令 $y : C \to \mathcal{P}_{\mathbb{U}}(C)$ 为米田嵌入。每条证书公理都确定一个比较：

$$\mathsf{Lim}_K(a): \quad yj(a_*) \longrightarrow \lim_{k\in K} yj(a_k), \tag{48}$$

$$\mathsf{Col}_K(b): \quad \operatorname*{colim}_{k\in K} yj(b_k) \longrightarrow yj(b_*), \tag{49}$$

$$\mathsf{Eq}(e): \quad yj(e). \tag{50}$$

这些比较构成一个小集合 $R_{\mathbb{T}}$。在依赖语法中，(48) 的原始实例是终对象和拉回。同一公式表达了适用于所有有限极限的翻译后公理。

定义 36（由局部化给出的分类器）。若一类映射包含所有等价、满足三取二，并且在箭范畴中对小余极限封闭，则称其为强饱和。令 $W_{\mathbb{T}}$ 为 $\boldsymbol{P}_{\mathbb{U}}(C)$ 中包含 $R_{\mathbb{T}}$ 且在基变换下稳定的最小此类映射类。令

$$L : \mathcal{P}_{\mathbb{U}}(C) \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{T}} = \mathcal{P}_{\mathbb{U}}(C)[W_{\mathbb{T}}^{-1}]. \tag{51}$$

该闭包包含其中每个映射的所有迭代对角映射。事实上，对于 $f : A \to B \in W_{\mathbb{T}}$，投影 $p_1 : A \times_B A \to A$ 由基变换可知属于 $W_{\mathbb{T}}$。恒等映射 $p_1 \Delta f \simeq \mathrm{id}_A$ 和三取二给出 $\Delta f \in W_{\mathbb{T}}$；迭代即可得到所有更高阶对角映射。根据小生成同余定理， $W_{\mathbb{T}}$ 是某个可达左正合局部化的求逆映射类，并且$\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ 是一个 Grothendieck ∞-拓扑斯 [1]。同余定理将这个饱和且在基变换下稳定的映射类与其有限极限表述对应起来，并表明它作为强饱和映射类具有一个小生成集。这既确立了可及性，也确立了左正合性。比较锥的选择构成可缩空间，并给出等价的局部化。

6.2 通过下降实现左正合扩张

为构造逆函子，我们将$\mathcal{G}_{\mathbb{T}}$ 中生成元的解释从可表对象扩展到预层，方法是取余极限。拉回稳定性保证了在可表对象上的左正合性。对于任意基，下降使我们能够沿着来自其可表对象部分的映射检验拉回比较。

引理 37（下降延拓）。设 C 是一个小的有限极限 ∞-范畴，$\mathcal{D}$ 是一个几何宇宙（定义 *12*）。保有限极限函子 $u\colon C \to \mathcal{D}$ 有一个保持小余极限的延拓

$$F = \mathrm{Lan}_y\, u : \mathcal{P}_{\mathbb{U}}(C) \to \mathcal{D},$$

并且该扩张保持有限极限。限制诱导出

$$\mathrm{Fun}_{\mathrm{geo}}(\mathcal{P}_{\mathbb{U}}(C), \mathcal{D}) \simeq \mathrm{Fun}_{\mathrm{lex}}(C, \mathcal{D}). \tag{52}$$

证明。预层 泛性质在整个函子范畴上给出该扩张及其唯一性
r∞-范畴。具体而言，

$$F(P) = \operatorname*{colim}_{(c,x)\in C_{/P}} u(c). \tag{53}$$

这里，$C_{/P}$ 表示元素范畴，即由 P 分类的、在 C 上的右纤维化：$C^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}_{\mathbb{U}}$。它是小的，因为 C，且 P 的所有取值都是小的。因此，(53) 中的每个余极限都属于$\mathcal{D}$ 中指定的 $\mathbb{U}$-小余极限。预层泛性质在环境宇宙中适用，且使用同样的小索引图表。由于 $y1_C$ 是终对象，$F(1) \simeq u(1_C) \simeq 1_{\mathcal{D}}$。

首先，考虑 $X \to yc \leftarrow Y$。在 yc 上方的切片中，取元素表示 $X \simeq \mathrm{colim}_i\, ya_i$ 和 $Y \simeq \mathrm{colim}_j\, yb_j$。指向 c 的箭头是其索引数据的一部分。预层余极限的泛性质给出

$$X \times_{yc} Y \simeq \operatorname*{colim}_{i,j} y(a_i \times_c b_j).$$

利用 u 的有限极限保持性，以及$\mathcal{D}$ 中余极限的泛性质依次应用于两个变量，可得

$$\begin{aligned} F(X \times_{yc} Y) &\simeq \operatorname*{colim}_{i,j} \big(u(a_i) \times_{u(c)} u(b_j)\big) \\ &\simeq F(X) \times_{u(c)} F(Y). \end{aligned} \tag{54}$$

对于一般的余扇 $X \to Z \leftarrow Y$，令 $I = C_{/Z}$ 为 Z 的元素范畴。对于像为 $c_i \in C$ 的 $i \in I$，令 $A_i = yc_i$。元素表示给出 $Z \simeq \mathrm{colim}_{i\in I} A_i$。令 $X_i = X \times_Z A_i$ 和 $Y_i = Y \times_Z A_i$。对于每个过渡 $i \to j$，$\mathcal{P}_{\mathbb{U}}(C)$ 中的拉回拼接给出

$$X_i = X \times_Z A_i \simeq (X \times_Z A_j) \times_{A_j} A_i = X_j \times_{A_j} A_i.$$

因此，定义方形为

$$\begin{array}{ccc} X_i & \longrightarrow & X_j \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_i & \longrightarrow & A_j. \end{array}$$

其基 A_j 是可表对象，因此由 (54) 可知，它在 F 下的像是一个拉回。因此，$F(X_i) \to u(c_i)$ 是整个元素图表上的一个笛卡尔族。由于 $X \simeq \mathrm{colim}_i\, X_i$，且 F 保持这些余极限，$\mathcal{D}$ 中的下降给出

$$F(X_i) \simeq F(X) \times_{F(Z)} u(c_i). \tag{55}$$

同样的论证也适用于 Y和 $X \times_Z Y$。

拉回典范比较

$$F(X \times_Z Y) \longrightarrow F(X) \times_{F(Z)} F(Y)$$

沿每个 $u(c_i) \to F(Z)$ 进行。公式（55）将结果与 $X_i \to A_i \leftarrow Y_i$ 的（54）等同。这是一个等价。下降等价 $\mathcal{D}/F(Z) \simeq \lim_{i\in I^{\mathrm{op}}} \mathcal{D}/u(c_i)$ 表明，这些拉回共同检测等价。这也包括空元素图表：此时，下降使得其余极限上的切片可缩。因此，在所有情况下，该比较都是一个等价，从而证明了左正合性。最后，预层扩张定理在所有自然变换上都是完全忠实的；将其对象限制为已识别的左正合对象，即可证明（52）。

□

对于 ∞-拓扑斯目标，该结果重现左正合扩张定理 [24]。代换稳定性保证保持可表基上的拉回，而族下降则将结果推广到任意基。对于几何宇宙 $\mathcal{G}_{\mathbb{T}}$，这一扩张构造了下一个定理中的逆函子。

6.3 句法重构与模型分类

定理 38（句法重构）。存在几何函子

$$E : \mathcal{G}_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \qquad Q : \mathcal{B}_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{T}}$$

满足 $EQ \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{B}_{\mathbb{T}}}$ 和 $QE \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{G}_{\mathbb{T}}}$，并与生成元解释相容。

证明。设 $u : C \to \mathcal{G}_{\mathbb{T}}$ 为生成元解释的有限极限延拓，使用引理 35。函子 Lyj 解释这些公理：L 保持有限极限和余极限，并将 (48)–(50) 变为等价。初始性给出一个几何函子 E，而自由有限极限性质给出

$$Eu \simeq Ly. \tag{56}$$

由推论 14，目标 $\mathcal{G}_{\mathbb{T}}$ 是一个几何宇宙。引理 37 说明 $F = \mathrm{Lan}_y u$ 既是左正合的，也保持余极限。该理论的公理在句法上成立，因此 F 将 $R_{\mathbb{T}}$变为等价。等价满足三取二性质，且对收缩封闭。两个图表之间的逐点等价会在其余极限之间诱导出等价。由于 F 保持小余极限和拉回，它所变为等价的映射类是强饱和的，并且在基变换下稳定。因此 F 将 $W_{\mathbb{T}}$ 变为等价，并分解为

$$QL \simeq F. \tag{57}$$

令 $i : \mathcal{B}_{\mathbb{T}} \hookrightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{U}}(C)$ 为 L 的全忠实右伴随。于是 $Q \simeq Fi$，所以 Q 保持有限极限。对于 $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ 中任意小图表 b，

$$Q\big(\operatorname*{colim}_{\mathcal{B}_{\mathbb{T}}} b\big) \simeq QL\big(\operatorname*{colim}_{\mathcal{P}_{\mathbb{U}}(C)} ib\big) \simeq \operatorname{colim} Fib \simeq \operatorname{colim} Qb.$$

因此 Q 是几何的。

保余极限函子 EF 和 L 在可表对象上由 (56) 可知相等。预层泛性质给出 $EF \simeq L$，因此由 (57) 得 $EQL \simeq L$。与局部化进行前复合在函子∞-范畴上是全忠实的，从而得到 $EQ \simeq \mathrm{id}$。对于另一个复合，

$$QEu \simeq QLy \simeq Fy \simeq u.$$

QE 和恒等函子都是几何的。定理 25 中的全忠实限制以 $\mathcal{G}_{\mathbb{T}}$ 为目标，将它们对应起来。两个逆比较将 $\mathcal{G}_{\mathbb{T}}$ 的上下文和代换与预层局部化的对象和映射对应起来。□

推论 39（可呈现性与分类）。语法 $\mathcal{G}_{\mathbb{T}}$ 等价于一个 $\mathbb{U}$-可呈现、实质上 $\mathbb{U}$-局部小的 ∞-范畴，并且相对于 $\mathbb{U}$是一个 *Grothendieck* ∞-拓扑斯。对于每个这样的 $\mathcal{X}$，

$$\mathrm{Mod}_{\mathbb{T}}(\mathcal{X}) \simeq \mathrm{Fun}^{L,\mathrm{lex}}(\mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \mathcal{X}) = \mathrm{Geom}(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}). \tag{58}$$

结合定理 *34* 和定理 *38*，该等价证明了定理 *1*。

证明。定义 36 中的局部化具有可呈现性和局部小性，并且根据定理 38，这些性质可以传递。将该定理与初始性结合起来。可呈现∞范畴之间保持小余极限的函子是一个左伴随 [24]。自然性由限制和复合诱导。我们始终采用变换的逆像约定，因此（58）包括逆像函子的任意自然变换。□

命题 40（逆像对演算的保持）。 每个几何逆像函子都会保持演算的解释，包括其类型族、项、高阶项，以及所有计算比较和粘合比较，并且保持到所指定的相干等价为止。

证明。 它保持有限极限、小余极限和等价。展示的导出刻画以及普遍解释引理表明，每个原始输出都会映射为对应输入像的输出。此类比较的空间是可缩的，包括其相对参数边界。对推导树进行归纳，即可得到所述解释及其相干性。□

7 证明空间完备性与切片分类器

上下文上的一个类型确定了分类器相应切片中的一个对象。其截面表示依赖证明。截面的映射空间还记录证明之间的路径及其高阶识别。

定理 41（依赖证明空间完备性）。对于每个导出类型 $\Gamma \vdash A$ 类型，其高阶项的单纯集合都是一个 *Kan*复形，且重构诱导出一个自然等价

$$\mathrm{Tm}_{\mathbb{T}}(\Gamma, A) \simeq \mathrm{Map}_{(\mathcal{B}_{\mathbb{T}})_{/E\Gamma}}(\mathrm{id}_{E\Gamma}, Ep_A). \tag{59}$$

该等价与重索引、依赖和、恒等、同伦余极限消去以及粘合相容。

证明。 公式 (11) 正是切片中的正确映射空间模型，正如 (25) 中所观察到的。拟范畴的右映射空间是 Kan 的。拟范畴的等价会在切片及其映射空间上诱导等价，从而证明 (59)。重索引是拉回，求和是展示的复合，而恒等展示在其指定的自反等价意义下是对角映射。同伦余极限消去是其普遍截面构造，而粘合则是带有笛卡尔比较的全余极限。几何比较保持这些泛构造，因而也保持其相容的计算见证。□

推论 42（全模型完备性）。 对于句法边 e，以下各项等价：

$$\mathbb{T} \vdash \mathsf{Eq}(e) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \textit{every model in every Grothendieck } \infty\textit{-topos} \\ \textit{interprets } e \textit{ as an equivalence.} \end{array}$$

上下文中的导出类型有一个项，当且仅当其解释族在每个这样的模型中都有一个截面。

证明。 可靠性由泛解释引理推出。反之，在$\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$中的泛模型中求值。重构反映等价，因此相应的句法边可延拓为一个 J-数组。其胞腔在某个有界阶段共同出现，在该阶段 (E) 推导出 Eq(e)。对于上下文中的类型，(59) 将泛模型中的截面与句法项空间在等价意义下对应起来。因此，截面空间的可居留性提供了一个具有所指定截面边界的项。□

对于一个闭类型，模型中的一个截面就是解释该类型的对象中的一个点。自由地添加一个项，会使对该点的选择成为模型的一部分。

定理 43（上下文扩张作为切片）。令 A 为一个闭的导出类型。推论 *28* 提供了一个小型定义扩张，用于为其命名。添加一个项 $a : A$ 得到

$$\mathcal{B}_{\mathbb{T}[a:A]} \simeq (\mathcal{B}_{\mathbb{T}})_{/EA}, \qquad \mathcal{G}_{\mathbb{T}[a:A]} \simeq (\mathcal{G}_{\mathbb{T}})_{/A}.$$

有限依赖望远镜由其总上下文上的切片分类。

证明。 记 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathbb{T}}$，并省略 E。对于一个 ∞-拓扑斯 $\mathcal{X}$，我们证明一个 ∞-范畴之间的等价

$$\mathrm{Fun}_{\mathrm{geo}}(\mathcal{B}_{/A}, \mathcal{X}) \simeq \{(F, s) : F \in \mathrm{Fun}_{\mathrm{geo}}(\mathcal{B}, \mathcal{X}),\ s : 1_{\mathcal{X}} \to F(A)\}. \tag{60}$$

右侧是带基点评价的 ∞-范畴。一个变换 $(F, s) \to (G, t)$ 由一个自然变换 $\eta : F \to G$ 和一条路径 $\eta_A s \simeq t$ 构成。其高阶态射记录所选点相应的相干性。

令 $\pi^* : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_{/A}$ 将 C 映至 $C \times A \to A$。给定 H，取 $F = H\pi^*$，并令 s 为对角截面 $\mathrm{id}_A \to \pi^* A$的像。反过来，设

$$H_{F,s}(C \xrightarrow{p} A) = 1_{\mathcal{X}} \times_{F(A)} F(C).$$

这保持有限极限；由于切片余极限是在总体对象上计算的，且 $\mathcal{X}$ 中的拉回保持余极限，因此也保持余极限。在 $\mathcal{B}_{/A}$中，有一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} (C \to A) & \longrightarrow & (C \times A \to A) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p \times \mathrm{id}_A} \\ \mathrm{id}_A & \xrightarrow{\delta_A} & (A \times A \to A). \end{array}$$

应用 H 可将其与 $H_{F,s}$的展示公式对应起来。反过来，沿 s 拉回 $F(C \times A)$ 可恢复 $F(C)$，而对角映射可恢复 s。对于变换 $(\eta, h) : (F, s) \to (G, t)$，映射$\eta_C, \eta_A$与 $h : \eta_A s \simeq t$共同给出一个映射，将定义 $H_{F,s}(C \to A)$ 的拉回映至定义 $H_{G,t}(C \to A)$ 的拉回。其函子性及高阶单纯形由拉回泛性质得出。这就明确构造了变换上的逆；前述拉回比较即为其自然单位和余单位。因此，(60) 是 ∞-范畴之间的等价。

$\mathbb{T}[a : A]$ 的一个模型恰好是带有这样一个截面的 $\mathbb{T}$ 的模型。所添加的三角形记录了截面见证本身，如同（10）中所示。分类与（60）将其分类器识别为该切片。重构给出语法陈述。对于一个望远镜，迭代该等价

$$\left(\mathcal{B}_{/\Gamma}\right)_{/(A \xrightarrow{p} \Gamma)} \simeq \mathcal{B}_{/A}.$$

这里，右侧的 A 表示在 Γ上的族 p 的总体对象。 □

8 几何类型理论与 Grothendieck ∞-拓扑斯之间的对偶性

分类也可以从几何走向语法。从一个 Grothendieck ∞-拓扑斯出发，我们选取一个小的生成元族，并将定义其预层局部化的关系表示为等价公理。结合解释与逆像函子之间的对应关系，这些小呈示给出了（∞, 2）-对偶性。

8.1 Grothendieck ∞-拓扑斯的小呈示

下面的引理给出了一组小的映射，其逆化呈示了所选的局部化。

Lemma 44（宇宙内的生成元）。令 C 为一个 $\mathbb{U}$-小 ∞-范畴，并令 l et

$$L_0 : \mathcal{P}_{\mathbb{U}}(C) \rightleftarrows \mathcal{X} : N$$

是相对于 $\mathbb{U}$ 的可达反射性局部化，其单位为 $\eta : \mathrm{id} \to NL_0$。存在一个正则基数$\lambda < \kappa$ 和一个 $\mathbb{U}$-小范畴 $\boldsymbol{A}$，以及一个到 $P_{\mathbb{U}}(C)$ 的全忠实函子，其本质像由λ-紧预层构成。将 A 也记作 $\boldsymbol{A}$ 中对象在该函子下的像，则这一族

$$R = \{\eta_A : A \longrightarrow NL_0A \mid A \in \mathcal{A}_0\} \tag{61}$$

在 $\mathbb{U}$ 中编有索引并进行了编码，其由使用 $\mathbb{U}$-小余极限形成的强饱和闭包，恰好是被 L_0 反演的映射类。若 L_0 是左正合的，则该类也是由 R 生成的同余。R 中所有定义域和值域的元素范畴图，连同由它们诱导的比较函子，共同允许一个 $\mathbb{U}$-小呈示。

