# 规范多波哈密顿量中三波相互作用的Baker-Akhiezer实现与重构

Graham Hesketh 英国独
立研究员gdh1e10@gmail.com

arXiv:2611.29831v1 [nlin.SI] 22 Nov 2026

**摘要**

我们重新考察了Menyuk、Chen和Lee以及Jiang、Rauch-Wojciechowski和Bullough研究的、具有三波相互作用的规范多波哈密顿量。通过加入相容的线性相位项，我们利用多点Baker-Akhiezer函数，在一般谱轨迹上构造了它们的通解。反过来，我们给出了有限插值判据和完备化过程，使得在同一哈密顿系统中，任意光滑代数曲线上的指定Baker-Akhiezer取值都能得以实现。我们将指定曲线与归一化谱曲线对应起来，并证明，在每个双有理谱层上，对易多项式哈密顿量都张成了每个阿贝尔方向，其中也包括相应的模态相位。这些结果共同确立了Baker-Akhiezer数据与规范多波动力学之间的对应关系，支持我们将该系统视为贝克–阿赫泽函数的一种基本正则哈密顿量框架的观点。我们阐明了它与其他成熟可积系统的联系，并通过数值计算验证了超椭圆、三重覆盖和多 puncture 示例。

# 目录

**1 引言 3**1.1 我们的贡献.3

**2 哈密顿系统及其谱几何 6**
2.1 规范模与相位参数.6 2.2 对易哈密顿量与完全可积性.8 2.3 固定矩阵尺寸下的正则谱曲线.12 2.4 特殊谱层与约化.15

**3 Baker–Akhiezer对应及其对易流 16**
3.1 从指定的 BA 数据到规范动力学.16 3.2 从典范初始模态到 BA 解.22 3.3 对易哈密顿量、阿贝尔方向与模态相位.25

**4 Corr对应关系与显式特化 28**
4.1 与四次矩映射系统的对应关系.28 4.2 矩阵约束 KP 对应.31 4.3 单点特化.33 4.4 超椭圆BA模态与多项式插值.35 4.5 半周期平移、al 函数与椭圆例子.38 4.6 模态幂与Mumford子系统.40

**5 数值验证** **43**
5.1 指定的超椭圆与三角BA解.43 5.2 多 puncture 解与独立Abel方向.45 5.3 根据典范初始模态进行BA重构.48

**6 讨论** **52**

**A 与 Menyuk、Chen 和 Lee 的比较 53 B 与 Jiang 和 Rauch-Wojciechowski 的比较 55 C 与 Adams、Harnad 和 Hurtubise 的比较 56 D 任意相位的完整刘维尔计数 57 E 不同相位系数的显式谱积分 60 F 标记谱曲线分类的详细内容 61 G 具有重复相位的一般 BA 重构 63 H 对称约化的 Prym 条件 66 I 四次谱哈密顿量 67 J 约束KP归一化与典范流匹配 68**

# 1 引言

Baker-Akhiezer（BA）函数是非线性方程代数几何积分中的核心对象。Krichever 的构造建立在 Baker 和 Akhiezer 的早期工作之上，将此类函数与一条代数曲线、标记点和给定的除子数据[38, 40]联系起来。它们解决了 Kadomtsev–Petviashvili 层级所依据的辅助线性问题，并结合适当的谱数据得到有限隙 Korteweg–de Vries 解。同样的函数还用于有限维系统的积分，包括 Neumann 和 Garnier 系统；Mumford 多项式坐标描述了与之相关的运动除子[35, 17, 46, 50]。

这些构造从两个方向建立了函数与动力学之间的联系。Lax 表示将谱曲线和特征向量数据与哈密顿系统联系起来。反过来，指定的曲线和除子数据可以生成贝克隆函数，进而构造解。Adler–Kostant–Symes 理论阐释了许多矩阵实现中的对易哈密顿量，而谱线丛则描述了它们的代数积分 [4, 8]。这些方法共同构成了一个广泛的框架；在这一框架中，具体系统对应特定的曲线、标记点和函数实现。

有限维多波方程为函数与动力学之间的这种联系提供了直接的研究背景。在亏格为一的情形下，椭圆西格玛函数比描述可积三波和四波相互作用中的单个模态 [30, 28]；其平移和指数因子编码了幂与相位。多波系统的哈密顿与谱构造历史悠久，研究范围也超出了这些椭圆例子。

三波相互作用方程源自海洋波、等离子体波和二次非线性光学介质的模型。受限多组三波系统通过一个公共模耦合多个三波组 [36]；连续波光学相互作用也会导出有限维模态方程 [30]。Menyuk、Chen 和 Lee 通过哈密顿、Lax 和 Painlevé 分析研究了可积耦合 [42, 43, 44]。他们为等耦合共享模族求得了完备的对易积分组，构造了更广泛的波系统，并利用椭圆函数和相位求积对等失配族进行了积分。Rauch-Wojciechowski、Jiang 和 Bullough 给出了一种替代的矩阵 Lax 表示，并构造了一类更广泛的多波常微分方程 [52]。随后，Jiang 和 Rauch-Wojciechowski 在分次李代数框架下发展了这一方法，构造了具有矩形模阵列的正则三次系统，并研究其对易积分的完备性 [31]。Kostov 和 Tsiganov 通过双分量狄拉克问题研究了受限共享模族。他们构造了该系统的双曲谱曲线和有限隙特征函数表示，以及一个经典 $r$矩阵和双哈密顿结构；单三波组情形则用魏尔斯特拉斯函数显式求解，包括其相位 [36]。Geng、Guan 和 Du 从一个有理 $\mathfrak{gl}_3$ Gaudin 矩阵构造了有限维李–泊松系统，并在非双曲谱曲线上引入分离变量和雅可比反演 [20,第 3–5]节。

Adams、Harnad和Previato提出了一种用于等谱哈密顿系统的动量映射构造。Adams、Harnad和Hurtubise（AHH）用广义 BA 函数 [3, 1] 对矩阵流及其正则提升进行了积分。这项工作通过动量映射构造正则实现，并将其演化与谱曲线和 BA 函数联系起来，从而补充了多波方程的矩阵拉克斯方法。

## 1.1 我们的贡献

我们的动机源于非线性光学领域，其中优雅的典范哈密顿量描述了连续波和准连续波相互作用，单个模态则由亏格一贝克-阿希泽函数表示 [30, 28]。人们熟知的可积系统，包括经典

陀螺，也可以反过来视为这类规范模哈密顿量的投影。在启发本研究的高亏格构造中，具有单一混合乘积的哈密顿量同样存在 BA 解，其守恒律与 Ônishi行列式恒等式 [29], 相关；但阿贝尔变量 $z$以及初等位移，都被限制在曲线上某一点的阿贝尔提升上。复合模态携带初等位移之和。这引出了另一个问题：当 $z$ 在雅可比簇上自由变化时，什么样的典范哈密顿量动力学能够容纳这些函数?

沿着这一问题继续探究，便会引出Menyuk、Chen和Lee，以及Jiang和Rauch-Wojciechowski构造的三次多波系统。Adams、Harnad和Hurtubise的矩映射框架则提供了一种相关的四次规范实现，并具有广义BA解。因此，我们可以预期它与其他可由BA函数求解的系统之间存在联系。我们通过将其与Adams、Harnad和Hurtubise的四次矩映射系统及一种约束KP算子实现建立对应关系，明确揭示了这些联系。这些对应关系还凸显了规范多波表述的简洁性：其哈密顿量为三次，其规范括号为常数，其非线性演化项仅包含两个模态的乘积，这是可能达到的最低多项式非线性阶数。这些表述中的因变量和泊松结构各不相同。因此，我们主张将三次系统视为贝克隆函数的基本典范框架。

BA对应也适用于两个方向。在任意光滑曲线上给定的BA求值，可以由相容的规范模系统实现；而一般的规范初始模态则决定其谱BA解。对易哈密顿量还生成阿贝尔方向，并给出相应模态相位的显式公式。曲线会改变相容参数和初始数据，而三次相互作用定律保持不变。当给定的亏格低于正则谱亏格时，该实现属于命题 3.5 所述的特殊族。综合来看，这些结果支持将这一经典多波系统视为贝克隆—阿基泽尔动力学的典范哈密顿框架，并促使我们从这一视角进一步研究它。

这里的 $L, M, N$ 是正整数，分别表示三个模态矩阵 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^{L\times M}$、 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^{M\times N}$ 和 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^{N\times L}$。每个矩阵元素都有一个独立的哈密顿伴侣，因此共有 $LM + MN + NL$ 个正则模对；当 $N = 1$ 时，后两个矩阵是向量。本文分以下几个阶段建立这种对应关系。

**哈密顿与谱论基础（第 2 节）**。我们从 Jiang 和 Rauch-Wojciechowski 提出的正则矩形多波表述及其早期的波系统设定入手。已有的 Lax、AKS 和谱线丛方法为本文提供了框架。为了进行 BA 构造，我们的处理补充了以下要素：

- 对称相位表述和精确的源字典，其中独立速率由定理 3.3 中指定的 BA 数据确定。这些速率与早期的多波框架相容；其曲线点相容性是本文的核心。

- 对于每一组正整数 $L, M, N$ 以及每个固定的相位分布，都有统一的完整刘维尔计数；其中包括重复相位及其额外的矩积分（定理 2.2）。对于不同相位，Bolsinov 已确立的判据也能保证完备性 [11]。

- 对固定矩阵尺寸下正则谱曲线的具体刻画，包括其亏格和覆盖次数，以及实现低亏格所需的特殊层级（定理 2.4 和命题 2.3 和 2.5）。

固定尺寸分类与任意曲线构造回答的是互补的问题：前者描述固定矩阵尺寸下的曲线，后者则为指定曲线选择相容的矩阵尺寸和谱层。

**BA 对应与对易流（第 3 节）**。本节包含主要结果。我们利用普通和对偶 BA 函数、它们的两点核以及亚纯插值，建立对应关系的三个部分：

- **主定理，第一部分：规范 BA 实现**。定理 3.3 给出了留数和相位判据，包括对非定常开雅可比族上归一化拟设的必要性。该检验由两个 $g$维线性方程组构成，适用于任意$N$。推论 3.4 补全了给定的有限求值列表，而核卷积则提供了哈密顿方程背后的函数恒等式。

- **主定理，第二部分：一般 BA 重构**。命题 3.5 中的显式曲线映射将双有理实现与归一化 Lax 曲线对应起来；对于 $N = 1$，双有理性自动成立。定理 3.6 随后从一般典范初始数据重构 BA 基、核和所有模态。重复相位采用常数分块基和活动约化处理，之后原始坐标可表示为标量 BA 求值的线性组合。

- **主定理，第三部分：谱 BA 层级**。定理 3.8 计算了对易多项式哈密顿量的穿孔时间和常数端点相位变化率。在每个固定的双有理谱层上，它们的流张成雅可比方向；所需的线性组合取决于该谱层的曲线数据。这揭示了 BA 平移和模规范在哈密顿层级中的位置。

对于 $N = 1$，一对普通/对偶 BA 函数对提供两个基本向量及其成对模态矩阵。对于 $N > 1$，额外的指标标记的是共享同一条曲线、同一个除子和同一个核的穿孔归一化截面；它并不表示单点系统的独立副本。

**对应关系与显式特化（第 4 节）**。我们将一般构造具体化，并将其与其他函数描述和哈密顿量描述联系起来：

- 一个显式的全尺寸对应表将四次典范 AHH 提升与三次方程联系起来。两种矩阵括号和 BA 卷积阐明了共同的演化与相互作用分解。

- 加权 BA 恒等式为任意 $N$ 提供了矩阵约束 KP 解释，其中包括归一化源演化及其逐层典范生成元。单点特化给出了初等模记号。对于超椭圆曲线，多项式插值给出了显式的西格玛模权重和相位系数，包括半周期 al 函数，以及含任意多个基本模态的椭圆实现。

- 一个显式的模幂映射识别出超椭圆 Mumford 子系统，并根据其除子数据重构模态，阐明典范描述如何在保留已确立的投影动力学的同时，保留相位信息。

**数值验证（第 5 节）**。这些检验既验证两个方向，也验证可交换演化：

- 将超椭圆和三重覆盖西格玛解与哈密顿方程的独立积分进行比较。

- 亏格一和二中的多 puncture 示例检验完整数组、谱恒等式和高阶流相位；亏格二情形从相同的初始模态出发，沿两个独立Abel方向演化。

- 另一个亏格二示例从典范初始模态出发，重构其曲线和 BA 解，并将逆构造与指定曲线例子分开检验。

随后，讨论将这些结果汇总起来，并提出有关层级、约化以及 BA 相互作用恒等式的进一步问题。

# 2 哈密顿系统及其谱几何

我们建立 BA 对应所需的哈密顿与谱框架。相位参数规定待匹配的速率，对易积分提供刘维尔可积性，而铅笔则确定解所承载的曲线。

我们采用前述波与矩阵构造中发展起来的典范三次多波族 [43, 52, 31]。独立常数对角相位适应指定的 BA 数据在定理 3.3 中所确定的速率；幂荷将这些速率重新分配为对称约定。我们首先给出完整的三矩阵系统，它为三种群大小下的 BA 实现提供所使用的铅笔和对易哈密顿量。与前述系统的坐标比较见附录 A 和 B。

## 2.1 规范模和相位参数

我们固定模态、括号和相位约定，以便将第 3 节中的 BA公式直接与哈密顿方程进行比较。

### 2.1.1 模态、括号与哈密顿方程

模态矩阵为 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^{L\times M}$、$\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^{M\times N}$ 和 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^{N\times L}$，其中正整数 $L$、$M$、$N$。每个元素都有一个独立的带横线哈密顿伴侣。它们共同的三次相互作用可写成矩阵形式

$$H_{\mathrm{mix}} = \sqrt{2}\,\operatorname{tr}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w} + \bar{\boldsymbol{u}}\bar{\boldsymbol{v}}\bar{\boldsymbol{w}})\,. \tag{2.1}$$

每一项都将每个矩阵中的一个模态连接起来；方程（2.3）中的常数给出了其线性相位率。

共有 $p = LM + MN + NL$ 个典范模对。记 $i$ 为虚数单位，则其非零基本括号为

$$\begin{aligned}
\{u_{\ell m}, \bar{u}_{\hat{\ell}\hat{m}}\} &= -i\delta_{\ell\hat{\ell}}\delta_{m\hat{m}}, \quad 1 \le \ell, \hat{\ell} \le L, \quad 1 \le m, \hat{m} \le M, \\
\{v_{mn}, \bar{v}_{\hat{m}\hat{n}}\} &= -i\delta_{m\hat{m}}\delta_{n\hat{n}}, \quad 1 \le m, \hat{m} \le M, \quad 1 \le n, \hat{n} \le N, \\
\{w_{n\ell}, \bar{w}_{\hat{n}\hat{\ell}}\} &= -i\delta_{n\hat{n}}\delta_{\ell\hat{\ell}}, \quad 1 \le n, \hat{n} \le N, \quad 1 \le \ell, \hat{\ell} \le L.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

除反对称性之外，所有其他基本括号均为零。横线表示独立的哈密顿伴侣，其数组维度与不带横线的模态相同。星号表示实际的复共轭；T 表示普通转置，而† 表示实际的共轭转置。点号$\dot{}$表示对时间 $t$ 求导，且 $h = \{h, H\}$。因此

$$i\dot{u} = \frac{\partial H}{\partial \bar{u}}, \qquad i\dot{\bar{u}} = -\frac{\partial H}{\partial u}.$$

这是通常的复典范约定：令 $u = (q + ip)/\sqrt{2}$ 和 $\bar{u} = (q - ip)/\sqrt{2}$，则有 $\{q, p\} = 1$。除非施加实形式条件，变量 $q$、$p$ 均为复数。

对于实相位系数和实耦合，实形式 $\bar{u} = \epsilon_u u^*$、$\bar{v} = \epsilon_v v^*$ 和 $\bar{w} = \epsilon_w w^*$，其中 $\epsilon_u$，$\epsilon_v$，$\epsilon_w \in \{1, -1\}$，当且仅当 $\epsilon_u\epsilon_v\epsilon_w = 1$ 时是不变量。全为正号的选择是爆炸型三波形式；三个带有两个负号的选择则是衰减

形式，并且允许对幂荷作出定号组合。哈密顿量在每种形式上都为实数，其中 $i\dot{u} = \epsilon_u \partial H/\partial u^*$ 以及关于 $v$，$w$ 的相应方程。一般复系统保留独立伴随项；刘维尔可积性是在复哈密顿意义下理解的。

令 $b_\ell^L$、$b_m^M$ 和 $b_n^N$ 为常数，并满足 $1 \le \ell \le L$、$1 \le m \le M$、$1 \le n \le N$。上标用于区分三组相位系数。

哈密顿量为

$$\begin{aligned} H = &\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{m=1}^{M}(b_\ell^L + b_m^M)u_{\ell m}\bar{u}_{\ell m} + \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}(b_m^M + b_n^N)v_{mn}\bar{v}_{mn} \\ &+ \sum_{n=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{L}(b_n^N + b_\ell^L)w_{n\ell}\bar{w}_{n\ell} \\ &+ \sqrt{2}\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\left(u_{\ell m}v_{mn}w_{n\ell} + \bar{u}_{\ell m}\bar{v}_{mn}\bar{w}_{n\ell}\right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

每个模态的线性相位系数等于其两个端点组中的常数之和。对这些组及其模态矩阵进行循环置换时，哈密顿量的形式保持不变。三个模态幂为

$$I_{\ell m}^u = u_{\ell m}\bar{u}_{\ell m}, \qquad I_{mn}^v = v_{mn}\bar{v}_{mn}, \qquad I_{n\ell}^w = w_{n\ell}\bar{w}_{n\ell}, \quad 1 \le \ell \le L,\ 1 \le m \le M,\ 1 \le n \le N. \tag{2.4}$$

上标 $u$、$v$、$w$ 标示相应的模态族，而不是幂指数。当配对项确实为复共轭时，这些模态幂将变为模平方。

对于 $1 \le \ell \le L$、$1 \le m \le M$、$1 \le n \le N$，哈密顿方程为

$$\begin{aligned} i\dot{u}_{\ell m} &= (b_\ell^L + b_m^M)u_{\ell m} + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{N}\bar{v}_{mk}\bar{w}_{k\ell}, \\ i\dot{\bar{u}}_{\ell m} &= -(b_\ell^L + b_m^M)\bar{u}_{\ell m} - \sqrt{2}\sum_{k=1}^{N}v_{mk}w_{k\ell}, \\ i\dot{v}_{mn} &= (b_m^M + b_n^N)v_{mn} + \sqrt{2}\sum_{\ell=1}^{L}\bar{u}_{\ell m}\bar{w}_{n\ell}, \\ i\dot{\bar{v}}_{mn} &= -(b_m^M + b_n^N)\bar{v}_{mn} - \sqrt{2}\sum_{\ell=1}^{L}u_{\ell m}w_{n\ell}, \\ i\dot{w}_{n\ell} &= (b_n^N + b_\ell^L)w_{n\ell} + \sqrt{2}\sum_{j=1}^{M}\bar{u}_{\ell j}\bar{v}_{jn}, \\ i\dot{\bar{w}}_{n\ell} &= -(b_n^N + b_\ell^L)\bar{w}_{n\ell} - \sqrt{2}\sum_{j=1}^{M}u_{\ell j}v_{jn}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

方程（2.3）和（2.5）定义了本文的核心——典型多波系统。在第3节中，我们将证明，其简单的三次哈密顿量为任意光滑代数曲线上的贝克隆函数提供了一个统一框架，并根据相关谱数据重构其一般解。

### 2.1.2 功率对称性与相位约定

线性项在模功率导数中相互抵消。生成对角模规范变换的守恒功率组合为

$$
\begin{aligned}
Q_\ell^L &= \sum_{n=1}^{N} I_{n\ell}^w - \sum_{m=1}^{M} I_{\ell m}^u, \quad 1 \le \ell \le L, \\
Q_m^M &= \sum_{n=1}^{N} I_{mn}^v - \sum_{\ell=1}^{L} I_{\ell m}^u, \quad 1 \le m \le M, \\
Q_n^N &= \sum_{\ell=1}^{L} I_{n\ell}^w - \sum_{m=1}^{M} I_{mn}^v, \quad 1 \le n \le N.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

它们彼此对易，且唯一的线性关系为

$$
\sum_{\ell=1}^{L} Q_\ell^L - \sum_{m=1}^{M} Q_m^M - \sum_{n=1}^{N} Q_n^N = 0. \tag{2.7}
$$

因此，在一般模图表上有 $L+M+N-1$ 个独立功率荷。其定义中正负号的搭配规定了每个规范作用的方向。

将这些荷的常数线性组合加到 $H$ 上，会重新分配线性模态速率，而不改变任何幂的导数。我们区分对称相位哈密顿量 $H$ 与另一种约定 $H_0$；在后一约定下，$u$ 模态的线性速率为零。这种约定便于与 Jiang 和 Rauch-Wojciechowski 的工作进行比较。定义

$$
\begin{aligned}
H_0 &= H + \sum_{\ell=1}^{L} b_\ell^L Q_\ell^L + \sum_{m=1}^{M} b_m^M Q_m^M \\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{L} (2b_\ell^L + b_n^N) w_{n\ell}\bar{w}_{n\ell} + \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} (2b_m^M + b_n^N) v_{mn}\bar{v}_{mn} + H_{\mathrm{mix}},
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

其中 $H_{\mathrm{mix}}$ 是方程 (2.1)。设 $(\tilde{\boldsymbol{u}},\ \tilde{\boldsymbol{v}},\ \tilde{\boldsymbol{w}})$ 及其带横线的伴随变量为由 $H_0$ 生成的哈密顿方程的解。相应的 $H$ 解为

$$
\begin{aligned}
u_{\ell m}(t) &= e^{-i(b_\ell^L + b_m^M)t}\tilde{u}_{\ell m}(t), && 1 \le \ell \le L, \quad 1 \le m \le M, \\
v_{mn}(t) &= e^{ib_m^M t}\tilde{v}_{mn}(t), && 1 \le m \le M, \quad 1 \le n \le N, \\
w_{n\ell}(t) &= e^{ib_\ell^L t}\tilde{w}_{n\ell}(t), && 1 \le n \le N, \quad 1 \le \ell \le L.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

带横线的伴随变量获得相反的因子。这种随时间变化的变换在每个固定时刻都是正则的。其指数因子在每个三次混合乘积中相互抵消，因此两种描述中的这些乘积以及所有模功率都相同。附录 B 将 $H_0$ 认定为 1991 年哈密顿量 [31] 的常对角扩展。

独立的对角参数与这一相位约定的改变有着不同的作用。对于每个混合乘积 $u_{\ell m}v_{mn}w_{n\ell}$，三个线性相位系数之和为 $2(b_\ell^L + b_m^M + b_n^N)$，其中 $1 \le \ell \le L$、$1 \le m \le M$、$1 \le n \le N$。相位规范方程（2.9）保持这一总和不变。因此，外部对角参数提供了依赖相互作用的线性速率，无论采用哪种约定，这些速率都会保留下来。它们的值由 BA 实现中的标记曲线数据确定。

## 2.2 对易哈密顿量与完全可积性

我们构造 Lax铅笔及其对易哈密顿量，随后给出完整积分计数，以便将 BA解置于一个可积的正则系统中。

### 2.2.1 矩阵铅笔及其 Lax 方程

Lax 表示将模态方程归结为一个矩阵对易子，并由此通过特征多项式得到守恒量。我们利用常对角扩展和对称相位约定，从 Jiang 和 Rauch-Wojciechowski 的三块构造 [31, 方程 (2.7)]，得到该表示。坐标和相位变换在附录 B 中明确给出。

首先，使用模态矩阵 $\boldsymbol{u}\in\mathbb{C}^{L\times M}$、$\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^{M\times N}$、$\boldsymbol{w}\in\mathbb{C}^{N\times L}$ 和常相位矩阵写出这些方程

$$\mathsf{B}_L=\operatorname{diag}(b_1^L,\dots,b_L^L),\qquad \mathsf{B}_M=\operatorname{diag}(b_1^M,\dots,b_M^M),\qquad \mathsf{B}_N=\operatorname{diag}(b_1^N,\dots,b_N^N). \tag{2.10}$$

那么，方程 (2.5) 等价地可写为

$$\begin{aligned}
i\dot{\boldsymbol{u}}&=\mathsf{B}_L\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\mathsf{B}_M+\sqrt{2}\bar{\boldsymbol{w}}^{\mathsf{T}}\bar{\boldsymbol{v}}^{\mathsf{T}},\\
i\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}^{\mathsf{T}}&=-\mathsf{B}_M\bar{\boldsymbol{u}}^{\mathsf{T}}-\bar{\boldsymbol{u}}^{\mathsf{T}}\mathsf{B}_L-\sqrt{2}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w},\\
i\dot{\boldsymbol{v}}&=\mathsf{B}_M\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\mathsf{B}_N+\sqrt{2}\bar{\boldsymbol{u}}^{\mathsf{T}}\bar{\boldsymbol{w}}^{\mathsf{T}},\\
i\dot{\bar{\boldsymbol{v}}}^{\mathsf{T}}&=-\mathsf{B}_N\bar{\boldsymbol{v}}^{\mathsf{T}}-\bar{\boldsymbol{v}}^{\mathsf{T}}\mathsf{B}_M-\sqrt{2}\boldsymbol{w}\boldsymbol{u},\\
i\dot{\boldsymbol{w}}&=\mathsf{B}_N\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}\mathsf{B}_L+\sqrt{2}\bar{\boldsymbol{v}}^{\mathsf{T}}\bar{\boldsymbol{u}}^{\mathsf{T}},\\
i\dot{\bar{\boldsymbol{w}}}^{\mathsf{T}}&=-\mathsf{B}_L\bar{\boldsymbol{w}}^{\mathsf{T}}-\bar{\boldsymbol{w}}^{\mathsf{T}}\mathsf{B}_N-\sqrt{2}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

这些相同的块组成 $d\times d$ 系数矩阵 $\mathsf{X}(t)$，其中 $d=L+M+N$：

$$\mathsf{X}=\begin{pmatrix}-2\mathsf{B}_L & \sqrt{2}\boldsymbol{u} & \bar{\boldsymbol{w}}^{\mathsf{T}}\\ \sqrt{2}\bar{\boldsymbol{u}}^{\mathsf{T}} & -2\mathsf{B}_M & \boldsymbol{v}\\ -\boldsymbol{w} & -\bar{\boldsymbol{v}}^{\mathsf{T}} & \mathsf{B}_N\end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Lax 矩阵 $\mathsf{L}(\nu,t)$ 构成仿射矩阵铅笔

$$\mathsf{L}(\nu,t)=\mathsf{X}(t)+\nu\mathsf{D},\qquad \mathsf{D}=\operatorname{diag}(\mathrm{Id}_L,-\mathrm{Id}_M,0_N). \tag{2.13}$$

这里 $\nu$ 是一个常数谱参数，$\mathsf{D}$ 为固定量，而 $\mathsf{L}(0,\ t)=\mathsf{X}(t)$。$\mathsf{X}$ 的时间依赖性完全来自模态矩阵；其对角块是常数。在记号中省略 $t$ 后，块乘法给出

$$i\dot{\mathsf{L}}=[\mathsf{L},\mathsf{T}],\qquad \mathsf{T}(\nu)=\begin{pmatrix}-\mathsf{B}_L & 0 & \bar{\boldsymbol{w}}^{\mathsf{T}}\\ 0 & \mathsf{B}_M & -\boldsymbol{v}\\ -\boldsymbol{w} & \bar{\boldsymbol{v}}^{\mathsf{T}} & -\nu\mathrm{Id}_N\end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

等价地，$\dot{\mathsf{L}}=[\mathsf{L}\ -i\mathsf{T}]$。其非对角块重现方程 (2.11)，而其对角块的导数为零。谱行列式为

$$F(\lambda,\nu)=\det(\lambda\mathrm{Id}_d-\mathsf{L}(\nu)). \tag{2.15}$$

其系数是模态的多项式，并且由方程 (2.14) 守恒。

### 2.2.2 AKS 框架与可交换积分

为确立可积性，守恒量还必须在典范括号下彼此对易。AKS 框架通过用方程 (2.12) 和 (2.13) 中使用的同一组矩阵 X、D 表示模态括号，说明了这种交换性。记 $X_{hr}$、$D_{hr}$ 为它们的元素。典范模态括号为

$$\{X_{hr},X_{jk}\}=-i(D_{hh}-D_{rr})\delta_{hk}\delta_{rj},\qquad 1\le h,r,j,k\le d. \tag{2.16}$$