证明。记 $\mathcal{E} = \mathcal{P}_{\mathbb{U}}(C)$ 以及 $T = NL_0$。根据相对于 $\mathbb{U}$ 的可及性，选取正则基数 α，$\beta < \kappa$ 使得 $\mathcal{E}$ 是 α-可达的，并且 N 保持 β-滤过余极限。β 的存在性由可呈范畴之间右伴随的可及性得到，应用于 $\mathbb{U}$ [24]。选取一个满足 $\mu \geq \alpha$，β的无限基数 $\mu < \kappa$，并令

$$\lambda = (2^{\mu})^{+} < \kappa.$$

最后一个不等式由 κ 的强不可达性推出。对于每个基数 $\rho < \lambda$ 和每个 $\sigma < \alpha$，都有

$$\rho^{\sigma} \leq (2^{\mu})^{\mu} = 2^{\mu} < \lambda.$$

因此，λ 满足关于 α-可达范畴的基数扩张条件，所以 $\mathcal{E}$ 是 λ-可达的 [24]。每个 λ-滤过范畴都是 β-滤过的；因此 N，从而 T保持 $\mathbb{U}$-小的 λ-滤过余极限。根据可及性的紧生成刻画，λ-紧对象的全子范畴本质上是 $\mathbb{U}$-小的 [24]。选取一个 $\mathbb{U}$-小的等价拟范畴 $\mathcal{A}$，并将该等价与到 $\mathcal{E}$ 中的满子范畴嵌入复合。

令 W 为被 L_0 反转的映射，并令 $\langle R\rangle$ 表示 (61) 的强饱和闭包。由于 $L_0\eta_A$ 是等价，故有 $\langle R\rangle \subseteq W$。对于任意 $P \in \mathcal{E}$，选取一个 $\mathbb{U}$-小的 λ-滤过呈示 $P \simeq \operatorname{colim}_{i\in I} A_i$，其中 $A_i \in \mathcal{A}$。单位的自然性以及 T 对该余极限的保持，将箭范畴中的一个余极限识别为：

$$(\eta_P : P \to TP) \simeq \operatorname*{colim}_{i\in I}(\eta_{A_i} : A_i \to TA_i). \tag{62}$$

强饱和类对这些余极限 [24] 封闭；因此每个 η_P 都属于 $\langle R\rangle$。假设 $f : P \to Q$ 属于 W。在自然性方块中

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\ f\ } & Q \\ {\scriptstyle \eta_P}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_Q} \\ TP & \xrightarrow[\ Tf\ ]{} & TQ \end{array},$$

Tf 是等价，且两个垂直箭头都属于 $\langle R\rangle$。由复合封闭性和三取二性质可得 $f \in \langle R\rangle$。因此 $W = \langle R\rangle$。若 L_0 是左正合的，则 W 在基变换下稳定。因此，它也是包含 R 的最小强饱和且在基变换下稳定的类。这就是 [24] 中局部化判据所依据的宇宙相对生成集构造。

对于显示生成元的大小，$\mathcal{A}_0$ 是 $\mathbb{U}$中的一个集合，而 A 和 TA 是取值于$\mathbb{U}$-小空间的预层。对于这些预层中的每一个，选择其元素范畴的右纤维化模型 $E_A \to C$ 或 $E_{TA} \to C$。这些模型可以在 $\mathbb{U}$中选取：基 C 是 $\mathbb{U}$-小的，纤维是 $\mathbb{U}$-小的，并且直化与反直化均使用 $\mathbb{U}$-小的单纯集合来执行。等价地，在 $\mathbb{U}$ 中选取一个界定基及其纤维的正则基数后，根据右纤维化 [24] 的小纤维判据即可得到这一大小断言。η_A 的一个代表给出一个在 C上的映射 $E_A \to E_{TA}$，并带有其完整的单纯相容数据。

指标 A少于 κ 个，并且所选的每个单纯集合和比较图表都具有少于 κ 个单形。 κ 的正则性提供了一个界定它们的不交并、 C的胞腔以及索引集$\mathcal{A}_0$的统一无限基数 $\nu < \kappa$ 。有限积、与有限单纯形的连接以及单纯形维度的可数集合，都保持形如以下的界

$$(2+\nu)^{\aleph_0} < \kappa. \tag{63}$$

因此，元图表、它们的锥以及它们的比较数组构成一个 $\mathbb{U}$-小的集合。为了纳入命名这些图表的定义，按照引理 5 和 27，取它们的推导支撑之并集。一个 $\mathbb{U}$-小的 $\mathbb{U}$-小支撑族具有 $\mathbb{U}$-小的并集，因此我们可以选择 $\nu < \kappa$ ，使其界定这个并集以及原始图表。估计式（63）随后涵盖了由这些定义构造的连接、棱柱和比较数组。因此，生成映射以及命名它们的声明都属于 $\mathbb{U}$。□

定理 45（小呈示定理）。对于相对于 $\mathbb{U}$的每个 *Grothendieck* ∞-拓扑斯 $\mathcal{X}$，都存在一个小依赖理论 $\mathbb{T}_{\mathcal{X}}$，使得

$$\mathcal{G}_{\mathbb{T}_{\mathcal{X}}} \simeq \mathcal{B}_{\mathbb{T}_{\mathcal{X}}} \simeq \mathcal{X}.$$

证明。选择一个正则基数 $\chi \in \mathbb{U}$ ，使得$\mathcal{X}$ 是 χ-可达的，并且其 χ-紧对象构成一个本质上 $\mathbb{U}$-小的子范畴，在 χ-滤过余极限下生成$\mathcal{X}$。根据可呈现性 [24]，这样的基数存在。为 χ-紧对象的全子范畴选择一个小等价模型 C_0 ，并带有其到$\mathcal{X}$的全忠实函子。我们也用 c 表示 $c \in C_0$的像。为了显式验证稠密性，将 $X \simeq \operatorname{colim}_i c_i$ 写成一个带有 $c_i \in C_0$的小的 χ-滤过余极限。限制神经$N_{C_0}(X)(c) = \mathrm{Map}_{\mathcal{X}}(c, X)$满足

$$N_{C_0}(X) \simeq \operatorname*{colim}_i yc_i,$$

因为每个 $c \in C_0$ 都是 χ-紧的。因此，对于每个 Y，

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{P}_{\mathbb{U}}(C_0)}(N_{C_0}X, N_{C_0}Y) \simeq \lim_i \mathrm{Map}_{\mathcal{X}}(c_i, Y) \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{X}}(X, Y).$$

因此， C_0 是稠密的。我们为其有限极限闭包构造一个小模型。首先取 C_0像中的对象。在第 n阶段，令 D_n 为$\mathcal{X}$ 中由目前选出的对象构成的全子范畴。这族对象由一个 $\mathbb{U}$-小集合索引。由于$\mathcal{X}$ 是局部 $\mathbb{U}$-小的，根据 [24]， D_n 本质上是 $\mathbb{U}$-小的。因此，对于每个有限单纯形状 K，范畴函子范畴(K, D_n)本质上是 $\mathbb{U}$-小的。对每个等价类选取一个图表的极限对象，并在 $n+1$阶段将这些对象加入。有限形状按同构计只有可数多个，因此新增的对象族以及所有阶段的并，各自都由一个 $\mathbb{U}$-小集合索引。该并上全子范畴中的每个有限图表都经由某个阶段分解，因为其顶点集是有限的。因此，它的极限可由该并中的对象表示。根据同一判据，这个全子范畴本质上是 $\mathbb{U}$-小的。选取一个与之等价的 $\mathbb{U}$-小拟范畴 C ，并将其与包含映射复合，映入$\mathcal{X}$。所得函子 $C \to \mathcal{X}$ 完全忠实且保有限极限，而 $C_0 \to \mathcal{X}$ 在自然等价意义下经由它分解。

接下来我们验证 $C \to \mathcal{X}$ 的稠密性。 $C_0 \to \mathcal{X}$ 的余极限延拓是 N_{C_0} 的左伴随，而已确立的 N_{C_0} 的全忠实性使其余单位成为等价。因此，对于每个 $X \in \mathcal{X}$，规范的元素范畴余锥 $(C_0)^{/X} \to \mathcal{X}$ 的余极限为 X 。为计算扩大的神经，记作$N_C(X)(c) = \mathrm{Map}_{\mathcal{X}}(c, X)$，并令 $i\colon C_0 \to C$ 为这个全忠实因子。每个$c \in C$ 作为 C_0 中对象的余极限的规范表示给出

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{X}}(c, X) \simeq \lim_{(a \to c) \in (C_0)^{\mathrm{op}}_{/c}} \mathrm{Map}_{\mathcal{X}}(a, X).$$

这些等价将 N_C 与 $\mathrm{Ran}_{i^{\mathrm{op}}} N_{C_0}$对应起来。沿完全忠实的 i^{op} 进行右 Kan 扩张，对这些图表而言是完全忠实的。因此，

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{P}_{\mathbb{U}}(C)}(N_C X, N_C Y) \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{P}_{\mathbb{U}}(C_0)}(N_{C_0} X, N_{C_0} Y) \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{X}}(X, Y).$$

因此，扩大的有限极限子范畴 C 在 $\mathcal{X}$ 中稠密。

全忠实函子 $C \to \mathcal{X}$ 可扩展为保余极限函子 $L_0 : \mathcal{P}_{\mathbb{U}}(C) \to \mathcal{X}$。引理 37 表明它是左正合的，而稠密性表明其右伴随是全忠实的。因此，它是一个可达左正合局部化。将引理 44 应用于该局部化及其右伴随 N_C，可得一个正则 $\lambda < \kappa$ 和显式的 $\mathbb{U}$-小集合 $R = \{A \to N_C L_0 A \mid A \in \mathcal{A}_0\}$。其强饱和闭包恰好就是被求逆的同余。因此， [1] 的小生成断言在此由 $\mathbb{U}$ 内部的对象实现。

将 C 的胞腔声明为常元，并将其有限极限锥声明为公理，再通过命题 33 将它们编译为依赖记录。对于 R 中每个 $r : P \to Q$ ，使用元素表示

$$P \simeq \operatorname*{colim}_{(c,x)\in C_{/P}} yc, \qquad Q \simeq \operatorname*{colim}_{(c,y)\in C_{/Q}} yc.$$

映射 r 诱导出一个位于 C 上方的小函子 $C_{/P} \to C_{/Q}$ 。将这两个余极限对象命名为 (HC)，并使用其比较规则为诱导映射 r_{syn} 命名，同时注明与元素图函子的相容性。声明等价(r_{syn})。每一步的输入都是小的，且步骤构成一个 $\mathbb{U}$-小集合。更明确地说，引理 44 将 C 的胞腔、集合 R、每个 r 对应的两个元素范畴及其比较函子，都限制在一个低于 κ 的统一基数之下。有限记录编译以及比较数组的命名，选出一个 $\mathbb{U}$-小的推导族。根据引理 5 和 27，它们完整的依赖支撑的并是 $\mathbb{U}$-小的。选取一个无限的 $\nu < \kappa$ ，使其界定这个并及此前的数据。有限积、有限并以及所得数据包中可数多个单纯形维度的总大小至多为

$$(2+\nu)^{\aleph_0} < \kappa.$$

因此，在所得理论 $\mathbb{T}_{\mathcal{X}}$ 中，胞腔、证书和边界方程的数量均少于 κ 。

保有限极限函子 $C \to \mathcal{D}$ 到几何宇宙的函子，当且仅当其余极限延拓反演 R 时，才能扩张为 $\mathbb{T}_{\mathcal{X}}$ 的模型。在这种情况下，定义性构造的选择空间是可缩的。根据引理 37，该扩张是几何的，因此反演所生成的同余。局部化给出

$$\mathrm{Mod}_{\mathbb{T}_{\mathcal{X}}}(\mathcal{D}) \simeq \mathrm{Fun}_{\mathrm{geo}}(\mathcal{X}, \mathcal{D}).$$

通过局部化的因子函子，依据定理 38 中使用的相同右伴随与余极限计算，是几何的。该等价作用于所有自然变换。将其与初始性进行比较，并使用两个目标 $\mathcal{X}$ 和$\mathcal{G}_{\mathbb{T}_{\mathcal{X}}}$，即可得到互为逆的几何函子。随后，重构也确定了$\mathcal{B}_{\mathbb{T}_{\mathcal{X}}}$ 。□

8.2 解释、Morita 等价与对偶性

在 $\mathbb{T}'$ 中对 $\mathbb{T}$ 的一个解释，将其生成胞腔赋给$\mathcal{G}_{\mathbb{T}'}$ 的句法胞腔，保持方程，并推导出指定的证书公理。令 $\mathrm{Int}(\mathbb{T}, \mathbb{T}')$ 表示 $\mathrm{Fun}(|Q_{\mathbb{T}}|, \mathcal{G}_{\mathbb{T}'})$ 中由这些解释构成的全子范畴；其高阶单纯形由参数化代换数组参数化。

推论　46（解释与 Morita 对应）。 存在自然等价

$$\mathrm{Int}(\mathbb{T}, \mathbb{T}') \simeq \mathrm{Fun}_{\mathrm{geo}}(\mathcal{G}_{\mathbb{T}}, \mathcal{G}_{\mathbb{T}'}) \simeq \mathrm{Geom}(\mathcal{B}_{\mathbb{T}'}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}).$$

当且仅当这些理论在相干等价意义下互为解释时，它们的分类器才等价。等价地，它们在 ∞-拓扑斯上的模型值函子赝自然等价。

证明。 以$\mathcal{G}_{\mathbb{T}'}$ 为目标应用初始性，然后进行重构。解释通过其几何扩张复合；其扩张空间是可缩的，因此复合具有相干性。逆解释对应于逆几何函子。最后，在各自的泛模型上求值模型函子之间的伪自然等价，便得到同一对互逆解释。反过来，分类器的等价通过前复合给出伪自然等价。□

定理 45 的等价$\mathcal{G}_{\mathbb{T}_{\mathcal{X}}} \simeq \mathcal{X}$将 $\mathbb{T}_{\mathcal{X}}$ 中的粘合对应到$\mathcal{X}$中的下降。这些小呈示给出了分类器赋值的本质满射性，而推论 46 则确定了其映射 ∞-范畴。

令$\mathbf{Th}_{\mathrm{geo}}$ 表示由 $\mathbb{U}$-小几何同伦类型论理论构成的（∞,2）-范畴，其映射 ∞-范畴为 Int($\mathbb{T}, \mathbb{T}'$)，复合由解释给出。令$\mathbf{Top}_{\infty}$ 表示相对于 $\mathbb{U}$的 Grothendieck ∞-拓扑斯构成的（$\infty, 2$）-范畴，其中 Geom($\mathcal{X}, \mathcal{Y}$) $=$函子范畴$^{L,\mathrm{lex}}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$，并包含所有逆像的自然变换。我们用 op 表示对偶，它反转 1-态射并保持 2-态射的方向。

推论 47（几何同伦类型论理论与 Grothendieck ∞-拓扑斯之间的对偶性）。分类器赋值诱导出一个等价：(∞, 2)-范畴

$$\mathbf{Th}_{\mathrm{geo}} \simeq \mathbf{Top}_{\infty}^{\mathrm{op}}, \qquad \mathbb{T} \longmapsto \mathcal{B}_{\mathbb{T}}.$$

从 $\mathbb{T}$ 到 $\mathbb{T}'$ 的解释 I 对应于一个几何态射 $f_I : \mathcal{B}_{\mathbb{T}'} \to \mathcal{B}_{\mathbb{T}}$。其逆像将通用的 $\mathbb{T}$-模型映为通过对通用的 $\mathbb{T}'$-模型应用 I 而得到的 $\mathbb{T}$-模型。当且仅当两个理论 *Morita* 等价时，它们的分类器才等价；也就是说，它们存在互为逆的解释，且逆至相干等价。

证明。 记 $j_{\mathbb{T}} : |Q_{\mathbb{T}}| \to \mathcal{G}_{\mathbb{T}}$ 为生成元的包含映射。根据定理 25 和推论 46，限制$F \mapsto F j_{\mathbb{T}}$给出从函子范畴 Fun$^{\mathrm{geo}}(\mathcal{G}_{\mathbb{T}}, \mathcal{G}_{\mathbb{T}'})$ 到 Int($\mathbb{T}, \mathbb{T}'$) 的等价，并涵盖所有变换。对于另一个几何函子 H，恒等式 $(HF)j_{\mathbb{T}} = H(F j_{\mathbb{T}})$ 在每个单纯次数上都成立。因此，我们可以实现 $\mathbf{Th}_{\mathrm{geo}}$ ，其对象以理论为标签，理论句法范畴之间的几何函子按通常的函子复合进行复合。

令 $\mathcal{L} = \mathbf{Top}_{\infty}^{\mathrm{op}}$ ，并令 J 为由一个同构 $0 \to 1$自由生成的群胚。使用由相干图表及其变换构成、且自然性比较均可逆的 (∞,2)-范畴 Fun(J,$\mathcal{L}$)。由于每个包含映射$\{i\} \to J$ 都是等价，在任一端点评估都是等价，其逆由常值图表给出。根据定理 38，每个 $E_{\mathbb{T}} : \mathcal{G}_{\mathbb{T}} \simeq \mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ 都可扩张为一个 J-图表。为每个 $\mathbb{T}$选取这样一个图表，并令 $\mathcal{D}$ 具有这些以理论为标签的对象，以及 Fun(J,$\mathcal{L}$) 中它们之间的满映射 ∞-范畴。端点评估限制为

$$\mathbf{Th}_{\mathrm{geo}} \xleftarrow{\mathrm{ev}_0} \mathcal{D} \xrightarrow{\mathrm{ev}_1} \mathcal{L}.$$

两个函子都通过满性在映射 ∞-范畴上诱导等价。第一个函子覆盖每个理论标签，第二个函子则根据定理 45 覆盖每个 Grothendieck ∞-拓扑斯（在等价意义下）。因此，二者都是 (∞,2)-范畴的等价。

复合 $\mathrm{ev}_1 \mathrm{ev}_0^{-1}$将 $\mathbb{T}$ 送到 $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ （在等价意义下）。对于一个带有扩张 $F : \mathcal{G}_{\mathbb{T}} \to \mathcal{G}_{\mathbb{T}'}$的解释 I ，沿 ev_0提升 F，并将其另一个端点记为 f_I^*。沿 $0 \to 1$ 的自然性给出 $f_I^* E_{\mathbb{T}} \simeq E_{\mathbb{T}'} F$。在生成元上，这将泛 $\mathbb{T}$- 模型的拉回识别为 I 在泛$\mathbb{T}'$-模型中的解释。这两个求值都是相干图表上的函子，因此所得的等价

$$\mathrm{Int}(\mathbb{T}, \mathbb{T}') \simeq \mathrm{Fun}^{L,\mathrm{lex}}(\mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}'}) = \mathrm{Geom}(\mathcal{B}_{\mathbb{T}'}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}})$$

保持单位、复合及其高阶相干性。关于 Morita 等价的断言由推论46推出。□

8.3 分类 ∞-拓扑斯的泛族

假设某个理论有一个箭头 $h\colon X_0 \to X_1$。对于带有开集 $U \hookrightarrow 1$ 的拓扑斯 $\mathcal{X}$，我们可以要求 h 在 U 上是一个等价。此时，一个模型就是 $\mathcal{X}$ 中的一个箭头，其在 $\mathcal{X}/U$ 上的限制是一个等价。沿几何态射拉回，会将该公理映到 U 的逆像。现在我们也允许生成元和公理的指标图以这种方式变化。

定义 48（指标化边界表示）。记 $sX = \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, X)$，并令 $\Delta_{\mathcal{X}}\colon S_{\mathbb{U}} \to X$ 为常对象函子。X 中的一个指标化边界表示 P 由以下数据构成。

1. 集合对象 $X_{\leq 0}$的范畴中的一个单纯对象 Q，连同一个集合对象 R 和一个标记等价边的映射 $R \to Q_1$。*2.* 对于有限单纯集合的代表元集合中的每个 J，一个集合对象 L_J 和一个标记极限锥的映射 $L_J \times J^{\triangleleft} \to Q$。在次数 n，定义域是由 L_J 的多个副本构成的余积，这些副本由 $(J^{\triangleleft})_n$ 指标化。*3.* 一个由余极限公理构成的集合对象 A，一个位于集合对象在 A之上所成范畴中的单纯对象 $K : \Delta^{\mathrm{op}} \to (X_{/A})_{\leq 0}$，以及一个标记其余锥的映射 $b : K^{\triangleright_A} \to Q$。这里，右锥在切片中构造，其总体对象用作 b的定义域。在次数 n，这些对象为 $A \amalg K_0 \amalg \cdots \amalg K_n$。

索引呈示的态射给出这些对象之间的映射，这些映射与单纯形算子及所有关联映射相容，其中包括一个从公理对象的映射之上的形状 K 的映射。将这个普通范畴记作$\mathrm{Pres}(X)$，并将其神经记作 $N\,\mathrm{Pres}(X)$。

在空间中，余锥的集合 $K_a^{\triangleright} \to Q$ 通过取 $K_n = \coprod_{a \in A} (K_a)_n$ 来编码。因此，为边界呈示的每条公理指定一个独立指标，就定义了这个参数问题的一个点。这些指标保留了公理的重复出现。指标化呈示的映射记录这些数据，并且可以改变余极限形状。按照推论 46 所述的解释，将生成元指派给目标语法中的导出表达式，并在其中导出源公理。

要解释 P 的生成元，选取一个 $E \to Q$ 的 $\mathcal{X}$ 单纯对象映射，使得初始顶点在每个次数上都诱导一个等价

$$E_n \xrightarrow{\sim} Q_n \times_{Q_0} E_0. \tag{64}$$

我们称这样的映射为一个 左族。它在生成元上的纤维可以是 $\mathcal{X}$ 中的任意对象。在外部形状上，此条件描述了一个协变图表及其所有自然变换（引理 66）。在 $\mathcal{X}_{/R}$ 和 $\mathcal{X}_{/L_J}$ 中应用此条件，要求标记边为等价，且标记锥为极限。对于余极限检验，先将 E 限制到给定的余锥族，再限制到它们的基，从而得到 D^+ 在 $K^{\triangleright_A}$ 上以及 D^- 在 K 上。要求 $|D^-| \to |D^+|$ 为等价，并在 $\mathcal{X}_{/A}$ 中取几何实现。引理 67 将目标识别为顶点处的值。记 $\mathbf{Mod}_P(\mathcal{X})$ 为 $(s\mathcal{X})_{/Q}$ 中由这些模型构成的全子范畴。在 $\mathcal{X}$ 的 ∞-范畴 $\mathbf{Pair}(\mathcal{X})$ 中，对于对象对 (P, E) 和 (P, E)，一个位于 φ: $P \to P'$ 之上的态射 $(P, E) \to (P, E')$ 是 $(s\mathcal{X})_{/Q}$ 中的一个映射 $E \to \varphi_Q^* E'$，其中 $\varphi_Q : Q \to Q'$ 是诱导的单纯映射。

定理49（表示及其模型的分类）。存在小理论 Θ_{pres} 和Θ_{pair}，以及一个解释 i： $\Theta_{\mathrm{pres}} \to \Theta_{\mathrm{pair}}$，其几何态射为

$$p_{\mathrm{pres}} : \mathfrak{M} = \mathcal{B}_{\Theta_{\mathrm{pair}}} \longrightarrow \mathfrak{P} = \mathcal{B}_{\Theta_{\mathrm{pres}}}.$$

存在 ∞-范畴之间的自然等价

$$\mathrm{Geom}(\mathcal{X}, \mathfrak{P}) \simeq N\,\mathrm{Pres}(\mathcal{X}), \qquad \mathrm{Geom}(\mathcal{X}, \mathfrak{M}) \simeq \mathrm{Pair}(\mathcal{X}).$$

与 p_{pres} 复合会遗忘模型。若 u： $X \to \mathfrak{P}$ 分类了 P，则拉回 $\mathfrak{M}_P$： $= X \times_{\mathfrak{P}} \mathfrak{M}$ 是一个相对分类器。对于任意几何态射 g： $Y \to X$，∞-范畴中从 g到 $\mathfrak{M}_P$的提升及其在 id_g之上的变换，等价于 $\mathrm{Mod}_{g^* P}(Y)$。对于小理论 $\mathbb{T}$的指标化边界表示 P，令t_P： $S_{\mathbb{U}} \to \mathfrak{P}$ 为分类 P的点。下图方形是一个拉回。泛对限制到其纤维上的通用 $\mathbb{T}$-模型。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_{\mathbb{T}} & \longrightarrow & \mathfrak{M} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{\mathrm{pres}}} \\ \mathcal{S}_{\mathbb{U}} & \xrightarrow[t_P]{} & \mathfrak{P} \end{array} \tag{65}$$

证明。 命题 68 构造了这两个理论，并将沿 i 的限制识别为 $(P,\ E) \mapsto P$。分类化和推论 47 给出了所展示的等价以及具有所指方向的几何态射。附录 C 通过计算提升的完整 ∞-范畴，证明了相对性断言。

对于点 t_P，将呈示拉回到$\mathcal{Y}$ 后，每个标记集合都变为常值。关于这些集合的切片分裂为积，每个标记对应一个因子。引理 66 将满足 (64) 的族识别为生成单纯集合上的图表。在每个因子上，三个检验现在分别恰好施加外部呈示中的标记等价、有限极限或小余极限。因此，命题 33 将此提升范畴识别为 $\mathrm{Mod}_{\mathbb{T}}(\mathcal{Y})$，并且关于$\mathcal{Y}$自然。由推论 39 和米田，纤维为$\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$。其恒等对应于泛对的限制，从而证明了关于该模型的断言。□

定理 45 现在表明，每个 $\mathbb{U}$-相对 Grothendieck ∞-拓扑斯都是这一单个态射的一个纤维。根据推论 46，两个选定的呈示点具有等价纤维，当且仅当相应的理论是 Morita 等价的。

推论 50（由开集支撑的公理）。设 $\mathcal{C}$ 是一个小的 ∞-范畴，并选取一个小族$f_r :\ B_r \to B'_r$，其中元素属于 $P_{\mathbb{U}}(\mathcal{C})$，且由 I 指标化。令 $\mathfrak{P}_I$ 为 ∞- 拓扑斯，即定义在 *Sierpiński locale* 的 I 次积上的空间层拓扑斯，其通用开集为 U_r。取拓扑斯的积 $\mathcal{A} = P_{\mathbb{U}}(\mathcal{C}) \times^{\mathbf{Top}} \mathfrak{P}_I$，其投影为$q$ 和 π，并令

$$\mathfrak{U}_{\mathcal{C},I} = L^{\mathrm{lex}}_{\{\,\pi^* U_r \times q^* f_r \,\mid\, r \in I\,\}} \mathcal{A}.$$

这里，L^{lex} 表示由所示映射生成的可达左正合局部化。选取 $P_{\mathbb{U}}(\mathcal{C})$ 的一个小呈示，并在其中为 f_r 命名后，存在一个映射 $\chi :\ \mathfrak{P}_I \to \mathfrak{P}$，以及在 $\mathfrak{P}_I$ 上的一个等价

$$\mathfrak{U}_{\mathcal{C},I} \simeq \mathfrak{P}_I \times_{\mathfrak{P}} \mathfrak{M}.$$

在 点 s_J 处，恰好由 $J \subseteq I$ 指标化的开集为真，此时纤维为 $L^{\mathrm{lex}}_{\{f_r \mid r \in J\}} P_{\mathbb{U}}(\mathcal{C})$.

证明。由定理 45，选取一个呈示 $\mathcal{P}_{\mathbb{U}}(\mathcal{C})$ 的理论。利用重构和引理 27，为 f_r 选定代表元并连同其边界一并命名。这些定义根据推论 28 保持所有模型不变。在 $\mathfrak{P}_I$ 上，取由此得到的常值指标化呈示，并为由 U_r 指标化的 f_r 添加一个等价标记。新的标记对象是旧标记对象与 $\coprod_r U_r$ 的余积。此呈示定义了 χ。

一个映射 $\mathcal{Y} \to \mathfrak{P}_I$ 依据积 Sierpiński locale 的自由框架性质以及局部化泛性质 [24]指定开集 V_r，$\to 1_{\mathcal{Y}}$。在该映射上，所选呈示的一个模型是一个几何逆像 $F :\ \mathcal{P}_{\mathbb{U}}(\mathcal{C}) \to \mathcal{Y}$，对于每个 $F(f_r)$，其限制在 V_r 上是一个等价。在积 $\mathcal{A}$中，相应的逆像将 $\pi^* U_r \times q^* f_r$ 取为 $V_r \times F(f_r)$。因此，左正合局部化 [1] 与沿 χ 的拉回，在每个这样的 $\mathcal{Y}$上都分类相同的数据。相对米田给出该等价。在 s_J处，由 $r \in J$ 索引的标记强制 $F(f_r)$具有可逆性，而由 $r \notin J$ 索引的标记具有空支撑。这就得到所述的局部化。□

例 *51*（*Sierpiński locale* 上的一种 *Morita* 类型变换）。取 $\mathcal{C}$ 为以两个对象组成的离散范畴，从而$\mathcal{P}_{\mathbb{U}}(\mathcal{C}) = \mathcal{S}_{\mathbb{U}} \times \mathcal{S}_{\mathbb{U}}$，并取唯一映射 $f :\ (0,0) \to (1,0)$。在 U为空的点处，比较是 $0 \to 0$，纤维为 $\mathcal{S}_{\mathbb{U}} \times \mathcal{S}_{\mathbb{U}}$。在 U为真的点处，纤维是由 f生成的左正合局部化。一个 f-局部对象（X, Y）具有 $X \simeq 1$，因为将 f映射到（X, Y）给出 $X \to 1$。到第二因子的投影是相应的反射子，并且是左正合的，因此该纤维为$\mathcal{S}_{\mathbb{U}}$。两个纤维分别具有四个和两个次终对象同构类。

8.4 MoritaTransport 与高阶自同构

推论 47 还描述了等价分类器之间的传输。将对偶性限制到理论等价、可逆变换及其高阶识别。这保留了 Morita 等价理论之间的路径，以及沿这些路径传输其分类器的方式空间。

我们说明这个空间及其纤维的大小。令 $\mathbb{W}$ 为一个宇宙，并选取一个 $\mathbb{W}$-小的理论呈示族。记 $\mathcal{B}_t^{\mathbb{W}}$为 t 处呈示的分类器，它由 $\mathbb{W}$-小空间和余极限构造而成。令 K 为由这些带理论标签的分类器构成的满 ∞-群胚，其态射为几何等价及其可逆高阶变换。其路径空间是 $\mathbb{W}$-小的。事实上，对于一对分类器，选取一个共同的正则基数 λ，使其属于 $\mathbb{W}$，且两个分类器在此基数处均可达。一个等价限制后给出它们的本质小子范畴中 λ-紧对象之间的等价。由于这些分类器是由这些子范畴作 λ-滤余极限补全得到的，限制在等价及其变换上是完全忠实的。因此，K 在本质上是 $\mathbb{W}$-小的。对于原宇宙中的一个小族，可以使用 $\mathbb{W}=\mathbb{U}$。若要一次性为所有 $\mathbb{U}$-小的呈示编码建立索引，则取 $\mathbb{W}=\mathbb{V}$，为这些编码选取代表元，并在 $\mathbb{V}$中计算分类器、它们之间的等价以及它们的几何纤维。在下列公式中，$\mathcal{S}=\mathcal{S}_{\mathbb{W}}$。

由于分类器 $\mathcal{B}_t^{\mathbb{W}}$可以是 $\mathbb{W}$-大的，我们将 Cat_∞ 取在更大的环境宇宙中。由几何等价 f 表示的路径通过其直接像 f_*作用，而该直接像是 f^*的逆。这给出一个相干图表$D\colon K\to \mathsf{Cat}_\infty$，其中 $D(t)=\mathcal{B}_t^{\mathbb{W}}$。其极限是截面范畴，其中的对象是族 $X_t\in D(t)$，并配备沿着 K中路径的相干传输。置

$$\mathfrak{P}_{\mathrm{Mor}}=\mathcal{S}_{/K}\simeq \mathrm{Fun}(K,\mathcal{S}),\qquad \mathfrak{M}_{\mathrm{Mor}}=\lim_{t\in K} D(t).$$

对于拓扑斯 $\mathcal{E}$，令 $\Delta_{\mathcal{E}}\colon \mathcal{S}\to\mathcal{E}$ 表示其常对象逆像。几何等价保持常对象不变，因此这些逆像确定了一个函子

$$p^*_{\mathrm{Mor}}:\mathrm{Fun}(K,\mathcal{S})\longrightarrow \mathfrak{M}_{\mathrm{Mor}},\qquad V\longmapsto \big(t\longmapsto \Delta_{D(t)}V(t)\big).$$

定理 52（Morita 空间上的族）。函子 p^*_{Mor} 是一个几何态射 $p_{\mathrm{Mor}}\colon \mathfrak{M}_{\mathrm{Mor}}\to\mathfrak{P}_{\mathrm{Mor}}$的逆像。对于每个 $\mathbb{W}$-相对 *Grothendieck* ∞-拓扑斯 $\mathcal{X}$，从 $\mathcal{X}$ 到其基的几何态射空间为

$$\mathrm{Geom}(\mathcal{X},\mathfrak{P}_{\mathrm{Mor}})^{\simeq}\simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{X}}(1,\Delta_{\mathcal{X}}K).$$

如果 $a_t\colon \mathcal{S}\to\mathfrak{P}_{\mathrm{Mor}}$ 是对应于 $t\in K$的点，则几何纤维满足

$$a_t^*\mathfrak{M}_{\mathrm{Mor}}\coloneqq \mathcal{S}\times_{\mathfrak{P}_{\mathrm{Mor}}}\mathfrak{M}_{\mathrm{Mor}}\simeq D(t)=\mathcal{B}_t^{\mathbb{W}}.$$

沿路径传输会诱导空间之间的等价

$$\mathrm{Map}_K(t,t')\simeq \mathrm{Eq}_{\mathrm{geom}}\big(a_t^*\mathfrak{M}_{\mathrm{Mor}},a_{t'}^*\mathfrak{M}_{\mathrm{Mor}}\big),$$

其中右侧由几何等价及它们之间的可逆变换构成。

证明。引理 69 表明，截面范畴是一个 Grothendieck ∞-拓扑斯，且所示函子是一个几何逆像。K 上的 étale 切片的泛性质将唯一几何态射 $\mathcal{X}\to\mathcal{S}$ 的一个提升与 $\Delta_{\mathcal{X}}K$ [24] 的一个截面对应起来。在由 K 上的函子给出的描述中，对象 $(*\xrightarrow{t}K)$ 是 $h_t(s)=\mathsf{Map}_K(t,\ s)$。它的切片投影为 a_t。对该投影作拉回，得到在$p^*_{\mathrm{Mor}}h_t$ [24]处的切片。根据引理 69，求值将此切片与 $D(t)$ 对应起来，并将沿路径的传输映射为给定的分类器等价。因此，路径空间上的所示映射是满群胚 K 的映射空间到两个分类器之间几何等价空间的包含映射；由满性可知，这是一个等价。□