其系数仅取决于固定矩阵 D。固定 X 的三个对角块后，剩下的恰好是非对角正则模坐标；这些坐标构成矩阵括号的一个辛仿射叶。

对于标量函数 $f(\mathsf{X})$ $g(\mathsf{X})$，将其矩阵梯度定义为 $P$， $Q$ 即

$$\mathrm{d}f = \operatorname{tr}(P\,\mathrm{d}\mathsf{X}), \qquad \mathrm{d}g = \operatorname{tr}(Q\,\mathrm{d}\mathsf{X}). \tag{2.17}$$

这些梯度可以依赖于模值。对方程 (2.16) 进行缩并可得

$$\{f, g\} = i\operatorname{tr}(\mathsf{D}[P, Q]). \tag{2.18}$$

这个常数括号以及 $\mathsf{X} + \nu\mathsf{D}$ 的平移不变量给出了 AKS 构造 [45, 11, 4]的参数平移实现。

该哈密顿量通过迹恒等式属于这一构造

$$\begin{aligned} H = & -\tfrac{1}{3}\operatorname{tr}\mathsf{X}^3 + 3\operatorname{tr}\Big[\mathsf{B}_L(\bar{\boldsymbol{w}}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}\bar{\boldsymbol{u}}^{\mathsf{T}})\Big] \\ & + 3\operatorname{tr}\Big[\mathsf{B}_M(\boldsymbol{v}\bar{\boldsymbol{v}}^{\mathsf{T}} - \bar{\boldsymbol{u}}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u})\Big] - \tfrac{8}{3}\operatorname{tr}\mathsf{B}_L^3 - \tfrac{8}{3}\operatorname{tr}\mathsf{B}_M^3 + \tfrac{1}{3}\operatorname{tr}\mathsf{B}_N^3. \end{aligned} \tag{2.19}$$

两个二次迹项是方程 (2.6) 中幂荷的加权组合；固定相位矩阵的迹是常数。因此， $H$ 将一个三次谱不变量与对易规范生成元结合起来。

**命题 2.1**。 $F$ 在方程 (2.15) 中的每个系数都与其他每个系数以及方程 (2.6)中的荷对易。

证明。 根据梯度定义方程 (2.17)，设 $P$ 和 $Q$ 分别为关于 $\mathsf{X} + \nu\mathsf{D}$ 和 $\mathsf{X} + \mu\mathsf{D}$ 的共轭不变多项式的矩阵梯度。它们与各自的矩阵自变量对易。利用迹的循环性可得

$$\operatorname{tr}((\mathsf{X} + \nu\mathsf{D})[P, Q]) = \operatorname{tr}((\mathsf{X} + \mu\mathsf{D})[P, Q]) = 0.$$

相减即可证明，对于 $\nu \neq \mu$，有 $\operatorname{tr}(\mathsf{D}[P, Q]) = 0$。通过多项式延拓可将结论推广至 $\nu = \mu$。这证明了在方程 (2.16) 条件下的谱对易性。每个幂次守恒量都通过常对角共轭作用于 X，这也保持了 $F$。

□

### 2.2.3 李维尔可积性的完整计数

当每个群内的相位系数互不相同时，谱不变量是完备的。相位相同时，模基还可以连续变换，其守恒量能够补足任何缺失的积分。我们在此给出完整计数；附录 D 对任意相位系数给出了相应的独立性证明。

写作 $s_h = D_{hh}$ 和 $e_h = X_{hh}$, $1 \le h \le d$。将每个原始群划分为若干极大集合$B$，使其具有相同的截距 $e_h$。我们称这些集合为等相位块；它们的斜率 $s_h$ 也为常数，共同取值为 $s_B$。定义块矩阵

$$(\mathsf{J}_B)_{ij} = \sum_{\substack{h=1 \\ s_h \neq s_B}}^{d} \frac{X_{ih}X_{hj}}{s_B - s_h}, \qquad i, j \in B. \tag{2.20}$$

对于常数矩阵 $|B| \times |B|$ $\mathsf{Z}$，令 $\mathsf{Z}$ 表示其在 $B$之外的零延拓嵌入。则

$$\{\mathsf{X}, \operatorname{tr}(\mathsf{Z}\mathsf{J}_B)\} = -i[\widehat{\mathsf{Z}}, \mathsf{X}].$$

因此，其哈密顿流是由 $e^{-i\epsilon\widehat{\mathsf{z}}}$进行的共轭变换。它保持哈密顿量不变，因为 $\widehat{\mathsf{Z}}$ 与固定的相位矩阵对易，所以 $\mathsf{J}_B$ 的元素是诺特积分。不同

块彼此独立。在每个块内，动量元素满足 $-i$ 倍矩阵李–泊松括号。这些是矩形正则矩阵对 [24, 第 2]节的标准二次矩映射。

固定 $B$ 中指标的排列，并令 $\mathsf{J}_B^{[t]}$ 表示其前导 $t\times t$ 阶主子矩阵。函数

$$I_{B,t,k}=\frac{1}{k}\operatorname{tr}\!\left((\mathsf{J}_B^{[t]})^k\right),\qquad 1\le k\le t\le |B|, \tag{2.21}$$

彼此对易。对于两个嵌套的主块，较大块的不变量的梯度与该块对易；因此，它与较小块梯度的李–泊松配对为零。这就是 Gelfand–Zeitlin 构造 [23]。这些函数也与每个谱系数对易，因为分块共轭保持 $F$ 不变。令 $\mathcal{A}$ 为由这些函数和 $F$ 的系数生成的多项式代数。它是 $H$的一个第一积分交换代数。

**定理 2.2**。 对于任意正的 $L$、$M$、$N$，以及任意固定的相位系数选取，$A$ 的泛型微分秩为 $p=LM+MN+NL$。因此，方程 (2.3) 是泛型刘维尔可积的。在 $\mathrm{d}H\neq 0$ 处成立的范围内，完备局部集合可包含 $H$ 。

附录 D 中的证明通过每次增加一个矩阵维数来进行。在每次插入时，谱系数与主矩共同为每个新增的正则对提供一个新的独立积分。这也适用于任意相同的相位系数。同一论证还量化了方程 (D.5) 中的谱亏损。

当每个原始群内的相位两两不同时，仅谱族就是完备的；第 E 节给出了通过直线交点和生成树进行显式选择的方法。保留 $d-1$ 幂荷后，剩下

$$G=p-d+1=LM+MN+NL-L-M-N+1 \tag{2.22}$$

第 2.3 节所用正则轨迹上的谱积分。

Bolsinov 的论证平移完备性判据 [11, 定理 1.1] 包含常值括号方程 (2.16)。其条件是，对于每个有限 $\nu$，$\mathsf{X}+\nu\mathsf{D}$ 都是正则的，并且投影核具有所需的维数；后一个条件等价于每个原始群内的相位互异。光滑谱曲线提供了第一个条件，因此在相位互异的情形下，完备性是该判据的已知推论。定理 2.2 给出了统一的直接证明，并利用已确立的动量映射和 Gelfand–Zeitlin 构造，完成了对重复相位情形的计数。Jiang 和 Rauch-Wojciechowski 证明了行数为 2 和 3（我们的 $L+M$）时的完备性，但留下了行数为 4 的情形未解决 [31, 第 II.B–II.C 节，尤其是第 1723] 页。插入证明涵盖任意的行数和列数，以及每个固定的相位分布。

### 2.2.4 对易谱流与高阶相互作用

谱不变量既提供哈密顿量，也提供守恒量。选择另一个不变量会改变同一组模态矩阵的演化，同时保持其谱曲线不变。这就是 AKS 框架的对易流构造 [4], ，适用于任意正的 $L$，$M$，$N$。

对每个整数 $r\ge 2$，定义迹哈密顿量

$$H_r=\frac{1}{r}\operatorname{tr}\mathsf{X}^r. \tag{2.23}$$

它在 $\nu=0$ 处是一个谱不变量，并且是关于模态的次数至多为 $r$ 的多项式。根据命题 2.1 和方程 (2.19)，这些哈密顿量彼此对易，并与 $H$

以及 $H_0$ 对易，也与所有幂荷和谱系数对易。因此，定理 2.2 中的完备积分组在每个此类流下都保持不变。

对于 $H_r$ 演化，括号方程（2.16）给出了显式的 Lax 表示：

$$i\dot{\mathsf{X}} = [\mathsf{D}, \mathsf{X}^{r-1}], \qquad i\dot{\mathsf{L}} = [\mathsf{L}, \mathsf{T}_r], \qquad \mathsf{T}_r(\nu) = \frac{\mathsf{X}^{r-1} - \mathsf{L}(\nu)^{r-1}}{\nu}. \tag{2.24}$$

分子在 $\nu = 0$处消失，因此 $\mathsf{T}_r$ 是关于 $\nu$的多项式。事实上，$[\mathsf{L},\ \mathsf{L}^{r-1}] = 0$ 和$[\mathsf{X},\ \mathsf{X}^{r-1}] = 0$将其交换子化简为 $[\mathsf{D},\ \mathsf{X}^{r-1}]$。X 的块对角元保持不变，因为 D 在其三个块中的每一个块上都是标量。

第四个成员 $H_4 = \operatorname{tr} \mathsf{X}^4/4$ 包含四次相互作用，低次数项则由固定的对角元提供。附录I给出了其展开的四次部分。

对于一个常数 $\alpha$，组合哈密顿量和时间矩阵为

$$H_\alpha = H + \alpha H_4, \qquad \mathsf{T}_\alpha = \mathsf{T} + \alpha \mathsf{T}_4. \tag{2.25}$$

相同的初始状态和相位系数在两种演化下给出相同的守恒多项式 $F(\lambda,\ \nu)$。在雅可比簇或Prym簇线性化中，如果几何生成元 $i\partial_t$ 具有平移向量 $\boldsymbol{U}_H,\ \boldsymbol{U}_4$，则除子的 Abel坐标演化为

$$z(t) = z(0) - it(\boldsymbol{U}_H + \alpha \boldsymbol{U}_4). \tag{2.26}$$

这是在交换族中选择不同标量演化的谱解释 [8, 50]。

第 4.4 节中的超椭圆实现选择了标量薛定谔方向 $z(t) = z_0 - ite_g$ 用于 $H_0$。更一般地，定理 3.8 将谱流与多点BA时间以及任意群大小下的常数倒数模态相位对应起来。在每个双有理谱层上，完整的族提供每个阿贝尔方向。

## 2.3 固定矩阵尺寸下的正规谱曲线

Lax铅笔为每条轨道关联一条谱曲线。对于固定的矩阵尺寸 $L,\ M,\ N$，相位系数和初始模态决定了一个标记曲线族。我们将描述其中的正规成员、它们的亏格，以及特殊谱层如何容纳较低亏格的曲线。

这个固定尺寸问题补充了第 3.1 节的 BA 构造：任意给定的光滑曲线都具有兼容的 BA实现，并可在需要时扩充模列表。这里的分类描述在固定矩阵尺寸下会出现哪些曲线，而该构造则选择兼容的矩阵尺寸、参数和初始模态来容纳这条曲线。

### 2.3.1 从 Lax铅笔到固定曲线

对于每个谱参数 $\nu$，方程 (2.13) 中的 $d \times d$ Lax 矩阵 $\mathsf{L}(\nu,\ t)$ 在满足以下条件时具有特征值$\lambda$ 和非零特征向量 $\psi \in \mathbb{C}^d$

$$\mathsf{L}(\nu, t)\psi = \lambda\psi, \qquad \psi \neq 0. \tag{2.27}$$

其可解条件恰好是

$$F(\lambda, \nu) = \det\bigl(\lambda \mathrm{Id}_d - \mathsf{X}(t) - \nu \mathsf{D}\bigr) = 0, \qquad d = L + M + N. \tag{2.28}$$

因此，谱曲线记录了特征值随 $\nu$ 变化的情况。在 $\nu$ 的一个一般取值处有 $d$个特征值，因此投影到 $\nu$ 上便得到一个次数为$d$ 的射影直线覆盖。当特征值重合时，便出现分支值；可通过从 $F = \partial_\lambda F = 0$中消去 $\lambda$ 来确定这些分支值。

该方程在哈密顿流下保持不变。事实上，方程 (2.14) 蕴含 $\partial_t F = 0$，因为 $\lambda \mathrm{Id}_d - \mathsf{L}$ 的伴随矩阵与 $[\mathsf{L},\ \mathsf{T}]$ 相乘后，其迹为零。相位系数和初始模态决定了 $F$的系数，这些系数就是谱第一积分。因此，不同的积分值可以对应不同的曲线，而同一条轨道则保持其曲线不变。这是矩阵拉克斯系统 [31, 8, 4]的标准谱曲线机制。

要得到一条紧致光滑曲线，首先对方程 (2.28) 取射影闭包，然后进行正规化。正规化会将奇点处的局部分支分离开来。我们用 $C$ 表示这条光滑曲线；与相关阿贝尔函数有关的亏格是这条曲线的亏格，而不是行列式的次数。

### 2.3.2 无穷远点处分支与亏格

引入齐次坐标 $\tau$，其仿射坐标图为 $\tau = 1$。射影方程及其在无穷远直线上的限制为

$$\widehat{F}(\lambda, \nu, \tau) = \det\bigl(\lambda \mathrm{Id}_d - \nu \mathsf{D} - \tau \mathsf{X}\bigr) = 0, \tag{2.29}$$

$$\widehat{F}(\lambda, \nu, 0) = (\lambda - \nu)^L (\lambda + \nu)^M \lambda^N. \tag{2.30}$$

平面曲线的次数为 $d$，并在无穷远点处交于 $[1 : \mathbf{1} :\ 0]$、$[-1 : \mathbf{1} :\ 0]$ 和 $[0\colon \mathbf{1} : 0]$。这三点分别包含 $L$、$M$ 和 $N$ 个分支。它们的仿射展开为

$$\begin{aligned} &\lambda = \nu - 2b_\ell^L + O(\nu^{-1}), && 1 \le \ell \le L, \\ &\lambda = -\nu - 2b_m^M + O(\nu^{-1}), && 1 \le m \le M, \\ &\lambda = b_n^N + O(\nu^{-1}), && 1 \le n \le N. \end{aligned} \tag{2.31}$$

特别是，相位系数确定了分支截距。每组中的截距互不相同，因此对应平面点处的切线也互不相同。这种点称为 普通多重点：其所有分支均光滑，且切线互不相同。重数为一表示该点光滑。方程 (2.31) 中的每个分支都与无穷远直线横截。

当三个列表中各自的相位系数两两不同时，若其方程不可约且没有仿射奇点，我们称该谱曲线为正则。此时，它唯一可能存在的平面奇点就是预先指定的无穷远点处的普通点。

**命题 2.3**。 正则谱曲线的正规化具有亏格

$$G = LM + MN + NL - L - M - N + 1. \tag{2.32}$$

它有 $d$ 个无穷远标记点，方程(2.31)中的每个分支对应一个。

证明。 例如，在 $[1 : \mathbf{1} :\ 0]$, 附近，使用 $\nu = 1$ 并写成 $\lambda = 1 + \tau h$。在 $F(1 + \tau h,\ \mathbf{1},\ \tau)$ 中，第一个非零的 $\widehat{\ }$ 系数是某个非零常数乘以

$$\tau^L \prod_{\ell=1}^{L} (h + 2b_\ell^L).$$

其互异的根给出 $L$ 条切线。以同样的方式，另外两个点给出因子 $\prod_{m=1}^{M}(h + 2b_m^M)$ 和 $\prod_{n=1}^{N}(h - b_n^N)$。重数为 $q$ 的普通点会使次数为 $d$ 的平面曲线的亏格减少 $q(q-1)/2$。因此，第四章 §1] 的平面亏格公式 [25, 给出

$$G = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \frac{L(L-1) + M(M-1) + N(N-1)}{2},$$

由此可简化为方程 (2.32)。 □

这也解释了方程 (2.22) 中的计数：模对的数量为 $p = G + (d-1)$，其中有 $d-1$ 独立功率荷。谱曲线提供了该计数中剩余的几何部分。

当相位和初始模态变化时，正则轨迹非空；附录 F 通过对若干直线的并进行平滑证明了这一点。

### 2.3.3 标记曲线刻画

无穷远分支提供了一种以标记点和亚纯函数表述的刻画。将它们的除子记为

$$\mathcal{D}_L = \sum_{\ell=1}^{L} P_\ell^L, \qquad \mathcal{D}_M = \sum_{m=1}^{M} P_m^M, \qquad \mathcal{D}_N = \sum_{n=1}^{N} P_n^N. \tag{2.33}$$

其中，$P_\ell^L$、$P_m^M$ 和 $P_n^N$ 是 $C$ 上对应于方程 (2.31) 中无穷远分支的点。每个点只出现一次，且这三个集合两两不交。对于亚纯函数 $f$，极点除子 $(f)_\infty$ 列出了其极点及其重数。它的次数等于 $f$ 的一个一般值的原像个数，按重数计。

**定理 2.4**。 固定正的 $L$、$M$、$N$，并令 $G$ 由方程 (2.32) 给出。对于亏格为 $G$ 的光滑连通复曲线 $C$，以下陈述等价。

1. $C$ 是某个正则谱曲线的正规化，其方程为 (2.13)，其中相位系数和初始模态取某些值。

2. $C$ 具有一个次数为 $d = L + M + N$ 的双有理平面模型，其中有三个不同的共线普通点，其重数分别为 $L$、$M$、$N$；没有其他奇点，且它们的公共直线与每个分支横截。

3. $C$ 具有方程 (2.33) 中的除子，以及生成其函数域 $\mathbb{C}(C)$ 的亚纯函数 $\lambda$、$\nu$，其极点除子恰为

$$\begin{aligned} (\lambda - \nu)_\infty &= \mathcal{D}_M + \mathcal{D}_N, \\ (\lambda + \nu)_\infty &= \mathcal{D}_L + \mathcal{D}_N, \\ (\lambda)_\infty &= \mathcal{D}_L + \mathcal{D}_M. \end{aligned} \tag{2.34}$$

这种等价性在附录 F 中得到证明。标记函数确定了这些规模下的正则曲线族。改变相位系数和谱积分值可以探索这个族；每条哈密顿轨道都保持其自身的谱曲线不变。正如第 2.4 节所述，在特殊层级上可能出现亏格较低的指定曲线。

### 2.3.4 覆盖次数与超椭圆情形

方程 (2.34) 中的三种消去给出了到射影直线的映射，其次数为

$$\deg \lambda = L + M, \qquad \deg(\lambda - \nu) = M + N, \qquad \deg(\lambda + \nu) = L + N. \tag{2.35}$$

这些函数中任意两个都生成 $\mathbb{C}(C)$，因为它们可以通过线性组合还原 $\lambda, \nu$。这些是曲线的具体限制，除此之外还有亏格这一限制。

**命题 2.5**。 亏格为 $G \geq 2$ 的正则谱曲线是超椭圆曲线，当且仅当 $L$、$M$、$N$ 中至少有两个等于 1。$L = M = N = 1$ 的情形亏格为一。

这一判据对固定矩阵尺寸下的正则谱曲线进行了分类。当 $L$、$M$、$N$ 中少于两个等于 1 时，特殊谱层上也会出现超椭圆 BA 解。特别是，第 4.4 节中的亏格-$g$ 构造允许 $L$、$M \geq g$ 和 $N = 1$；对于 $g \geq 2$，这些超椭圆曲线是系统特殊谱层的光滑正规化，而这些系统的正则曲线是非双曲椭圆曲线（第 2.4 节）。

两个单元素群给出方程 (2.35) 中的一个二次映射。附录 F 利用覆盖次数证明其逆命题。例如，在正则的 $(1,\ M,\ 1)$ 情形中，二次函数 $\lambda + \nu$ 的极点除子为 $Q_1 + R_1$：其对合交换这两个点，因此 BA 标记点不是分支点。第 4.4 节的奇数次数特化则将一个魏尔斯特拉斯点标记为唯一的 puncture。其条件 $L,\ M \geq g$ 来自该标记点处的插值，而非对所有超椭圆谱曲线的限制。一般留数判据涵盖这两种情形；在单元素群中，$\lambda + \nu$ 的主除子提供了两个全纯求值向量之间所需的关系。

所需关系 phic 求值向量。

方程 (2.35) 中覆盖次数的示例，按递增顺序列出，

| $(L,\ M,\ N)$ | $G$ | 覆盖次数 | 正则曲线 |
|---|---|---|---|
| $(1,\ 1,\ 1)$ | $1$ | $2,\ 2,\ 2$ | 椭圆的 |
| $(1,\ 1,\ 2)$ | $2$ | $2,\ 3,\ 3$ | 超椭圆的 |
| $(1,\ 2,\ 2)$ | $4$ | $3,3,4$ | 非双曲椭圆 |
| $(1,\ 2,\ 3)$ | $6$ | $3,\ 4,\ 5$ | 非双曲椭圆 |
| $(2,\ 2,\ 2)$ | $7$ | $4,4,4$ | 非双曲椭圆 |
| $(2,\ 2,\ 3)$ | $10$ | $4,5,5$ | 非双曲椭圆 |

特别地，$(1,\ 2,\ 2)$ 族是三重覆盖：它有一个三次映射，但没有二次映射。$(2,\ 2,\ 2)$ 族是四重覆盖。假设存在一个三次映射和它的一个四次映射，由于它们的次数互素，二者将生成函数域；于是 Castelnuovo–Severi 将给出 $G \leq 6$。

当 $N = 1$ 时，乘积曲面模型也很有用。以 $\lambda - \nu$ 和 $\lambda + \nu$ 为坐标，可得到 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 中一条双次数为 $(L+1,\ M+1)$ 的光滑曲线，其亏格为 $LM$。这里的双次数记录了定义方程中第一和第二个坐标的次数；相应的投影次数为 $M+1$ 和 $L+1$。对于 $N > 1$，同样的变换得到双次数为 $(L+N,\ M+N)$ 的曲线，但它在公共无穷远角点处的 $N$ 个分支共用一条切线。它们的总亏格缺陷为 $N(N-1)$：每一对分支的交点重数均为二，这可由方程 (2.31) 中不同的截距推出。因此，其亏格为

$$(L+N-1)(M+N-1) - N(N-1) = G.$$

## 2.4 特殊谱层与约化

我们将说明特殊积分值和模态约束如何改变正则几何，从而在同一个哈密顿族中定位低亏格 BA 曲线和对称约化。

### 2.4.1 特殊谱层

保持每组内的相位系数彼此不同，并假设平面曲线仍然不可约。如果特定积分值产生仿射奇点，则正规化的标准亏格–δ 公式给出

$$g(C) = G - \sum_{P \in \mathrm{Sing}_{\mathrm{aff}}(F)} \delta_P. \tag{2.36}$$

这里，$C$ 是平面谱曲线 $F(\lambda,\ \nu) = 0$ 的光滑正规化，$g(C)$ 是其亏格，而 $G$ 是方程（2.32）中的正则亏格。集合 $\mathrm{Sing}_{\mathrm{aff}}(F)$ 由其仿射奇点

点组成，而 $\delta_P$ 是 $P$处的局部亏格缺陷，在普通节点处等于一。因此，规模决定正则亏格，而谱积分决定某个特定层是否具有较低的亏格。重合的相位系数也可能改变无穷远奇点，因此需要重新计算其亏格缺陷。

对于双有理预设 BA 实现，命题 3.5 将预设光滑曲线确认为正规化，并给出总超额缺陷 $G - g$。例如，$(L、\ M、\ N) = (3、3、1)$ 系统的正则亏格为九，而第 5 节中的亏格三三重覆盖实现具有六的超额缺陷。额外的奇点属于其平面谱像；预设 BA 曲线是其光滑正规化。

### 2.4.2 对称约化及其 Prym簇

具有 $L = M = s, N = 1$ 的对称约化给出一个对合 $\iota(\lambda、\ \nu) = (\lambda、\ -\nu)$。于是，运动除子位于其 Prym簇的一个平移中；该 Prym簇是被 $\iota$ 反转的雅可比簇的连通部分。在正则等值面上，曲线的亏格为 $s^2$，Prym簇的维数为 $s(s+1)/2$。附录 H 给出了模态约束、维数计数以及特征向量除子证明。

## 3 Baker–Akhiezer 对应及其对易流

第 2 节介绍了典范哈密顿系统，确立了其刘维尔可积性和谱性质，并描述了相关的代数曲线。现在，我们将重点讨论用贝克–阿赫泽函数表示的系统通解。

我们从两个方向建立这种对应：指定的 BA 数据生成典范模态解，而一般的典范初始模态则可还原其 BA 数据。随后，我们确定对易演化及其模态相位，并明确给出阿贝尔方向。

### 3.1 从指定的 BA 数据到规范动力学

我们直接从一条光滑曲线构造任意正的 $L、\ M$ 和 $N$对应的解。两个入射数组来自在 $N$ punctures处归一化的普通与对偶 BA 基；它们的双点核给出 $L \times M$ 数组。亚纯插值确定权重和相位系数。其留数恒等式无需先重构矩阵谱问题，即可得出哈密顿方程。对于 $N = 1$，该基仅包含一个普通／对偶对，由此得到两个模态向量及其成对模态矩阵。我们将在一般重构和哈密顿量比较之后，进一步讨论这一特例。

#### 3.1.1 标量 BA 基例及其核

固定一条亏格为 $g$ 的光滑紧致连通曲线 $\mathcal{C}$，其上有互不相同的 punctures $R_k$，并带有局部参数 $s_k, 1 \le k \le N$，以及一个次数为 $g + N - 1$、与 punctures 不相交的普通 BA 除子 $\mathscr{D}$。设 $\mathscr{R} = \sum_{k=1}^{N} R_k$。对于除子 $E$，$H^0(\mathcal{O}(E))$ 表示其对应线丛的整体截面所构成的向量空间：满足 $(f) + E \ge 0$ 的亚纯函数 $f$，以及零函数。在参考时刻的正则性意味着 $H^0(\mathcal{O}(\mathscr{D} - \mathscr{R})) = 0$，因此，没有任何非零函数在 punctures 处处消失且其极点受 $\mathscr{D}$ 限制：此时，$N$ 个首项值唯一确定一个 BA 截面。

对偶除子由这些数据确定。记 $K_{\mathcal{C}}$ 为一个正则除子。从 $H^0(K_{\mathcal{C}} + 2\mathscr{R})$ 到 $N$二阶极点系数以及沿$\mathscr{D}$的 $g + N - 1$限制值（包括多重点处的喷流）的映射，其核为 $H^0(K_{\mathcal{C}} + \mathscr{R} - \mathscr{D})$。由于 Serre 对偶和黎曼–罗赫定理，且 $\deg(\mathscr{D} - \mathscr{R}) = g - 1$、其 $H^0$ 为零，该核消失。源空间和目标空间的维数均为 $g + 2N - 1$，因此该映射是同构。于是存在一个

唯一的微分 $d\Omega_0$，它在 $\mathscr{D}$ 处消失，且二阶极点首项为 $-ds_k/s_k^2$。其余的零因子为 $\mathscr{D}^\vee$，次数为 $g+N-1$，并且

$$\mathcal{O}(\mathscr{D}^\vee-\mathscr{R})\simeq\mathcal{O}(K_{\mathcal{C}}+\mathscr{R}-\mathscr{D})$$

这表明对偶首值问题也是正则的。零点除子按重数计数。允许存在 $d\Omega_0$ 的一阶极点留数，并由此构造确定。一阶局部参数确定其二阶极点系数，因而确定对偶除子。规范化基满足

$$\begin{aligned}&\psi_k(P,t)=e^{-it/s_m}(\delta_{km}+O(s_m)),\\&\psi_k^\vee(P,t)=e^{it/s_m}(\delta_{km}+O(s_m))\quad(P\to R_m),\quad 1\le k,m\le N.\end{aligned}\tag{3.1}$$

这些是同一条曲线上的标量函数，共享除子数据：$k$ 选取一个规范化截面，而不是一个独立的一点解 [38, 40]。在参考时刻，两个基的和均为 1：常值函数具有这些首值，因此由唯一性可得 $\sum_{k=1}^N\psi_k(P,0)=\sum_{k=1}^N\psi_k^\vee(P,0)=1$。数目 $N$ 独立于亏格地指定了这些 BA punctures；对于曲线的另一种平面方程，它们不必是无穷远点。固定对偶微分的零点除子为 $\mathscr{D}+\mathscr{D}^\vee$。

选取规范化全纯微分 $\boldsymbol{\omega}$。对于每个 puncture $R_k$，通过局部展开定义其阿贝尔平移向量 $\boldsymbol{U}_k\in\mathbb{C}^g$

$$\boldsymbol{\omega}=(-\boldsymbol{U}_k+O(s_k))ds_k\quad(P\to R_k),\qquad\boldsymbol{U}=\sum_{k=1}^N\boldsymbol{U}_k,\qquad z(t)=z_0-it\boldsymbol{U}.\tag{3.2}$$

它们的和 $\boldsymbol{U}$ 是所选时间演化的共同阿贝尔方向。规范化的第二类积分 $\Xi$ 具有展开式 $\Xi=s_k^{-1}+\Xi_k+O(s_k)$。其主部给出了这一共同时间。

对于全纯基 $du$ 和相容的第二类基 $dr$，我们的半周期约定为 $2\omega=\oint_a du$, $2\omega'=\oint_b du$, $2\eta=-\oint_a dr$, $2\eta'=-\oint_b dr$。因此 $\mathbb{B}=\omega^{-1}\omega'$ 和 $\varkappa=\eta\omega^{-1}$，其中 $\varkappa$ 对称。对于固定的特征，记作 $\theta=\theta[\delta](\cdot\mid\mathbb{B})$。西塔指数西格玛约定为 [14, 34]

$$\sigma(u)=C\exp\Big(\tfrac12 u^{\mathsf T}\varkappa u\Big)\,\theta((2\omega)^{-1}u),\qquad C\neq0.$$

这些基和特征确定了该约定。这里 $du=\boldsymbol{\omega}$ 和 $2\omega=\mathrm{Id}_g$；具体示例给出了未规范化的基。这些约定与 Generapy 一致；我们在第 5 [27] 节的数值验证中使用了这个 Python 库。

将阿贝尔映射 $A$ 以 $R_1$为基点，并令 $\Delta_k(P)=A(P)-A(R_k)$ 和 $J_k(P)=\Xi(P)-\Xi_k$。theta 公式为

$$\begin{aligned}&\psi_k(P,t)=a_k(P)e^{-itJ_k(P)}\frac{\theta(z(t)+\Delta_k(P))}{\theta(z(t))},\\&\psi_k^\vee(P,t)=b_k(P)e^{itJ_k(P)}\frac{\theta(z(t)-\Delta_k(P))}{\theta(z(t))},\qquad 1\le k\le N.\end{aligned}\tag{3.3}$$

固定因子由参考截面确定：$a_k=\psi_k(P,0)\theta(z_0)/\theta(z_0+\Delta_k)$ 和 $b_k=\psi_k^\vee(P,0)\theta(z_0)/\theta(z_0-\Delta_k)$。它们编码了除子和 puncture 规范化。含时公式在 $\theta(z)=0$ 之外求值，并在 BA 时间中亚纯延拓，在该除子上可能存在极点。等价地，令 $J_{\sigma,k}=J_k-\boldsymbol{U}^{\mathsf T}\varkappa\Delta_k$, $a_{\sigma,k}=a_k e^{-z_0^{\mathsf T}\varkappa\Delta_k-\Delta_k^{\mathsf T}\varkappa\Delta_k/2}$ 和 $b_{\sigma,k}=b_k e^{z_0^{\mathsf T}\varkappa\Delta_k-\Delta_k^{\mathsf T}\varkappa\Delta_k/2}$。sigma 版本为 $\psi_k=a_{\sigma,k}e^{-itJ_{\sigma,k}}\sigma(z+\Delta_k)/\sigma(z)$ 和 $\psi_k^\vee=b_{\sigma,k}e^{itJ_{\sigma,k}}\sigma(z-\Delta_k)/\sigma(z)$。对于必要性，一个开雅可比

族意味着 $z_0$ 在一个开集内变化，而曲线、punctures、求值点、权重和常数模规范保持固定；点号表示选定的第一个时间。

标量柯西–BA核 $\Omega(P,\ Q;\ t)$ 具有固定的普通除子和对偶除子以及对角归一化

$$\Omega(P,Q)\sim\frac{1}{\beta_Q(s_Q(P)-s_Q(Q))},\qquad d\Omega_0=(\beta_Q+O(s_Q))ds_Q. \tag{3.4}$$

在每个 puncture 处，

$$\begin{aligned}&\Omega(P,Q)\sim s_k(P)e^{-it/s_k(P)}\psi_k^\vee(Q)\quad(P\to R_k),\\&\Omega(P,Q)\sim -s_k(Q)\psi_k(P)e^{it/s_k(Q)}\quad(Q\to R_k),\quad 1\le k\le N.\end{aligned} \tag{3.5}$$

我们使用 [10, 定义 3.2 和式 (3.22)], 的微分核刻画，并将其转换为此符号约定。求导会消去对角主部，而所有 puncture 处的首项值给出

$$i\dot\Omega(P,Q)=\sum_{k=1}^{N}\psi_k(P)\psi_k^\vee(Q). \tag{3.6}$$

减去该总和后，剩下一个首项向量为零的 BA 截面，因此其本身为零。对于 $N=1$ 这就是通常的 BA乘积原函数 [22, 7]。

### 3.1.2 模态数组与亚纯插值

我们将 BA 求值汇集为三个正则模态数组，并证明两个有限线性留数条件可以确定用于亚纯插值的可容许权重，进而得到相位变化率。

设定 $K=L+M$。选取互不相同的普通点 $Q_a$, $1\le a\le K$，使其远离 punctures、固定极点以及 $d\Omega_0$ 的零点。对于非零权重 $\kappa_a$ 和互为倒数的规范因子 $c_a,\ e_k$，定义

$$\begin{aligned}&u^{\mathrm{BA}}_{\ell j}=\frac{\sqrt{2}\kappa_\ell\kappa_{L+j}}{c_\ell c_{L+j}}\Omega(Q_\ell,Q_{L+j}),\quad &&\bar u^{\mathrm{BA}}_{\ell j}=-\sqrt{2}c_\ell c_{L+j}\Omega(Q_{L+j},Q_\ell),\\&v^{\mathrm{BA}}_{jk}=\frac{c_{L+j}}{e_k}\psi_k(Q_{L+j}),&&\bar v^{\mathrm{BA}}_{jk}=\frac{\kappa_{L+j}e_k}{c_{L+j}}\psi_k^\vee(Q_{L+j}),\\&w^{\mathrm{BA}}_{k\ell}=c_\ell e_k\psi_k^\vee(Q_\ell),&&\bar w^{\mathrm{BA}}_{k\ell}=\frac{\kappa_\ell}{c_\ell e_k}\psi_k(Q_\ell),\quad 1\le\ell\le L,\ 1\le j\le M,\ 1\le k\le N.\end{aligned} \tag{3.7}$$

横线表示彼此独立的伴随标签。固定的归一化存在一个冗余：对于任意 $s\neq 0$，在第一组中以 $sc_\ell$ 替换 $c_\ell$、在第二组中以 $s^{-1}c_{L+j}$ 替换 $c_{L+j}$，并以 $s^{-1}e_k$ 替换 $e_k$，都不会改变任何模态。这是 $d$ 个顶点规范生成元之间唯一的关系，因此留下 $d-1$ 个独立作用，如方程 (2.7) 所示。核变化率已经给出了 $u$ 个方程；其他数组则需要对侧普通点组上的加权求和。

在 $Q_a$ 处选取一个消失坐标，并写作

$$\boldsymbol{\omega}=(E_a+O(s_a))ds_a,\qquad d\Omega_0=(\beta_a+O(s_a))ds_a,\qquad r_a=2\kappa_a/\beta_a. \tag{3.8}$$

求 $h_L,\ h_M$，使它们仅在各自的点组上有有限个单极点，其主系数为 $r_a$，并具有如下展开式

$$h_A=s_k^{-1}+a_{A,k}+O(s_k)\quad(P\to R_k),\qquad A\in\{L,M\},\quad 1\le k\le N. \tag{3.9}$$

每个函数都可以固定一个加法常数。它们的局部常数$a_{A,\ k}$ 决定第三组相位变化率。

**引理 3.1** (亚纯插值)。 当且仅当以下条件成立时，这些函数存在

$$\sum_{\ell=1}^{L} r_\ell E_\ell = \boldsymbol{U}, \qquad \sum_{j=L+1}^{K} r_j E_j = \boldsymbol{U}. \tag{3.10}$$

它们在加性常数意义下唯一，并且

$$\kappa_\ell = \tfrac{1}{2}\operatorname{Res}_{Q_\ell}(h_L d\Omega_0), \quad 1 \le \ell \le L, \qquad \kappa_j = \tfrac{1}{2}\operatorname{Res}_{Q_j}(h_M d\Omega_0), \quad L+1 \le j \le K. \tag{3.11}$$

证明。 $h\omega_\alpha$ 的有限留数为 $r_a(E_a)\alpha$；它们在各 puncture 处的总和为 $-U_\alpha$。它们消失恰好对应紧曲线 Mittag–Leffler 障碍 [25]。两个解之差是全纯函数，因此为常数。 □

检验由两个 $g$维线性方程组构成。一般位置的 $n \ge g$ 点组秩为 $g$，且有 $n-g$ 个自由主系数。每个系数都必须非零，才能保留相应模态。较小的特殊点组也遵循同样的一致性检验。

### 3.1.3 核卷积恒等式

插值函数将核转化为加权 BA 恒等式，使三个数组相互耦合。其基础 Szegő 核复合恒等式由 Ben-Zvi 和 Biswas [9,命题 5.21]给出；我们写出其加权 BA 形式，明确列出 puncture 贡献，并在我们的正规化下给出留数证明。

**引理 3.2** （卷积与加权 BA 方程）。 对于 $h = h_A$ 令$(a_0,\ a_1) = (1,\ L)$ 或$(L+1,\ K)$ 分别成立。于是

$$\sum_{k=1}^{N} \psi_k(P)\psi_k^\vee(Q) = (h(P)-h(Q))\Omega(P,Q) - 2\sum_{a=a_0}^{a_1} \kappa_a \Omega(P,Q_a)\Omega(Q_a,Q). \tag{3.12}$$

对于 $1 \le k \le N$,

$$\begin{aligned} i\dot\psi_k(P) &= (h(P)-a_{A,k})\psi_k(P) - 2\sum_{a=a_0}^{a_1} \kappa_a \psi_k(Q_a)\Omega(P,Q_a), \\ i\dot\psi_k^\vee(P) &= -(h(P)-a_{A,k})\psi_k^\vee(P) - 2\sum_{a=a_0}^{a_1} \kappa_a \psi_k^\vee(Q_a)\Omega(Q_a,P). \end{aligned} \tag{3.13}$$

证明。对 $T$ 中的 $h(T)\Omega(P,T)\Omega(T,Q)d\Omega_0(T)$ 应用留数定理。 $d\Omega_0$ 的零点抵消了其固定除子极点。在 $P, Q, Q_a$ 处的留数分别为 $-h(P)\Omega(P,Q)$、 $h(Q)\Omega(P,Q)$ 和 $2\kappa_a\Omega(P,Q_a)\Omega(Q_a,Q)$。每个 $R_k$ 都贡献 $\psi_k(P)\psi_k^\vee(Q)$，从而证明了卷积关系。对于第一个加权方程，有限主部根据方程 (3.8) 抵消。在 $R_m$ 处，$a_{A,k}$ 修正之前，剩余的首项值为 $-a_{A,m}\delta_{km}$ 。进行该修正后，所有首项值均为零，因此可应用 BA 唯一性。对偶证明的对角符号相反。 □

### 3.1.4 实现与有限完备化

对于 $1 \le \ell \le L, 1 \le j \le M, 1 \le k \le N$，定义相位系数和辅助相位率如下

$$\begin{aligned} b_\ell^L &= -\tfrac{1}{2}h_M(Q_\ell), \quad b_j^M = \tfrac{1}{2}h_L(Q_{L+j}), \qquad b_k^N = \tfrac{1}{2}(a_{M,k}-a_{L,k}), \\ \widetilde b_\ell^L &= -\tfrac{1}{2}h_M(Q_\ell), \quad \widetilde b_j^M = -\tfrac{1}{2}h_L(Q_{L+j}), \quad \widetilde b_k^N = -\tfrac{1}{2}(a_{M,k}+a_{L,k}). \end{aligned} \tag{3.14}$$

使用保持循环变换

$$u_{\ell j} = e^{-it(\widetilde b_\ell^L - \widetilde b_j^M)} u_{\ell j}^{\mathrm{BA}}, \quad v_{jk} = e^{-it(\widetilde b_j^M - \widetilde b_k^N)} v_{jk}^{\mathrm{BA}}, \quad w_{k\ell} = e^{-it(\widetilde b_k^N - \widetilde b_\ell^L)} w_{k\ell}^{\mathrm{BA}}, \tag{3.15}$$

并搭配互反伙伴因子。每个三元组中的三个速率之和为零，从而保留混合项。

正则多点数据是指第 3.1.1 节中的光滑曲线和除子条件、彼此不同且避开两个除子与 punctures 的求值点，以及非零权重和规范。

**定理 3.3**（主定理，第一部分：规范 BA 实现）。 充分性。 对于正则多点数据，方程 （3.10）通过方程 （3.7）、（3.14）和（3.15）给出方程 （2.3）的一个亚纯解。必要性。 对于 $g \geq 1$ 和 $\boldsymbol{U} \neq 0$，这些留数条件是所示 *BA* 拟设在开雅可比族上满足正则方程的必要条件。相位相容性。 对于预先指定的 $b^L$、$b^M$、$b^N$，当且仅当时，这样的 *BA* 解可通过恒定速率互反模规范进行匹配

$$2(b^L_\ell + b^M_j + b^N_k) = h_L(Q_{L+j}) - h_M(Q_\ell) + a_{M,k} - a_{L,k}, \quad 1 \leq \ell \leq L,\ 1 \leq j \leq M,\ 1 \leq k \leq N. \tag{3.16}$$

证明。 核与加权恒等式给出原始方程

$$\begin{aligned} i\dot{u}^{\mathrm{BA}}_{\ell j} &= \sqrt{2}\sum_{k=1}^{N} \bar{v}^{\mathrm{BA}}_{jk}\bar{w}^{\mathrm{BA}}_{k\ell}, \\ i\dot{v}^{\mathrm{BA}}_{jk} &= (h_L(Q_{L+j}) - a_{L,k})v^{\mathrm{BA}}_{jk} + \sqrt{2}\sum_{\ell=1}^{L} \bar{u}^{\mathrm{BA}}_{\ell j}\bar{w}^{\mathrm{BA}}_{k\ell}, \\ i\dot{w}^{\mathrm{BA}}_{k\ell} &= (-h_M(Q_\ell) + a_{M,k})w^{\mathrm{BA}}_{k\ell} + \sqrt{2}\sum_{j=1}^{M} \bar{u}^{\mathrm{BA}}_{\ell j}\bar{v}^{\mathrm{BA}}_{jk}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

以及负伙伴方程。相位变换给出方程（2.5）。比较每个三元组周围线性速率之和，可证得方程（3.16）；允许的重新分配是第 2.1.2 节中的常数规范。

对于必要性，令 $\mathsf{H}_\theta$ 为 $\log\theta$ 和 $\partial_v = \sum_{\alpha=1}^{g} v_\alpha \partial_{z_\alpha}$ 沿常方向$v$的海森矩阵。Fay 双核恒等式为

$$\Omega(P,Q)\Omega(Q,P)d\Omega_0(P)d\Omega_0(Q) = -B(P,Q) - \boldsymbol{\omega}(P)^{\mathsf{T}}\mathsf{H}_\theta\boldsymbol{\omega}(Q), \tag{3.18}$$

其中 $B$ 是归一化基本双微分 [18, p. 26]；另见 [33, (3.12)]。为得到对角 BA 乘积，使用核的 theta 形式。令 $\Delta = A(P) - A(Q)$，它满足以参考点归一化的演化

$$\Omega(P,Q;t) = \Omega(P,Q;0)e^{-it(\Xi(P)-\Xi(Q))}\frac{\theta(z(t)+\Delta)\theta(z_0)}{\theta(z(t))\theta(z_0+\Delta)}.$$

在局部坐标 $s$中，写作 $\boldsymbol{\omega} = E_P\,ds$ 和 $\partial_s\Xi = \Xi_s$。当 $Q \to P$时，其展开为

$$\begin{aligned} \Omega(P,Q;t)\frac{d\Omega_0(Q)}{ds(Q)} = \frac{1}{s(P)-s(Q)} &+ a(P) - it\Xi_s(P) \\ &+ E_P^{\mathsf{T}}(\nabla\log\theta(z) - \nabla\log\theta(z_0)) + O(s(P)-s(Q)), \end{aligned}$$

其中， $a(P)$ 是 $t=0$ 处与时间无关的正则系数。对 $i\partial_t$ 求导并取对角极限。由核速率方程 (3.6) 和 $i\dot{z} = \boldsymbol{U}$ 得

$$\left(\sum_{k=1}^{N}\psi_k(P)\psi_k^\vee(P)\right)d\Omega_0(P) = d\Xi(P) + \boldsymbol{\omega}(P)^{\mathsf{T}}\mathsf{H}_\theta\boldsymbol{U}. \tag{3.19}$$

因此，对角恒等式可由核的正则部分推出；非对角乘积则由方程 (3.18) 单独给出。

令 $\mathcal{Q}_\ell = Q_\ell^L/\kappa_\ell$，其中 $Q_\ell^L$ 是方程 (2.6) 的第一组幂荷。模定义给出

$$\mathcal{Q}_\ell = \sum_{k=1}^{N} \psi_k(Q_\ell)\psi_k^\vee(Q_\ell) + 2\sum_{j=L+1}^{K} \kappa_j \Omega(Q_\ell, Q_j)\Omega(Q_j, Q_\ell).$$

令 $V_M = \sum_{j=L+1}^{K} r_j E_j - \boldsymbol{U}$，并设 $B_{\ell j}$ 表示在 $Q_\ell, Q_j$ 处的选定坐标中， $B(Q_\ell, Q_j)$ 的系数。代入两个乘积恒等式，并令 $r_j = 2\kappa_j/\beta_j$，得到

$$\beta_\ell \mathcal{Q}_\ell = \Xi_s(Q_\ell) - \sum_{j=L+1}^{K} r_j B_{\ell j} - \partial_{E_\ell}\partial_{V_M}\log\theta(z).$$

前两项与 $z$ 无关。由于 $\mathcal{Q}_\ell$ 守恒且 $\dot{z} = -i\boldsymbol{U}$，开雅可比族上的拟设蕴含亚纯恒等式

$$\partial_{\boldsymbol{U}}\partial_{E_\ell}\partial_{V_M}\log\theta = 0.$$

在 theta 除子的光滑点处，其首项三次极点的系数为 $2(\partial_{\boldsymbol{U}}\theta)(\partial_{E_\ell}\theta)(\partial_{V_M}\theta)$。光滑连通曲线的 theta 除子是不可约、约化且丰沛的 [46]。因此，该乘积仅当某个因子在除子上恒为零时，才会在其光滑部分上消失。处处与该除子相切的常向量属于其平移稳定子的李代数，而该平移稳定子是有限的。第一个因子不可能恒为零，因为 $\boldsymbol{U} \neq 0$；第二个因子也不可能：全纯微分没有公共零点，因此 $E_\ell \neq 0$。由此可得 $V_M = 0$。这就是第二个留数方程。列荷给出另一个留数方程。方程 (3.17) 中的线性速率由此迫使方程 (3.16) 中的三元组和成立。

□

充分性同样适用于零亏格和平稳阿贝尔方向；非零方向假设仅用于必要性。

**推论 3.4**（包括指定取值）。 固定正则多点数据，以及两组中主系数非零的任意有限个普通取值点。向每组添加$g+1$ 个一般点，即可使两个留数方程在所有新增系数均非零的条件下得到求解。若还指定了每个插值函数的全部 $N$ 正则常数，则每组只需添加$g+N$ 个一般点。扩大的数组具有定理 *3.3* 所述的实现。

证明。 对于留数方程，选取 $g+1$ 列，使得每个 $g$ 均独立。对于任意剩余右端项，其解集是一条仿射直线，且其核方向的每个坐标都非零。避开使某个坐标为零的有限个参数值。对于指定的正则常数，障碍空间为 $H^1(\mathcal{O}(-\sum_{k=1}^{N} R_k))$，其维数为 $g+N-1$。其对偶由全纯微分和至多带有简单标记点极点的第三类微分组成。一般的 $g+N$ 取值列具有相同的满秩性和核方向非零性质。对每组应用同样的论证。在零亏格情形，留数系统为空。

□

加入 $a_L$， $a_M$ 个求值点后，得到的系统具有

$$(L+a_L)(M+a_M) + N(L+M+a_L+a_M)$$

个典范模对。原有的求值仍作为这些扩大的数组中的元素保留下来；其方程包含新模。补全会构造一个耦合扩充，并且通常会改变 $h_L$， $h_M$ 以及原有模态的线性相位系数。

此处 $a_L = a_M = g+1$ 表示基本补全，而 $a_L = a_M = g+N$ 表示指定所有正则 puncture 常数时的情形。

## 3.2 从正则初始模态到 BA 解

我们确定指定实现所携带的曲线，并从一般的正则初始模态中恢复 BA 解，从而补全对应关系的反向过程。

插值函数 $h_L$，$h_M$ 在指定曲线上给出谱坐标。对于多个 puncture，要将该曲线与归一化特征曲线相对应，需要满足命题 3.5 中的双有理性条件。

### 3.2.1 确定指定谱曲线

**命题 3.5**（指定实现的谱曲线）。对于相位系数方程 (3.14)，令

$$\nu(P) = -\tfrac{1}{2}(h_L(P) + h_M(P)), \qquad \lambda(P) = \tfrac{1}{2}(h_M(P) - h_L(P)). \tag{3.20}$$

正则铅笔的特征多项式在此映射上为零。如果该映射双有理地映到其像上（即诱导出函数域的同构），则 $C$ 将完整特征曲线归一化。一个充分条件是：某个 *puncture* 具有有限极限，且该极限 $\lambda$ 与其他 *puncture* 的极限不同，特别是两两不同的 $b_k^N$。对于 $N = 1$，此条件自动成立。

设 $\Gamma$ 为射影平面特征曲线。记 $d = L + M + N$ 和 $G = LM + MN + NL - d + 1$。在这个双有理区域上，除通常的三个无穷远多重点之外的总奇点亏格亏损为

$$\sum_{q \in \mathrm{Sing}(\Gamma)} \delta_q - \binom{L}{2} - \binom{M}{2} - \binom{N}{2} = G - g. \tag{3.21}$$

组内不同相位时，附加缺陷是仿射的；重合相位则可能使其位于无穷远点，如第 *4.5.1* 节所示。

证明。令 $\mathsf{X}_{\mathrm{BA}}$ 为方程（2.13）中的分块矩阵，其原始数组满足方程（3.7），相位对角矩阵满足方程（3.14）。显式向量为

$$r(P) = \begin{pmatrix} (-\kappa_\ell \Omega(Q_\ell, P)/c_\ell)_{\ell=1}^{L} \\ (c_{L+j}\Omega(Q_{L+j}, P))_{j=1}^{M} \\ (e_k \psi_k^\vee(P))_{k=1}^{N} \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

$(\mathsf{X}_{\mathrm{BA}} + \nu(P)\mathsf{D})r = \lambda(P) r$ 的前两块行是 $h_M, h_L$ 的卷积恒等式。第三块行可通过减去它们的对偶加权方程得到：

$$\sum_{\ell=1}^{L} \kappa_\ell \psi_k^\vee(Q_\ell)\Omega(Q_\ell, P) - \sum_{j=L+1}^{K} \kappa_j \psi_k^\vee(Q_j)\Omega(Q_j, P) = (\lambda(P) - b_k^N)\psi_k^\vee(P).$$

相位变换方程（3.15）用同一个对角矩阵对铅笔和向量进行共轭，从而保持该谱方程不变。将标量原点 $\rho\mathrm{Id}_d$ 加到铅笔上，会使 $\lambda$ 平移 $\rho$，并保持特征向量不变。

$\nu$ 的极点均为单极点，位于所有 $Q_a, R_k$。它们的分支满足

$$\lambda - \nu \to -2b_\ell^L \ (P \to Q_\ell), \qquad \lambda + \nu \to -2b_j^M \ (P \to Q_{L+j}), \qquad \lambda \to b_k^N \ (P \to R_k).$$

若 $R_k$ 有唯一的有限极限纵坐标，则它是正规化中位于其像上方的唯一点。其 $\nu$ 的简单极点使该点非分歧，因此覆盖次数为一。同样的论证也适用于唯一分离出的外部分支。对于双有理映射，$\deg \nu = d$ 意味着 $\lambda$ 在 $\mathbb{C}(\nu)$ 上的最小多项式次数为 $d$。首一特征多项式的次数相同且在该处为零，因此它就是这个最小多项式。平面次数为 $d$；减去无穷远点处的普通亏损后，得到方程 (3.21)。 □

**指定曲线与谱纤维**。 固定标记谱曲线及其函数$\lambda$， $\nu$，并令相位截距互不相同。在正则标架谱对应下，光滑的亏格-$G$ 层具有 $G$ 个除子类参数和 $d-1$ 个独立的模规范，因此维数为 $G+d-1=p$。亏格为 $g$ 的指定正规化，在将等价的亚纯标架视为相同之后，则给出 $g+d-1$ 个参数。相对于具有预期维数的谱纤维，这个实现的族的余维为 $G-g$。当 $g<G$时，这是特殊层级上的一个基于不变量正规化的族；当 $g=G$时，它是正则纤维中的开集。

这一族具有具体的谱层解释。分离出由条件强制产生的普通无穷远点，并令 $n:\mathcal{C}\to\Gamma_{\mathrm{sp}}$ 将其余整谱模型正规化。在参考时刻，方程 (3.22) 的各分量是线丛的截面

$$\mathscr{L}=\mathcal{O}\left(\mathscr{D}^{\vee}+\sum_{a=1}^{K}Q_a\right).$$

这里，$\mathcal{O}(E)$ 表示与除子 $E$关联的线丛；因此 $\mathscr{L}$ 允许在$\mathscr{D}^{\vee}$ 以及求值点 $Q_a$处有极点，重数如所示。减去 $\nu$的整个极点纤维后，得到 $\mathscr{L}(-\nu^{-1}(\infty))=\mathcal{O}(\mathscr{D}^{\vee}-\sum_{k=1}^{N}R_k)$，其两个上同调群均为零。其首值序列表明， $d$ 分量构成一组基，并且 $\nu_{*}\mathscr{L}\simeq\mathcal{O}^{d}$。乘以 $\lambda$ 诱导出一个映射 $\mathcal{O}^{d}\to\mathcal{O}(1)^{d}$，由该铅笔表示。 $\Gamma_{\mathrm{sp}}$ 上的分量谱层为 $n_{*}\mathscr{L}$。因此，所实现的族是这样一个分层：将线丛从正规化映射下推，同时保留模态标架。其除子类维数为 $g$。完整的紧化谱纤维还可以包含带有奇点粘合数据 $[1,\,8]$的层。定理 3.6 的通解重构出属于一般初始模态的曲线。对于重复相位，其活跃维数、矩数据和恢复的块基在附录 G 中另行处理。

有多个 puncture 时，插值函数可以改为经由一个覆盖分解；此时，识别曲线需要双有理性。推论 3.4 中更强的完备化允许指定不同的差值 $a_{M,\,k}-a_{L,\,k}$，从而得到命题中所用的充分分支分离。对于 $N=1$，乘积坐标 $\lambda-\nu$、 $\lambda+\nu$的次数为 $M+1$、 $L+1$；其像的双次数为 $(L+1,\ M+1)$，算术亏格为 $LM$，由此恢复单点缺陷 $LM-g$。