命题 53（连通基底上的 Morita 类型变换）。在 $\mathbb{W}$ 中形成的例 *51* 的单公理族，不可能是沿着从其 *Sierpiński* 基底出发的几何态射对 p_{Mor} 的拉回。

证明。对于 Sierpiński locale S，映射 $\mathsf{Sh}(S;\mathcal{S})\to\mathfrak{P}_{\mathrm{Mor}}$ 给出 K 上常对象的一个截面。由于S 是连通的，该截面在 π_0K 上的常层中的像在两个点处取相同的值。定理 52 随即给出这些点处的等价纤维。例 51 的族具有纤维 $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$和 $\mathcal{S}$。它们分别具有四个和两个次终对象同构类，因此不可能存在拉回识别。□

在任意一个 Morita 分支内，t 处的环空间是 $D(t)$ 的几何自等价空间。我们对群作用计算这一点。对于一个 $\mathbb{W}$-小离散群 G，令 BG 为具有自同构群 G的单对象群胚的神经。将 Aut(G) 记作 G 的离散自同构群，将 Aut(BG) 记作 BG 在复合下的自等价空间。其倍环为 $B\mathrm{Aut}(BG)$。在所选族中加入一个 $\mathcal{E}_G =$ 函子范畴(BG,$\mathcal{S}$) $\simeq \mathcal{S}/BG$ 的呈示；根据工作宇宙中的定理 45，该呈示存在。将其 K 的点记为 t_G。

命题 54（群作用的 Morita 分支）。 t_G 处的分量具有同伦类型$B\mathrm{Aut}(BG)$。其正次数同伦群为

$$\pi_1(K, t_G) \cong \mathrm{Out}(G), \qquad \pi_2(K, t_G) \cong Z(G), \qquad \pi_n(K, t_G) = 0 \quad (n \geq 3).$$

证明。切片泛性质将几何映射空间中的映射 $\mathcal{E}_G \to \mathcal{E}_G$ 识别为 $BG \times BG \to BG$ 的截面，因此也识别为映射 $BG \to BG$。在此识别下，映射 u 给出沿 u 的拉回，将切片映到切片，因此几何态射的复合对应于映射的复合，而自等价对应于 Aut(BG)。倍环给出 K 的分量。单对象群胚 BG 之间的函子是 G的同态，而两个此类函子之间的自然同构就是共轭。因此，Aut(BG) 是 G 在 Aut(G) 上通过与内自同构复合而作用所形成的作用群胚的神经。其分量构成 Out(G)，恒等元处的稳定子为 $Z(G)$，且其高阶同伦群均消失。倍环即得所述各群。□

推论 55. F 对于循环群 C_2，t_{C_2} 处的分量是 ***Eilenberg–Mac Lane*** 空间 $K(C_2,2)$.

证明。群 C_2 的外自同构群平凡，且中心为 C_2。因此，其 Morita 分支是一个单连通 2-型，其第二同伦群为 C_2。□

推论 56（第三同伦群非零的 Morita 分支）。 令 $X = K(C_2,2)$。选择定义 K 的族，使其包含 $\mathcal{S}/X$ 的一个 $\mathbb{W}$-小呈示，并令 $t \in K$ 为相应的点。K 在 t 处的连通分支具有同伦类型 $K(C_2,3)$。其正次数中唯一非零的同伦群是 $\pi_3(K, t) \cong C_2$。

证明。 定理 45 给出了所需的小呈示。由于 $\mathcal{S}$ 是 Grothendieck ∞-拓扑斯中的终对象，切片泛性质 [24] 将 $\mathcal{S}/X$ 的几何自同态空间识别为第一投影 $X \times X \to X$ 的截面空间。映射 $u : X \to X$ 的图对应于逆像为 u^* 的几何态射。这种对应保持复合，因此将 $\mathcal{S}/X$ 的几何自等价识别为 X 的非基点自等价。根据定理 52，环空间$\Omega_t K$ 因而是在复合下的 Aut(X)，而其倍环 BAut(X) 即为 t 处的分量。

对于 $X = K(C_2, 2)$，Møller 和 Scherer 的分裂纤维序列 [31] 采取如下形式

$$K(C_2, 3) \longrightarrow B\,\mathrm{Aut}(X) \longrightarrow B\,\mathrm{Aut}(C_2),$$

其中离散群 Aut(C_2) 是平凡的。因此，基是可缩的，所以纤维包含映射给出BAut(X) $\simeq K(C_2, 3)$，而在取循环之后，得到 Aut(X) $\simeq K(C_2, 2)$。□

注意，普通的 Grothendieck 拓扑斯、几何等价和自然同构构成一个弱 2-群胚。其分类空间是一个 2-型，因此它的第三同伦群在每个点都消失。

9 普通几何逻辑的保守翻译

通过将原始类型解释为集合、将谓词解释为子对象，我们可以在依赖演算中表达普通几何相继式。它们的翻译将普通分类拓扑斯与翻译后的理论的分类器中的 0-截断对象对应起来。

9.1 类型、谓词与像

对于 $f\colon A \to B$，将其对角映射记为 $\Delta f\colon A \to A \times_B A$。通过公理 Eq($\Delta m$)，声明谓词 $m\colon R \to \Gamma$ 为单射的。声明原始类型 A，其终端映射为 p_A，是一个集合，方法是

$$\mathsf{Eq}(\Delta^2 p_A). \tag{66}$$

事实上，当且仅当 Δf 是等价时，f 才是 (-1)-截断的；当且仅当 Δf 是 (-1)-截断时，它才是 0-截断的。函数符号是有限积之间的箭头。将变量解释为投影，将复合项解释为与其参数元组复合。对于项 $t,\ u\colon \Gamma \to S$，以及关系 $m_R\colon R, \to D$ 的上下文中的元组 $\bot\colon \Gamma \to D$，定义 Γ 上的原子谓词如下

$$[\![t = u]\!] = (t,u)^*(\Delta_S), \qquad [\![R(\bar{t})]\!] = \bar{t}^*(m_R).$$

由于 S 是 0-截断的，其对角映射是单射的。拉回保持单态射，因此这两个公式都定义子对象。第一个子对象的一个截面断言在整个 Γ 上相等。它由两个项之间的路径见证表示；当该见证存在时，其选择空间是可缩的。

像具有如下导出表达式

$$\mathrm{im}(f) = \operatorname*{colim}_{[n]\in\Delta^{\mathrm{op}}} A^{\times_B (n+1)} \longrightarrow B. \tag{67}$$

在一个 ∞-拓扑斯中，根据有效满态射–单态射分解 [24]，这就是像单态射。为了在语言中表达像，我们利用其有限极限相干地构造增广图。其泛性质确保命名该图表后，模型及其同态得以保留。

引理 57（逐点右 Kan 延拓的定义性扩张）。设 $i\colon I \hookrightarrow J$ 是小普通范畴之间的满子范畴嵌入，并假设对每个 $j \in J$，$N(j \downarrow i)$ 都是有限的。设 $a\colon N(I) \to P$ 是小呈示中的一个已声明图表。存在 P 的一个小型定义扩张，其中包含一个字面扩张 $\bar{a}\colon N(J) \to P_{\mathrm{def}}$，并伴有可导出的有限极限比较，表明它是 a 的逐点右 *Kan* 延拓。该定义在完整模型 ∞-范畴及其参数化图表上是保守的。

证明。泛扩张范畴。对于有限极限拟范畴 $\mathcal{D}$，令 $\mathscr{R}_i(\mathcal{D})$ 为函子范畴 Fun($N(J)$, $\mathcal{D}$) 的全子范畴，其对象是来自 $N(I)$ 上图表的右 Kan 延拓。逐点公式为

$$\bar{a}(j) \simeq \lim_{(j \to i(k)) \in (j\downarrow i)} a(k). \tag{68}$$

由有限性假设可知这些极限存在。右 Kan 延拓是限制的右伴随；又由于 i 是全忠实的，其余单位是等价。因此，限制给出一个等价

$$\mathscr{R}_i(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(N(I), \mathcal{D})$$

整个 ∞-范畴。它也是一个范畴纤维化。由于 $N(I) \to N(J)$ 是单射的，环境限制函子是平凡的。内角提升保留其预先指定的模型顶点，而等价提升仍然是右 Kan 扩张，因为 (68) 在自然等价下保持不变。引理 19 的证明适用。因此，限制是一个平凡范畴纤维化；特别地，对于每个指定的输入图表，它在其上具有严格截面，并满足完整的相对提升性质。

(68) 中的极限锥是相干图表 $\bar{a}$ 的限制。它们的形状是映射

$$N(j \downarrow i)^{\triangleleft} \longrightarrow N(J)$$

其锥顶点为 j，指定的箭头为 $j \to i$（k）。每个所需的锥证书都可以像引理 10 那样，通过依赖语法中的有限记录及其等价比较来表达。这些比较构成一个小集合。

通过构造子实现图表。应用前述平凡纤维化，并取 $\mathcal{D} = \mathcal{G}_P$ 及给定输入a。提升是一个单纯映射 $\bar{a}\colon\ N(J) \to \mathcal{G}_P$，且满足 $\bar{a}|_{N(I)} = a$。选取其有限记录的比较。它们是等价，因此结构识别和 (E) 推导出相应的证书。该图表、其记录数据以及这些证书推导构成一个小型集合。引理 27 提取出其依赖闭包的原始规则实例和相对规则实例集合。执行这些实例会产生一个小型定义扩张P，$\to P^{\mathrm{def}}$ 其中恰好包含该图表及其可推导的比较。胞腔实现继承所选单纯映射的面方程和退化方程。

因此，每个 P^{def} 的模型都将 $\bar{a}$ 解释为所指示的右 Kan 扩张。反之，根据推论 28，P 的模型可以扩张为 P^{def}，且选择空间是可缩的，其中包括所有变换。由此，胞腔定义保持了模型的 ∞-范畴，包括模型之间的所有变换。也可以通过将其胞腔和锥比较作为单一呈示相邻加入，来描述该图表：其 ∞-模型范畴是沿给定输入对 $\mathscr{R}_i(\mathcal{D}) \to$ 函子范畴$(N(I),\ \mathcal{D})$ 的拉回。因而，该呈示与胞腔实现在 $\mathrm{Mod}_P(\mathcal{D})$ 上的模型具有等价的 ∞-模型范畴。

最后，同一个平凡纤维化及其推出积提升性质，为输出已在某个子形状上固定的任意参数形状给出了构造。逐点有限极限将这些构造与相应的右 Kan 扩张图表对应起来。胞腔支撑论证保留了指定的输入和输出边界及其证书。这就证明了参数化断言。□

增广*Čech*图。取 $J = \Delta_+^{\mathrm{op}}$，并令 I 为其在 $[0]$ 和 $[-1]$ 上的全子范畴。输入图表将唯一的非恒等箭头 $[0] \to [-1]$ 映为所声明的映射 $f\colon\ A \to B$。对于 $n \geq 0$，逗号范畴 $([n] \downarrow I)$ 的对象为

$$(0,0), \dots, (0,n), \quad (-1, *),$$

且恰好包含非恒等箭头 $(0,\ j) \to (-1,\ *)$。事实上，Δ_+^{op} 中的映射 $[n] \to [0]$ 对应于 Δ_+ 中的 $n+1$ 映射 $[0] \to [n]$，而映射 $[n] \to [-1]$ 是唯一的。在 $n = -1$ 处，逗号范畴是一个点。上述每个神经都是有限的。因此，引理 57 构造出一个单一的增广图表 $C_\bullet(f)$，使得

$$C_{-1}(f) = B, \qquad C_0(f) = A, \qquad C_n(f) \simeq A^{\times_B (n+1)} \quad (n \geq 1). \tag{69}$$

-1 和 0 处的等式继承自输入等式，其余比较则是经认证的
有限极限记录比较。其
记录描述还给出了显式的结构映射。如果 $\theta : [m] \to [n]$ 是单调的，则该映射

$$C(\theta) : C_n(f) \longrightarrow C_m(f) \tag{70}$$

使第 j 个投影连同其指定的比较，等于 $C_n(f)$ 的第 $\theta(j)$ 个投影，并且到 B 的增广相同。有限极限比较引入了该映射及其投影三角形。特别地，d_i 删除坐标 i，而 s_i 重复坐标 i。对于两个可复合的序数映射，两种坐标规定相一致。到终记录锥的泛比较提供了复合2-胞腔。对于一列序数映射，其已指定的面构成了指向同一终记录锥的边界比较，而相应的高阶比较提供下一个胞腔。相对格式保留此前给出的每个面。在 Δ_+^{op} 的神经中，退化映射将恒等箭头插入可复合的字符串中。坐标描述还确定了自同态的作用。例如，取值为 0 的常值映射 $[1] \to [1]$ 重复 $C_1(f)$ 的第零个投影。这个相干图表的胞腔实现了带有其指定边界的单纯形恒等式。

正层级是 B 上的有限纤维积，而 Δ_+^{op} 有可数多个对象、序数映射和有限可复合链。因此，该数组及其有限极限记录都是小的，并且

由它们所选推导支撑构成的并集是 $\mathbb{U}$-小的（由引理 5 得出）。由引理 27 可知，单个小型定义扩张即可构造增广 Čech 神经及其所有高阶相容性。

将 (HC) 应用于其给定上下文 B 上的未增广图表。其新的总上下文为 $|C_\bullet(f)|$，其展示是 (67) 中的箭头；输出三角形即为增广相容性。因此，像表达式是一个具有指定小语法的导出表达式。在每个 ∞-拓扑斯中，它的解释都是 f 的像分解。

几何联结词与相继式。像用于解释小析取和存在量化。对于 Γ 上的谓词，定义

$$\begin{aligned} \top_\Gamma &= \mathrm{id}_\Gamma, & \bot_\Gamma &= (0 \to \Gamma), \\ \varphi \wedge \psi &= \varphi \times_\Gamma \psi, & \bigvee_i \varphi_i &= \mathrm{im}\left(\coprod_i \varphi_i \to \Gamma \right). \end{aligned} \tag{71}$$

对于映射 $p\colon A \to \Gamma$ 和谓词 $u\colon U, \to A$，定义 Γ 上的存在谓词为

$$\exists_p(U) = \mathrm{im}(p \circ u) \hookrightarrow \Gamma.$$

普通几何相继式翻译为

$$\varphi \vdash_\Gamma \psi \quad \longmapsto \quad \mathsf{Eq}(\varphi \times_\Gamma \psi \longrightarrow \varphi). \tag{72}$$

对于子对象，这个条件意味着 φ 包含于 ψ。因此，存在量化结论断言其属于某个投影的像。加入一个特定见证，会通过一个项扩展理论，如定理 43 所述。

引理 58（经典编译）。对于每个小的普通几何理论 T，上述构造给出一个小依赖理论 T^Δ，并且具有自然等价

$$\mathrm{Mod}_{T^\Delta}(\mathcal{X}) \simeq N\,\mathrm{Mod}_T(\mathcal{X}_{\leq 0}) \tag{73}$$

对于所有 ∞-拓扑斯 $\mathcal{X}$。这里，$\mathcal{X}_{\leq 0}$ 是由0-截断对象构成的普通拓扑斯，而 N 表示神经函子 r.