### 3.2.2 从一般正则数据进行重构

现在，谱特征向量可以恢复每个模态，因此 BA 公式能够从正则初始数据得到解，而不再仅限于预先选定曲线上的数据。

**定理 3.6** (主定理，第二部分：一般 BA 重构)。 固定正整数 $L$、 $M$、 $N$以及任意相位系数。扎里斯基一般的正则初始模态可在一条光滑正规化活跃谱曲线上重构标量多点 *BA* 基及其核。对于各组内的不同相位，所有方向均为活跃方向，亏格为 $G=LM+MN+NL-L-M-N+1$；最后一组提供 $N$个 *punctures*，普通除子和对偶除子的次数均为 $G+N-1$。对于重复相位，按附录 *G* 所述，在等相位块内使用常数正则基，并移除非活跃方向（入向和出射耦合均为零的坐标）。使用活跃维数 $L_a$、 $M_a$、 $N_a$ 和亏格方程 (G.3)进行构造，然后恢复零方向和基。原始坐标随后可表示为活跃标量 *BA* 求值的常数线性组合。

证明。 在公式（2.9）的 $H_0$ 相位规范下进行推导，本证明中省略其波浪号。铅笔保留对角块 $-2\,\mathrm{B}_L$， $-2\mathrm{B}_M$，$\mathrm{B}_N$，其时间矩阵为

$$\mathsf{T}_0(\nu)=\begin{pmatrix}0 & 0 & \bar{\boldsymbol{w}}^{\mathsf{T}}\\ 0 & 0 & -\boldsymbol{v}\\ -\boldsymbol{w} & \bar{\boldsymbol{v}}^{\mathsf{T}} & -\nu\mathrm{Id}_N\end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

对于不同相位，正则归一化曲线的分支为

$$\begin{aligned} &\lambda = \nu - 2b_\ell^L + O(\nu^{-1}) && \text{at } Q_\ell, \quad 1 \le \ell \le L, \\ &\lambda = -\nu - 2b_j^M + O(\nu^{-1}) && \text{at } Q_{L+j}, \quad 1 \le j \le M, \\ &\lambda = b_k^N + O(\nu^{-1}) && \text{at } R_k, \quad 1 \le k \le N. \end{aligned} \tag{3.24}$$

非空的正则轨迹（包括重复相位的活动归一化）已在命题 G.1 中得到证明。令 $s_k^{-1} = -\nu$ 位于 $R_k$。这些函数

$$h_L = -\lambda - \nu, \qquad h_M = \lambda - \nu \tag{3.25}$$

具有所需的极点，并满足 $h_M(Q_\ell) = -2b_\ell^L$, $h_L(Q_{L+j}) = 2b_j^M$, $a_{L,\,k} = -b_k^N$, $a_{M,\,k} = b_k^N$。因此，插值和相位条件来自初始谱曲线，而非对初始模态施加进一步限制。

令 $f_k$ 为最后的 $N$ 坐标向量，J 为它们的坐标投影，且 $a = \sum_{k=1}^N f_k$。选取右、左谱特征向量 $r$, $r^\vee$，使得 $i\dot r = -\mathsf{T}_0 r$, $i\dot r^\vee = r^\vee \mathsf{T}_0$，并采用参考归一化 $a^{\mathsf{T}} r(P,\ 0) = r^\vee(P,\ 0) a = 1$。定义

$$\psi_k(P) = r^\vee(P) f_k, \qquad \psi_k^\vee(P) = f_k^{\mathsf{T}} r(P), \qquad \Omega(P,Q) = -\frac{r^\vee(P) r(Q)}{\nu(P) - \nu(Q)}. \tag{3.26}$$

由于 $\mathsf{T}_0(\nu(P)) - \mathsf{T}_0(\nu(Q)) = -(\nu(P) - \nu(Q))\mathsf{J}$，该核满足方程 (3.6)。特征值方程消除了同一-$\nu$ 纤维中不同点处的表观极点。在 $R_k$处，首项特征向量沿其坐标方向，而时间方程恰好给出方程 (3.1)。

对于除子计数，使用正次数谱分量线丛 $\mathscr{L}$，其在 $\nu$ 下的推前为 $\mathcal{O}^d$ [8]。其次数为 $G + d - 1$。最后的 $N$ 个分量在 $L + M$ 个外部无穷远点处均简单消失。它们剩余的公共 BA 除子次数为$G + N - 1$。更明确地说，令 $\mathscr{E} = \mathscr{L}(-\nu^{-1}(\infty))$。此处 $H^0$ 和 $H^1$ 分别表示零阶和一阶层上同调群，而 $H_0$ 表示方程 (2.8) 中的哈密顿量。于是 $H^0(\mathscr{E}) = H^1(\mathscr{E}) = 0$, 因为其推前为 $\mathcal{O}(-1)^d$。加入 $N$ 个 punctures 后，得到精确首值同构 $H^0(\mathscr{E}(\sum_{k=1}^N R_k)) \simeq \mathbb{C}^N$。这证明了所需的 BA 唯一性。转置模给出对偶结论；重复相位的解析无穷远点论证见附录 G。对偶微分为

$$d\Omega_0 = -\frac{d\nu}{r^\vee(P) r(P)}. \tag{3.27}$$

它在外部分支处正则，在 $R_k$处具有所需的二阶极点，而表观的投影分支极点则与 $d\nu$相消。

参考归一化给出了一个具体的恢复图表。令

$$\begin{aligned} c_\ell &= \sum_{k=1}^N w_{k\ell}(0), \qquad \bar c_\ell = \sum_{k=1}^N \bar w_{k\ell}(0), \qquad \kappa_\ell = c_\ell \bar c_\ell, \quad 1 \le \ell \le L, \\ c_{L+j} &= \sum_{k=1}^N v_{jk}(0), \quad \bar c_{L+j} = \sum_{k=1}^N \bar v_{jk}(0), \quad \kappa_{L+j} = c_{L+j} \bar c_{L+j}, \quad 1 \le j \le M. \end{aligned} \tag{3.28}$$

带横线的常数是彼此独立的伴随正规化，而非复共轭；权重是初始和的乘积。在这些和均非零的开图表上，外部特征向量展开给出 $1 \le \ell \le L$、$1 \le j \le M$ 和 $1 \le k \le N$的相关表达式，

$$\begin{aligned} \psi_k^\vee(Q_\ell) &= w_{k\ell}/c_\ell, & \psi_k(Q_\ell) &= \bar w_{k\ell}/\bar c_\ell, \\ \psi_k(Q_{L+j}) &= v_{jk}/c_{L+j}, & \psi_k^\vee(Q_{L+j}) &= \bar v_{jk}/\bar c_{L+j}, \\ \Omega(Q_\ell, Q_{L+j}) &= \frac{u_{\ell j}}{\sqrt{2}\bar c_\ell \bar c_{L+j}}, & \Omega(Q_{L+j}, Q_\ell) &= -\frac{\bar u_{\ell j}}{\sqrt{2} c_\ell c_{L+j}}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

例如，在 $Q_\ell$处有 $r_\ell \sim -\nu/c_\ell$，而最后几行特征向量给出 $f_k^{\mathsf{T}} r = w_{k\ell}/c_\ell$。相反的外部块随后给出核恢复，其斜率差为二。在外点处，取坐标 $1/\nu$，相关的 $h$ 的主系数为 $-2$，而 $d\Omega_0$ 的系数为 $-\kappa_a$，因此恢复的权重与方程（3.11）一致。于是，方程（3.7）恢复每个模态，其中 $e_k = 1$。加权参考锚点给出其他一般图表。正向定理和多项式常微分方程的唯一性确定了演化。应用相位变换方程（2.9），即可恢复由方程（2.3）中的哈密顿量 $H$ 生成的解。

对于重复相位，在附录 G 的常数活跃基中应用此论证。解析得到的无穷远方向给出相同的归一化首项值。随后恢复非活跃零方向，并求逆典范基。

□

若要与指定实现进行比较，可通过极点—顶点典范规范变换将其中固定的 $e_k$ 规范设为 1。第 3.1.2 节中的整体重缩放消除了所有顶点归一化常数之间的单一冗余。接着，第 3.1.1 节中的参考单位分解使方程（3.28）能够直接恢复原始权重和规范。

## 3.3 对易哈密顿量、阿贝尔函数方向与模态相位

对易谱哈密顿量使相同的 BA 数据沿不同方向演化。我们通过亚纯插值计算它们的穿孔时间和常数模态相位。雅可比线性化及其主部描述是经典结果 [21, 8, 2]；这里的正规化给出了这些典范数组对应的速率。当存在多个穿孔时，固定时间代表元的选取取代单点间隙约定。因此，在每个固定的谱层上，对易哈密顿量完整地刻画了多维 BA 演化：它们的流张成阿贝尔向量 $z$的每一个方向，并带有相应的模态相位，而不只是我们原始哈密顿量所选定的单一方向。

### 3.3.1 BA 时间与端点相位

回顾一下，$\mathsf{L}(\nu) = \mathsf{X} + \nu\mathsf{D}$ 是 Lax 矩阵，其中 X 是依赖模态的系数矩阵，D 是方程 (2.12) 和 (2.13) 中给出的固定斜率矩阵。对于一个固定的有限谱值 $\nu_0$ 和一个整数迹阶 $r \geq 2$，定义

$$
\begin{aligned}
H_{r,\nu_0} &= \tfrac{1}{r}\operatorname{tr}(\mathsf{X} + \nu_0\mathsf{D})^r, \qquad \mathsf{G} = (\mathsf{X} + \nu_0\mathsf{D})^{r-1}, \\
\mathsf{T}_{r,\nu_0}(\nu) &= \frac{\mathsf{G} - \mathsf{L}(\nu)^{r-1}}{\nu - \nu_0}, \qquad q(P) = \frac{\lambda(P)^{r-1}}{\nu(P) - \nu_0}.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

这里，$H_{r,\ \nu_0}$ 是谱哈密顿量，G 是其矩阵梯度，而 $\mathsf{T}_{r,\ \nu_0}$ 是其 Lax 时间矩阵。标量亚纯函数 $q$使用正规化曲线上一点 $P$的谱坐标 $\lambda(P)$ $\nu(P)$，并确定局部 BA 指数率。矩阵商是多项式，并且 $i\mathsf{L} = [\mathsf{L},\ \mathsf{T}_{r,\ \nu_0}]$。这些哈密顿量在 $\nu_0$ 中的所有系数彼此对易。

令 $\mathrm{pp}_P$表示在 $P$处的主部。选取一个极点除子 $D_R = \sum_{k=1}^{N} m_k R_k$，使得$H^1(\mathcal{O}(D_R)) = 0$。对于 $g \geq 1$，一个稳妥的选择是 $m_1 = 2g-1$，$m_k = 1$ 对于 $2 \leq k \leq N$。这些极点主部构成的空间$\mathcal{V}_R$ 的商为

$$
\mathcal{V}_R / \operatorname{pp} H^0(\mathcal{O}(D_R)) \simeq H^1(\mathcal{O}),
$$

维数为 $g$。固定一个 $g$ 维的补空间$\mathcal{G}$ 作为亚纯像的补空间。它选取阿贝尔时间的代表。当 $\boldsymbol{U} \neq 0$ 时，可以将其选取得包含原始向量 $(s_1^{-1}, \dots, s_N^{-1})$，从而在这些代表中保留我们的第一个时间。对于 $N = 1$，通常的魏尔施特拉斯间隙幂给出了这个补空间。在整个层级中，局部参数和$\mathcal{G}$ 均保持固定。

**引理 3.7**（亚纯时间归一化）。 存在唯一的亚纯函数 $\mathfrak{f}$，其外部主部为

$$\operatorname{pp}_{Q_a}\mathfrak{f} = -\operatorname{pp}_{Q_a} q, \qquad 1 \le a \le K,$$

其进一步的极点位于 $D_R$，其穿孔点主部向量属于 $\mathsf{G}$，且在 $R_1$ 处的正则常数为零。其系数由一个有限线性亚纯插值问题求得。对于 $g = 0$，不取穿孔点极点，并将 $\mathfrak{f}(R_1) = 0$正规化。

证明。 $H^1(\mathcal{O}(D_R))$的消失性意味着，任意外部主部都可通过在 $D_R$ [25, 第四章]中增加极点来延拓。减去一个支撑在 $D_R$ 上的亚纯函数，以移除 $\mathsf{G}$之外的主部分量，然后再减去 $R_1$处的正则常数。两者之差的主部既属于亚纯像，也属于其补空间，因此没有极点。其经正规化的常数为零，故该函数恒为零。在球面上，外部主部无需增加极点即可延拓。

□

定义时间多项式和顶点相位速率如下：

$$\begin{aligned} p_k &= -\operatorname{pp}_{R_k}\mathfrak{f}, & \varphi_k^N &= \operatorname{reg}_{R_k}(q+\mathfrak{f}), & 1 \le k \le N,\\ \varphi_\ell^L &= (q+\mathfrak{f})(Q_\ell), & & & 1 \le \ell \le L,\\ \varphi_j^M &= (q+\mathfrak{f})(Q_{L+j}), & & & 1 \le j \le M. \end{aligned} \tag{3.31}$$

这里，$\operatorname{reg}$ 表示 Laurent 展开的常数系数。外部求和项按构造均为正则。在 $R_k$, $q = O(\nu^{-1})$ 处，由于 $\lambda$ 在此处有限，且 $\varphi_1^N = 0$。这些数值仅取决于固定的标记曲线和所选的时间归一化。改变补空间$\mathcal{G}$ 会通过幂荷流改变模态相位，同时保持阿贝尔方向不变。

**定理 3.8**（主定理，第三部分：谱 BA 层级）。 定理 *3.3* 中的每个指定实现，在$H_{r,\ \nu_0}$ 作用下，均通过相同的多点 *BA* 基和核演化，并具有普通和对偶穿孔点指数因子 $e^{-itp_k}$ 和 $e^{itp_k}$。对$1 \le \ell \le L$、 $1 \le j \le M$ 和 $1 \le k \le N$，使用带有互为倒数的规范因子的方程 (3.7)，

$$c_\ell(t) = c_\ell e^{it\varphi_\ell^L}, \quad c_{L+j}(t) = c_{L+j}e^{-it\varphi_j^M}, \quad e_k(t) = e_k e^{-it\varphi_k^N}. \tag{3.32}$$

相对于未加相位的 *BA*公式，显式的模态因子为

$$u_{\ell j} : e^{-it(\varphi_\ell^L - \varphi_j^M)}, \qquad v_{jk} : e^{-it(\varphi_j^M - \varphi_k^N)}, \qquad w_{k\ell} : e^{-it(\varphi_k^N - \varphi_\ell^L)}. \tag{3.33}$$

伴随因子互为倒数。哈密顿量的有限常系数组合会叠加其 $p_k$和相位变化率。

在双有理预设谱层上，具有 $2 \le r \le d = L+M+N$ 且$\nu_0$ 变化的族张成每个雅可比方向。因此，只需有限个多项式谱系数即可生成其所有阿贝尔平移。

证明。 右特征向量由方程 (3.22) 给出。一个相容的左向量为

$$r^\vee(P) = \big((-c_\ell\Omega(P,Q_\ell))_{\ell=1}^L, (\kappa_{L+j}\Omega(P,Q_{L+j})/c_{L+j})_{j=1}^M, (\psi_k(P)/e_k)_{k=1}^N\big).$$

它们的卷积恒等式给出谱方程以及

$$r^\vee(P)r(Q) = -(\nu(P)-\nu(Q))\Omega(P,Q). \tag{3.34}$$

在 $i\dot r_H = -\mathsf{T}_{r,\nu_0} r_H$和 $i\dot r_H^\vee = r_H^\vee \mathsf{T}_{r,\nu_0}$ 下演化这些向量。每个无穷分支附近，特征值方程给出收敛的局部分解

$$r_H = e^{-itq(P)}\mathsf{V}(t,\nu(P))r(P,0), \qquad i\dot{\mathsf{V}} = -\frac{\mathsf{G}}{\nu-\nu_0}\mathsf{V}, \qquad \mathsf{V}(0) = \mathrm{Id}. \tag{3.35}$$

由于 $\mathrm{V}\ = \mathrm{Id}\ + O(\nu^{-1})$，每个主导坐标方向都保持不变，包括重合的相位分支。在有限点处，原多项式时间矩阵保持固定除子极点；局部分解仅用于无穷远点附近。

用 $\widetilde{r} = e^{-it\mathfrak{f}} r_H$、$\widetilde{r}^{\vee} = e^{it\mathfrak{f}} r_H^{\vee}$ 对向量进行互反修饰。在 $Q_\ell$，$Q_{L+j}$极性指数相互抵消，右侧首项系数获得 $e^{-it\varphi_\ell^L}$、$e^{-it\varphi_j^M}$。它们的初始系数 $-\nu/c_\ell$和 $c_{L+j}\nu/\kappa_{L+j}$ 给出了前两个规范。在 $R_k$ 处，首项对偶因子为 $e^{itp_k}e^{-it\varphi_k^N}$，从而得到$e_k(t)$。经过这些规范变换后，所有 punctures 处的首项向量均已归一化。BA 唯一性确定了每个普通基函数和对偶基函数。每个外部成分都有其固定除子、一个额外的简单外部极点、所计算出的留数，以及在所有 punctures 处为零的首项向量，因此同样的论证也确定了核成分。

不会引入有限的等-$\nu$极点：由于时间矩阵是多项式，$r_H^{\vee}(P)r_H(Q)$ 的导数可被 $\nu(P)-\nu(Q)$ 整除。最初可去的极点仍然是可去的。互反修饰在这些位置处是正则的，并保持对角配对不变。因此 $d\Omega_0$ 以及权重均已固定。谱方程恢复了所有数组，如方程 (3.29) 所示，从而证明了它们的高阶流公式。

为证明张成性，选取一个含有 $\nu = \nu_0$ 个不同 $\lambda$ 值的非分歧有限纤维 $d$。双有理性保证这样的纤维存在。对于全纯微分 $du = w(P)d\nu$，对 $(q+\mathfrak{f})du$ 应用留数定理可得

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}_{R_k}(p_k du) = \sum_{h=1}^{d} \lambda(P_h)^{r-1} w(P_h).$$

湮灭所有这些方向的微分，其对应于 $2 \le r \le d$ 的右侧为零。$r = 1$ 关系可由 $du/(\nu-\nu_0)$ 的留数推出。范德蒙德反演迫使 $w$ 在每个这样的纤维上都为零，因此 $du = 0$。留数对偶性证明了张成性；归一化雅可比矩阵的维数为 $g$，因此可以从这个族中选出 $g$ 个线性无关的方向（$g = 0$ 不需要选取任何方向）。在 $\nu_0$ 中展开，也可以从 $g$ 多项式谱系数中选取这些方向。所有这些方向都属于正规化曲线的雅可比簇。 □

在每个固定谱层上，所选的时间系数和相位变化率都是常数。选取归一化阿贝尔方向的线性组合取决于该谱层；这并不是适用于每个分别归一化的 puncture 时间的全局固定多项式生成元。如果指定曲线映射的覆盖次数大于一，则不同 $\lambda$ 值的纤维论证不适用；张成性结论针对的是命题 3.5 中所识别的双有理曲线。

顶点相位由对角幂荷生成。具体而言，

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{gauge}} = &\sum_{\ell=1}^{L} \varphi_\ell^L \left( \sum_{j=1}^{M} I_{\ell j}^{u} - \sum_{k=1}^{N} I_{k\ell}^{w} \right) + \sum_{j=1}^{M} \varphi_j^M \left( \sum_{k=1}^{N} I_{jk}^{v} - \sum_{\ell=1}^{L} I_{\ell j}^{u} \right) \\ &+ \sum_{k=1}^{N} \varphi_k^N \left( \sum_{\ell=1}^{L} I_{k\ell}^{w} - \sum_{j=1}^{M} I_{jk}^{v} \right). \end{aligned}$$

减去这个系数固定的哈密顿量，即可消除该层上的标架相位。若将其系数视为全局可变的谱函数，就会引入这些系数的导数。

**推论3.9** (由一般初始模产生的高阶流)**.** *定理 3.6 的重构数据满足对易流及其方程*(3.31) *和*(3.32)*。对于重复相位，使用相同的活跃基，并在 BA 演化后恢复原始坐标。*

*证明。* 每个谱哈密顿量在等相位分块共轭下保持不变，因此其矩矩阵和适配基保持不变。非活跃直和项在任意矩阵幂作用下仍保持解耦。对活跃数据应用正向定理，再恢复基。

□

### 3.3.2 规范对称性与阿贝尔平移

我们将守恒荷和谱流视为对称性，以便区分它们在积分数量和 BA 相位数据中的作用。守恒函数 $Q$ 生成正则对称性，因为$\{Q,\ H\} = 0$ 意味着其哈密顿流与时间演化可交换。这是诺特对应的哈密顿形式。对于共振三波系统，Alber、Luther、Marsden 和 Robbins 在 [5,第 2–4]节中阐述了通过模态相位对称性进行约化，以及几何相位和动力学相位的重构。

对于任意 $L,\ M,\ N$，方程 (2.6) 中的幂荷生成常数互为倒数的规范因子

$$\begin{aligned} u_{\ell m} &\longmapsto e^{\theta_\ell^L - \theta_m^M} u_{\ell m}, \\ v_{mn} &\longmapsto e^{\theta_m^M - \theta_n^N} v_{mn}, \\ w_{n\ell} &\longmapsto e^{\theta_n^N - \theta_\ell^L} w_{n\ell}, \qquad 1 \le \ell \le L, \quad 1 \le m \le M, \quad 1 \le n \le N. \end{aligned} \tag{3.36}$$

带横线的伴随变量具有互为倒数的因子。 $\theta$ 参数是常数复数；它们的共同平移作用平凡，因此留下 $d-1$ 个独立规范变换。每个三次相互作用都是不变量，因为其三个指数之和为零。

在正则谱轨迹上，整体积分数量将这些规范生成元与其余谱积分区分开来：

$$p = (d-1) + G, \qquad d = L + M + N, \qquad p = LM + MN + NL, \tag{3.37}$$

其中， $G$ 是方程 (2.22) 中的正则谱亏格。在局部范围内，固定 $d-1$ 个独立荷并对其规范作用取商后，剩下 $G$ 个哈密顿自由度。在特征向量除子线性化下，交换的等谱流表现为阿贝尔平移[8, 50]。自治哈密顿量在这个交换族中选定时间方向；它包含在定理 2.2 的完备积分组中。

当相位重合时，方程 (2.20) 中的矩矩阵将对角规范变换扩展为等相位群内的连续基变换。它们的主块不变量给出了方程 (D.5) 中计入的附加积分。

对于给定的双有理 BA 实现，定理 3.8 给出了其雅可比映射以及相应端点相位的变换。幂荷流改变乘法模态归一化。这些构成了 BA公式中可见的两种对称作用；第 4.6.4 节中的超椭圆除子提升明确体现了二者的区别。

# 4 对应关系与显式特化

第 3 节建立了第 2 节所定义正则系统的一般 BA 解。现在，我们将这些系统与其他已知的、具有 BA 解的可积系统进行比较，从而将其置于相应背景下。我们将探讨哈密顿量对应和算子对应，随后介绍一般理论中特别明确的单点特化和超椭圆特化。

## 4.1 与四次矩映射系统的对应关系

我们将三次模态与四次正则提升进行比较，以说明同一矩阵演化为何会具有不同的相互作用阶数。Adams、Harnad和Previato的动量映射构造通过双线性映射将矩阵哈密顿量拉回；Adams、Harnad和Hurtubise则利用谱线丛和广义 BA 函数对矩阵流及其正则提升进行积分 [3, 1]。Wu和Geng通过将普通及伴随 $3 \times 3$ AKNS 谱问题非线性化，得到一个相关的四次正则系统，并证明其

刘维尔可积性，并通过双线性特征函数配对重构三波场[53, 第 III–V 节]。我们通过共同的谱矩阵演化，将四次规范实现与我们的三次系统联系起来，同时指出这两种描述所依据的不同模变量和矩阵泊松括号。BA卷积恒等式给出了两者之间的函数关系：对中间求值加权后得到的双线性和会化简为单个端点 BA 函数，从而解释了相互作用表达式如何从四次转为三次。

### 4.1.1 四次规范实现

Adams、Harnad和Previato的矩映射框架 [3] 生成了许多哈密顿系统。由于其矩阵元素关于规范模是双线性的，多项式矩阵哈密顿量拉回后，在这些模中表现为偶次数表达式。因此，本文讨论的三次哈密顿量需要采用不同的规范实现。

设F($s$)，G($s$) $\in \mathbb{C}^{q\times d}$ 是随时间 $s$演化的规范模矩阵，处于Adams、Harnad和Previato的矩映射框架中；其流由Adams、Harnad和Hurtubise [3, 1]积分得到。它们的括号为$\{F_{rh},\ G_{jk}\} = -i\delta_{rj}\delta_{hk}$，其中 $1 \le r, j \le q$, $1 \le h,\ k \le d$，其余所有基本括号均为零。G的元素是F中对应元素的独立伴随项。令

$$\mathsf{M} = \mathsf{G}^{\mathsf{T}}\mathsf{F}, \qquad \mathcal{H}_4 = \operatorname{tr}(\mathsf{D}\mathsf{M}^2), \qquad \mathsf{C} = \mathsf{D}\mathsf{M} + \mathsf{M}\mathsf{D}. \tag{4.1}$$

这里，D是方程（2.13）中的对角矩阵；$\mathcal{H}_4$ 是该文矩映射框架中的一个选定拉回 [3], ，而不是该文中另行区分的模型。在标量模中，其完整依赖关系为

$$\mathcal{H}_4 = \sum_{h=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\sum_{r=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} D_{hh}G_{rh}F_{rk}G_{jk}F_{jh}. \tag{4.2}$$

因此，每个相互作用都包含四个模态因子，这不同于方程（2.3）中的三次哈密顿量所含的三模乘积，而三次哈密顿量正是本文的研究重点。哈密顿方程及其闭合的双线性投影为

$$i\frac{d\mathsf{F}}{ds} = \mathsf{F}\mathsf{C}, \qquad i\frac{d\mathsf{G}}{ds} = -\mathsf{G}\mathsf{C}^{\mathsf{T}}, \qquad \widehat{\mathsf{X}} = -\mathsf{G}^{\mathsf{T}}\mathsf{F}, \qquad i\frac{d\widehat{\mathsf{X}}}{ds} = [\mathsf{D}, \widehat{\mathsf{X}}^{,2}]. \tag{4.3}$$

$\widehat{\ }$X 的对角块是常数，因为 D 在三个群的每一个群上都是标量。按照方程 (2.12) 将它们固定。定义常数块对角相位率矩阵 $\mathsf{K}_{\mathrm{ph}}$ 以及变换后的系数矩阵为

$$\mathsf{K}_{\mathrm{ph}} = \operatorname{diag}(-3\mathsf{B}_L, 3\mathsf{B}_M, 0_N), \qquad \mathsf{X}(t) = e^{-it\mathsf{K}_{\mathrm{ph}}}\widehat{\mathsf{X}}(-t)e^{it\mathsf{K}_{\mathrm{ph}}}. \tag{4.4}$$

$\widehat{\ }$共轭变换施加了所需的模相位旋转，而 X($-t$) 则反转四次演化时间 $s = -t$。于是

$$i\dot{\mathsf{X}} = -[\mathsf{D}, \mathsf{X}^2] + [\mathsf{K}_{\mathrm{ph}}, \mathsf{X}], \tag{4.5}$$

其非对角块对于每个正的 $L,\ M,\ N$，恰好都是方程 (2.11)。对于 $q = d$每个初始 X 都可以进行因式分解，例如 F(0) $=\mathrm{Id}_d$、G(0) $= -$X(0)$^{\mathsf{T}}$。因此，方程层面的投影包含三次系统的任意典范初始模态。适配的 BA分解见附录C。

### 4.1.2 两个矩阵括号

F、G 中的四次多项式模系统，以及我们在 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$ 及其带横线的伴随变量中建立的三次多项式模系统，都具有常规范括号。它们之间的关系可通过区分 X 上的两个括号来呈现。为进行括号比较，记 $[f,h]_a = i\{f、\ h\}_a$，以省略

共同的物理因子 $-i$。从 F、G 得到的双线性投影诱导出线性李–泊松括号

$$\begin{aligned}&[X_{hi},X_{jk}]_1=\delta_{hk}X_{ji}-\delta_{ij}X_{hk},\\&[X_{hi},X_{jk}]_0=(D_{hh}-D_{ii})\delta_{hk}\delta_{ij},\quad 1\le h,i,j,k\le d.\end{aligned}\tag{4.6}$$