证明。声明基本类型、函数、关系箭头及其有限语境积，并施加（66）和单态射条件。对于公理中出现的每个公式，使用相容像构造（67）命名运算（71）。施加（72）。小公理集的子公式树的并是小的；每个像定义都具有可数形状。因此，编译后的呈示是小的。通过保守地命名其子表达式，还可以考虑另一个序列。

基本模型恰好是 $\mathcal{X}_{\leq 0}$ 中的多类型结构。所命名构造的解释空间是可缩的。它们的值与该拓扑斯中的普通合取、析取、像和存在量化一致。对公式进行归纳即可证明（73）的对象部分。

对于态射，考虑关系 $m\colon R \to \Gamma$ 及其目标解释 $m'\colon R' \to \Gamma'$。原始类型上的映射会诱导出 $\eta_\Gamma\colon \Gamma \to \Gamma'$。可能的关系分量及其自然性三角形构成了以下对象的同伦纤维

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{X}}(R, R') \longrightarrow \mathrm{Map}_{\mathcal{X}}(R, \Gamma')$$

在 $\eta_\Gamma m$处。由于 m' 是单射的，这个纤维要么为空，要么可缩；当且仅当底层映射保留该关系时，它才非空。函数符号相容性同样在存在时唯一确定，因为相关目标都是 0-截断的。

辅助积、拉回、余极限和像都是小的定义扩张。根据推论 28，它们的遗忘函子是整个模型 ∞-范畴的等价，因此它们将每个原始

同态及其所有更高阶比较都通过可缩的选择空间延拓。翻译后的序列公理选出一个模型对象的全子范畴。原始数据上的映射空间是 0-截断的；定义扩张保留这些映射空间。因此，限制将完整模型 ∞-范畴识别为 T-模型普通范畴的神经。几何逆像保留定义构造，从而证明自然性。□

9.2 普通分类拓扑斯与保守性

令 $\mathcal{E}_T = \mathbf{Set}_{\mathbf{t}}[T]$ 并选择一个呈现它的小型有限极限几何句法位（C_T, J_T）。Set t

$$\mathcal{E}_T^{\infty} = \mathrm{Sh}(C_T, J_T; \mathcal{S}_{\mathbb{U}}).$$

这是$\mathcal{E}_T$的典范单局部化增强。其 0-截断对象构成$\mathcal{E}_T$，且该普通拓扑斯在等价意义下唯一确定此增强。对于每个 Grothendieck ∞-拓扑斯$\mathcal{X}$，将逆像限制在 0-截断对象上，得到 ∞-范畴之间的等价 [24]

$$\mathrm{Geom}(\mathcal{X}, \mathcal{E}_T^{\infty}) \simeq N\,\mathrm{Geom}(\mathcal{X}_{\leq 0}, \mathcal{E}_T).$$

伴随对应反转了所引定理中右伴随之间变换的方向，从而给出了我们关于逆像变换的约定。

定理 59（普通对应的恢复）。对于每个小的普通几何理论T，

$$\mathcal{G}_{T^{\Delta}} \simeq \mathcal{B}_{T^{\Delta}} \simeq \mathcal{E}_T^{\infty}, \qquad (\mathcal{B}_{T^{\Delta}})_{\leq 0} \simeq \mathbf{Set}[T]. \tag{74}$$

此外，

$$\mathrm{Geom}(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{T^{\Delta}}) \simeq N\,\mathrm{Mod}_T(\mathcal{X}_{\leq 0}).$$

该翻译在普通几何相继式上是保守的。

证明。 结合单局部化泛性质、普通分类拓扑斯定理 [17,28] 和引理 58，可得 $\mathrm{Geom}(\mathcal{X}, \mathcal{E}_T^{\infty}) \simeq \mathrm{Mod}_{T^{\Delta}}(\mathcal{X})$，且其关于$\mathcal{X}$自然。分类将此函子识别为由$\mathcal{B}_{T^{\Delta}}$表示的函子。将两个泛模型分别代入对方的分类器，便得到互逆的几何态射。重构并取 0-截断对象即可证明 (74)。

关于保守性，普通完备性表明，几何相继式可导，当且仅当它在所有相对于 $\mathbb{U}$ 的普通 Grothendieck 拓扑斯模型中有效。其翻译在每个 ∞-拓扑斯模型中有效，当且仅当满足该条件：一个方向可转到$\mathcal{X}_{\leq 0}$，另一个方向则利用每个此类 Grothendieck 拓扑斯的规范单局部化增强。将推论 42 应用于其翻译后的等价断言。由此得到

$$T \vdash_{\mathrm{geom}} (\varphi \vdash_{\Gamma} \psi) \quad \Longleftrightarrow \quad T^{\Delta} \vdash \mathsf{Eq}(\varphi \times_{\Gamma} \psi \to \varphi). \qquad \square$$

选取 P T^{Δ}的指标化边界表示。定理49将 t_P处的纤维识别为 $\mathcal{B}_{T^{\Delta}}$，因此 (74) 将 $\mathbf{Set}[T]$ 恢复为该纤维中的 0-截断对象范畴。

由一个闭类型自由生成的理论，其在 $\mathcal{X}$中的模型范畴为 $\mathcal{X}$，因为对该类型进行解释相当于选取一个对象。其分类器是自由有限极限范畴（由一个对象生成）上的预层 ∞-范畴。加入集合排序公理，即得到定理59的通常集合排序实例。

10 通过圆单值性的下降计算独立性

对于空理论，自由有限极限范畴等价于终对象范畴。其预层分类器是小空间的 ∞-范畴，因此重构给出

$$\mathcal{G}_{\varnothing} \simeq \mathcal{B}_{\varnothing} \simeq \mathcal{S}_{\mathbb{U}}.$$

空理论已经表达了圆及其二重覆盖。构造 $2 = 1 + 1$，其点为 0，1，以及推出类型

$$W = 1 \amalg_2 1.$$

它有点 N， S 以及路径 α_0， α_1： $N =_W S$。记 $\gamma \cdot \delta$ 为先沿 γ 再沿 δ 行进的路径，并设 $\ell = \alpha_0 \cdot \alpha_1^{-1}$: $N =_W N$。路径复合和逆由恒等消去导出。

定理 60（单值化与下降独立性）。在 N 和 S 上粘合两点纤维，且过渡映射分别取恒等映射和对换，会得到 W的二重覆盖。沿 ℓ传输会交换其片层。这通过以下判断将 ℓ与自反性区分开来：

$$q : \mathsf{Id}_{\mathsf{Id}_W(N,N)}(\ell, \mathsf{refl}_N) \ \vdash\ \mathsf{absurd}(q) : 0. \tag{75}$$

结构规则和依赖规则，连同同伦余极限构造、比较和代换稳定性，允许一个集合值模型，其中 ℓ 是自反性，而0 是空的。将该判断与其在此模型中的解释相比较，即可证明下降计算的独立性。

证明。我们通过将 N 处的两点纤维与 S处的两点纤维粘合，构造这个二重覆盖。其过渡映射决定了沿着从 N 到 S的两条路径进行的传输。

笛卡尔输入。 余积消去定义了 $\mathsf{sw} : 2 \to 2$，其中 $\mathsf{sw}(0) = 1$，$\mathsf{sw}(1) = 0$。将其比较规则应用于两个直和项，得到 $\mathsf{sw}^2 \simeq \mathsf{id}_2$。这表明 sw 是一个等价；结构识别和 (E) 提供其相干逆数据。令 $t_0 = \mathsf{id}_2$，并令 $t_1 = \mathsf{sw}$。在定义跨度$1 \leftarrow 2 \to 1$之上，取全空间跨度

$$2 \xleftarrow{h_N} 2 \times 2 \xrightarrow{h_S} 2, \qquad h_N(i,u) = u, \quad h_S(i,u) = t_i(u). \tag{76}$$

为两个端点投影都选择一个映射 $e : 2 \to 1$。由终对象性可知，这类选择构成的空间 $\mathsf{Map}(2, 1)$ 是可缩的。在中间顶点处，取第一投影 $2 \times 2 \to 2$。规则 (T) 为两个方形提供指向 1 的比较三角形。 h_N 对应的方形是乘积拉回。映射 $(i,\ u) \mapsto (i,\ t_i(u))$ 是 2 上的一个等价，其逆映射在余积计算意义下与它相同。它将 h_S 对应的方形识别为乘积拉回。因此，根据重索引比较和 (Tr)，两个方形都有可导出的拉回证书。这就指定了定理 16 中导出粘合构造所需的局部输入。

基与总体的比较路径。 将 $c : 2 \to W$ 记为所选基余锥的中间边。其两个比较三角形给出路径

$$\rho_i^N : c(i) =_W N, \qquad \rho_i^S : c(i) =_W S, \qquad \alpha_i = (\rho_i^N)^{-1} \cdot \rho_i^S.$$

这些就是陈述中所用推出表示的路径。将定理 16 的余极限棱柱构造应用于 (76)，得到 $g :\ V \to W$。规则 (Desc) 证明了其锥方块。置

$$P(w) = \Sigma_{v:V} \mathsf{Id}_W(gv, w),$$

并令 $p :\ F_g \to W$ 为其展示。等价 $V \simeq F_g$ 在 W 上将经证明的锥方块传递到此展示。经证明的锥方块以及附录 A 中明确给出的双向比较，给出等价

$$b_N : 2 \simeq P(N), \qquad b_S : 2 \simeq P(S), \qquad b_C(i,-) : 2 \simeq P(c(i)).$$

这些就是 (6) 之后引入的正向比较 c_k，此处位于所选的三个纤维表示中。每个比较都包含其截面三角形、其逆以及相应的高阶计算。特别地，这些表示的过渡映射就是输入中指定的映射 h_N 和 h_S，以及其指定的比较。

使用纤维表示等价，将 V转换为依赖总上下文 $\Sigma_{w:W} P(w)$。两个上部余锥三角形是该总上下文中的路径，分别从 $(i,\ u)$ 的像通向 u 和 $t_i(u)$ 的像，位于

端点处。导出余极限棱柱的混合面分别将它们的投影识别为到 W 的 ρ_i^N和 ρ_i^S。因此，将命题 63 应用于这些固定的投影路径，可得到依赖项

$$\mathrm{tr}_P(\rho_i^N, b_C(i,u)) = b_N(u), \tag{77}$$
$$\mathrm{tr}_P(\rho_i^S, b_C(i,u)) = b_S(t_i(u)). \tag{78}$$

棱柱的 2-面给出总路径，其 3-面则比较这些路径的投影与所选的基路径。恒等消去将这些比较转化为两个传输方程。高阶面给出 u 中的相干性，等价地说，就是局部拉回比较的自然性。

单值化方程。附录 A 中通过路径归纳导出的传输逆与拼接律，将 (77)–(78) 转化为

$$\mathrm{tr}_P(\alpha_i, b_N(u)) = b_S(t_i(u)). \tag{79}$$

事实上，沿 ρ_i^N 的逆传输首先根据 (77) 将 $b_N(u)$ 变为 $b_C(i,\ u)$，然后沿 ρ_i^S 的传输给出 (78)。因此，用固定纤维表示来表达时，这两个传输映射分别为 t_0 和 t_1。等价 b_N 和 b_S 将这些计算与粘合族中的传输对应起来。

对于 $\ell = \alpha_0 \cdot \alpha_1^{-1}$，先将 (79) 用于 $i=0$，再使用其关于 $i=1$ 的逆形式。由此得到的计算为

$$\mathrm{tr}_P(\ell, b_N(0)) = b_N(t_1^{-1} t_0(0)) = b_N(1). \tag{80}$$

一个项 $q : \mathrm{Id}_{\mathrm{Id}_W(N,N)}(\ell, \mathrm{refl}_N)$ 通过恒等消去，导出左侧与沿 refl_N 传输的识别，其值为 $b_N(0)$。与 (80) 合成并应用 b_N 的逆后，可得到一个 $\mathrm{Id}_2(0,1)$ 的项。传输定律使这一构造在代换下保持相干，并给出其高阶计算。

区分环路与自反性。 对由局部族 1 和 0 构成的离散两点图表应用粘合。其输出是一个 2 上的族 H，带有局部等价 $H(0) \simeq 1$ 和 $H(1) \simeq 0$。选取与单位项对应的 $H(0)$ 的项，沿导出路径 $0 =_2 1$ 对其进行传输，然后应用 $H(1) \simeq 0$。输出即为 (75) 中的项 $\mathrm{absurd}(q)$。 H 的总上下文在 $1+1$ 上等价于 $1+0$。(Stab) 确认由此得到的上余积余锥。

集合值模型与独立性。 在$\mathcal{D} = N\mathbf{Set}_{\mathbb{U}}$中解释结构规则和依赖规则 (HC)、(HC-comp) 与 (Stab)，其中所有箭头均为展示，采用通常的有限极限和余极限，恒等类型构造由对角映射给出，并配有恒等自反性。图表 $K \to N\mathbf{Set}_{\mathbb{U}}$ 等价于一个函子 $hK \to \mathbf{Set}_{\mathbb{U}}$。范畴 hK 以 K 的顶点为对象、以其边为生成箭头，退化边充当恒等态射，并且每个 2-单形都对其边施加 $e_{02} = e_{12} \circ e_{01}$。锥规则表达了通常的泛性质。集合的余极限在拉回下稳定，因此 (Stab)（包括其空情形）成立。

对于每条保留的原始规则 $r : A \hookrightarrow B$，引理 22 证明中针对 r 的计算给出了$\mathcal{D}$中的可缩扩张纤维。它也适用于 $\mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{D})$，其中极限和余极限逐点计算，同构也逐点判定。由引理 19，限制映射 $\mathscr{M}_B(\mathcal{D}) \to \mathscr{M}_A(\mathcal{D})$ 是范畴纤维化。两项纤维计算给出了 (36) 中核心上的 $m = 0,1$ 等价。因此，引理 24 证明中的映射空间论证表明，该限制映射是平凡范畴纤维化。它对每个小单态射 $J_0 \hookrightarrow I$ 的提升性质，给出了相对规则 (15)，并在 J_0上具有指定的输出。

在这个模型中，$W = 1 \amalg_2 1$ 是一个单元素集，两条路径都是自反性。因此，(75) 的假设有见证，而结论是空集。根据可靠性，这个模型见证了独立性。推出也刻画了计算的几何。在集合中，(76) 中的识别将四个端点元素合并为一个等价类。在空间中，基的推出是一个圆，而下降将两点纤维粘合成它的二重覆盖。将 (79) 中的两个传输映射复合，得到绕 ℓ的对换。□

11 结论

小几何类型论的上下文和代换构成其分类 ∞-拓扑斯的呈示。在这个呈示中，族的截面空间表示相应类型的项、项之间的路径以及它们的高阶识别。当向理论中添入一个有限变量望远镜时，新的分类器就是在该望远镜的总上下文上的切片。

下降赋予了这一对应以计算内容。图表上的笛卡尔族通过取其全空间的余极限，继而取在基底余极限上的纤维来进行粘合。计算规则恢复了带有规定传输的局部族。在圆上，沿第一条构造子路径的传输固定纤维标签，而沿第二条构造子路径返回的传输则交换它们。所得的对换就是二重覆盖的单值化。对于每个小余极限，同样的规则将粘合和限制识别为族范畴的逆等价。因此，将粘合作为原始规则引入，所得到的族和项空间与从全空间推导出的结果相同。

有限同伦记录将有限极限公理转化为依赖类型，并且每个 Grothendieck∞-拓扑斯在所得到的语言中都有一个小呈示。在对偶性下，一个解释充当几何态射的逆像，而解释之间的变换则给出相应的逆像变换。对于普通几何理论，这一对应同时恢复了经典的分类拓扑斯（即单局部分类对象的 0-截断对象）以及模型之间的普通同态。

将对偶性应用于指标化边界表示以及配备模型的呈示，可得到一个几何态射，其每个小理论的分类器都是一个纤维。在 Sierpiński locale 上，启用单个等价公理会使该纤维从 $\mathcal{S}_{\mathbb{U}} \times \mathcal{S}_{\mathbb{U}}$ 变为 $\mathcal{S}_{\mathbb{U}}$。将对偶性限制为 Morita 等价，可得到一个带有相干传输的族。 C_2-空间的拓扑斯与切片 $\mathcal{S}_{/K(C_2,2)}$ 的 Morita 分支的同伦类型分别为 $K(C_2,2)$ 和 $K(C_2,3)$（推论 55 和 56）。

参考文献

1. Anel, M., Biedermann, G., Finster, E., Joyal, A.：《 ∞-拓扑斯的左正合局部化 I：高阶层》。数学进展 400, 108268（2022） 2. Anel, M., Biedermann, G., Finster, E., Joyal, A.：《 ∞-拓扑斯的左正合局部化 II：Grothendieck 拓扑》。纯粹与应用代数杂志 228(3)，107472（2024） 3. Anel, M., Lejay, D.：可指数化高阶拓扑斯。arXiv:1802.10425（2018） 4. Avigad, J., Kapulkin, K., Lumsdaine, P.L.：类型论中的同伦极限。《计算机科学中的数学结构》25(5)，1040–1070（2015） 5. Bauer, A., Haselwarter, P.G., Lumsdaine, P.L.：依赖类型理论的一般定义。arXiv:2009.05539（2020） 6. Boulier, S.：HoTT 中的余极限。《同伦类型论》（2016年1月8日） 7. Buchholtz, U., Schipp von Branitz, J.：命题几何类型论。HoTT/UF 2025，研讨会摘要 8. Caramello, O.：《理论、站点、拓扑斯：通过拓扑斯理论的“桥梁”联系并研究数学理论》。牛津大学出版社（2017） 9. Casacuberta, C., Gutiérrez, J.J., Martínez-Carpena, D.：可作图的无穷范畴。arXiv:2511.01497（2025） 10. Clairambault, P., Dybjer, P.：局部笛卡尔闭范畴与 Martin-Löf 类型理论的双等价。《计算机科学中的数学结构》24(6)，e240606（2014） 11. Di Liberti, I., Lobbia, G.：图表与分类逻辑斯。arXiv:2403.09264（2024） 12. Di Liberti, I., Meadows, N.J.：通过加权极限分类无穷拓扑斯。arXiv:2512.15613v2（2026） 13. Gambino, N., Garner, R.：恒等类型弱因子分解系统。《理论计算机科学》409(1)，94–109（2008） 14. Hart, P., Hou (Favonia), K.-B.：同伦类型论中的余切片余极限。载于：第33届EACSL计算机科学逻辑年会（CSL 2025），LIPIcs，第326卷，第46:1–46:20页（2025） 15. Heindel, T., Sobociński, P.：成为范坎彭是一个泛性质。《计算机科学中的逻辑方法》7(1)，文章14（2011）