第二个常数括号恰好是经过方程 (2.12) 的块缩放后得到的方程 (2.2)。其同组块是卡西米尔不变量，因此其固定值确定了正则三次模态空间。将梯度定义为 $dh=\mathrm{tr}((\nabla h)d\mathsf{X})$ 后，两个括号给出

$$[\mathsf{X},\mathrm{tr}(\mathsf{D}\mathsf{X}^2)]_1=[\mathsf{X},\mathrm{tr}(\mathsf{X}^3)/3]_0=[\mathsf{D},\mathsf{X}^2].\tag{4.7}$$

它们是相容的：在第一个括号中将 X 平移 $a\mathsf{D}$，可得 $P_1(\mathsf{X}+a\mathsf{D})=P_1(\mathsf{X})-aP_0$。这就是论证平移泊松铅笔，它已是第 2 节的理论基础；它解释了从四次回拉到正则三次哈密顿量的变化。方程（2.3）中的三次哈密顿量用共同矩阵 X 和幂荷表示，除加法常数外为

$$H=-\frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(\mathsf{X}^3)+3\sum_{\ell=1}^{L}b_\ell^L Q_\ell^L+3\sum_{m=1}^{M}b_m^M Q_m^M.\tag{4.8}$$

最后两项恰好生成方程 (4.4) 中的相位共轭变换。这是在两个泊松实现上对向量场的比较：双线性映射是多对一的，而两个正则空间分别具有 $qd$ 和 $LM+MN+NL$ 对。因此，经过所述的时间和相位变换后，两种描述重现了相同的谱矩阵演化，但双线性投影并非两个模态哈密顿量之间的正则变换。四次系统和三次系统采用不同的独立模态，并在共同的矩阵变量上诱导出不同的括号。

### 4.1.3 BA 卷积与相互作用因式分解

在四次到三次对应中，两个中间 BA 求值乘积的加权和会归结为一个端点 BA 函数。这提供了一种将四次多项式三次相互作用表达式降阶为三次相互作用表达式的方法。我们采用 Ben-Zvi 和 Biswas 的 Szegő 核复合恒等式 [9, 命题 5.21], ，并将其写成适用于本文 BA 模的正规化形式。

首先引入 BA 对模态的 θ 比值部分，并将其写在标量局部半微分标架中，形式如下

$$\mathscr{S}_z(P,Q)=\frac{\theta(z+A(P)-A(Q))}{\theta(z)E(P,Q)}.\tag{4.9}$$

暂时略去固定除子因子和指数 BA 归一化；恢复这些因子后，即得到方程 (3.4) 和 (3.5) 中定义的 BA 成对函数。设 $\Lambda$，$W$ 为亚纯函数，其极点仅位于互不相同的点 $P_1$、……、$P_d$，且 $\Lambda$ 在每一点都有一个简单极点。取一个完整的正则纤维 $\Lambda^{-1}(\alpha)=Q_1+\cdots+Q_d$。在 $P_h$ 处的坐标 $t_h=1/\Lambda$和 $Q_i$处的坐标 $s_i$ 下，写作

$$\frac{W}{\Lambda-\alpha}=y_h+c_h t_h+O(t_h^2),\qquad \gamma_i=\frac{W(Q_i)}{\partial_{s_i}\Lambda(Q_i)},\quad 1\le h,i\le d.\tag{4.10}$$

假设 $W$ 在 $P_h$处至多有单极点。那么

$$\sum_{i=1}^{d}\gamma_i\mathscr{S}_z(P_h,Q_i)\mathscr{S}_z(Q_i,P_k)=\begin{cases}(y_h-y_k)\mathscr{S}_z(P_h,P_k), & h\neq k,\\ c_h, & h=k.\end{cases}\tag{4.11}$$

对于不同的端点，左侧包含两个中间求值的乘积，而右侧包含一个端点求值与一个常数的乘积。

$Q_i$ 处收缩的半微分使公式与坐标 $s_i$无关。直接验证时，对 $Q$ 处的（$W/(\Lambda-\alpha)$）$\mathscr{S}_z(P_h, Q)\,\mathscr{S}_z(Q,\ P_k)$ 取留数。对于 $h\neq k$，端点留数为 $-y_h\mathscr{S}_z(P_h,\ P_k)$ 和 $y_k\mathscr{S}_z(P_h,\ P_k)$。对于 $h=k$，核乘积的展开为 $(-t_h^{-2}+O(1))dt_h$，因此留数为 $-c_h$。其余留数恰好就是所展示的求和式。这也证明了每个乘积和中的额外 theta 除子极点会相互抵消。

对于互不相交的端点列表，组装 $\mathsf{A}_{hi}=\mathscr{S}_z(P_h,\ Q_i)$、$\mathsf{B}_{ik}=\mathscr{S}_z(Q_i,\ P_k)$、$\mathsf{K}_{hk}=\mathscr{S}_z(P_h,\ P_k)$ 和 $\Gamma=\mathrm{diag}(\gamma_1,\ \ldots\ldots,\ \gamma_d)$，其中 $\mathsf{Y}_{\mathrm{left}}$、$\mathsf{Y}^{\mathrm{right}}$ 是对应于 $y$ 值的端点对角矩阵。非对角恒等式为

$$\mathsf{A}\Gamma\mathsf{B}=\mathsf{Y}_{\mathrm{left}}\mathsf{K}-\mathsf{K}\mathsf{Y}_{\mathrm{right}}. \tag{4.12}$$

这个 Sylvester位移关系明确揭示了相互作用的变化。对于相容向量 $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$,

$$\boldsymbol{a}^{\mathsf{T}}(\mathsf{Y}_{\mathrm{left}}\mathsf{K}-\mathsf{K}\mathsf{Y}_{\mathrm{right}})\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\Gamma\mathsf{B}\boldsymbol{b}.$$

在两个外侧模态因子之间插入卷积和，会将左侧的三次端点表达式转化为右侧的四次中间表达式；合并求和则执行反向的降阶操作。权重和完整纤维确保求和后的乘积约化为端点 BA 函数。在 Adams–Harnad–Hurtubise 实现中，这对应于函数层面的方程 (4.3)；改变独立模态列表还需要相应的括号和演化，这里由方程 (4.5) 和 (4.6) 给出。

## 4.2 矩阵约束KP对应

加权 BA 恒等式对于任意正的 $L$、$M$、$N$ 也具有约束 KP 算子解释。我们给出算子字典及其高阶时间归一化，然后将这些时间与正则流联系起来。第 4.3 节中的单点特化可恢复标量算子。

### 4.2.1 从 BA 基得到的矩阵算子

对于这一算子比较，置 $x=-it$ 和 $\partial=\partial_x=i\partial_t$。将普通与对偶 BA 基组装成列

$$\boldsymbol{\psi}(P)=(\psi_1(P),\ldots,\psi_N(P))^{\mathsf{T}},\qquad \boldsymbol{\psi}^{\vee}(P)=(\psi_1^{\vee}(P),\ldots,\psi_N^{\vee}(P))^{\mathsf{T}}.$$

方程（3.6）中的核变化率规定了配对原函数

$$\partial^{-1}\Big((\boldsymbol{\psi}^{\vee}(Q))^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\psi}(P)\Big)=\Omega(P,Q), \tag{4.13}$$

其积分常数由核归一化确定。利用方程（3.9）定义对角 puncture- 常数矩阵 $\mathsf{C}_A=\mathrm{diag}(a_{A,1},\ \ldots\ldots,\ a_{A,N})$、$A\in\{L,\ M\}$。加权方程给出

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_L&=\mathrm{Id}_N\partial+\mathsf{C}_L+2\sum_{\ell=1}^{L}\kappa_\ell\boldsymbol{\psi}(Q_\ell)\partial^{-1}(\boldsymbol{\psi}^{\vee}(Q_\ell))^{\mathsf{T}},\\ \mathcal{A}_M&=\mathrm{Id}_N\partial+\mathsf{C}_M+2\sum_{j=L+1}^{K}\kappa_j\boldsymbol{\psi}(Q_j)\partial^{-1}(\boldsymbol{\psi}^{\vee}(Q_j))^{\mathsf{T}},\qquad K=L+M.\end{aligned} \tag{4.14}$$

矩阵的大小 $N$ 表示 puncture 的数量；两个求和分别包含 $L$ 和 $M$ 个源列。每个积分项都将输入列与对偶行配对，取其标量原函数，再乘以普通列。因此

$$\mathcal{A}_A\boldsymbol{\psi}(P)=h_A(P)\boldsymbol{\psi}(P),\qquad \mathcal{A}_A^{\mathrm{ad}}\boldsymbol{\psi}^{\vee}(P)=h_A(P)\boldsymbol{\psi}^{\vee}(P),\qquad A\in\{L,M\}. \tag{4.15}$$

这里的 ad 表示形式转置伴随，其中 $\partial^{\mathrm{ad}} = -\partial$ 且不取复共轭。在所有 $N$ punctures 处的归一化展开决定了一个可逆的矩阵波算子。两个$\mathcal{A}_L$,$\mathcal{A}_M$ 均为与时间无关的对角 Laurent 算子，因此

$$[\mathcal{A}_L, \mathcal{A}_M] = 0. \tag{4.16}$$

附录 J 给出了这一形式论证及高阶时间的细节。

这种形式的有限秩积分算子属于成熟的矩阵约束KP理论 [16, 方程（7）–（14）]。标量向量约束情形、有理约化及其Grassmann流形描述见 [26, 定理 4.1 和 5.1] 以及 [39]。基于留数的 BA 自洽性见 [37, 第 1]节。这里给出的明确对应表采用两个彼此独立的插值群及其尖点常数。

### 4.2.2 归一化KP时间与源演化

尖点常数决定了这种算子形式的归一化方式。定义对角规范矩阵 $\mathsf{G}(x) = e^{-x\mathsf{C}_L}$，并令 $\widetilde{\boldsymbol{\psi}} = \mathsf{G}^{-1}\boldsymbol{\psi}$、$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}^{\vee} = \mathsf{G}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\psi}^{\vee}$。则第一个算子变为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{KP}} = \mathsf{G}^{-1}\mathcal{A}_L\mathsf{G} = \mathrm{Id}_N\partial + 2\sum_{\ell=1}^{L}\kappa_\ell\widetilde{\boldsymbol{\psi}}(Q_\ell)\partial^{-1}(\widetilde{\boldsymbol{\psi}}^{\vee}(Q_\ell))^{\mathsf{T}}. \tag{4.17}$$

第二个算子 $\mathcal{M}_{\mathrm{KP}} = \mathsf{G}^{-1}\mathcal{A}_M\mathsf{G}$ 则保留常数项

$$\mathsf{C}_M - \mathsf{C}_L = 2\,\mathrm{diag}(b_1^N, \dots, b_N^N). \tag{4.18}$$

因此，剩余矩阵恰好就是正则哈密顿量的第三群相位数据。对 $h_L, h_M$作加性平移后，只有当两个常数项之差为标量时，才能通过一次共同规范将它们同时消去；对于 $N = 1$，这一条件自动成立。

在每个 puncture 处，使用 $h_L(P)$ 作为局部谱坐标。归一化KP时间$x_n$，其中 $x_1 = x$，规定了在 $R_k$ 处的首项普通因子 $\exp(\sum_{n=1}^{n_*} x_n h_L(P)^n)e_k$；对偶因子则具有相反的指数。这里，$n_*$ 是任意有限个活跃时间，$e_k$ 是第$k$个坐标向量。在原始坐标中，

$$\mathrm{pp}_{R_k} h_L^2 = s_k^{-2} + 2a_{L,k}s_k^{-1}.$$

正则常数 $\mathrm{reg}_{R_k} h_L^2$ 也提供了一个分量相位。这些项解释了为什么第二 KP 时间不必与未经修正的双极点 BA 时间一致。

**命题 4.1** (BA实现上的约束KP演化)。令 $B_n = (L_{\mathrm{KP}}^n)_+$，其中$+$ 保留非负微分幂。在正则*BA*时间域上，

$$\begin{aligned} \partial_{x_n}\widetilde{\boldsymbol{\psi}}(P) &= \mathcal{B}_n\widetilde{\boldsymbol{\psi}}(P), \\ \partial_{x_n}\widetilde{\boldsymbol{\psi}}^{\vee}(P) &= -\mathcal{B}_n^{\mathrm{ad}}\widetilde{\boldsymbol{\psi}}^{\vee}(P), \qquad n \geq 1. \end{aligned} \tag{4.19}$$

两个算子都保留其有限秩表示，并满足

$$\partial_{x_n}\mathcal{L}_{\mathrm{KP}} = [\mathcal{B}_n, \mathcal{L}_{\mathrm{KP}}], \qquad \partial_{x_n}\mathcal{M}_{\mathrm{KP}} = [\mathcal{B}_n, \mathcal{M}_{\mathrm{KP}}]. \tag{4.20}$$

特别地，在固定的 $Q_a$ 处对方程 (4.19)求值，可得两组的普通源演化和对偶源演化。

证明。在 $h_L$ 局部坐标中，正规化的矩阵波算子将 $\partial$ 作用装扮为 $\mathcal{L}_{\mathrm{KP}}$。从每个 BA 时间导数中减去所示的微分作用后，所得截面在每个 puncture 处的首项值均为零；由 BA 唯一性可得方程（4.19）。随后，有限秩交换子恒等式给出方程（4.20）。正规化和伴随论证详见附录 J。

□

### 4.2.3 与正则模流的关系

方程（4.14）中的源项，恰好是方程（3.7）中用于$v$，$w$模态的普通求值和对偶求值。在 $M$-组的点处求值 $L$ 谱问题，并在 $L$-组的点处求值 $M$ 问题，可恢复其加权方程；核导数则给出 $u$ 方程。涉及特征函数、伴随特征函数和配对势的多波方程也出现在 [6,方程（57）–（58）] 中。

在每个双有理 BA 层上，定理 3.8 给出了张成所有阿贝尔方向的谱哈密顿量。因此，匹配一个 KP 速度是一个有限维线性问题。其余端点相位由方程 (2.6) 中的幂荷生成。因此，每个归一化 KP 时间在该层上都有一个正则谱与规范生成元；选定该层后，其系数便固定不变。附录 J 给出了这一构造，第 5.2.3 节则在二 genus 情形下检验了第二个时间。

这确定了算子及其 BA 演化。逐点源数组包含$NL + NM$正则对，而完整的模系统还通过其核原函数保留了 $LM$ 复合配对。要将 KP 场泊松括号与完整的有限典范括号等同起来，还需要进行进一步的约束计算。

## 4.3 单点特化

当 $N = 1$ 时，一般构造化为向量–矩阵–向量系统。我们给出其初等模记号，特化高阶流相位，并展示标量守恒算子系数。本小节始终不对曲线作任何限制。

### 4.3.1 初等模及其正则方程

对于 $N = 1$，令 $R_1 = P_\infty$、$s_1 = s$ 和 $e_1 = 1$。除子的次数为 $g$，且只有一个普通／对偶对 $\psi$，$\psi^\vee$。选取参考归一化 $\psi(P,\ 0) = \psi^\vee(P,\ 0) = 1$，并从每个 $h$ 在 $P_\infty$ 处减去常数项。因此 $a_{L,\ 1} = a_{M,\ 1} = 0$。该成员有两个基本向量和一个成对模态矩阵。

合并指标和正则对的数量为

$$K = L + M, \qquad p = K + LM. \tag{4.21}$$

我们用单指标表示 $K$ 初等模态对，用双指标表示 $LM$ 跨群复合配对。它们与公式（2.9）中的 $H_0$ 模态的对应表为

$$\xi_\ell = \tilde{w}_{1\ell}, \qquad \xi_{L+m} = \tilde{v}_{m1}, \qquad \xi_{\ell,L+m} = \tilde{u}_{\ell m}, \quad 1 \le \ell \le L, \quad 1 \le m \le M, \tag{4.22}$$

带横线的伴随变量也遵循相同规则。令

$$b_\ell = 2b_\ell^L + b_1^N, \qquad b_{L+m} = 2b_m^M + b_1^N, \quad 1 \le \ell \le L, \quad 1 \le m \le M. \tag{4.23}$$

¯继承括号满足 $\{\xi_k,\ \xi_r\} = -i\delta_{kr}$，配对模态也遵循相应规则，并且

$$H_0 = \sum_{k=1}^{K} b_k \xi_k \bar{\xi}_k + \sqrt{2} \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{j=L+1}^{K} (\xi_\ell \xi_j \xi_{\ell j} + \bar{\xi}_\ell \bar{\xi}_j \bar{\xi}_{\ell j}). \tag{4.24}$$

等价的单点 theta 和 sigma 公式，其中 $\Xi = s^{-1} + O(s)$ 和 $\Xi_\sigma = \Xi - \boldsymbol{U}^{\mathsf{T}} \varkappa A(P)$，为

$$\begin{aligned} \psi(P,t) &= e^{-it\Xi(P)} \tfrac{\theta(z(t)+A(P))\theta(z_0)}{\theta(z(t))\theta(z_0+A(P))} = e^{-it\Xi_\sigma(P)} \tfrac{\sigma(z(t)+A(P))\sigma(z_0)}{\sigma(z(t))\sigma(z_0+A(P))}, \\ \psi^\vee(P,t) &= e^{it\Xi(P)} \tfrac{\theta(z(t)-A(P))\theta(z_0)}{\theta(z(t))\theta(z_0-A(P))} = e^{it\Xi_\sigma(P)} \tfrac{\sigma(z(t)-A(P))\sigma(z_0)}{\sigma(z(t))\sigma(z_0-A(P))}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

用这种记法，未加相位的 BA 模为

$$\begin{aligned} \xi_\ell &= c_\ell \psi^\vee(Q_\ell), \quad \bar\xi_\ell = \kappa_\ell \psi(Q_\ell)/c_\ell, \qquad 1 \le \ell \le L, \\ \xi_j &= c_j \psi(Q_j), \qquad \bar\xi_j = \kappa_j \psi^\vee(Q_j)/c_j, \quad L+1 \le j \le K, \end{aligned} \tag{4.26}$$

and

$$\xi_{\ell j} = \frac{\sqrt{2}\kappa_\ell \kappa_j}{c_\ell c_j}\Omega(Q_\ell, Q_j), \qquad \bar\xi_{\ell j} = -\sqrt{2} c_\ell c_j \Omega(Q_j, Q_\ell), \quad 1 \le \ell \le L < j \le K. \tag{4.27}$$

初等模相对于 $P_\infty$具有一个曲线点提升的位移。成对复合模具有两个提升之差；在双曲椭圆曲面约定下，这变为初等位移之和。这些项规定的是位移数据，而不是在公共 $z$处的因式分解。对于 $N>1$，基截面则具有位移 $A(P) - A(R_k)$；所有截面共享同一条曲线和同一个核，但通常不存在某个单一基点，使两个数组都成为单点基本向量。

原始相位值和方程化简为

$$b_\ell = -h_M(Q_\ell), \quad 1 \le \ell \le L, \qquad b_j = h_L(Q_j), \quad L+1 \le j \le K, \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} i\dot\xi_\ell &= b_\ell \xi_\ell + \sqrt{2}\sum_{j=L+1}^{K} \bar\xi_j \bar\xi_{\ell j}, \quad & i\dot{\bar\xi}_\ell &= -b_\ell \bar\xi_\ell - \sqrt{2}\sum_{j=L+1}^{K} \xi_j \xi_{\ell j}, \quad & 1 \le \ell \le L, \\ i\dot\xi_j &= b_j \xi_j + \sqrt{2}\sum_{\ell=1}^{L} \bar\xi_\ell \bar\xi_{\ell j}, \qquad & i\dot{\bar\xi}_j &= -b_j \bar\xi_j - \sqrt{2}\sum_{\ell=1}^{L} \xi_\ell \xi_{\ell j}, \qquad & L+1 \le j \le K, \\ i\dot\xi_{\ell j} &= \sqrt{2}\bar\xi_\ell \bar\xi_j, & i\dot{\bar\xi}_{\ell j} &= -\sqrt{2}\xi_\ell \xi_j, & 1 \le \ell \le L < j \le K. \end{aligned} \tag{4.29}$$

这些是方程（4.24）的哈密顿方程。对于此相位规范，写作 $\mathsf{A}_L$ =diag($b_1$，.....，$b_L$)，$\mathsf{A}_M$ = diag($b_{L+1}$，.....，$b_K$)。可选的标量谱原点 $\rho$给出

$$\begin{aligned} \mathsf{L}_0(\nu) &= \begin{pmatrix} \rho \mathrm{Id}_L - \mathsf{A}_L + \nu \mathrm{Id}_L & \sqrt{2}\boldsymbol{\xi}_{LM} & \bar{\boldsymbol{\xi}}_L \\ \sqrt{2}\bar{\boldsymbol{\xi}}_{LM}^{\mathsf{T}} & \rho \mathrm{Id}_M - \mathsf{A}_M - \nu \mathrm{Id}_M & \boldsymbol{\xi}_M \\ -\boldsymbol{\xi}_L^{\mathsf{T}} & -\bar{\boldsymbol{\xi}}_M^{\mathsf{T}} & \rho \end{pmatrix}, \\ \mathsf{T}_0(\nu) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{\boldsymbol{\xi}}_L \\ 0 & 0 & -\boldsymbol{\xi}_M \\ -\boldsymbol{\xi}_L^{\mathsf{T}} & \bar{\boldsymbol{\xi}}_M^{\mathsf{T}} & -\nu \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

这里，$\boldsymbol{\xi}_L$，$\boldsymbol{\xi}_M$ 是两个初等组的列向量，而 $\boldsymbol{\xi}_{LM}$ 是它们的成对矩阵。这是正则规范经过相位规范后的典范铅笔的单点形式；$\rho$ 只会使谱坐标发生位移。

### 4.3.2 单点记法中的高阶流相位

我们使用刚刚定义的模态和铅笔对定理 3.8 进行特化。这给出了高阶哈密顿量有限相位常数的模幂表达式。

对于 $N=1$，在 $P_\infty$ 处选择普通间隙补。然后 $p_1 = \sum_{\alpha=1}^{g} v_\alpha s^{-n_\alpha}$ 对于其魏尔斯特拉斯间隙 $n_\alpha$，并且 $\varphi_1^N = 0$。初等相位速率为 $b^{(r,\nu_0)}{}_\ell = -\varphi_\ell^L$、$b^{(r,\nu_0)}{}_{L+j} = \varphi_j^M$；成对相位是这些速率的相反数之和。例如，在单点 $H_0$ 铅笔方程 (4.30) 中，若采用可选的谱原点 $\rho$，四阶迹具有 $q = \lambda^3/\nu$。令 $\epsilon_a = \rho - b_a$、$\chi_a = 1$ 属于第一个普通组，而 $\chi_a = -1$ 属于第二个组。写作 $I_a = \xi_a \xi_a$、$1 \le a \le K$，以及$I_{\ell j} = \xi_{\ell j}\bar\xi_{\ell j}$、$1 \le \ell \le L < j \le K$。对于守恒功率组合 $C_\ell = I_\ell - \sum_{j=L+1}^{K} I_{\ell j}$ 和 $C_j = I_j - \sum_{\ell=1}^{L} I_{\ell j}$，无穷远处的扰动给出

$$\lambda = \chi_a \nu + \epsilon_a - \chi_a C_a/\nu + O(\nu^{-2}), \qquad \mathrm{reg}_{Q_a}\, q = 3\chi_a(\epsilon_a^2 - C_a).$$

相位等于此常数加上 $\mathfrak{f}$的有限部分，符号采用刚刚指定的初等约定。因此，单点模态功率解释在多点定理中得以保留。

### 4.3.3 标量约束算子与守恒系数

对于 $N=1$，可以选择 $h_L,\ h_M$ 的加法常数，使得 $\mathsf{C}_L=\mathsf{C}_M=0$。于是，方程 (4.14) 中的矩阵算子为标量，且 $\boldsymbol{\psi}=\psi$ 和 $\boldsymbol{\psi}^{\vee}=\psi^{\vee}$。这一¯特化还揭示了两个守恒量。记 $I_k=\xi_k\xi_{k^\diamond}$，$1\le k\le K$。展开$\partial^{-1}f=f\partial^{-1}-(\partial f)\partial^{-2}+O(\partial^{-3})$，并利用方程 (4.29)，得到

$$\mathcal{A}_L-\mathcal{A}_M=2\left(\sum_{\ell=1}^{L}I_\ell-\sum_{j=L+1}^{K}I_j\right)\partial^{-1}-2H_0\partial^{-2}+O(\partial^{-3}). \tag{4.31}$$

交换子的前两个负阶系数是这些系数差的导数，至多相差一个符号。它们为零意味着群功率差守恒，并恢复了 BA实现上的 $H_0$ 守恒。

## 4.4 超椭圆 BA 模与多项式插值

我们将情形特化为 $N=1$，其 puncture 位于奇数次超椭圆曲线的无穷远点。一般的亚纯留数判据适用于任意 $L,\ M,\ N$；此处推导的紧凑多项式公式则采用这一单点标记。片反射将普通函数与对偶函数对应起来，核变为双函数朗斯基行列式，而留数条件则变为多项式插值矩。我们给出 σ 函数归一化及其与定理 3.3 的转换，然后保留 Mumford对应所需的显式权重。模态数与哈密顿量仍分别由方程 (4.21) 和 (4.24) 给出。

### 4.4.1 曲线与函数约定

固定一条光滑奇次曲线、其阿贝尔映射及有序微分：

$$y^2=f(x)=4x^{2g+1}+\sum_{r=0}^{2g}\lambda_r x^r,\qquad A(P)=\int_{\infty}^{P}du,\qquad du_j=\frac{x^{j-1}\,dx}{y},\quad 1\le j\le g. \tag{4.32}$$

片对合为 $P=(a,\ y)\mapsto\iota(P)=(a,\ -y)$；相容的提升给出 $A(\iota(P))=-A(P)$。这是超椭圆σ函数理论 [14, 48]中使用的Baker基。此超椭圆描述中的向量 $z$使用这些Baker阿贝尔坐标，它们通过一个固定的线性变换与方程（4.25）的归一化θ坐标相关。标量时间沿相同的第一个BA方向，其第一个BA参数为 $-it$。从含有微分 $x^{j-1}dx/(2y_{\mathrm{mon}})$ 的首一方程$y_{\mathrm{mon}}^2=f_{\mathrm{mon}}(x)$进行转换时，令 $y=2y_{\mathrm{mon}}$ 和 $f=4f_{\mathrm{mon}}$；此时阿贝尔坐标便一致。

使用规范超椭圆Baker σ函数，其中 $\wp_{ij}=-\partial_{z_i}\partial_{z_j}\log\sigma$ 和

$$\sigma_\sharp=\sigma_{2,4,6,\dots}, \tag{4.33}$$

其中指标截至 $g$，空列表表示其自身 $\sigma$ [14, 48]。为确定乘性σ常数，其最低普通次数项为 $\det(z_{i+j-1})_{1\le i,\ j\le\lfloor(g+1)/2\rfloor}$。

相容的第二类向量为

$$\boldsymbol{R}(P)=\mathrm{FP}\int_{\infty}^{P}dr,\qquad dr_j=\frac{1}{4y}\sum_{k=j}^{2g-j}(k+1-j)\lambda_{k+1+j}x^k\,dx,\quad 1\le j\le g,\qquad \lambda_{2g+1}=4. \tag{4.34}$$

有限部分减去无穷远点处的极点原函数，并将其在局部参数 $x^{-1/2}$下的常数项固定为零。第一类和第二类提升使用相同的路径。根据这一选择，第二类半周期满足 $2\eta = -\oint_a dr$，且贝克隆函数中的指数项带负号

$$\Psi(P,z) = \frac{\sigma(A(P)-z)}{\sigma_\sharp(A(P))\sigma(z)}\exp(-\boldsymbol{R}(P)^{\mathsf{T}}z). \tag{4.35}$$

第二类与薛定谔约定遵循 [15]；另请参见 [12, 方程 (3.3)]中的规范化的二属公式。这些约定与 Generapy [27]一致。

物理时间沿着最后一个阿贝尔方向：

$$z(t) = z_0 - ite_g, \qquad \mathcal{P}(z,x) = x^g - \sum_{j=1}^{g}\wp_{gj}(z)x^{j-1}, \qquad \mathcal{P}_{z_g} = \partial_{z_g}\mathcal{P} = i\dot{\mathcal{P}}. \tag{4.36}$$