16. Isaev, V.：带标记对象的模型范畴。arXiv:1610.08459（2016） 17. Johnstone, P.T.：《大象素描：拓扑斯理论纲要》，第1–2卷。牛津大学出版社（2002） 18. Kapulkin, K., Lumsdaine, P.L.：类型理论的同伦理论。数学进展 337，1–38（2018） 19. Kapulkin, K., Szumiło, K.：有限完备(∞，1)-范畴的内部语言。Selecta Mathematica 25，文章33（2019） 20. Licata, D.R., Shulman, M.：计算同伦类型论中圆的基本群。载于：第28届ACM/IEEE计算机科学逻辑年会（LICS），第223–232页（2013） 21. Lumsdaine, P.L., Shulman, M.：高阶归纳类型的语义。《剑桥哲学学会数学会刊》169(1)，159–208（2020） 22. Lumsdaine, P.L., Warren, M.A.：局部宇宙模型：依赖类型理论中一个被忽视的相容性构造。《ACM计算逻辑汇刊》16(3)，23:1–23:31（2015） 23. Lurie, J.：导出代数几何 V：结构化空间。arXiv:0905.0459（2009） 24. Lurie, J.：《高阶拓扑斯理论》。数学研究年刊，第170卷。普林斯顿大学出版社（2009）。修订版 25. Lurie, J.：Kerodon 26. Lynch, O.：几何类型论导论。与D.J. Myers合作。CT 2026，摘要 27. Macpherson, A.W.：添入余极限。arXiv:2111.12117（2021） 28. Makkai, M., Reyes, G.E.：《一阶范畴逻辑：拓扑斯理论及相关范畴中的模型论方法》。数学讲义，第611卷。Springer（1977） 29. Maruyama, Y.：高阶 tripos 理论。arXiv:2610.27163（2026） 30. Maruyama, Y., Nasu, R.：通过合成上同调测量同伦类型论中的单值性及其失效。载于：第9届应用范畴论国际会议（ACT 2026），EPTCS 31. Møller, J.M., Scherer, J.：能否分类有限 Postnikov块？《伦敦数学学会通报》42(4)，661–672（2010） 32. Nguyen, H.K., Uemura, T.：∞-类型理论。《Higher Structures》9(1)，179–226（2025） 33. Nikolaus, T.：高阶范畴的代数模型。《Indagationes Mathematicae》21(1–2)，52–75（2011） 34. Puppe, V.：关于“同伦纤维化”的一则评注。《Manuscripta Mathematica》12，113–120（1974） 35. Raptis, G., Schäppi, D.：高阶拓扑斯理论中的平坦函子。arXiv:2208.13897（2022） 36. Rezk, C.：单纯层的纤维化与同伦余极限。arXiv:math/9811038（1998） 37. Rezk, C.：拓扑斯与同伦拓扑斯。讲义（2010） 38 2021 39 2019 . Rezk, C.：《高阶拓扑斯理论讲座》（利兹，）。修订版 . Rijke, E.：《分类类型》。博士论文，卡内基梅隆大学（2018 09435 40 1906 2025）。arXiv: . . Rijke, E.：《同伦类型论导论》。剑桥大学出版社（） 41. Riley, M.：《几何类型论：两种实现方式》。拓扑斯研究所（2026年6月15日） 42. Shulman, M.：通过下降构造(∞，1)-拓扑斯。IAS 单值基础讨论会（2013年2月22日） 43. Shulman, M.：所有(∞，1)-拓扑斯都有严格单值宇宙。arXiv:1904.07004（2019） 44. Sojakova, K.：作为同伦初始代数的高阶归纳类型。载于：第42届ACM SIGPLAN-SIGACT编程语言原理研讨会（POPL），第31–42页（2015） 45. Stenzel, R.：高阶几何层理论。arXiv:2205.08646v2（2024） 46. Stenzel, R.：(∞，1)-site 的概念及相关形式结构。arXiv:2306.06619（2023） 47. Toën, B., Vezzosi, G.：同伦代数几何 I：拓扑斯理论。数学进展 193(2)，257–372（2005） 48. Uemura, T.：类型论语义的一般框架。《计算机科学中的数学结构》33(3)，134–179（2023） 49. Uemura, T.：(∞，1)-范畴中的高阶归纳类型。arXiv:2410.17615（2024） 50. Uemura, T.：作为 ∞-逻辑斯图表语言的同伦类型论。《计算机科学中的逻辑方法》22(1)，25:1–25:39（2026） 51. 单值基础计划：《同伦类型论：数学的单值基础》。普林斯顿高等研究院（2013） 52. Vickers, S.：算术宇宙与分类拓扑斯。《Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques》58，213–248（2017）

A 推导路径归纳、依赖余极限消去与粘合

在生成语法中，构造子的各个面编码了它的投影、截面方程和高阶计算。我们利用这些面推导出代换、路径归纳、依赖余极限消去，以及粘合的局部计算。在切片中工作，可以在指定的上下文中执行相同的操作。

A.1 实现派生证明包

证明包中指定的图表给出了其类型判断和泛比较判断。相对证明包还指定了一个参数形状，以及一个子形状；在该子形状上，输出胞腔已经给定。

引理 61（实现证明包的判据）。设 $A \hookrightarrow B$ 是小呈示的包含映射，其在带标记呈示的模型之 ∞ 范畴上的限制，对于每个几何宇宙都是平凡范畴纤维化。$G_{\mathbb{T}}$ 中每个可推导的 A 数组，都是句法胞腔与可推导证书构成的 B数组的限制。对于在一个小参数形状上变化的输入，该扩张在给定子形状上与指定的输出一致。这些输出中的一个小集合可以通过小型定义扩张来命名。同一陈述也适用于指定的上下文切片，并使用其切片证书解释。

证明。 取 $\mathcal{D} = \mathcal{G}_{\mathbb{T}}$。可导出输入是限制纤维化目标中的一个顶点，因此顶点提升是一个单纯映射 $B \to \mathcal{G}_{\mathbb{T}}$，其限制为该输入。该映射的每个值都是一个语法胞腔。根据对 $\mathcal{G}_{\mathbb{T}}$ 中证书集的识别，它所保持的每个证书都是可推导的。对于单态射 $J_0 \hookrightarrow I$，伴随提升问题是 (38)。这给出了相对断言，并且在 $B \times J_0$ 上恰好使用了所指定的胞腔。其输出及其证书见证构成一个小集合，因此引理 27 将它们连同生成它们的构造子一并命名。

对于在 Γ 上的切片，在几何宇宙中 $(\mathcal{G}_{\mathbb{T}})_{/\Gamma}$ 应用相同的论证。切片胞腔是在其形状上与末顶点 Γ 相连的胞腔。因此，输出保留该末顶点。拉回证书和余极限证书在其总图表上表示，等价性证书由其总等价表示，而终切片对象 $q\colon X \to \Gamma$ 则由 $\mathsf{Eq}(q)$ 表示。单位展示表示 id_{Γ}。如命题 30 所述，这些翻译在原始语法中给出了可推导证书。它们的支撑是小的，因此同样的几何实现论证适用。□

引理 62（复合与消去包）。一个内复合角和带标记外角

$$\langle \Lambda^2_0 \mid \mathsf{Eq}(01) \rangle \hookrightarrow \langle \Delta^2 \mid \mathsf{Eq}(01) \rangle \tag{81}$$

根据引理 *61*，它们允许相对扩张。特别地，给定 $u\colon\ x \xrightarrow{\simeq} y$ 和 $d\colon\ x \to z$，后一个包产生 $j\colon\ y \to z$ 以及一个三角形 $ju \simeq d$，并带有所有规定的高阶边界。

证明。 内复合包是 (H)。对于 (81)，根据带标记提升论证，限制是一个范畴纤维化。固定 $x,\ y,\ z,\ u,\ d$。其同伦纤维是对 d而言的前复合的同伦纤维

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{D}}(y,z) \xrightarrow{u^*} \mathrm{Map}_{\mathcal{D}}(x,z).$$

与 u 的一个逆进行复合即为 u^*的逆，其逆同伦由两个逆三角形及其相干性给出。因此，u^* 是一个等价，其同伦纤维是可缩的。等价地，使用一个内角将 d 与 u^{-1} 复合，并利用 $u^{-1}u \simeq \mathsf{id}_x$ 来得到所展示的三角形。在每个 $\mathsf{Fun}(\Delta^m,\ \mathcal{D})$ 中应用同样的计算，并利用引理 24 的 $m = 0,\ 1$ 论证，即可证明标记限制是一个平凡范畴纤维化。此描述适用于任意拟范畴。引理 61 给出了其句法实现和语境实现，而推出积计算给出了所有相对实例。□

定义性的推出将输入图表、在其边界上选定的输出及其计算见证结合在一起。方程（12）–（13）将每个新输出的面与指定的胞腔对应起来。我们首先使用这一描述来计算重索引。

A.2 重索引、上下文替换与依赖和

令 $p\colon E \to \Gamma$ 设其为类型 A 的展示，并令 $f\colon \ \Delta \to \Gamma$。（重索引）形成数据包生成

$$\begin{array}{ccc} E_f & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ {\scriptstyle p_{A[f]}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \Delta & \xrightarrow[f]{} & \Gamma \end{array} \tag{82}$$

具有展示($p_{A[f]}$)和拉回。展示 $p_{A[f]}\colon\ E_f \to \Delta$ 表示重索引类型 $A[f]$，其总上下文为 E_f。给定此余扇上的另一个锥 c，将 c和经过认证的锥 t置于 $\partial\Delta^1 \star V$的两个顶点处，并将 t 置于最后。 $n=1$ 比较（重索引）产生中介边以及三个相容三角形。两个具有相容三角形边界的此类比较，通过 $n=2$ 规则进行比较，而维数 n 下的规则则提供后续的每个边界比较。

假设 a 是 p的一个项，由 $s\colon\ \Gamma \to E$ 及其截面三角形 $ps \simeq \mathrm{id}_\Gamma$表示。一个(H)实例构成 $u = sf$。对截面三角形进行胡须运算得到 $pu \simeq f$。顶点为 Δ、边为 u和id_Δ的锥，以及这个比较，是前述 $n=1$ 规则的显式输入。其输出包含

$$s_f : \Delta \to E_f, \qquad p_{A[f]} s_f \simeq \mathrm{id}_\Delta, \qquad \bar{f} s_f \simeq sf,$$

将这些三角形与原始截面的计算进行比较。前两项是项$a[f]$，第三项是其重索引计算。相干胞腔是锥比较的一部分，因此截面三角形恰好具有项边界（10）。

对于变量，置 $f = p$ 并使用顶点为 E、两条边均为 id_E且公共复合为p的恒等锥。它到重索引锥中的比较给出

$$v : E \longrightarrow E \times_\Gamma E, \qquad \mathrm{pr}_2\, v \simeq \mathrm{id}_E.$$

这是扩展上下文中的变量项。剩余的投影计算将其在原始族中的值与 E的恒等代换对应起来。

对于 $g\colon\ \Theta \to \Delta$， p、 f和 g 所对应的拼接重索引方形在 $E \to \Gamma \leftarrow \Theta$上构成一个拉回锥。直接形成的 fg 方形是另一个这样的锥。通过（重索引）从两个方向对它们进行比较，得到

$$A[f][g] \simeq A[fg]. \tag{83}$$

该比较保持总上下文投影及其三角形。恒等情形将沿 id_Γ 的拉回与恒等方块进行比较，并给出 $A[\mathrm{id}_\Gamma] \simeq A$。

设 $E \to \Gamma_0$ 是一个展示，并设 $h\colon\ \Gamma_r \to \Gamma_0$ 是由三个或更多代换组成的串 $\Gamma_r \to \cdots \to \Gamma_0$ 的一个选定复合。根据拉回拼接，迭代拉回的每一种括号化都给出了余扇 $E \to \Gamma_0 \xleftarrow{h} \Gamma_r$ 上的一个极限锥。比较2-胞腔（包括结合律比较）是映入该极限锥的映射之间的边界。它们的后续边界包括五边形和单位相容性。相应的比较格式填充这些边界。更明确地说，在相关锥图的范畴中，将（重索引）的相对形式应用于 $\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n$ 。在每一步中，输入都是带有此前给定各面的公共基图表，输出则是其泛比较。引理21和61证明了在固定这些面的条件下的扩张。

一串可复合的上下文代换为输入族及其重索引问题给出了参数图。引理 23 中的函子范畴保留了该图表中的每个映射。使用这些参数应用（重索引），即可构造所有重新索引的展示及其比较三角形。在一个带有预设展示和三角形的子图上，推出积（15）使这些胞腔成为该构造的边界值。因此， $I = \Delta^n$ 记录了可复合的字符串及其高阶复合数据，而一个

任意小的 I 允许一次性处理完整的代换图。这使得每个上下文代换都具有自然性。对于这些比较的推导树，对生成元名称的代换通过引理 5 的判断上函子性递归作用。

重索引还为依赖和提供配对和投影。对于 Disp(p) 和 Disp(q)，在$F \xrightarrow{q} E \xrightarrow{p} \Gamma$的情形下，（和）与复合 h 构成三角形： $F \to \Gamma$ 以及 Disp(h)。和类型具有总上下文 F。 a 的截面和 p 的截面 b，根据（82），给出一个映射 t： $\Gamma \to F$ 以及一个三角形 $qt \simeq a$。将此三角形与 a 的截面三角形以及（和）三角形复合，产生 $ht \simeq \mathrm{id}_\Gamma$。内角填充提供了共同的比较单纯形。因此，$(t, ht \simeq \mathrm{id})$ 是对 (a, b)。

反过来， t 的截面给出 h 的截面。由 t、id_Γ 和所选的复合比较组成的锥，给出拉回 $q[qt]$ 的一个截面。这就是两个投影。配对后进行投影，以及投影后进行配对，会在相应的重索引锥范畴中进行比较。它们的 $n = 1$泛比较给出这些映射；它们的 $n = 2$ 比较胞腔给出逆向计算；更高阶规则则提供相容的后续胞腔。命题17中的映射空间计算准确地确定了这些运算的逐纤维内容。

上下文 Γ、z： $\Sigma_{x:A} B(x)$ 和 Γ、x： A、y： $B(x)$ 具有相同的总体对象 F，且它们的投影由所选的（和）三角形联系起来。因此，任一上下文上的动机都是该总上下文上的一个族，而其截面给出依赖和消去子。沿配对进行重索引会得到其计算项。这一过程经过指定的总上下文及其比较，因此相对（和）与（重索引）数据包保留任意的动机和项边界。

A.3 路径归纳及其计算规则

对于 p： $E \to \Gamma$，通过重索引构造 $Q = E \times_\Gamma E$。商（16）将其第一个锥与 p 上的恒等锥识别，并保持第二个锥被证明为一个拉回。其比较边是相对对角线δ： $E \to Q$。（恒等）附加给出

$$E \xrightarrow{r} \simeq I \xrightarrow{q} Q, \qquad qr \simeq \delta, \qquad \mathsf{Disp}(q).$$

从 I 到 E 的两个副本的映射给出其两个端点变量；映射 r 是自反性。 r 的逆数据由（E）生成。

设 c： $C \to I$ 是一个动机的展示，并设 d： $E \to C$ 是满足指定三角形 ϑ： $cd \simeq r$ 的自反性上的项。在切片 $\mathcal{E} = (\mathcal{G}_{\mathbb{T}})/_I$ 中工作。其对象

$$a = (E \xrightarrow{r} I), \qquad b = (I \xrightarrow{\mathrm{id}} I), \qquad e = (C \xrightarrow{c} I)$$

具有一个等价 u： $a \to b$，其底层边为 r，且三角形 ϑ 是一个态射 d： $a \to e$。它们在 $\mathcal{E}$ 中构成外角（81）。其扩张提供了

$$j : b \longrightarrow e, \qquad ju \simeq d \quad \text{in } \mathcal{E}. \tag{84}$$

这就是路径消去子 J_C 及其在自反性上的计算。

我们详细写出原始胞腔边界。在这个连接定义的切片中，一个 2-单形是一个具有以下顶点的 3-胞腔

$$(E, I, C, I).$$

固定边为 $01 = r$、 $02 = d$、 $03 = r$、 $13 = \mathrm{id}_I$ 和 $23 = c$。其固定面 013 是 r 上的退化三角形，而其固定面 023 是 ϑ。新边 $12 = j$ 和新面为

$$123 : \ cj \simeq \mathrm{id}_I, \qquad 012 : \ jr \simeq d. \tag{85}$$

完整四面体陈述了计算 012 与截面见证 123 以及给定的局部见证 023 之间的相容性。因此，这两个面给出一个截面项及其在自反性处的计算，而

该四面体则见证了它们的相容性。命题17将后一个截面空间路径转换为所展示的类型论判断中的恒等类型计算。

还可以利用 (E) 的逆字符串给出一种具体描述。记 $g : I \to E$ 为逆边，$\eta :\ gr \simeq \mathrm{id}_E$ 为字符串 010，$\epsilon :\ rg \simeq \mathrm{id}_I$ 为 101。可以将 j 取为复合 dg。其截面见证是如下粘合

$$cdg \overset{\vartheta g}{\Longrightarrow} rg \overset{\epsilon}{\Rightarrow} \mathrm{id}_I.$$

其计算是粘合 $dgr \overset{d\eta}{\Longrightarrow} d$，并结合结合律比较。字符串 0101 提供了$r\eta \simeq \epsilon r$，这恰好是 (85) 中所需的相容性。更长的字符串和相对复合包给出了这些选择的高阶相容性。这种逆描述与外角描述位于同一个可缩扩张纤维中。

对于形状 H 上的参数化动机和局部项，若消去子输出已在 H_0，$\to H$ 上指定，则在切片中应用 (81) 的相对版本。它会生成整个族 (84)，同时保留这些输出。取 $H_0 = \partial\Delta^n$ 即可得到每个带有给定低维边界的高阶计算。沿上下文代换将整个包拉回，即可得到该上下文中的相应路径归纳包。重索引保留自反等价及其相对比较，因此同一提升性质给出了代换计算及其高阶相容性。由此建立恒等类型形成规则的完整依赖消去与计算方案。

A.4 全空间类型中的传输与恒等类型

路径归纳包将传输定义为如下判断

$$x : A,\ u : P(x),\ y : A,\ \gamma : \mathsf{Id}_A(x, y)\ \vdash\ \mathrm{tr}_P(\gamma, u) : P(y).$$

其自反性数据是变量 u。为了保留参数 u，在应用 (84) 之前，先沿第一个端点上的族拉回自反等价。因此，它在自反性处的计算是一个项 $\mathrm{tr}_P(\mathrm{refl}_x,\ u) = u$。同样的构造定义路径求逆、拼接以及映射对路径的作用。我们采用如下约定：$\gamma \cdot \delta$ 先沿 γ，再沿 δ。对路径变量进行恒等消去，得到如下计算

$$\mathrm{tr}_P(\gamma \cdot \delta, u) = \mathrm{tr}_P(\delta, \mathrm{tr}_P(\gamma, u)), \tag{86}$$

$$\mathrm{tr}_P(\gamma^{-1}, \mathrm{tr}_P(\gamma, u)) = u, \tag{87}$$

$$h_y(\mathrm{tr}_P(\gamma, u)) = \mathrm{tr}_Q(\gamma, h_x(u)) \tag{88}$$

对于族映射 $h :\ P \to Q$ 在 A 上。每个右端都是与左端处于同一上下文中的项。在自反性处，所需的恒等式就是已经导出的单位计算。路径归纳包将这些恒等式扩展到所述路径上下文；其相对形式给出了这些计算之间的相干比较。