这里，$z_0$ 不受限制，$e_g$ 是末坐标向量。多项式 $f(x)$确定曲线，其次数为 $2g+1$；$\mathcal{P}(z,x)$的次数为 $g$，描述运动除子。

在这些约定下，标准的单点恒等式为

$$\begin{aligned}
\Psi(P,z)\Psi(\iota(P),z) &= (-1)^g\mathcal{P}(z,a),\\
\partial_{z_g}\log\Psi(P,z) &= \frac{\mathcal{P}_{z_g}(z,a)-y}{2\mathcal{P}(z,a)},\\
\partial_{z_g}^2\Psi(P,z) &= \left(a + 2\wp_{gg}(z) + \frac{\lambda_{2g}}{4}\right)\Psi(P,z).
\end{aligned} \tag{4.37}$$

它们适用于任意的 $z$ 和单次曲线点平移 $A(P)$ [14, 17]。特别是，未经处理的片伙伴在其乘积中的符号为 $(-1)^g$。我们将这个固定符号吸收到模态归一化中，使它们的幂成为首一$\mathcal{P}$的加权取值。

### 4.4.2 西格玛模态与一般归一化

使用方程（4.22）中的模态指标和正则伙伴。对于超椭圆模态，常数 $\kappa_k$ 乘在方程（4.39）中的原始西格玛乘积上；它们转换为方程（3.11）中的规范化留数权重的方式由方程（4.43）给出。对合 $\iota$表示片反射；上横线表示相互独立的哈密顿伴侣。

在方程（4.32）上选取 $K$ 个点 $Q_k = (a_k,\ y_k)$，其横坐标有限且互异，并选取非零常数 $\kappa_k$，$c_k$，$1 \le k \le K$。将所有初等模定义为

$$\xi_k = c_k\Psi(Q_k,z), \qquad \bar{\xi}_k = \frac{(-1)^g\kappa_k}{c_k}\Psi(\iota(Q_k),z), \qquad 1 \le k \le K. \tag{4.38}$$

对于 $1 \le k \le K$，它们的幂和对数速率为

$$\begin{aligned}
&\xi_k\bar{\xi}_k = \kappa_k\mathcal{P}(z,a_k),\\
&\frac{i\dot{\xi}_k}{\xi_k} = \frac{\mathcal{P}_{z_g}(z,a_k)-y_k}{2\mathcal{P}(z,a_k)}, \quad \frac{i\dot{\bar{\xi}}_k}{\bar{\xi}_k} = \frac{\mathcal{P}_{z_g}(z,a_k)+y_k}{2\mathcal{P}(z,a_k)}.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

沿阿贝尔方向将朗斯基行列式定义为 $W(f_1,\ f_2) = f_1\partial_{z_g}f_2 - (\partial_{z_g}f_1)f_2$，其中 $\dot{\ }$ $\dot{\ }$是关于 $z$的任意函数。沿物理流，$W(f_1,\ f_2) = i(f_1f_2 - f_1f_2)$。每一对初等模都有恒定的阿贝尔方向朗斯基行列式 $W(\xi_k,\ \xi_k) = \kappa_k y_k$，$1 \le k \le K$。所有初等模共享方程（4.37）中的势 $2\wp_{gg} + \lambda_{2g}/4$。

对每个跨组配对，令

$$\begin{aligned}
\xi_{\ell j} &= \frac{\sqrt{2}}{a_j - a_\ell}W(\bar{\xi}_\ell,\bar{\xi}_j),\\
\bar{\xi}_{\ell j} &= -\frac{\sqrt{2}}{a_j - a_\ell}W(\xi_\ell,\xi_j), \qquad 1 \le \ell \le L, \quad L+1 \le j \le K.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

方程 (4.44) 中的核特化将这些朗斯基行列式与带有位移 $A(Q_\ell)+A(Q_j)$ 及其相反数的西格玛函数比值联系起来，并附有固定的归一化因子 [47, 定理 6.2,$n=2$]。它们的微分方程有一个特别直接的解释：公共势相互抵消，剩下

$$i\dot{\xi}_{\ell j}=\sqrt{2}\bar{\xi}_\ell\bar{\xi}_j,\qquad i\dot{\bar{\xi}}_{\ell j}=-\sqrt{2}\xi_\ell\xi_j,\qquad 1\le\ell\le L,\quad L+1\le j\le K. \tag{4.41}$$

这些恰好就是 $H_0$的成对模态方程。初等方程由一般实现判据给出。普通 BA 函数与对偶 BA 函数乘积的原函数也出现在柯西–BA 核构造 [22, 第 2.4 节，方程 (2.13)]以及平方特征函数势理论 [7, 推论 31]中。留数判据采用第 4.4.3 节中推导出的显式多项式形式。

下面给出明确的对应表。令 $\epsilon=(-1)^g$ 和 $P_0(x)=\mathcal{P}(z_0,x)$。方程 (3.1) 中的普通函数和对偶函数为

$$\psi(P,t)=\frac{\epsilon\Psi(\iota(P),z(t))}{\epsilon\Psi(\iota(P),z_0)},\qquad \psi^\vee(P,t)=\frac{\Psi(P,z(t))}{\Psi(P,z_0)},\qquad d\Omega_0=P_0(x)\frac{dx}{y}. \tag{4.42}$$

原始乘积恒等式给出 $\psi\psi^\vee=\mathcal{P}/P_0$。对于正则初始图表 $P_0(a_k)\neq0$，令一般构造中的点、权重和规范取为

$$\begin{aligned}&\widehat{Q}_\ell=Q_\ell,&&1\le\ell\le L,\quad \widehat{Q}_j=\iota(Q_j),&&L+1\le j\le K,\\&\widehat{\kappa}_k=\kappa_kP_0(a_k),&&1\le k\le K,\quad \widehat{c}_k=c_k\Psi(Q_k,z_0),&&1\le k\le K.\end{aligned} \tag{4.43}$$

帽号 $\widehat{\ }$ 标识了方程 (4.26) 和 (4.27) 中使用的归一化常数。核为

$$\Omega(P,Q)=\frac{\psi^\vee(Q)\partial_{z_g}\psi(P)-\partial_{z_g}\psi^\vee(Q)\psi(P)}{x(P)-x(Q)}. \tag{4.44}$$

根据共同的薛定谔方程，其阿贝尔方向导数为 $\psi(P)\psi^\vee(Q)$。将方程 (4.43) 代入方程 (4.27)，便恰好得到方程 (4.40) 中的朗斯基行列式，包括其符号和 $\sqrt{2}$ 因子。因此，初等函数和成对函数是相同的模态，只是分别以归一化 BA 约定和原始西格玛函数约定表示。

### 4.4.3 显式插值权重和相位

在无穷远点的局部参数 $s=x^{-1/2}$ 中，对于 $1\le\alpha\le g$，有 $du_\alpha=-s^{2g-2\alpha}(1+O(s^2))ds$。在有限节点处，使用 $x-a_k$。因此，一般留数条件变为

$$\sum_{\ell=1}^{L}\kappa_\ell a_\ell^r=\sum_{j=L+1}^{K}\kappa_j a_j^r=\begin{cases}0, & 0\le r\le g-2,\\ \frac{1}{2}, & r=g-1.\end{cases} \tag{4.45}$$

反射同时改变插值函数的主系数和微分系数，但使两组保留相同的矩。

要利用这些矩构造所有权重，将它们的简单分式汇集到节点多项式上

$$R_L(x)=\prod_{\ell=1}^{L}(x-a_\ell),\qquad R_M(x)=\prod_{j=L+1}^{K}(x-a_j). \tag{4.46}$$

定义它们的分子多项式 $q_L,q_M$ 为

$$\frac{q_L(x)}{R_L(x)}=2\sum_{\ell=1}^{L}\frac{\kappa_\ell}{x-a_\ell},\qquad \frac{q_M(x)}{R_M(x)}=2\sum_{j=L+1}^{K}\frac{\kappa_j}{x-a_j}. \tag{4.47}$$

在施加矩条件之前，这些分子的次数至多为 $L-1, M-1$。矩条件恰好表明，每个有理函数在无穷远点处的展开为 $x^{-g}+O(x^{-g-1})$。因此， $L, M \geq g$，而这些分子必须是次数为 $L-g$, $M-g$ 的首一多项式。取留数可得

$$\kappa_\ell = \frac{q_L(a_\ell)}{2R_L'(a_\ell)}, \quad 1 \leq \ell \leq L, \qquad \kappa_j = \frac{q_M(a_j)}{2R_M'(a_j)}, \quad L+1 \leq j \leq K. \tag{4.48}$$

撇号表示对 $x$ 求导。反过来，任意一对具有这些次数的首一分子都会给出所需的矩；为使模态权重非零，它们在各自节点处的取值必须非零。因此， $q_L$， $q_M$ 刻画了可用的插值权重：当相应组恰有 $g$ 个点时，它们等于 1；而较大的组则带来自由的多项式系数。

**推论 4.2**。 设方程 （4.38）和（4.40）中的初等模与成对复合模遍历固定曲线方程 （4.32）的一个非空开子集。它们满足方程 （4.24）的所有哈密顿方程，当且仅当其权重满足插值矩方程 （4.45），且其相位系数满足

$$\begin{aligned} b_\ell &= -\sum_{j=L+1}^{K} \kappa_j \frac{y_j - y_\ell}{a_j - a_\ell}, \quad 1 \leq \ell \leq L, \\ b_j &= -\sum_{\ell=1}^{L} \kappa_\ell \frac{y_\ell - y_j}{a_\ell - a_j}, \qquad L+1 \leq j \leq K. \end{aligned} \tag{4.49}$$

证明。 在未归一化的超椭圆权重中，两个插值函数为

$$h_L(P) = \sum_{\ell=1}^{L} \kappa_\ell \frac{y(P)+y_\ell}{x(P)-a_\ell}, \qquad h_M(P) = \sum_{j=L+1}^{K} \kappa_j \frac{y(P)-y_j}{x(P)-a_j}. \tag{4.50}$$

它们的有限极点分别位于 $Q_\ell$ 和 $\iota(Q_j)$。矩使其尖点展开为 $s^{-1}+O(s)$。根据方程（4.42）， $h\,d\Omega_0$ 的留数的一半为 $\kappa_k P_0(a_k)$，恰好是方程（4.43）中的归一化权重。它们在对侧组中的取值给出方程（4.49）。等价性现由定理 3.3 得出。在分支点处，计算留数时使用其正则纵坐标；即使其纵坐标为零，该公式也无需除以它，因而仍然成立。 □

相位条件方程 (4.49) 说明了独立常数对角块的作用。对于 $N=1$，已刊载的 Jiang–Rauch-Wojciechowski 特化给出 $b_k = b_1^N$，对每个 $1 \leq k \leq K$ 均如此；而这些条件通常要求不同标记点具有不同的速率。方程 (4.23) 中的外部对角参数恰好提供了这种自由度。常数 $c_k$ 指定初始模态归一化，且不会改变这些对数速率。

例如，取 $g=L=M=2$，令 $Y(x)$ 为次数至多为三且满足 $Y(a_k) = y_k$, $1 \leq k \leq 4$ 的多项式。矩方程 (4.48) 中的权重为

$$b_1 - b_2 = -\tfrac{1}{2}[x^3]Y(x)(a_1-a_2), \qquad b_3 - b_4 = -\tfrac{1}{2}[x^3]Y(x)(a_3-a_4). \tag{4.51}$$

因此，非零三次插值系数要求两组内的相位变化率各不相同。这是一般情形下的最小亏格二实现。定理 2.2 既适用于这些不同的速率，也适用于它们重合的特例。

命题 3.5 将此超椭圆族确定为亏格 $g$ 的一个谱层，总亏格为 $LM-g$。

## 4.5 半周期平移、al 函数与椭圆例子

我们将显式公式专门应用于半周期平移和一阶情形，将这一构造与经典函数联系起来，并给出具有不同模态数的示例。

### 4.5.1 半周期平移与 al 函数

分支点取值给出了这些正则模态的经典特化。设 $B_k = (a_k,\ 0)$ 为一个有限分支点，且 $\delta_k = A(B_k)$。由于 $\operatorname{div}(x - a_k) = 2B_k - 2\infty$，阿贝尔定理给出 $2\delta_k \in \Lambda$，其中 $\Lambda = 2\omega\mathbb{Z}^g + 2\omega'\mathbb{Z}^g$。于是，两个片层伙伴函数成比例，其朗斯基行列式为零。经过常数正规化后，它们就是 Weierstrass 超椭圆 al 函数 [51, 41], ，满足

$$\mathrm{al}_k(z) = d_k \Psi(B_k, z), \qquad \mathrm{al}_k(z)^2 = \mathcal{P}(z, a_k), \qquad d_k^2 = (-1)^g. \tag{4.52}$$

每个 al 函数在雅可比簇的一个双覆盖上是亚纯函数；其平方是阿贝尔函数。这些函数推广了 Jacobi 椭圆函数 [41, 附录]。

对于一个包含所有 $2g+1$ 有限分支点的任意亏格例子，将它们划分为大小分别为 $L = g$、$M = g+1$的组。选取 $q_L = 1$ 和 $q_M(x) = x - \alpha$，其中 $\alpha$ 不同于第二组的横坐标，并使用方程 (4.48) 中的权重。它们满足方程 (4.45)。所有纵坐标均为零，因此方程 (4.49) 给出 $b_k = 0$、$1 \le k \le 2g+1$。因此，推论 4.2 在纯三次哈密顿方程 (4.24) 中实现了整个初等 al 函数族。跨组配对模是方程 (4.40) 中的朗斯基行列式，其平移量为半周期和。典范伙伴在环境系统中仍然相互独立；但在这个 al 解族上，它们变为成比例。

由于所有相位均为零，这一族也满足原始的附录 B 中的 Jiang–Rauch-Wojciechowski 系统；其完全积分计数由定理 2.2 中重复相位的部分给出，矩积分来自大小为 $g$ 和 $g+1$ 的块。在命题 3.5 的平面特征曲线 $\Gamma$ 中，这些组在边界处相交于两个点，其重数分别为 $g$ 和 $g+1$。每组内部重合的截距使分支两两之间的接触阶为二。因此，重数为 $m$ 的点具有总亏格 $m(m-1)$，其中 $\binom{m}{2}$ 是超出普通多重点缺陷的部分。两个超额缺陷分别为 $g(g-1)/2$ 和 $g(g+1)/2$。它们的和 $g^2 = LM - g$ 涵盖了全部额外亏格；总亏格为 $2g^2$。因此，仿射曲线是光滑的。在乘积曲面模型中，普通无穷远贡献已被分离，剩下的边界总缺陷为 $g^2$。

对于亏格至少为二的情形，基本半周期机制是超椭圆曲线所特有的：$2A(P) \in \Lambda$ 使得 $P \neq P_\infty$ 令 $2P - 2P_\infty$ 成为主因子，并给出一个二次映射。其他覆盖结构则产生高阶挠类似物。例如，在循环三角曲线上$y^3 = \prod_{r=1}^{4}(x - b_r)$，$\operatorname{div}(x - b_r) = 3B_r - 3\infty$ 给出三阶平移；三重 al 函数将在 [41, 第 8]节中介绍。

### 4.5.2 一阶与多模态基本模态

取魏尔斯特拉斯坐标 $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$。则 $A(P) = \mu$、$a = \wp(\mu)$、$y = \wp'(\mu)$以及 $R(P) = -\zeta(\mu)$，因此基本函数为

$$\Psi(P, z) = \frac{\sigma(\mu - z)}{\sigma(\mu)\sigma(z)} e^{\zeta(\mu) z}, \qquad z = z_0 - it. \tag{4.53}$$

¯其归一化模态幂为 $\xi_k \xi_k = \kappa_k(a_k - \wp(z))$、$1 \le k \le K$。唯一的矩条件为

$$\sum_{\ell=1}^{L} \kappa_\ell = \sum_{j=L+1}^{K} \kappa_j = \tfrac{1}{2}.$$

因此，任意多个初等椭圆模态都可以采用相同的三次相互作用构造，并具有其 $LM$成对复合模。由此，对于任意正的 $L$，$M$，哈密顿方程 (4.24) 都具有带有 $L + M + LM$ 正则

模对的亏格一 BA 实现。这给出了一族具有椭圆解的三次多波哈密顿量，其范围超出了三波情形；其显式魏尔斯特拉斯表述值得进一步研究。

对于 $L=M=1$，因此 $K=2$，写作 $Y=(y_2-y_1)/(2(a_2-a_1))$。两个权重为 $1/2$，而相位匹配给出 $b_1=b_2=-Y$。所得的三对哈密顿量为

$$H_0=-Y(\xi_1\bar{\xi}_1+\xi_2\bar{\xi}_2)+\sqrt{2}(\xi_1\xi_2\xi_{12}+\bar{\xi}_1\bar{\xi}_2\bar{\xi}_{12}). \tag{4.54}$$

这恢复了熟悉的失谐三波形式 [43]。增加 $L$，$M$ 仍保留椭圆初等解，同时加入成对复合相互作用；这也增加了正则环境谱曲线的亏格。

## 4.6 模态幂与 Mumford子系统

在本小节中始终采用 $N=1$，以及第 4.4 节的超椭圆数据。

推论 4.2 中的初等模态幂是运动除子多项式 $\mathcal{P}$ 的求值。结合其导数，它们在除子坐标中确定了一个闭合的投影子系统，我们将其确定为奇芒福德流。我们称之为 Mumford子系统。我们根据模态重构其多项式，并描述 BA公式所保留的模态信息。在本小节中，曲线、标记点和权重始终保持不变。我们写作 $\mathcal{P}_{z_g}=\partial_{z_g}\mathcal{P}=i\,\dot{\mathcal{P}}$以及$\mathcal{P}_{z_gz_g}=\partial_{z_g}^2\mathcal{P}=-\,\ddot{\mathcal{P}}$。

### 4.6.1 重构除子多项式

定义初等幂 $I_k=\xi_k\xi_{\bar{k}}$, $1\le k\le K$。根据正则哈密顿方程 (4.24)，其导数可直接得出：线性相位项相互抵消，剩下

$$\begin{aligned} i\dot{I}_\ell &= \sqrt{2}\sum_{j=L+1}^{K}(\bar{\xi}_\ell\bar{\xi}_j\bar{\xi}_{\ell j}-\xi_\ell\xi_j\xi_{\ell j}), \quad 1\le\ell\le L,\\ i\dot{I}_j &= \sqrt{2}\sum_{\ell=1}^{L}(\bar{\xi}_\ell\bar{\xi}_j\bar{\xi}_{\ell j}-\xi_\ell\xi_j\xi_{\ell j}), \qquad L+1\le j\le K. \end{aligned} \tag{4.55}$$

因此，$\dot{I}_k=\{I_k,H_0\}$ 是模态的多项式，而非额外的导数数据。在 BA 族上，

$$\frac{I_k}{\kappa_k}=\mathcal{P}(z,a_k), \qquad \frac{i\dot{I}_k}{\kappa_k}=\mathcal{P}_{z_g}(z,a_k), \qquad 1\le k\le K. \tag{4.56}$$

由于 $L\ge g$，使用前 $g$ 个标记横坐标及其拉格朗日基多项式

$$\ell_k(x)=\prod_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{g}\frac{x-a_r}{a_k-a_r}, \qquad 1\le k\le g. \tag{4.57}$$

$\mathcal{P}$ 的首项系数为 1，因此对其其余系数以及$\mathcal{P}_{z_g}$进行插值，得到

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(z,x) &= x^g+\sum_{k=1}^{g}\left(\frac{I_k}{\kappa_k}-a_k^g\right)\ell_k(x),\\ \mathcal{P}_{z_g}(z,x) &= \sum_{k=1}^{g}\frac{i\dot{I}_k}{\kappa_k}\ell_k(x). \end{aligned} \tag{4.58}$$

任意 $g$ 个互不相同的标记横坐标，在这一族上都会得到相同的重构。额外的求值结果提供了其余的模态幂及其线性插值关系。

雅可比反演给出 $\mathcal{P}\mid f-\mathcal{P}_{z_g}^2$：在每个运动除子点 $(x_r,y_r)$ 处，有 $\mathcal{P}^{z_g}(z,x_r)=y_r$ 因此 $f(x_r)=\mathcal{P}^{z_g}(z,x_r)^2$。因此，定义多项式

$$\mathcal{W}(z,x)=\frac{f(x)-\mathcal{P}_{z_g}(z,x)^2}{4\mathcal{P}(z,x)},\qquad f=\mathcal{P}_{z_g}^2+4\mathcal{P}\mathcal{W}. \tag{4.59}$$

这里，$\mathcal{P}$和$\mathcal{W}$分别是次数为 $g$和 $g+1$的首一多项式，而 $\deg_x\mathcal{P}_{z_g}\le g-1$。因子 4 使$\mathcal{W}$ 成为曲线规范化方程 (4.32) 中的首一多项式。将 Mumford 的三个多项式记为 $(\mathcal{U},\ \mathcal{V},\ \mathcal{W})$，其中

$$\mathcal{U}=\mathcal{P},\qquad \mathcal{V}=\mathcal{P}_{z_g}/2,\qquad \mathcal{U}\mathcal{W}+\mathcal{V}^2=f/4. \tag{4.60}$$

这些是普通奇 Mumford 系统的次数约束和谱关系 [46,第三章a]；另见 [19,§3.1]。其首一谱曲线可由我们的谱曲线将纵坐标除以 2 得到。

### 4.6.2 投影运动方程

将公共标量势写为

$$\mathcal{Q}(z)=2\wp_{gg}(z)+\frac{\lambda_{2g}}{4}=\frac{\lambda_{2g}}{4}-2[x^{g-1}]\mathcal{P}(z,x). \tag{4.61}$$

方程 (4.37) 和 (4.39) 中共同的二阶 BA 方程以及恒定的片对朗斯基行列式给出

$$2\mathcal{P}\mathcal{P}_{z_gz_g}-\mathcal{P}_{z_g}^2-4(x+\mathcal{Q})\mathcal{P}^2=-f(x). \tag{4.62}$$

例如，在曲线上横坐标为 $x$ 的任意点处，对 BA 函数的乘积求导，利用它们共同的标量方程，并用它们的朗斯基行列式消去导数之差。由于该点是任意的，这便给出了关于 $x$ 的多项式恒等式。

将方程 (4.59) 代入方程 (4.62)，然后对谱关系求导，可得到闭合的多项式流

$$\mathcal{P}_{z_gz_g}=2\big((x+\mathcal{Q})\mathcal{P}-\mathcal{W}\big),\qquad i\dot{\mathcal{W}}=-(x+\mathcal{Q})\mathcal{P}_{z_g}. \tag{4.63}$$

与$\mathcal{P}^{z_g}$ 作为第二个多项式坐标时，这些构成奇数 Mumford 无穷远点流。时间归一化由 $i\mathcal{U}=2\mathcal{V}$ 和 BA 方向 $z(t)=z_0-ite_g$确定。

这种对应关系也可以通过二阶 Lax 形式进行验证。定义

$$\mathsf{A}(x)=\begin{pmatrix}\mathcal{V}&\mathcal{U}\\ \mathcal{W}&-\mathcal{V}\end{pmatrix},\qquad \mathsf{B}(x)=\begin{pmatrix}0&1\\ x+\mathcal{Q}&0\end{pmatrix}. \tag{4.64}$$

于是，方程 (4.63) 等价于

$$i\dot{\mathsf{A}}=[\mathsf{A},\mathsf{B}],\qquad \det\left(\frac{y}{2}\mathrm{Id}_2-\mathsf{A}(x)\right)=\frac{y^2-f(x)}{4}. \tag{4.65}$$

因此，模态幂投影同时保持除子动力学和给定的超椭圆曲线。

### 4.6.3 从除子数据恢复模态

在固定曲线Mumford纤维的一般状态下，令 $\mathcal{P}_k=\mathcal{P}(a_k)$ 和 $\mathcal{P}_{z_g,\ k}=\mathcal{P}^{z_g}(a_k)$,$1\le k\le K$。选取非零初等值 $\xi_k$，并令

$$\bar{\xi}_k=\frac{\kappa_k\mathcal{P}_k}{\xi_k},\qquad 1\le k\le K. \tag{4.66}$$

将 BA 对数速率代入朗斯基行列式方程 (4.40)，即可代数地确定每个复合模态：

$$\begin{aligned}\xi_{\ell j} &= \frac{\bar{\xi}_\ell \bar{\xi}_j}{\sqrt{2}(a_j - a_\ell)} \left( \frac{\mathcal{P}_{z_g,j} + y_j}{\mathcal{P}_j} - \frac{\mathcal{P}_{z_g,i} + y_\ell}{\mathcal{P}_\ell} \right), \\ \bar{\xi}_{\ell j} &= -\frac{\xi_\ell \xi_j}{\sqrt{2}(a_j - a_\ell)} \left( \frac{\mathcal{P}_{z_g,j} - y_j}{\mathcal{P}_j} - \frac{\mathcal{P}_{z_g,i} - y_\ell}{\mathcal{P}_\ell} \right), \qquad 1 \le \ell \le L < j \le K.\end{aligned} \tag{4.67}$$

这些公式适用于坐标图$\mathcal{P}_k \neq 0$, $1 \le k \le K$。雅可比反演给出相应的 $z$，方程 (4.38) 中的常数 $c_k$ 与所选的初等值相匹配。在推论 4.2 的条件下，提升后的模态因而满足典范模态方程。

多项式三元组确定除子状态； $K$ 初等归一化则指定其模态提升。特别是，模态描述保留了相位依赖的单个 BA 函数，而一旦选定这些归一化，复合量便随之确定。忽略这一规范自由度后，固定曲线 BA 族给出通常 Mumford 纤维的一个开子集，即去掉其 theta 除子后的雅可比簇 [19, 命题 3.1]。这就确定了固定曲线解及其向量场。若要建立泊松结构之间的对应关系，还需要对典范模态括号进行约化。

### 4.6.4 模态规范与除子提升

我们将第 3.3.2 节的一般对称性解释具体化，以识别除子投影所省略的模态相位。

$K = L + M$ 无关的单点荷生成倒数模态规范

$$\begin{aligned}&\xi_k \longmapsto e^{\theta_k}\xi_k, \qquad && \bar{\xi}_k \longmapsto e^{-\theta_k}\bar{\xi}_k, \qquad && 1 \le k \le K, \\ &\xi_{\ell j} \longmapsto e^{-(\theta_\ell + \theta_j)}\xi_{\ell j}, && \bar{\xi}_{\ell j} \longmapsto e^{\theta_\ell + \theta_j}\bar{\xi}_{\ell j}, && 1 \le \ell \le L < j \le K.\end{aligned} \tag{4.68}$$

这里， $\theta_k$ 是复常数参数；取纯虚值可保持共轭实形式。 $H_0$ 的每一项都是不变量。这些对称性直接源自多项式哈密顿量；BA 实现将其对应为归一化常数 $c_k$的变化。

对于给定的超椭圆 BA 族， $g$ 除子坐标和 $K$ 模态归一化确定了方程 (4.66) 和 (4.67) 所描述的提升。其谱层由命题 3.5 确定。所实现的 $H_0$ 流沿 $-ie_g$ 方向平移 $z$ 。定理 3.8 将进一步的谱流确定为这一 BA 族的平移，以及方程 (3.31) 中的常数模态相位。其阿贝尔方向张成该族的雅可比簇，而幂荷生成互为倒数的规范因子。

### 4.6.5 力学坐标实现

取 $L = g$即可得到与加尼耶坐标的显式联系。于是， $q_L = 1$和 $\kappa_\ell = 1/(2R'_L(a_\ell))$, $1 \le \ell \le g$。引入局部坐标 $r_\ell$ ，使得 $r_\ell^2 = 4I_\ell$。拉格朗日插值给出

$$\sum_{\ell=1}^{g} r_\ell^2 = 2\left( [x^{g-1}]\mathcal{P} + \sum_{\ell=1}^{g} a_\ell \right). \tag{4.69}$$

利用方程 (4.62) 对这些坐标求导，得到

$$-\ddot{r}_\ell = \left( \alpha_\ell - \sum_{j=1}^{g} r_j^2 \right) r_\ell - \frac{f(a_\ell)}{R'_L(a_\ell)^2 r_\ell^3}, \qquad \alpha_\ell = a_\ell + \frac{\lambda_{2g}}{4} + 2\sum_{j=1}^{g} a_j, \quad 1 \le \ell \le g. \tag{4.70}$$

在几何阿贝尔时间 $-it$ 下，这是带有离心项 [35, 50]的 Garnier形式。在标记分支点处，相应的逆立方项消失。初等 BA 模提供了一种描述，既保留了层对相位，也保留了这些力学坐标。

关于相同除子几何的 Neumann实现，参见 [46, 第三章a，第 §4] 节。Vanhaecke 讨论了它与 Garnier 以及可积Hénon–Heiles系统的联系 [50]；亏格二情形(ii)的 Hénon–Heiles系统及其 BA 描述在[12, §4]中有明确处理。

**高秩 Mumford系统。** Pedroni 和 Vanhaecke 在 $\mathfrak{sl}_r$ [49] 中将 Mumford构造推广到多项式矩阵。我们的初步计算将一个驻定的 (3,4) 三重覆盖BA族与其约化 $\mathfrak{sl}_3$ 流联系起来，这表明可能存在超椭圆模态-幂对应的高秩对应物。其系统性发展留待未来工作。

# 5 数值验证

我们分别测试正向实现、高阶流正规化和逆重构，并将 BA公式与独立的哈密顿演化进行比较。

## 5.1 预设超椭圆的和三重覆盖BA解

我们将单点 BA 构造（$N=1$）与在一条亏格二超椭圆曲线和一条光滑的亏格三三重点曲线上的哈密顿方程独立积分进行比较。解析 BA值及其导数采用 Generapy 的参考归一化BA喷流；方向性sigma喷流给出对模态势 [27]。每个示例仅计算一次周期以及第一类和第二类提升，并采用固定的参考归一化。随后，根据多项式哈密顿方程 (4.24) 分别计算典范向量场。

### 5.1.1 曲线与指定的BA数据

超椭圆例子采用

$$y^2 = 4x(x^2-1)(x^2-4), \qquad L = M = 2, \tag{5.1}$$

因此有八个典范模对。按顺序排列的点横坐标为 0.1，2.3，0.5，3.0，第一组的纵坐标为正实数，第二组的纵坐标为负实数。我们采用方程 (4.32) 和 (4.34) 中的 Baker微分，以及参考向量 $z_0 = \omega e_2 + \frac{4i}{5}$ (1，1)$^{\mathsf{T}}$,$\widehat{\ }$，其中 $\omega$ 是第一类半周期矩阵。这些是方程 (4.43) 的归一化 BA点 $Q_k$ 。这种选择给出实相位系数、正的归一化权重，以及$^{-}$ $^{-}$全正实形式 $\xi_k = \xi_k^*$, $1 \le k \le K$ 和 $\xi_{ij} = \xi_{ij}^*$, $1 \le i \le L < j \le K$。因此，在这个爆炸型解中，每个模态幂都是一个模平方。

三重覆盖例子使用

$$y^3 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x + 7, \qquad L = M = 3, \tag{5.2}$$

因此有 十五个典范模对。相容的第一类基和第二类基为

$$du = \frac{(1, x, y)^{\mathsf{T}}}{3y^2}\,dx, \qquad dr = \frac{((5x^2+6x+3)y,\, 2xy,\, x^2)^{\mathsf{T}}}{3y^2}\,dx. \tag{5.3}$$

在唯一的无穷远点处，写作 $x = s^{-3}$ $y = s^{-4}w\ s$ $w\ s\ ^3 = 1 + 2s^3 + 3s^6 +$ 和 ( )，其中 $5s^9 + 7s^{12}$ $w\ 0\ = 1$ $\epsilon_3 = e^{2\pi i/3}$ $x = r^3$ $y = \epsilon_3^j f\ r^3\ ^{1/3}$ ( ) 和 ( )。令 。这些点具有 和 ( )，其中

$f(x)$ 是方程 (5.2) 中的四次多项式，其所示立方根为正值，且有序的 $(r,\ j)$ 列表为

$$(0.6,0),\ (0.9,1),\ (1.4,2)\quad\text{and}\quad(0.7,0),\ (1.1,1),\ (1.8,2).$$

这些提升沿着相应的无穷远图路径。$\int dr_3$ 的有限部分在 $s$中的常数项为零；具体而言，其主片值为

$$R_3(s)=s^{-1}+\int_0^s\frac{1-w(q)^{-2}}{q^2}\,dq.$$

参考向量为 $z_0=(0.6+0.3i,\quad 0.2+0.15i,\quad 0.1+0.2i)$。

在这两种情况下，我们都使用参考归一化的西格玛函数比值

$$\psi_{\pm}(P,z;z_0)=\frac{\sigma(A(P)\pm z)\sigma(z_0)}{\sigma(A(P)\pm z_0)\sigma(z)}\exp\!\big(\pm\boldsymbol{R}(P)^{\mathsf{T}}(z-z_0)\big).\tag{5.4}$$

这些比值在 $z_0$处均为 1。定理 3.3 中的留数判据确定了归一化权重$\kappa_k$ 和相位系数 $b_k$、$1\le k\le K$。初始初等规范变换为 $c_k=\sqrt{\kappa_k}$，其中$\overline{\ }$采用主值复平方根。因此，$\xi_k(0)\overline{\ }=\xi_k(0)=\sqrt{\kappa_k}$；成对模态初值由方程 (4.27) 确定。对于三重覆盖的例子，所得常数四舍五入到小数点后六位为

| $k$ | $\kappa_k$ | $b_k$ |
|---|---|---|
| 1 | $0.278555-0.080913i$ | $6.227141+15.533670i$ |
| 2 | $-0.105763-0.895590i$ | $-5.060995+6.549498i$ |
| 3 | $-0.084898+0.199820i$ | $-3.591234+0.946300i$ |
| 4 | $0.238558-0.001427i$ | $13.329291+16.279427i$ |
| 5 | $0.005090-0.994442i$ | $-3.184404+7.790703i$ |
| 6 | $-0.044599+0.514974i$ | $-2.564030-1.368484i$ |

数值积分使用完整的存储值。

为计算三角曲线成对复合模态，我们使用一个显式双线性公式，以贝克隆函数及其导数表示核。对该公式求导，还可得到解析模态变化率，而无需代入哈密顿方程。记 $\partial=\partial_{z_3}$、$f_i=\psi_+(Q_i,z;z_0)$和$g_j=\psi_-(Q_j,\ z;z_0)$。标量贝克–阿赫泽算子及其形式伴随算子具有如下形式

$$\mathscr{L}_3=\partial^3+p_3\partial+q_3,\qquad \mathscr{L}_3^{\mathrm{ad}}=-\partial^3-p_3\partial+q_3-\partial p_3,\qquad p_3=3\partial^2\log\sigma(z),$$

其中有 $\mathscr{L}_3f_i=x_if_i$ 和 $\mathscr{L}_3^{\mathrm{ad}}g_j=x_jg_j$。此类标量算子由 BA 构造[38]给出。它们的格林恒等式为

$$\Omega(Q_i,Q_j)=\frac{g_j\partial^2f_i-(\partial g_j)(\partial f_i)+(\partial^2g_j)f_i+p_3g_jf_i}{x_i-x_j}.\tag{5.5}$$

事实上，分子的导数为 $g_j\mathscr{L}_3f_i-f_i\mathscr{L}_3^{\mathrm{ad}}g_j=(x_i-x_j+q_3)f_ig_j$；系数恰好抵消。核归一化确定了原函数，而 $i\Omega(Q_i,\ Q_j)=f_ig_j$沿着 $z=z_0-ite_3$。

### 5.1.2 独立演化与精度

两个例子均采用实时间 $t$，并在给定的阿贝尔坐标中取 $z=z_0-ite_g$, $0\le t\le 6$。独立积分器按照方程 (4.29) 中的方式，利用括号 $-i$ 求解 $H_0$ 的哈密顿方程。三重覆盖例子采用真正的复权重 $\kappa_k$ 和相位系数$b_k$, $1\le k\le K$，并保留独立的哈密顿伙伴。

西格玛函数喷流以 24 位小数精度计算。模态组装和独立的四阶龙格–库塔积分采用双精度复数运算。我们在

41 个点处计算 BA公式，并在 601 个点处绘制数值轨迹。分别采用 6,000 步和 12,000 步进行数值积分，以检验收敛性。在超椭圆情形下，通过双函数朗斯基行列式，由 BA喷流计算核；在三角情形下，则通过双线性公式方程 (5.5) 计算。核的导数通过对该配对求导来计算，不代入哈密顿方程。

对于每个模态，数值 $a, b$之间的缩放差异为 $|a-b|/(1+\max(|a|,|b|))$. 最大值取自所有模态和全部 41 个比较点，包括图中未显示的模态。细步长结果为

| 检查 | 超椭圆的 | 三重覆盖 |
|---|---|---|
| 模态差异 | $1.7\times10^{-11}$ | $1.8\times10^{-11}$ |
| 模态功率差异 | $1.6\times10^{-11}$ | $1.2\times10^{-11}$ |
| 正则向量场残差 | $1.2\times10^{-15}$ | $1.2\times10^{-12}$ |
| BA守恒量漂移 | $1.0\times10^{-15}$ | $1.6\times10^{-12}$ |
| Runge–Kutta守恒量漂移 | $2.1\times10^{-14}$ | $8.6\times10^{-13}$ |
| 35 位数四阶龙格–库塔法细化比 | 16.0 | 16.0 |
| 外推模态差异 | $2.8\times10^{-12}$ | $3.1\times10^{-12}$ |

我们还在三个 BA 状态各自对应的十二个曲线点上检验谱映射方程 (3.20)。 $\lambda(P)\mathrm{Id}-\mathrm{L}_0(\nu(P))$ 的最小奇异值与最大奇异值之比的最大值，在超椭圆例子中为 $2.2\times10^{-16}$，在三角例子中为 $6.8\times10^{-17}$。方程 (3.21) 中相应的奇点缺陷超额总数分别为二和六。向量场残差直接检验 BA 函数是否满足哈密顿方程；轨迹差异还包含数值积分误差和存储数据误差。为区分这些影响，我们采用 35 位数精度进行 Runge–Kutta计算，对相同的存储系数和初值进行提升，并分别使用 6，000、12，000 和 24，000 步。对于两个例子，相邻轨迹差之比均为 16。0，证实了四阶收敛。表中还给出了 Richardson外推差异；它们仍受存储参数和 BA值的精度限制。因此，原始的双精度BA比较比值并不能反映积分器的阶数。对于超椭圆计算，带横线的伴随变量与实际复共轭之间的最大缩放差异，在 BA 求值中为 $3.0\times10^{-16}$，在 Runge–Kutta计算中为 $1.8\times10^{-12}$。守恒性检验包括 $H_0$ 以及每个行列功率荷

$$I_i-\sum_{j=L+1}^{K}I_{ij},\quad 1\le i\le L,\qquad I_j-\sum_{i=1}^{L}I_{ij},\quad L+1\le j\le K,\qquad I_{ij}=\xi_{ij}\bar{\xi}_{ij}.$$

图1和图2展示了具有代表性的基本模态、一个成对复合模以及一个基本模态功率。脚本 `code/ba_numeric_examples.py` 和 `code/reference_sigma_ba.py`，以及随附的参数记录，可在 `https://github.com/HeskethGD/ba-canonical-ham` 的项目代码仓库中获取，并可复现这些比较结果。

## 5.2 多 puncture 解与独立Abel方向

我们检验完整的三数组构造及其高阶流相位，其中包括同一条亏格二曲线上的两个独立Abel方向。

### 5.2.1 多 puncture 椭圆例子

要测试全部三个非单点数组，取 $L=M=N=2$on $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$，其中 $\tau=0.23+1.17i$，且 punctures 为 $R_1=0.13+0.14i$、 $R_2=0.41+0.29i$。写作 $\Theta(P)=\theta[\frac{1}{2},\frac{1}{2}](P\mid\tau)$和$E_1=\partial_P\log\Theta$。选择

$$d\Omega_0=\beta(P)dP,\qquad \beta(P)=E_1'(P-R_1)+E_1'(P-R_2)+0.23-0.19i.$$

它的四个零点分为两个普通点和两个对偶除子点；这里取整后的普通点为

$$D_1 = 1.13522461 + 0.80548828i, \qquad D_2 = 0.16709062 + 0.35074039i.$$

参考点为 $z_0 = R_1 + R_2 - D_1 - D_2$，其精确提升为这些，并且 $z(t) = z_0 + 2it$。对于$\mathfrak{a}(P) = \prod_{k=1}^{2} \Theta(P - R_k) / \prod_{a=1}^{2} \Theta(P - D_a)$ 和 $\Xi(P) = \sum_{k=1}^{2} E_1(P - R_k)$，核为

$$\Omega(P, Q) = \frac{\mathfrak{a}(P)}{\beta(Q)\mathfrak{a}(Q)} e^{-it(\Xi(P) - \Xi(Q))} \frac{\Theta'(0)\Theta(z(t) + P - Q)}{\Theta(z(t))\Theta(P - Q)}.$$

其穿孔极限给出两个规范化基。使用四个普通取值点

$$(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = (0.07 + 0.03i,\ 0.57 + 0.08i,\ 0.78 + 0.21i,\ 0.26 + 0.63i)$$

以及主系数 $(r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4) = (-0.7,\ -1.3,\ -0.9,\ -1.1)$。每组的和均为 $-2$，即所需的亏格一阿贝尔速度。因此，$h_L = \Xi + \sum_{i=1}^{2} r_i E_1(P - Q_i)$ 和 $h_M = \Xi + \sum_{j=3}^{4} r_j E_1(P - Q_j)$ 给出插值函数、权重和相位。这个亏格一实现有六个超额谱缺陷，因为该系统的一般亏格为七。

Generapy 现有的公开 θ 喷流可在 55 位精度下计算核及其解析导数。多穿孔基和固定除子因子由这些数据组装而成。一旦提供了 puncture 和第二类数据，第 3.1.1 节中的 sigma 版本同样可以根据其 sigma 喷流计算得到。在 $t = 0$，0。031，0。087 处，我们将全部 24 个解析模态速率与单独组装的正则场进行比较，并检查谱特征向量以及参考点归一化的双线性核。对于移位迹阶数 $r = 3$，4，with$\nu_0 = 0.17 + 0.09i$，亚纯有限部确定高阶 BA 时间和所有顶点相位。其解析速率与独立的矩阵场 $i\,\dot{\mathrm{X}} = [\mathrm{D},\ (\mathrm{X} + \nu_0 \mathrm{D})^{r-1}]$ 进行比较：

| 检查 | 最大缩放残差 |
|---|---|
| 正则模态速率 | $2.9 \times 10^{-55}$ |
| 秩二核速率 | $5.1 \times 10^{-56}$ |
| 左右谱特征向量 | $1.9 \times 10^{-55}$ |
| 参考归一化核 | $2.6 \times 10^{-56}$ |
| 移位迹 , 3 阶 | $5.0 \times 10^{-55}$ |
| 移位迹 , 4 阶 | $6.7 \times 10^{-55}$ |

脚本 `code/multipoint_BA_elliptic_check.py` 和 `code/multipoint_higher_flow_check.py` 记录了完整数据及这些残差。精确的有理曲线检验和守恒块矩从不同角度对符号及重复相位基构造进行了符号检验。

### 5.2.2 两个独立的二阶属多重 puncture 流

对于完整数组的高亏格检验，保留 $L = M = N = 2$ 并使用方程（5.1）所定义的光滑二亏格曲线。写作 $P(x) = (x, 2\sqrt{x(x^2 - 1)(x^2 - 4)})$，在指定点取主平方根。取

$$R_1 = P(0.25), \quad R_2 = P(2.4), \qquad (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = (P(0.4), P(2.6), P(0.8), P(3.3)),$$

前两个 $Q$ 点位于 $L$ 组中。普通除子具有点 $D_a = P(d_a)$、$1 \le a \le 3$，其中

$$(d_1, d_2, d_3) = (0.1 + 0.15i,\ 0.7 + 0.25i,\ 1.4 + 0.2i).$$

这里，punctures 处的局部参数为 $s_k = x - x(R_k)$、$1 \le k \le 2$。参考截面构造为在三个 $D_a$ 处有极点且首项向量为单位向量的有理函数

在两个 punctures 处。对偶微分由其在 $D_a$ 处的零点及首项部分 $-ds_k/s_k^2$确定；其余三个零点给出对偶除子。通过有理插值求得$h_L$，$h_M$、权重和相位常数。随后，Generapy 阿贝尔映射和 θ 喷流用于求出方程 (3.3) 和 (3.7)。完整构造见 `code/multipoint_BA_genus2_check.py`。

我们将三次哈密顿量 $H$ 与对易四阶迹哈密顿量$H_{4,\ \nu_0}$ =tr(X $+\nu_0$D)$^4/4$ $\nu_0 = 0.17$进行比较。亚纯时间归一化以两个简单极点的主部作为阿贝尔方向的代表。在归一化阿贝尔坐标中，它们的轨迹分别为 $z = z_0 - it\boldsymbol{U}$ 和 $z = z_0 - it_4\boldsymbol{U}_4$，其中

$$\boldsymbol{U} \simeq \begin{pmatrix} 0.05678315 \\ 0.49752720 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{U}_4 \simeq \begin{pmatrix} -0.07762562 \\ -3.74854497 \end{pmatrix}, \qquad \det(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}_4) \simeq -0.17423333.$$

因此，这两个流在同一条曲线上沿着相互独立的雅可比方向演化，且初始模态相同。在 32 位精度下，解析模态变化率以及铅笔的左右特征向量的缩放残差均低于 $2 \times 10^{-29}$；四阶迹模态变化率的残差低于 $3 \times 10^{-26}$。第三组中彼此不同的相位也满足命题 3.5 的双有理性判据。这是一般情形下亏格七系统的一个亏格二层级，谱缺陷为五。

图3将每个流的 65 个直接 BA 样本与稠密的独立 RK4 解进行比较。三次流积分至 $t = 8$，步数分别为 8000 和 16000；四阶迹流积分至 $t_4 = 1.5$，步数分别为 32000 和 64000。表中报告了全部 24 个模态上的最大缩放误差，以及哈密顿量、幂荷和移位谱迹的积分漂移：

| 检查 | 三次流 | 四阶迹流 |
|---|---|---|
| 直接 BA 与精细四阶龙格–库塔法 | $9.1 \times 10^{-9}$ | $5.5 \times 10^{-8}$ |
| BA 积分漂移 | $6.3 \times 10^{-15}$ | $8.8 \times 10^{-15}$ |
| 四阶龙格–库塔法积分漂移 | $3.0 \times 10^{-10}$ | $3.5 \times 10^{-9}$ |

在 40 位数字精度下，解析残差进一步减小；精度记录和轨迹均随代码一并给出。

### 5.2.3 第二归一化矩阵-KP 时间

使用相同的二阶属 $L = M = N = 2$ 数据，我们利用局部谱坐标 $h_L$检验命题 4.1。$h_L^2$ 的主部决定了第二 KP 时间。有理修正将这些二阶极点化为单极点时间代表元，同时保留其端点和 puncture 相位。完整的二阶 θ 喷流独立于 KP 微分方程给出了 BA 时间导数。对于 $\mathcal{L}_{\mathrm{KP}} = \partial + V\partial^{-1} + O(\partial^{-2})$，第二微分生成元为 $\mathcal{B}_2 = \partial^2 + 2V$。我们比较其普通源方程和对偶源方程、其双线性核导数，以及三个状态下的全部 24 个模态速率：

| 检查 | 最大缩放残差 |
|---|---|
| 普通/源二阶时间方程 | $3.8 \times 10^{-31}$ |
| 对偶/源二阶时间方程 | $2.3 \times 10^{-31}$ |
| 二阶时间核恒等式 | $6.5 \times 10^{-31}$ |
| 所有规范速率：谱与规范匹配 | $2.3 \times 10^{-30}$ |

规范比较首先解决阿贝尔方向匹配问题，并确定初始状态下的规范速率，随后在另外两个状态下检查相同的系数。脚本`code/matrix_kp_hierarchy_check.py` 记录了这些系数、主部修正以及192项精确的环境源括号检查。其存储结果生成了所显示的表格。

### 5.3 从典范初始模态重构 BA

我们从典范初始模态出发，以独立于那些基于指定的 BA 数据初始化的示例来测试逆构造。

为检验定理 3.6 的逆向构造，从 $L=M=1$、$N=2$ 和独立的规范初始数据出发，

$$b_1^L=\tfrac{1}{7},\quad b_1^M=-\tfrac{2}{9},\quad (b_1^N,b_2^N)=(\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{5}),$$

$$\mathsf{X}(0)=\begin{pmatrix} -2/7 & (7+2i)/10 & (9+2i)/10 & (4-i)/10 \\ (4-3i)/10 & 4/9 & (6+i)/10 & (-3+5i)/10 \\ -(5-4i)/10 & -(8-2i)/10 & 1/3 & 0 \\ -(-2+3i)/10 & -(2+4i)/10 & 0 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

非对角项通过方程 (2.12) 指定全部五组典范模对；选择这些模对时不使用 BA数据。精确符号计算得到 $F(\lambda,\ \nu)=A(\lambda)\nu^2+B(\lambda)\nu+C(\lambda)$。其判别式 $B^2-4AC$ 是一个六次无平方因子多项式，因此 $y^2=B^2-4AC$ 的光滑紧化具有亏格二。这里的 $g=G=2$：这检验的是一般情形下的谱亏格，没有超额缺陷。

将 $a=(0,\ 0,\ 1,\ 1)^{\mathsf{T}}$代入方程 (3.26) 的伴随矩阵归一化，根据 $a^{\mathsf{T}}\mathrm{adj}(\lambda\mathrm{Id}-\mathrm{L})a$的零点确定普通除子和对偶除子。左右锚点收缩中哪一个为零，可区分这两类零点。两个除子的次数均为三。分支点变换 $x=(\lambda-e)^{-1}$, $Y=yx^3$ 为 Generapy 的周期和阿贝尔映射求值给出一个奇次模型。映至无穷远点的分支点确定数值阿贝尔基点及其黎曼特征。punctures 和除子随此变换一同传递。BA参数保持为 $s_k=-1/\nu$，因此在 $x$ 坐标图中重新计算其主系数和有限部分。其参考截面和对偶微分在进行任何 theta 求值之前，就以代数方式恢复每个初始模态。随后，我们演化重构出的 theta 公式，并将全部十个解析速率与规范场进行比较：

| 检查 | 最大缩放误差 |
|---|---|
| 初始模态的代数恢复 | $2.6\times10^{-41}$ |
| 留数权重的恢复 | $3.3\times10^{-41}$ |
| 参考特征线与核恢复 | $5.8\times10^{-41}$ |
| 全部十种解析模态变化率 | $3.9\times10^{-40}$ |
| 直接 BA 与精细四阶龙格–库塔法的比较 | $4.1\times10^{-13}$ |

四阶龙格–库塔法的比较使用了覆盖 $0\le t\le 2$ 的 65 个直接 BA 样本，步数分别为 1600 和 3200。误差比为 16。01。脚本 `code/ba_genus2_converse_check.py` 及其存储记录包含精确特征多项式、恢复出的两个除子以及完整的重构数据。

Generapy 对数学恒等式的测试，以及对已发表结果的复现，均记录在其代码仓库和文档 [27] 中。

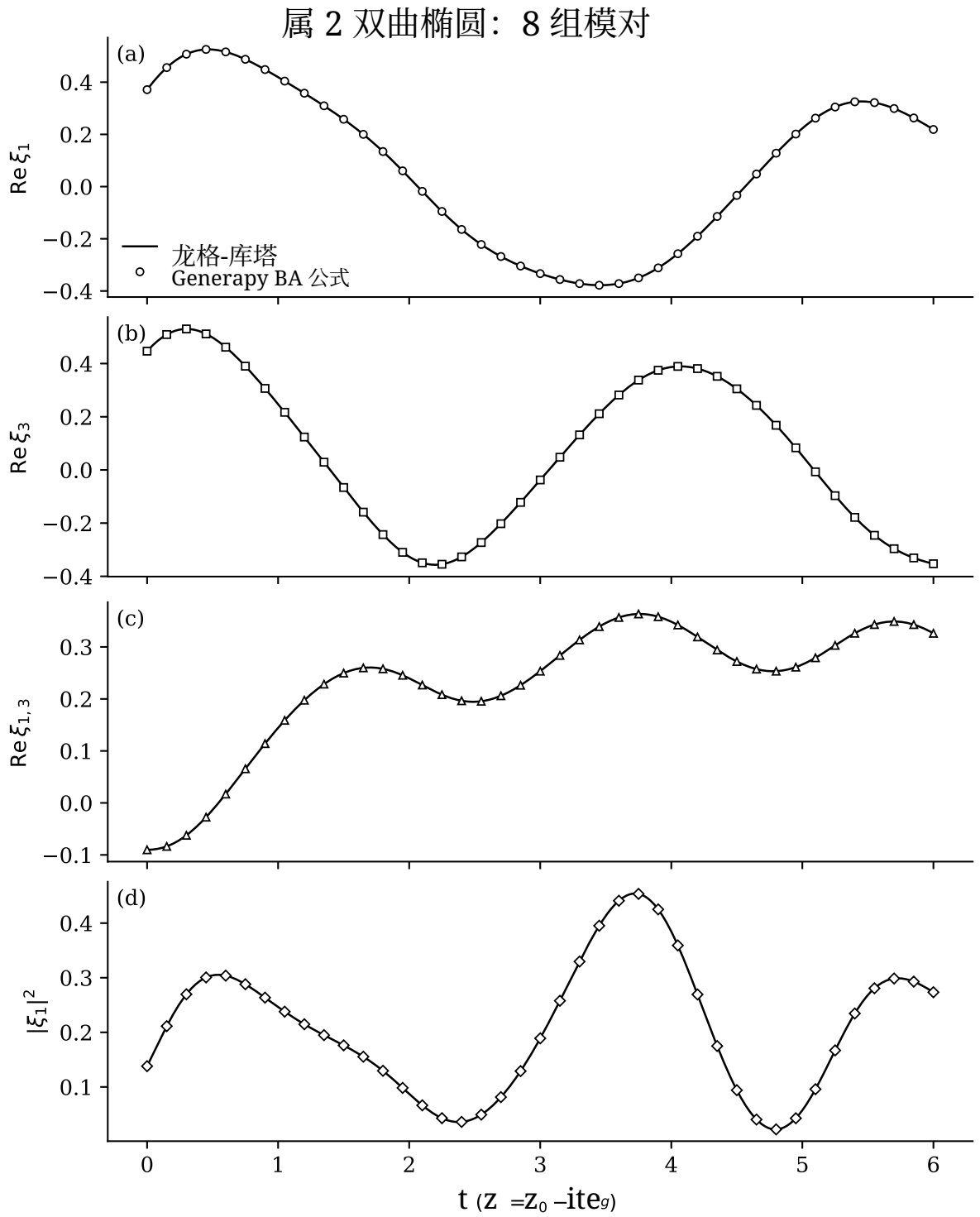


图 1：方程 (5.1) 上的属 2 双曲椭圆实现。各面板显示 $\mathrm{Re}\,\xi_1$、$\mathrm{Re}\,\xi_3$、$\mathrm{Re}\xi_{1,\,3}$ 和 $|\xi_1|^2$。空心标记表示直接进行的 Generapy BA 求值；黑色实线表示由 $H_0$ 和 $z = z_0 - ite_2$通过括号–$i$生成的正则方程的独立龙格–库塔解。