命题 63（全空间类型中的路径）。对于一个族 $x\colon A \vdash P(x)$ 类型 以及项 $u\colon P(x)$、$v\colon P(y)$，存在一个导出的等价

$$\begin{aligned}&\mathsf{Id}_{\Sigma_{a:A}P(a)}((x, u), (y, v))\\ &\quad\simeq \Sigma_{\gamma:\mathsf{Id}_A(x,y)}\mathsf{Id}_{P(y)}(\mathrm{tr}_P(\gamma, u), v).\end{aligned} \tag{89}$$

其第一投影是全空间投影在路径上的作用。该等价及其两个逆计算关于参数具有自然性，并且与重索引兼容。

证明。 将 β_u 写作：$\mathrm{Id}^{P(x)}(\mathrm{tr}_P(\mathrm{refl}_x,\ u)\ u)$，表示传输的自反性计算。对全路径 z at $z = \mathrm{refl}^{(x,u)}$ 进行恒等消去时，二元组 $(\mathrm{refl}_x,\ \beta_u)$ 给出了所需的数据。通过路径归纳扩展此数据，即得到正向映射。

对于逆映射，先消去 γ。在 $\gamma = \mathrm{refl}_x$ 处，纤维数据是一条路径 $h : \mathrm{tr}_P(\mathrm{refl}_x, u) = v$。将$w \mapsto (x, w)$应用于路径 $\beta_u^{-1} \cdot h :\ u = v$，即可得到所需的总路径。在 $h = \beta_u$ 处，逆消去以及配对对自反性的作用，将这条总路径识别为 $\mathrm{refl}^{(x,u)}$。结合正向映射的计算，即可通过对 z 归纳，证明总路径上的逆律。对于配对上的逆律，消去 γ，并使用等价 $q \mapsto \beta_u \cdot q$，它将从 $q :\ u = v$ 到 $h : \mathrm{tr}_P(\mathrm{refl}_x, u) = v$ 的路径相对应。对 q 作路径归纳后，命题归约为 $q = \mathrm{refl}_u$；此时右单位律将 h 识别为 β_u，而前述两项计算给出 $(\mathrm{refl}_x, \beta_u)$。相对恒等消去给出了逆律的高阶相容性，上下文路径归纳包则给出了所述的参数自然性和代换自然性。□

全空间余锥与基余锥之间的交换棱柱，给出一条全空间路径及其指定的投影基路径。在（89）下，其剩余分量恰好就是一次传输计算。棱柱的下一维胞腔则给出该计算与投影路径相容的条件。这就是单值化计算中所用的推导。

A.5 固定动机下同伦余极限的依赖消去

设 $d :\ K \to \mathcal{G}_{\mathbb{T}}$ 具有经认证的构造余锥 $c :\ K \star \Delta^0 \to \mathcal{G}_{\mathbb{T}}$，其顶点为 W，并设 $p :\ E \to W$ 为指定的展示。局部截面三角形的相干集合是一个数组

$$b^\sharp : K \star \Delta^{\{1,2\}} \longrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{T}}, \qquad b^\sharp(1) \equiv E, \quad b^\sharp(2) \equiv W, \qquad b^\sharp|_{12} \equiv p, \quad b^\sharp|_{K\star\{2\}} \equiv c.$$

它在 $K \star \{1\}$ 上的限制是局部余锥 b，其顶点为 E。对于 K的一个顶点 k， $b^\sharp$ 在 $k12$上的三角形给出所提供的计算 $\theta_k : pb_k \simeq \iota_k$。 $b^\sharp$ 的高阶单纯形记录了这些三角形所规定的相干性。拉回展示 $\iota_k^* p$ 的局部截面在与其拉回投影复合后，恰好具有这种形式；拉回方块则提供了所展示的三角形。

命题 64（规则层级的依赖余极限消去）。由 c、 p 和 $b^\sharp$，这些规则生成一项 $\mathsf{ind}_{c,\ p}(b^\sharp) :\ p$，其定义在 W 上，并附带其完整局部计算数组。该构造由一个维数为 1 的 (HC-comp) 实例，继而一个维数为 2 的实例组成。其边界限制为给定的 p、 c 和 $b^\sharp$。完整消去包的每个指定高阶边界都可通过两个高阶比较实例延拓。对于每个小单态射 J_0 、$\to I$，同一构造也适用于相对于已在 J_0 上指定的消去包的 I 参数化输入。它也允许在固定外部上下文中直接按规则层级实现。

证明。输入角。通过单纯坍缩 $\Delta^{\{0,2\}} \to \Delta^0$ 重复 c 的顶点。将所得的退化构造子条带记为 $c^{\deg} :\ K \star \Delta^{\{0,2\}} \to \mathcal{G}_{\mathbb{T}}$。其边 02 是 id_W。它在 $K \star \{2\}$ 上与 $b^\sharp$ 相同。因此，这两个条带在以下对象上定义了一个数组：

$$S_K = K \star \Lambda^2_2 = \left(K \star \Delta^{\{0,2\}}\right) \cup_{K\star\{2\}} \left(K \star \Delta^{\{1,2\}}\right).$$

顶点 0 处的余锥是 c，并携带其给定的 HC_K 证书。顶点 0、1、2 分别是 W、 E、 W。底层截面及其局部比较。在维数 1 中，将 (HC-comp) 应用于$K \star \{0\}$ 和 $K \star \{1\}$上的两个余锥。这会邻接面 $K \star \Delta^{\{0,1\}}$。其边 01 是一个代换 $s :\ W \to E$，而其在 $k01$ 上的三角形是 $\xi_k :\ s\iota_k \simeq b_k$。该面的所有高阶单纯形均由同一个规则实例提供。扩大的阵列具有形状 $K \star \partial\Delta^2$。

依赖截面三角形。在维数 2 中，将 (HC-comp) 应用于这个完整边界，并区分其首顶点余锥。它给出一个数组 $\Phi\colon\ K\star\Delta^2\to\mathcal{G}_{\mathbb{T}}$。三角形 $\tau\colon=\Phi|_{012}$ 满足判断边界方程

$$d_0\tau\equiv p,\qquad d_1\tau\equiv \mathrm{id}_W,\qquad d_2\tau\equiv s.$$

因此，根据 (10)，τ 是固定展示 p 的一个项。我们将此项命名为 $\mathsf{ind}_{c,\ p}(b^\sharp)$。对于每个 $k\in K_0$，四面体$\Phi|_{k012}$ 具有以下四个指定的面

$$d_0(\Phi|_{k012})\equiv\tau,\qquad d_1(\Phi|_{k012})\equiv\theta_k,\qquad d_2(\Phi|_{k012})\equiv c^{\deg}|_{k02},\qquad d_3(\Phi|_{k012})\equiv\xi_k.$$

这正是截面方程 $ps\simeq\mathsf{id}_W$ 与 W 上的局部计算 $s\iota_k\simeq b_k$ 之间的相容性。对于 K 的一个 q-单纯形 σ，细胞 $\Phi|_{\sigma\star012}$ 的维数为 $q+3$，并提供相应的高阶相容性。它在 $\sigma\star12$ 上的面恰好是 $b^\sharp$ 的原始细胞。所有面方程和退化方程都是构造子方程 (12)–(14)。

等价地，整个依赖消去包的包含映射具有显式的胞腔分解

$$K\star\Lambda^2_2\hookrightarrow K\star\partial\Delta^2\hookrightarrow K\star\Delta^2. \tag{90}$$

第一个箭头是面 01 上维度 1 比较的推出；第二个箭头本身就是维度 2 比较。两个推出都继承输入上的每个证书，包括 Disp(p) 和给定的构造子证书。这也描述了 $K=\varnothing$ 的构造。

高阶项边界。 高阶计算可以直接从项约定 (11) 中读出。令 $\mathsf{Elim}(c,\ p,\ b^\sharp)_n$ 由 $K\star\Delta^{n+2}$ 上的数组组成，其中顶点 0，……，n，$n+2$ 均为 W，顶点 $n+1$ 为 E，且其限制满足以下两个方程。在 $K\star\Delta^{\{0,\dots,n,n+2\}}$ 上，该数组是将所有顶点折叠后从 c 得到的退化扩张。在 $K\star\Delta^{\{n+1,n+2\}}$ 上，它是给定的数组 $b^\sharp$。面和退化映射作用于第一块 0，……，n。限制到顶点单形后，得到 p 的一个 n 维项，其中包含完整的局部计算。

维数为 $n\geq1$ 的相容边界规定了删去 0，……，n 中一个元素后得到的各个面。这些面与固定的全-W 面构成并集 $K\star\Lambda^{n+2}_{n+2}$。固定局部面包含于此并集中。在维数 0 时，同一来源是 S_K：它的两个面分别是固定局部条带和退化构造子条带。在每个维数下，先通过维数为 $n+1$ 时的 (HC-comp) 添加缺失的面 $K\star\Delta^{\{0,\dots,n+1\}}$，再通过维数为 $n+2$ 时的 (HC-comp) 添加整个单纯形。指定的首余锥始终保持为 c。由此得到所需的 n-单纯形，同时保留所有规定的面。因此，单纯集合 $\mathsf{Elim}(c,\ p,\ b^\sharp)$ 对每个边界包含 $\partial\Delta^n$，$\to\Delta^n$ 都具有右提升性质：它是一个由显式消去包构成的可缩 Kan 复形。该论证将计算胞腔及其高阶比较都作为规则应用给出。

相对参数。 令 $T_K=K\star\Delta^2$。输入随 I 变化，并在 J_0上指定完整输出时，起始数组的形状为

$$(S_K\times I)\cup_{S_K\times J_0}(T_K\times J_0).$$

应用相对维度 1 比较，在 I上添加 $K\star\Delta^{\{0,1\}}$，并使用其在 J_0上的既定限制。所得数组的形状为

$$((K\star\partial\Delta^2)\times I)\cup_{(K\star\partial\Delta^2)\times J_0}(T_K\times J_0).$$

随后，相对维度 2 比较将其延拓至 $T_K\times I$。这恰好是 (90) 中的比较与 $J_0\hookrightarrow I$ 的两个推出积，并带有逐顶点证书。因此，两条规则的边界方程保留了 I 上的输入以及 J_0 上的全部输出。在维数 $n+1$ 和 $n+2$ 中，同样的两步论证给出每个高阶项比较的相对形式。

一个固定的外部上下文。 假设数据已经给定在 Γ 上。附加一个携带 Γ 的末顶点 3。局部输入和退化构造子条带指定顶点 3-单纯形的两个面 123 和 023，

包括其所有由 K 索引的胞腔。它们的并为 $K \star (\Lambda^2_2 \star \Delta^0)$。依次附加面 01、012、013 和 0123。这四个附加分别是在维数 1、2、2、3 中的 (HC-comp) 实例；在每一步中，所指示面的边界都已经指定。每个实例都在顶点 0 处区分出同一个已认证余锥。所得数组保持 Γ、动机、每个上下文替换及其给定的相干胞腔不变。其面 012 是截面三角形，面 013 是关于 Γ 的截面对比，而其 3-单纯形使这些比较相容。这四个实例的相对形式也保留任何预先规定的参数边界。□

维度 1　　与维度 2 的比较共同构成消去子及其在形状上的计算

$$(K \star \Delta^1) \star \Delta^0 = K \star \Delta^2, \tag{91}$$

其三个最终顶点分别表示 W、E、W。其截面见证和计算见证就是证明中指定的构造子输出。

范畴论解释将这一显式推导与依赖泛性质对应起来。在 W 上方的切片中，令 $d_k^W = (d_k \xrightarrow{\iota_k} W)$。以 id_W 为顶点的余锥是该切片中的余极限：切片余极限是在总体对象上计算的，其总体余锥就是给定的 c。数组 $b^\sharp$ 是以 p 为顶点、关于 d^W 的余锥。命题 64 中的第一个比较构造其底层映射，第二个则在切片中构造其截面三角形与计算相容性。因此，整个输出就是数组$K \star \Delta^1 \to (\mathcal{G}_{\mathbb{T}})_{/W}$，它实现了依赖消去。在映射空间中，泛性质为

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{G}_{\mathbb{T}}/W}(\mathrm{id}_W, p) \simeq \lim_{k \in K^{\mathrm{op}}} \mathrm{Map}_{\mathcal{G}_{\mathbb{T}}/W}(d_k \to W, p). \tag{92}$$

右侧的项是拉回动机的截面，并带有相干的过渡比较。原始数组构造实现了这一等价的逆，同时给出其计算见证。规则 (Stab) 认证重索引构造子图表，同一规则层面的推导也适用于其拉回比较。相对比较数据包提供了与重索引以及所有更高阶代换比较的相容性。

A.6 从拉回证书推导粘合计算

固定一个小图表 $d\colon K \to \mathcal{G}_{\mathbb{T}}$，其余极限余锥为 $d\colon d \to W$，并设 P 为由展示 $p_k : E_k \to d_k$ 及其经认证的笛卡尔过渡方块表示的局部族。引理 15 配合 $I = \Delta^1$ 和$J_0 =\{1\}$，恰好扩展局部棱柱与所选底部余锥的并。它生成一个上层余极限 $E \to V$、一个顶点映射 $g\colon V \to W$以及所有混合比较胞腔。规则 (Desc) 为其顶点方块提供证书。构造

$$\mathsf{glue}_d(P)(w) = \Sigma_{v:V} \mathsf{Id}_W(gv, w).$$

将该族的展示记为 $q : G \to W$，将其纤维表示等价记为 $\alpha_g\colon V \simeq G$。将顶部余锥与 α_g 复合，并使用其在 W上的指定三角形。重索引比较与 (Tr) 给出所得的经认证的拉回方块

$$\begin{array}{ccc} E_k & \xrightarrow{v_k} & G \\ {\scriptstyle p_k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ d_k & \xrightarrow[\iota_k]{} & W. \end{array} \tag{93}$$

分别对 q 和 ι_k 应用（重索引），得到所选的拉回 $F_k = d_k \times_W G$。原方形（93）和这个所选的重索引方块，都是同一个余扇上的终端锥。$n = 1$比较规则给出一个锥映射

$$c_k : E_k \longrightarrow F_k,$$

以及将原方形置于末位的第二个实例，给出 $\beta_k : F_k \to E_k$。它们的锥边界包含位于 d_k 和 G 上方的三角形。对具有锥顶点 $(E_k,\ F_k,\ E_k)$、指定的末位锥 E_k 以及边 $c_k,\ \beta_k,\ \mathrm{id}_{E_k}$ 的边界应用 $n=2$ 比较规则。它产生锥计算 $\beta_k c_k \simeq \mathrm{id}_{E_k}$。具有顶点 $(F_k,\ E_k,\ F_k)$ 的边界类似地给出 $c_k\beta_k \simeq \mathrm{id}_{F_k}$。高阶比较规则将这些计算扩展到每个指定的边界。因此，c_k 是 d_k 上的一个等价，其逆给出（7）的局部计算，

$$\beta_k : \mathsf{glue}_d(P)[\iota_k] \simeq P_k.$$

根据等价判据，该等价延伸到一个 J-数组，因此 (E) 给出了其显式证书和相干逆数据。

令 $j : \mathsf{sk}_0 K \hookrightarrow K$ 为由顶点生成的单纯子集的包含映射。锥棱柱给出了余扇及其在 K 上的原始方形。沿着 j应用相对重索引构造规则 (15)，在每个顶点 k 指定所选的、顶点为 F_k 的拉回方块。现在两个锥图都定义在 K 上，应用相对于 j的两个维度 1 比较，指定带有其比较胞腔的锥映射 c_k 和β_k 。所得映射 c 和 β，连同恒等锥映射，为 K 上的两个维度 2 比较给出边界。相对于 j 应用这些比较，并在每个顶点处采用所选的逆计算。在每个高阶比较中，前面的面给出 K上的边界，而指定的顶点填充给出 $\mathsf{sk}_0 K$上的输出。边界方程 (12) 将每个输出的限制与这些顶点数据相识别。因此

$$c : P \xrightarrow{\simeq} R_d(q) \tag{94}$$

是相干局部图的一个等价。在每条边上，它恢复给定的过渡等价；在每个高阶单纯形上，它恢复相应的相干性，因为相对比较扩张了输入棱柱。

对于一个族 $B \to W$，重新指标化基构造子余锥。规则 (Stab) 证明顶行以 B 为顶点，是一个余极限。导出粘合构造形成同一局部总体图的另一个余极限，随后得到其纤维表示。因此，其总上下文是一个带有到 W 的指定映射的余极限。粘合族到 B 的比较是纤维表示下的余单位 $\epsilon_B : L_d R_d B \to B$ 。这给出了全局重构

$$\mathsf{glue}_d(R_d B) \simeq B.$$

对于 $P = R_d B$，(94) 中的正向比较 c 表示单位 $\eta_{R_d B}$。三角恒等式

$$R_d(\epsilon_B) \circ \eta_{R_d B} \simeq \mathrm{id}_{R_d B}$$

因此，将余单位在每个 k 处的限制识别为 β_k，即 c_k 的逆。参数化比较给出了关于 B 的自然性。

B 相干规则在等价图表上的扩张

小型单纯形形状 I 使规则能够作用于代换图或族映射的图表上。其顶点描述各个输入和输出，高维单形则记录它们如何协同变化。原始相对规则 (15) 适用于每个 $J_0\ ,\ \to I$。这些形状 $J[n]$ 描述了不同呈示选择之间的相干等价。它们为这种一般性的参数构造提供了一个明确的群胚型实例，也允许等价参数在经认证的图中变化。

令 $J[n]_m = \{0,\dots,n\}^{m+1}$，其中删除和重复分别作为面和退化映射。对于 $E \subseteq \{0,\dots,n\}$，记 $J[E]$ 为满足 $J[E]_m = E^{m+1}$的单纯子集。于是，$\partial J[n]$ 是对非空真子集 E取 $J[E]$ 的并。对于 $n=0$，此并为空。对于一个呈示 P，令 $P \otimes J[n]$ 具有底层形状

$|P| \times J[n]$，并对满足 m 的每一对（m，v）作如下认证：$H_t \to P$已认证，而 v：$H_t \to J[n]$ 任意。定义其边界呈示为

$$\partial J(P \otimes J[n]) := \operatorname*{colim}_{\varnothing \neq E \subsetneq \{0,\dots,n\}} P \otimes J[E]. \tag{95}$$

对于 $n = 0$，这是空呈示。其底层形状为 $|P| \times \partial J[n]$，其证书恰为从所示真面继承而来的证书。等价地，当 m 在P和 v 中可认证时，偶对 $(m,\ v)$ 即可认证：$H_t \to \partial J[n]$ 经由某个非空真子集 E分解到 $J[E]$。

命题 65（等价参数扩张）。对于原始规则 r：$A, \to B,$ 每个关于

$$(A \otimes J[n]) \amalg_{\partial J(A \otimes J[n])} \partial J(B \otimes J[n])$$

通过句法胞腔和可推导证书扩张至 $B \otimes J[n]$。为这些扩张添加选定的构造子，可保持模型 ∞-范畴和句法几何宇宙不变。

证明。给定输入中的逐顶点证书指定了相对规则 $r \square_v (\partial J[n]\ , \to J[n])$ 的源。应用此规则，得到完整的底层输出数组及其逐顶点证书，同时严格保留给定的边界。

对于任意已认证的 m：$H_t \to B$ 以及任意 v：$H_t \to J[n]$，选取 $J[n]$的一个顶点 i。存在一个显式映射H：$J \times H_t \to J[n]$。对于 H_t中的一个 q-单纯形 h，记 $v(h) = (v_0,\ \dots\dots,\ v_q)$，对于 $\tau = (\tau_0,\ \dots\dots,\ \tau_q) \in J_q$，令

$$H(\tau, h)_j = \begin{cases} i, & \tau_j = 0, \\ v_j, & \tau_j = 1. \end{cases}$$

删除或重复一个条目与此公式相容，因此它是一个单纯映射。它在端点处的限制分别是取值为 i 和 v的常值映射。令第一个分量为 m，便得到一个映射 $J \times H_t \to B \times J[n]$，从而得到输出中所需的由等价参数化的数组。规则 (Tr) 将逐顶点的证书转移到 $(m,\ v)$。因此，每个目标证书都有一个推导。这些数组和见证构成的小集合位于有界的句法阶段。

在几何目标中，对于每个非空有限的参数顶点集合 E，此收缩通过以下方式将模型的 ∞-范畴对应起来：

$$\mathrm{Mod}_{P \otimes J[E]}(\mathcal{D}) \cong \mathrm{Fun}(J[E], \mathrm{Mod}_P(\mathcal{D})) \simeq \mathrm{Mod}_P(\mathcal{D}).$$

第一个同构由在每个单纯次数上进行柯里化得到。证书不变性表明，其对象条件是一致的。第二个同构是在可缩群胚 $J[E]$ 的任意顶点处进行求值。取最大子群胚后，恰好得到

$$M(P \otimes J[E], \mathcal{D}) \cong \mathrm{Fun}(J[E], \mathrm{Mod}_P(\mathcal{D}))^{\simeq} \simeq M(P, \mathcal{D}). \tag{96}$$

同一个收缩证明了每个自然变换上全参数证书条件与逐顶点证书条件之间的等价性。因此，在带标记映射核上得到的扩张就是引理 24 中的相对平凡纤维化。于是，初始性和推论 28 确定了这两个参数呈示的模型和语法。□

该命题尤其适用于附录 A 中的重索引比较。同一泛构造的两种选择通过其可缩扩张纤维中的等价相互关联。$J[n]$ 上的数组收集有限多个这样的等价选择，而该命题扩展了它们指定的真面比较。比较 $E \to \Gamma \xleftarrow{fg} \Theta$上的两个拉回锥，得到式 (83) 中的等价 $A[f][g] \simeq A[fg]$。同一个相对提升问题给出了三个代换及其五边形边界的比较。$J[n]$ 参数通过相干等价关联这些比较的选择。形状为 I 的参数给出了当代换变化时比较的自然性。二者都由相对扩张规则推出。

C 构造与泛族的基变换

C.1 指标化边界表示理论

对于定义 48 的数据，记 A 为余极限标记的对象，记 $K_\bullet \to A$ 为它们的指标化单纯集。切片 A上的相对右锥具有度为 n 的对象

$$(K^{\triangleright_A})_n = A \amalg K_0 \amalg \cdots \amalg K_n.$$

求和项 K_j 由一串以 $j+1$ 个旧顶点为前缀、后接顶点的单形组成。全顶点单形属于 A。单形算子限制旧前缀，并在新前缀为空时利用增广映射至 A 。

构造一个普通范畴 D，其对象为 Q_n、R、L_J、A、K_n。其生成元包括 Q 和 K上的单形算子、到 A的增广，以及映射 $R \to Q_1$。对于 $J^{\triangleleft}$的每个 n-单形，都有一个关联映射 $L_J \to Q_n$。对于 $(K^{\triangleright_A})_n$的每个求和项，都有一个从该求和项到 Q_n的关联映射。施加单纯形恒等式，以及增广和关联映射的交换方程。这些都是一元复合之间的方程，因为有限单纯形状在同构意义下有可数多个，所以生成元和方程也是可数多个。图表 $D \to \mathcal{X}^{\leq 0}$ 及其自然变换，正是{style id='29'>X 中的指标化边界表示及其映射。

从 $N(D)$ 上的无标记理论出发，并将其在 d 处的类型记为 Z_d。对于每个 d，将有限极限比较命名为

$$Z_d \longrightarrow Z_d \times_{Z_d \times Z_d} Z_d$$

并要求它可逆。这是 $Z_d \to 1$ 的第二个对角映射，因此其可逆性表达了 0-截断。根据引理 27，这一命名使用了小型定义扩张。因此，所得的小理论 Θ_{pres} 将所指示的图表分类为集合对象，包括它们的自然变换。

基还有一种预层描述。令 $\mathcal{A}$ 为 D^{op} 的普通有限余极限完备化，它由 $\mathbf{Set}_{\mathbb{U}}$ 中函子范畴 $\mathrm{Fun}(D,$ 的余表示对象在有限余极限下的闭包实现，并替换为一个小骨架。于是

$$\mathfrak{P} \simeq \mathrm{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{S}_{\mathbb{U}}).$$

事实上，引理 37 将映射到 $\mathcal{P}_{\mathbb{U}}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ 的映射与保有限极限函子 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{X}$ 对应起来。由于普通有限极限范畴中每个对象的第二个对角映射都可逆，这些函子的每个取值都是 0-截断的。现在，$\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 的普通自由有限极限完备化性质将这些函子与函子范畴 $\mathrm{Fun}(D,\mathcal{X}^{\leq 0})$ 对应起来。在此描述下，根据米田引理，$d \in D$ 处的泛取值为 $a \mapsto a(d)$。

C.2 变量余锥的模型与比较

将 $\mathrm{LF}_{\mathcal{X}}(Q)$ 记作 th e $(s\mathcal{X})_{/Q}$ 上由 (64) 的左族构成的全子范畴，以及 $|E_\bullet|$ 的几何实现 .

引理 66（外部形状上的图表）。对于小单纯集 H，在每个次数上应用常对象函子 $\Delta_{\mathcal{X}}$。存在自然等价

$$\mathrm{LF}_{\mathcal{X}}(\Delta_{\mathcal{X}} H) \simeq \mathrm{Fun}(H, \mathcal{X}).$$

若 $E_\bullet$ 对应于 F，则 $|E_\bullet| \simeq \mathrm{colim}_H F$。这两个结论在 $\boldsymbol{X}$ 的每个切片中都成立 .

证明。 余积的不交性和泛性质将 $\coprod_{H_n} 1$ 上的对象识别为一个以 H_n为指标的族。将单纯算子组装起来，便在（Δ/H）^{op}上得到一个图表，其中 Δ/H 是单纯形范畴。反过来，在每个次数中对这些项取余积，即可重构该单纯族。这些操作同样适用于族的映射。条件 (64) 将每个单纯形到第一个顶点的限制取逆。根据复合和三取二性质，这等价于将所有保持该顶点的算子取逆。

首顶点映射 $N(\Delta/H)^{\mathrm{op}} \to H$ 是关于这些算子的局部化，这是通过将末顶点定理应用于 H 的顶点反转并转到对偶 [25]而得到的。限制为每个单纯集 H给出了所述等价。

映射 $|E_\bullet| \to Y$ 是从所有直和项到 Y的映射所组成的相干族，因此是从 $(\Delta/H)^{\mathrm{op}}$ 到 Y处的常值图表的变换。沿局部化的限制具有全忠实性，故将其空间识别为从 F 到 Y的余锥空间。这就证明了余极限公式。同一证明也适用于切片；切片仍是一个 ∞-拓扑斯。□

对于余极限条件的一般形式，将 Q 上的左族沿 $K^{\triangleright_A} \to Q$拉回。将所得对象记为 D^+，其在 K 上的限制记为 D^-。用 $E_a = A \times_{Q_0} E_0$ 表示顶点 $A \to Q_0$处的值。图表及其顶点的包含映射在切片中给出一个跨度

$$|D^-| \longrightarrow |D^+| \longleftarrow E_a. \tag{97}$$

事实上，退化映射 根据 (64)，将 E_a 上的常值族与限制到单纯形顶点的对象识别起来 .

引理 67（变动右锥）。顶点映射 $E_a \to |D^+|$ 是一个等价。几何逆像保持跨度 (97)。

证明。 在 $\mathcal{Y} = \mathcal{X}_{/A}$ 中工作，并选取一个左正合局部化 $L : \mathcal{P}_{\mathbb{U}}(C) \rightleftarrows \mathcal{Y} : j$，其中 j 完全忠实。在预层范畴中，构造右锥 $W = (jK)^{\triangleright}$。其逐次数余积公式给出 $\mathcal{Y}$ 中的 $LW \simeq K^{\triangleright}$，因而得到映射 $W \to j(K^{\triangleright})$。沿此映射拉回 jD^+。在 $c \in C$ 处，$(jK)(c)$ 的层级是集合，因为 j 和求值都保极限和截断对象。c 处的拉回是 $(jK)(c)$ 上普通右锥的一个左族。由引理 66，其几何实现是该锥上的余极限，而末顶点的包含映射给出到此余极限的等价。预层的几何实现和等价都是逐对象计算的。应用保拉回和几何实现的 L，即可恢复 (97) 中的顶点映射。最后，用于构造跨度的所有运算都是切片中的余积、拉回和几何实现。切片上的诱导逆像函子保留这些运算。□

C.3 成对理论与相对分类

命题 68。 存在一个小扩张 $i : \Theta_{\mathrm{pres}} \to \Theta_{\mathrm{pair}}$，其模型是配备了一个模型的指标化呈示。其限制函子会忘掉该模型。此识别涵盖所有成对对象的相容映射，并且在几何逆像下自然。

证明。 向 Θ_{pres} 的生成元添加一个单纯对象映射 $E_\bullet \to Q_\bullet$。具体而言，沿端点 1，将单纯圆柱 $N(\Delta^{\mathrm{op}}) \times \Delta^1$ 按照 Q-类型的图表 Glue 到该呈示上。保留所有现有标记。从图表的箭范畴到其目标的限制是一个范畴纤维化，因此，所得推出的图表范畴给出一个同伦拉回，它指定了一个指向其单纯对象 Q 的映射的呈示。将这些比较命名为 (64)，并将它们标记为等价。将这个小的中间理论称为 Θ_0。类型 E_0 取值于模型拓扑斯中的任意对象。

为$\mathcal{B}\Theta_0$中的普适 Θ_0-模型构造如下小型映射集。

1. 在 R 上，将左族限制到标记边。切片中的引理 66，结合 $H = \Delta^1$，给出了待检验的箭头。2. 在每个 L_J 上，将其限制到标记锥。结合 $H = J^{\triangleleft}$，同一引理给出一个锥 F 以及该切片中的比较 $F(*) \to \lim_J F|_J$。
3. 在 A 上，取 (97) 的左箭头。引理 67 将其目标识别为顶点处的值。

对于前两个限制，关联族给出从相应切片中的逐次数恒定的指标形状出发的映射。在第二个比较中，J 是有限的。因此，引理 66 和 67 表明，

这三个比较与几何逆像可交换。切片中映射的可逆性可由其底层箭头检测。

通过定理 38 的等价传输底层箭头 $\mathcal{G}_{\Theta_0} \simeq \mathcal{B}\Theta_0$，选择带有其端点和比较识别的代表元。引理 27 在一个小型定义扩张中为这一小集合命名。根据推论 28，跨越这一步命名的限制是模型∞-范畴之间的等价。现在，对已命名的箭头施加等价。这些公理选出满足三项检验的全子范畴，因为它们在任意模型中的解释都是泛比较的逆像。这就给出了 Θ_{pair}，以及将呈示数据的包含映射扩展的解释 i。□

对于定理49的相对断言，令 $u\colon \mathcal{X} \to \mathfrak{P}$ 分类 P，并将 $\mathfrak{M}_P = \mathcal{X} \times_{\mathfrak{P}} \mathfrak{M}$ 置于几何态射中。对于 $g\colon \mathcal{Y} \to X</style}$，拉回泛性质首先将提升的 空间 识别为模型核心上遗忘函子的 g^*P 纤维。沿指标化呈示的同构传输单纯形族，将该纤维识别为 $\mathrm{Mod}_{g^*P}(\mathcal{Y})^{\simeq}$。与 g^*P 的识别是提升的一部分，因此该纤维中的映射都是相对于固定呈示取得的。

为了得到在 id_g 上具有任意变换的 ∞-范畴的提升，对所有 n，使用在 g 处的常值 $[n]$-图表，对 $\mathrm{Fun}([n],\mathcal{Y})$ 应用相同的计算。预层呈示的逐点左正合局部化将 $\mathrm{Fun}([n],\mathcal{Y})$ 呈示为 Grothendieck ∞-拓扑斯，因为 $\mathrm{Fun}([n],\mathcal{P}_{\mathbb{U}}(C)) \simeq \mathcal{P}_{\mathbb{U}}([n]^{\mathrm{op}} \times C)$。由于有限极限和小余极限都是逐点计算的，对于每个 Grothendieck ∞-拓扑斯 Z，我们有

$$\mathrm{Geom}(\mathrm{Fun}([n],\mathcal{Y}), Z) \simeq \mathrm{Fun}([n], \mathrm{Geom}(\mathcal{Y}, Z)).$$

呈示和模型检验同样是逐点进行的。现在取核，便在每个次数上得到 $\mathrm{Geom}(\mathcal{Y}\ \mathfrak{M}_P) \to \mathrm{Geom}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ 在 g 处的同伦纤维的完备塞加尔空间，以及 $\mathrm{Mod}_{g^*P}(\mathcal{Y})$ 的完备塞加尔空间。这些等价与单纯形算子相容，因此识别了这些 ∞-范畴。

C.4 在 Morita 空间上的族的求值

引理 69（在等价空间上的求值）。设 K 是工作宇宙中的一个小空间，设 B 是该宇宙中 *Grothendieck* ∞-拓扑斯的一个 K-指标图表，其过渡函子为几何等价，并令 $D = \lim_{k\in K} B(k)$ 属于 ∞-范畴。则 D 是一个 *Grothendieck* ∞-拓扑斯。逐点应用常对象函子定义了一个几何态射 $p : D \to S^{/K}$ 的逆像。若 $h_k(\ell) = \mathrm{Map}_K(k,\ell)$，则

$$\mathcal{D}_{/p^*h_k} \simeq B(k).$$

这些等价尊重 K 中的传输。

证明。 Grothendieck ∞-拓扑斯与左正合左伴随所构成的范畴具有小极限，这些极限在 ∞-范畴 [24] 中计算。$\mathcal{D}$ 的对象是相干截面。由于过渡映射是等价，极限和余极限都按点计算。在 $\mathcal{S}^{/K} \simeq$ 函子范畴$(K,\mathcal{S})$ 下，函子 p^* 将 V 发送到 $\ell \mapsto \Delta_{B(\ell)}V(\ell)$。它保持有限极限和小余极限，因此具有一个右伴随。

在任意 Grothendieck ∞-拓扑斯 $\mathcal{E}$ 中，对于任意小空间 S，$\Delta_{\mathcal{E}}S =$ 余极限的下降给出 $\mathcal{E}_{/\Delta_{\mathcal{E}}S} \simeq$函子范畴$(S,\mathcal{E})$。这里，路径的求逆将两种方差选择识别起来。将截面范畴沿一个截面取切片，等价于指定其各个分量的切片对象及其相干传输，包括映射上的此类传输。在 p^*h_k 处应用这一描述可得

$$\mathcal{D}_{/p^*h_k} \simeq \lim_{\ell\in K} B(\ell)_{/\Delta_{B(\ell)}h_k(\ell)} \simeq \lim_{(k\to\ell)\in K_{k/}} B(\ell).$$

在第二个等价中，一个对象为每条路径 $k \to \ell$指定 $B(\ell)$中的一个对象，并且这些对象与沿着 h_k的元素范畴进行的传输相容；该范畴的对象就是这些路径。在始对象 id_k 处取值，将这个最后的极限识别为 $B(k)$。在直化下，h_k 对应于 $* \xrightarrow{k} K$，因此在 p^*h_k处取切片，便可根据 étale 态射 [24]的基变换性质，计算到 k 的几何基变换。所有识别对于带基点的可表对象都是自然的，并且与指标点之间的等价相容。□