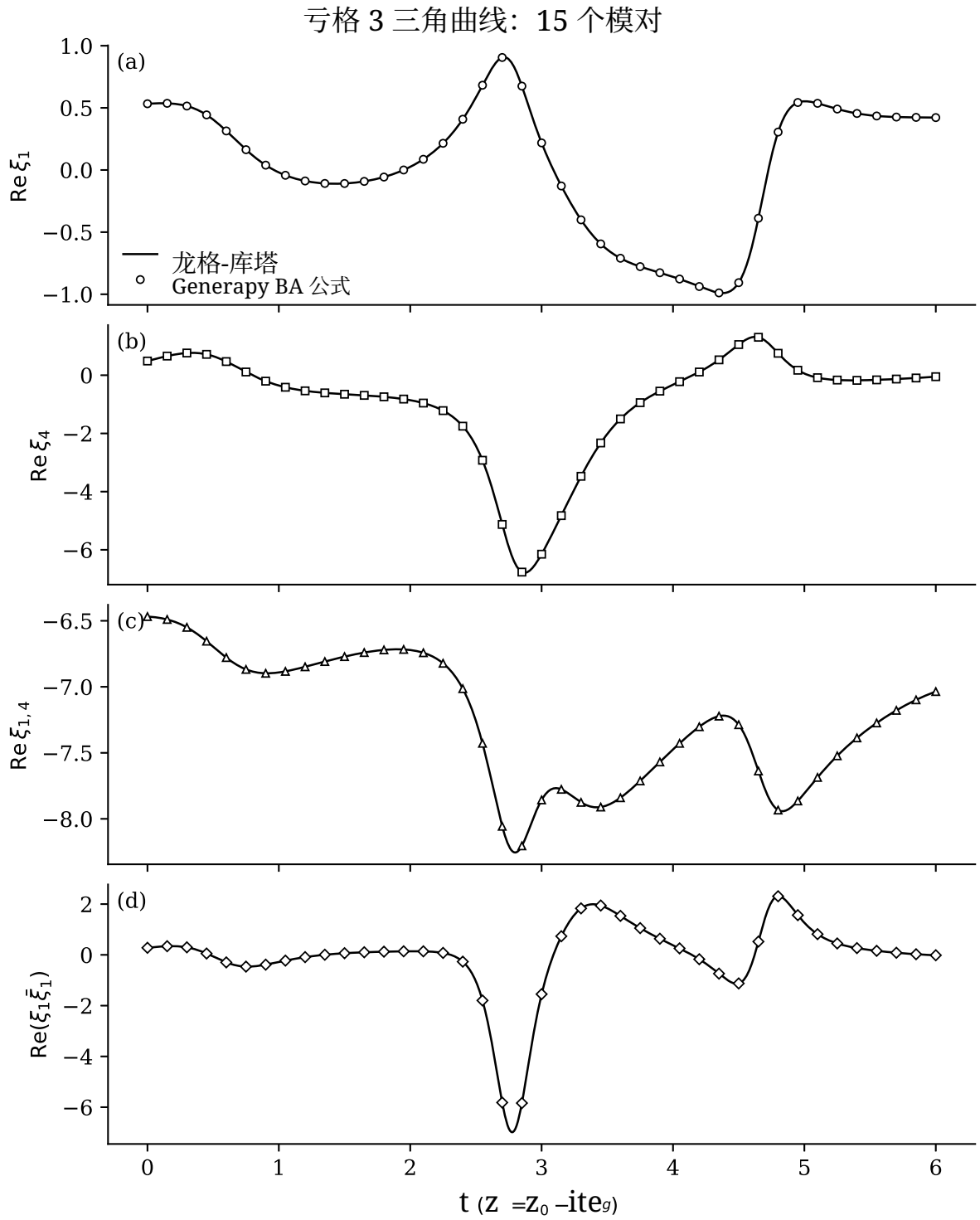


图 2：方程 (5.2) 上的亏格三三角曲线实现。各面板显示 Re $\xi_1$、Re $\xi_4$、 $\overline{\text{Re}}\xi_{1,\ 4}$ 和 Re($\xi_1\xi_1$)。空心标记表示直接的 Generapy BA 求值；实心黑线表示由 $H_0$ 使用括号$-i$和 $z = z_0 - ite_3$ 生成的正则方程的独立龙格–库塔解。

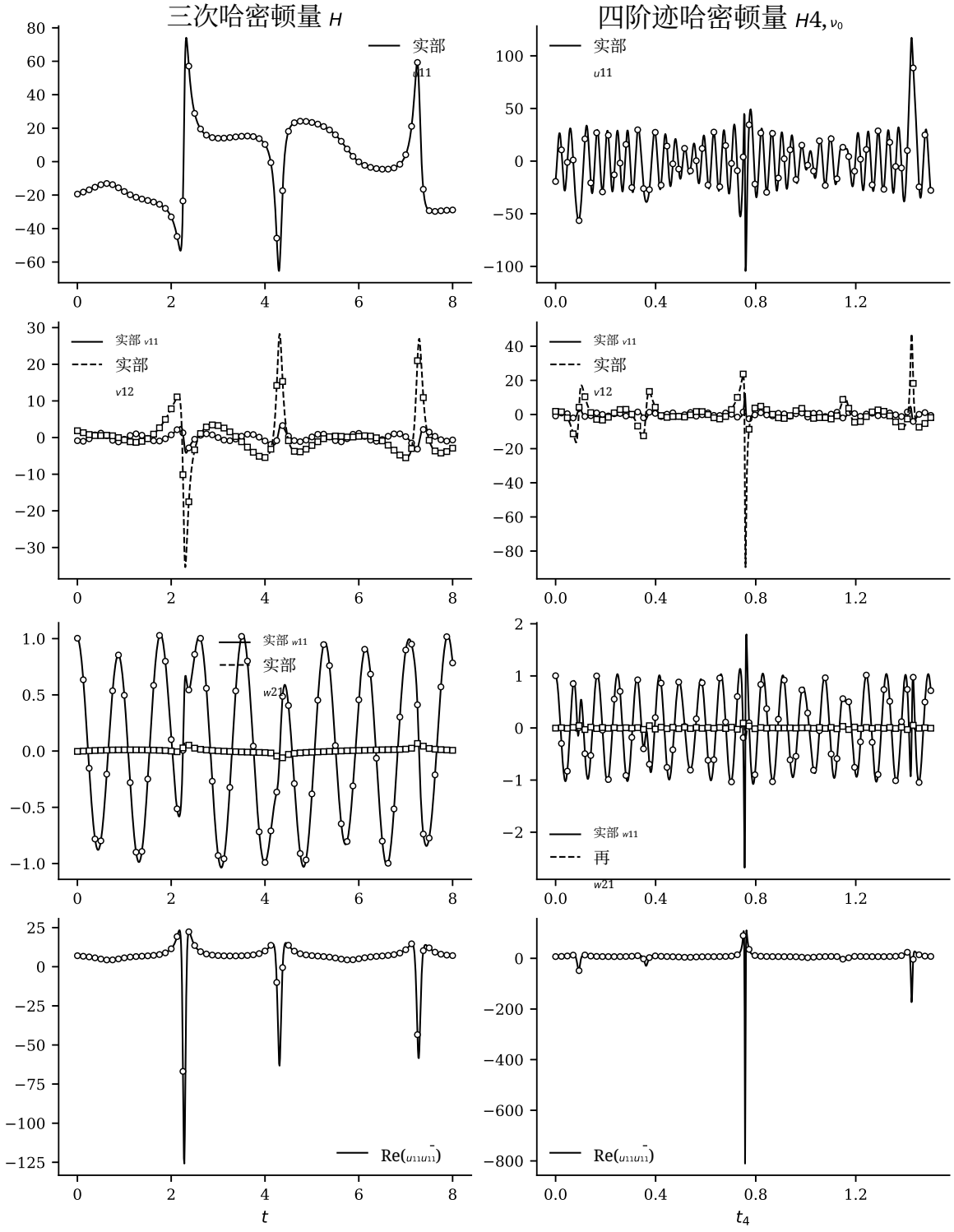


图3：亏格二实现，其中为 $L = M = N = 2$。左：三次哈密顿量 $H$；右：对易四阶迹哈密顿量 $H_{4,\ \nu_0}$，其中为 $\nu_0 = 0.17$。每一列使用相同的初始模态。各面板显示 Re $u_{11}$、两个按穿孔点索引的模态 Re $v_{11}$ 和 Re $v_{12}$、Re $w_{11}$ 和 Re $w_{21}$，以及 Re$(u_{11}\bar{u}_{11})$。空心圆和方块是基于 Generapy 的直接 BA 求值；黑色实线和虚线是独立的四阶龙格 – 库塔法轨迹。带横线模态是独立的哈密顿伙伴。

# 6 讨论

我们将函数对应与哈密顿对应结合起来，以阐明共同的 BA 框架，并指出后续研究方向。

典型多波系统为标量 BA 动力学提供了一个正则模型，其相互作用结构不受曲线类型影响。对于任意正的 $L$，$M$，$N$，双向对应关系与高阶流结果赋予了这一解释实质内容：指定的 BA 求值可由三次方程容纳，泛型正则初始模态能够恢复其 BA 数据，而谱哈密顿量则在双有理谱层上提供每一个阿贝尔方向以及模态相位。这一对应关系促使我们进一步研究该系统的哈密顿层级，以及不同曲线族上的约化。第 2.1.1 节中的不变实形式适用于实初始数据；而明确的曲线与除子实性判据，尤其是针对衰减型 BA 实现的判据，仍有待建立。

实现判据将指定曲线数据转化为正则多波动力学：留数方程确定相容的权重，而对侧群的插值取值则确定线性相位率。核引理给出了这一构造背后的微分恒等式。第 4.2 节中的矩阵约束 KP 对应将这些恒等式归纳为任意 $N$ 对应的两个可交换有限秩算子。选定局部谱坐标后，即可确定它们的 KP 时间与源演化；谱哈密顿量和幂荷则在每个双有理 BA 层上给出其典范生成元。单点情形恢复出标量算子及其守恒系数。命题 3.5 和定理 3.6 则确定所实现的曲线，并从完整三数组系统的泛型正则初始模态重构 BA 数据。

与 Adams、Harnad和Hurtubise 的比较，为同一矩阵演化提供了两种相容的观点。他们的典范动量映射提升包含四次相互作用，而三次模态使用矩阵泊松铅笔的常数项。完整纤维上的 BA 卷积将双线性提升转化为端点 BA 函数，并将这种相互作用阶数的变化表示为 Sylvester位移关系。这一联系补充了预设点实现：它解释了直接三次模态如何融入既有的谱构造，同时保留简单的典范括号。

对于完整的三矩阵族，谱积分和主矩积分为每个固定相位分布给出完整刘维尔计数，详细证明见附录 D。第 3.3.2 节中的对称性解释区分了模规范、等相位基变换，以及在谱除子坐标中转化为平移的流。这些不同的对称性说明，单靠幂荷未必能补足积分数量。

在单点超椭圆特化中，Mumford投影与从复场模态到 Stokes变量的转换有一个有用的光学类比。在椭圆可解光学系统中，Stokes变量描述闭合的投影动力学，并确定重构单个模态所需的对数速率。Mumford变量在此处发挥类似作用：幂及其导数确定运动除子多项式；这些多项式的演化是闭合的，其取值则确定方程 (4.39) 中的 BA 对数速率。BA公式明确给出了模重构，剩余的规范选择则由常数归一化 $c_k$ 承载。因此，这两种描述都将投影动力学与底层复模态的演化联系起来。Stokes投影略去了一个共同的光学相位，而此处的 Mumford投影略去了 $K$ 独立的倒数模态规范。

更广泛的谱族还带来了更多函数论问题。其标记平面模型描述了不同的覆盖次数以及无穷远分支；特殊层和对合产生低亏格正规化与 Prym 描述。BA 构造适用于这些曲线类型：一个 puncture 给出向量–矩阵–向量成员，而多个 punctures 则通过共同的标量 BA 基和秩-$N$ 核导数产生完整数组

。puncture 的数量与亏格或另一种平面表示中的无穷远点数量无关。奇异谱层和非半单矩块还需要超出一般逆命题的极限构造。

对易谱哈密顿量为相互作用提供了多时间视角。定理 3.8 通过有限亚纯插值计算它们的穿孔时间和常数模态相位。在双有理层面上，有限个谱系数生成每一个阿贝尔方向。标量演化选择其中一个方向，而高阶哈密顿量则在同一模态空间上引入高阶混合项。这使 BA 表示中的平移与规范对称性变得明确。与特定方向相关的相互作用阶数及其组合，为依据 BA 恒等式构造多项式哈密顿量提出了进一步的问题。

## AI 辅助与验证

作者构思了该研究项目，确立了其数学目标并指导了研究发展。OpenAI GPT 6.1 Sol（高推理能力）协助开展数学探索与证明推导、稿件准备、符号与数值验证代码编写以及图表生成。Anthropic Fable 5.2（高推理能力）对稿件进行了迭代审阅。作者对所提出的论证和结果进行了批判性评估，选定了所呈现的材料，并对最终稿件负责。

这项工作通过反复的数学审查、对选定恒等式和相容条件进行精确的符号计算，以及比较使用 Generapy 直接计算 BA 函数与单独采用龙格–库塔积分求解哈密顿方程的数值结果，进行了检验。按照第 5 节所述，对超椭圆和三重覆盖例子进行了测试，其中还包括用于评估数值收敛性的细化计算。验证代码、参数和记录的结果均随手稿一并提供。

Generapy 也是作者在 AI 辅助下开发的。其自动化验证包括：针对已知数学恒等式的单元测试；连接曲线、阿贝尔积分、θ 函数和克莱因函数各组件的集成测试；以及对已发表文献结果的数值复现。相关测试和基于文献的例子可在 Generapy 仓库及文档中找到 [27]。

## A. Menyuk、Chen 和 Lee 的比较

[43] 中的受限共享模哈密顿量和更广泛的波构造，与此处采用的正则方程形成两种不同的比较。

### A.1 受限共享模族

将共享模写作 $p$，其余各对写作 $q_j,\ r_j$、$1 \le j \le R$。将共轭量复化为独立伴随项。采用括号 $\{p,\ \bar{p}\} = -i$，并对其他各对使用相同约定，则 [43, 方程 (1.1)] 中的作用–角哈密顿量为

$$H_{\mathrm{MCL}} = \sum_{j=1}^{R} \left[ \frac{\Delta_j}{2}(q_j\bar{q}_j - r_j\bar{r}_j) - \frac{\epsilon_j}{2}(p\bar{q}_j r_j + \bar{p} q_j \bar{r}_j) \right]. \tag{A.1}$$

这里，$\Delta_j$ 是频率失配，$\epsilon_j$ 是耦合。对于等耦合族$\epsilon_j = \epsilon$，令

$$u = p, \quad \bar{u} = \bar{p}, \qquad v_j = i\bar{q}_j, \quad \bar{v}_j = iq_j, \qquad w_j = r_j, \quad \bar{w}_j = \bar{r}_j, \qquad 1 \le j \le R.$$

这是一个复正则变换：例如，$\{i\bar{q}_j, iq_j\} = -i$。它给出

$$H_{\mathrm{MCL}} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{R}\Delta_j(v_j\bar{v}_j + w_j\bar{w}_j) + \frac{i\epsilon}{2}\sum_{j=1}^{R}(uv_jw_j + \bar{u}\bar{v}_j\bar{w}_j). \tag{A.2}$$

因此，受限模型的相互作用数组为（$L$，$M$，$N$）$=(1,\ 1,\ R)$，相差一个常数耦合和时间归一化。根据这一复数对应规则，其原始物理实形式变为 $\bar{v}_j = -v_j^*$、$\bar{u} = u^*$ 和 $\bar{w}_j = w_j^*$；变换后的耦合为虚数。这不同于对所有伙伴数组施加实际共轭的约定。

Menyuk、Chen 和 Lee 为这一受限族给出了 $2R+1$ 个彼此独立的对易积分完备集，其中包括失配相 coincident mismatches [43, 第 III 节]。他们的第 V 节还假设失配相等以及耦合相等：共享功率是椭圆的，其相位是第三类椭圆积分，而其余模态则通过求积得到。

## A.2 更广义的矩阵波构造

他们的方程 (2.13) 在其实性约化形式中归因于 Ablowitz 和 Haberman，具体为

$$\alpha_{hi}\partial_x N_{hi} = \partial_t N_{hi} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq h,i}}^{d} N_{hj}N_{ji}(\alpha_{ji} - \alpha_{hj}), \qquad 1 \le h, i \le d, \quad h \neq i. \tag{A.3}$$

对于不相等的源谱常数，$\alpha_{hi} = (c_i - c_h)/(i(a_i - a_h))$；若 $a_h = a_i$, $c_h = c_i$相同，则可分别选择。第四节采用 $N_{hi}(x,\ t) = N_{hi}(t)e^{\Delta_{hi}x}$ 与 $\Delta_{hi} = \Delta_{hj} + \Delta_{ji}$，得到线性速率和二次模相互作用。

下面将其约化为任意大小的正则系统。使用方程 (2.12) 中的 $H_0$ 模态，并写作

$$\widetilde{\mathsf{X}} = E + Z, \qquad E = \mathrm{diag}(-2\mathsf{B}_L, -2\mathsf{B}_M, \mathsf{B}_N).$$

矩阵 $Z$ 的对角块为零。在三组指标上选取对称系数

$$\alpha_{LM} = 0, \qquad \alpha_{LN} = 1, \qquad \alpha_{MN} = -1,$$

并令每组内部的系数为零。这些系数分别由各组上的复化源参数$a = i,\ -i,$ 0 和 $c = 0,$ 0, 1 得出。定义 $(T_0)_{hi} = \alpha_{hi}Z_{hi}$。我们的 $H_0$ 方程给出 $iZ = [E + Z, T_0]$。代入

$$N(x,t) = ie^{-ixE}Z(t)e^{ixE} \tag{A.4}$$

代入方程 (A.3) 后，恰好得到这个交换子：当 $x = 0$时，$\partial_x N_{hi} = (E_{hh} - E_{ii})Z_{hi}$，且二次求和为 $-[Z, T_0]_{hi}$。指数速率 $\Delta_{hi} = -i(E_{hh} - E_{ii})$满足所需的一致性条件。与第三组相同的系数保持对角块为零。此比较适用于所有正的 $L$，$M$，$N$；方程（2.9）给出对称相位约定。

方程 (A.4) 中的代换，将我们依赖相位的方程与 Menyuk、Chen 和 Lee 的矩阵波框架联系起来。相对于已刊出的 1991 年哈密顿量，独立的相位参数构成一种常对角扩展，详见附录 B。在本文中，这些参数的作用是由指定的 BA 数据确定。其明确的完全积分计算针对受限的共享模族；本文采用的适用于任意规模的正则计数见定理 2.2，并在附录 D 中证明。

# B 与 Jiang 和 Rauch-Wojciechowski 的比较

我们给出源字典，以区分已刊出的哈密顿量与其常对角相位扩展，并确定 BA 实现所采用的约定。

在 [31, 方程 (2.7)–(2.12)], 中，取行数为 $L+M$，列数为 $N$。选择符号矩阵 $\mathsf{S}_{\mathrm{row}} = \mathrm{Id}_{L+M}$、$\mathsf{S}_{\mathrm{col}} = \mathrm{Id}_N$和 $\mathsf{S}_{\pm} = \mathrm{diag}(\mathrm{Id}_L, -\mathrm{Id}_M)$。将原变量写作

$$\tau = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad \varpi = \begin{pmatrix} 0 & P \\ Q & 0 \end{pmatrix}, \qquad E = \mathrm{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N), \tag{B.1}$$

其中 $a$为 $L\times N$， $b$为 $M\times N$， $P$为 $L\times M$。将原有厄米关系中的共轭项视为独立变量，即可将这些关系复化。模态变量变换为

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{n\ell} &= a_{\ell n}, & \bar{\tilde{w}}_{n\ell} &= \bar{a}_{\ell n}, & & 1 \le n \le N, \quad 1 \le \ell \le L, \\ \tilde{v}_{mn} &= \bar{b}_{mn}, & \bar{\tilde{v}}_{mn} &= b_{mn}, & & 1 \le m \le M, \quad 1 \le n \le N, \\ \tilde{u}_{\ell m} &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} Q_{m\ell}, & \bar{\tilde{u}}_{\ell m} &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} P_{\ell m}, & & 1 \le \ell \le L, \quad 1 \le m \le M. \end{aligned} \tag{B.2}$$

事实上， $a, b$ 上的原始括号的符号分别为 $+1, -1$，而 $\{P_{\ell m}, Q_{ji}\} = 2\delta_{\ell i}\delta_{mj}$。将原泊松括号乘以 $-i$，即可得到我们的时间约定；等价地，对于原来的时间， $t_{\mathrm{J}} = -it$。随后，在方程 (B.2) 下，这些括号变为方程 (2.2)。方程 (B.1) 中的字母 $b$ 表示原始模态数组，以区别于固定系数$b_\ell^L, b_m^M$。

Jiang 和 Rauch-Wojciechowski 印出的哈密顿量变为

$$H_{\mathrm{source}} = \mathrm{i}\ \mathrm{tr}\left(\varpi\tau\bar{\tau}^{\mathsf{T}} + \tau E\bar{\tau}^{\mathsf{T}}\right). \tag{B.3}$$

这正是方程（2.8），其中对所有所标示的指标均有 $b_\ell^L = b_m^M = 0$ 和 $b_n^N = \mathrm{i}\epsilon_n$。特别地，对于一般的列数 $N$，其中的三个矩形相互作用数组已经存在，同时还包括列相位参数 $\epsilon_n$。

为得到方程（2.3）中的相位参数，保留一个常对角上块

$$Z = \mathrm{diag}(\delta_1^L, \dots, \delta_L^L, \delta_1^M, \dots, \delta_M^M) \tag{B.4}$$

在原始铅笔和哈密顿量中:

$$\begin{aligned} X_{\mathrm{J},Z}(\mu) &= \begin{pmatrix} Z+\varpi & \tau \\ \bar{\tau}^{\mathsf{T}} & E \end{pmatrix} + \mu\,\mathrm{diag}(-\mathsf{S}_{\pm}, 0_N), \\ H_Z &= \mathrm{i}\ \mathrm{tr}\left[(\varpi - Z)\tau\bar{\tau}^{\mathsf{T}} + \tau E\bar{\tau}^{\mathsf{T}}\right]. \end{aligned} \tag{B.5}$$

采用相同的时间约定，原始时间矩阵给出 $iX_{\mathrm{J},\ Z} = [X_{\mathrm{J},Z}, T_{\mathrm{J}}]$。根据方程（B.2），这就是 $H_0$，其中

$$b_\ell^L = -\frac{\mathrm{i}}{2}\delta_\ell^L, \quad 1 \le \ell \le L, \qquad b_m^M = -\frac{\mathrm{i}}{2}\delta_m^M, \quad 1 \le m \le M, \qquad b_n^N = \mathrm{i}\epsilon_n, \quad 1 \le n \le N. \tag{B.6}$$

因此，常对角扩展是明确的： $Z = 0$ 恢复了印出的 1991 年哈密顿量，而任意的 $Z$ 则提供独立的外部相位系数。应用公式（2.9）后，便得到对称哈密顿方程（2.3）。对于 $N = 1$, $Z = 0$ 迫使所有基本相位系数彼此相同；任意的 $Z$ 则适用于方程（3.14）。

原始铅笔与第 2.2.1 节的矩阵铅笔之间的关系为

$$\mathrm{i}X_{\mathrm{J},Z}(\mu) = \mathsf{G}\,\widetilde{\mathsf{L}}(-\mathrm{i}\mu)^{\mathsf{T}}\mathsf{G}^{-1}, \qquad \mathsf{G} = \mathrm{diag}(\mathrm{Id}_L, \mathrm{Id}_M, \mathrm{i}\mathrm{Id}_N). \tag{B.7}$$

~这里的 T 表示普通转置。矩阵 L 由方程 (2.12) 和 (2.13) 构造而成，使用第 2.1.2 节中定义的 $\tilde{\boldsymbol{u}}$、$\tilde{\boldsymbol{v}}$、$\tilde{\boldsymbol{w}}$ 的解 $H_0$，并采用相同的常数对角矩阵。$H$ 的对称相位解与 $H_0$ 的零-$u$-相位解给出了具有如下关系的矩阵铅笔

$$\mathsf{L}(\nu,t)=\mathsf{S}(t)\widetilde{\mathsf{L}}(\nu,t)\mathsf{S}(t)^{-1},\qquad \mathsf{S}(t)=\operatorname{diag}(e^{-it\mathsf{B}_L},e^{it\mathsf{B}_M},\mathrm{Id}_N). \tag{B.8}$$

因此，$H$ 和 $H_0$ 沿着由公式（2.9）关联的解具有相同的谱多项式。

定理 2.2 的完备性结论也适用于 $Z=0$，对任意行数 $L+M$ 和列数 $N$，且 $E$的元素可以重复或彼此不同。Jiang 和 Rauch-Wojciechowski 证明了二行和三行的情形，并通过扰动，在二行情形的列参数重合时求得额外的积分 [31, 第 II.C 节，公式（2.23）]。相同相位的矩矩阵和插入引理为所有这些规模和重合情形提供了统一的独立性论证。

# C 与 Adams、Harnad 和 Hurtubise 的比较

我们列出源数据和 BA 求值对应表，以明确第 4.1 节中的四次–三次对应。

我们采用 [1, 公式（2.1）]中的多项式流约定。他们的矩阵维数 $r$ 就是我们的 $d=L+M+N$，并取多项式次数为一。将一个源极点平移到原点后，记

$$\widehat{\mathsf{L}}(\nu)=\widehat{\mathsf{X}}+\nu\mathsf{D},\qquad \frac{d\widehat{\mathsf{L}}}{dv}=[\widehat{\mathsf{B}},\widehat{\mathsf{L}}],\qquad \widehat{\mathsf{B}}=(\widehat{\mathsf{L}}^{,2}/\nu)_+=\nu\mathsf{D}^2+\mathsf{D}\widehat{\mathsf{X}}+\widehat{\mathsf{X}}\mathsf{D}. \tag{C.1}$$

下标 $+$ 表示 $\nu$ 中的多项式部分。源复时间为 $v=it$，随后对 $e^{-it\mathsf{K}_{\mathrm{ph}}}$ 进行共轭变换。等价地，在物理四次多项式约定方程 (4.3) 中，令 $s=-t$。我们的铅笔的时间矩阵为

$$\mathsf{T}=\mathsf{B}-\mathsf{K}_{\mathrm{ph}}-\nu\mathrm{Id}_d. \tag{C.2}$$

标量末项不影响交换子。X 的各块恰好与方程 (2.12) 中的相同；明确地，

$$u_{\ell m}=X_{\ell,L+m}/\sqrt{2},\quad \bar{u}_{\ell m}=X_{L+m,\ell}/\sqrt{2},\quad v_{mn}=X_{L+m,L+M+n},\quad \bar{v}_{mn}=-X_{L+M+n,L+m},$$

$$w_{n\ell}=-X_{L+M+n,\ell},\qquad \bar{w}_{n\ell}=X_{\ell,L+M+n},\qquad 1\le\ell\le L,\ 1\le m\le M,\ 1\le n\le N.$$

这给出了尺寸不等的情形以及 $N>1$ 的对应表，而不改变矩阵演化。在矩映射约定中，X $=-\mathsf{G}^{\mathsf{T}}\mathsf{F}$，将源双线性矩阵的符号反转会反转相应的谱坐标。

### BA 评价映射

[1] 的第 2c–2g 节和第 4 节从正规化曲线上的线丛重构多项式矩阵及其典范提升。方程 (4.17)、(4.21)–(4.22) 和 (4.25)–(4.26) 中的规范化截面，经由 (2.24)–(2.25) 求值后，得到以下具体比较。使用一个源极点，其具有由 $d$ 个点组成的完整正则纤维，并为其满秩矩层选取适配的行基。在正号约定 $\mathsf{B}=\mathsf{G}^{\mathsf{T}}\mathsf{F}$ 中，取

$$\mathsf{Y}=-\mathsf{D},\qquad \mathsf{L}_{\mathrm{src}}=(\Lambda-\alpha)\mathsf{Y}+\mathsf{B},\qquad \det(W\mathrm{Id}_d-\mathsf{L}_{\mathrm{src}})=0.$$

令 $R(P)$ 表示源 theta 公式中出现的公共固定亚纯截面；它在无穷远点 $P_h$ 处有简单零点。令 $T(P)=(\Lambda(P)-\alpha)R(P)$，其零点为

纤维点 $Q_i$。在相容的固定局部标架中，借助 $R'_h = \partial_{t_h} R(P_h)$ 和 $\Lambda'_i = \partial_{s_i}\Lambda(Q_i)$，其求值公式化为

$$F_{ih} = \frac{R(Q_i)}{R'_h}\mathscr{S}_z(Q_i, P_h), \qquad G_{ih} = \frac{W(Q_i)R'_h}{\Lambda'_i R(Q_i)}\mathscr{S}_z(P_h, Q_i), \quad 1 \le i, h \le d. \tag{C.3}$$

这里省略了固定的指数型 BA 规范。它们在中间点处相消，并在每个乘积中留下端点差分率。源行矩特征值为 $W(Q_i)$。由于 $\partial_{s_i} T(Q_i) = \Lambda'_i R(Q_i)$ 且 $T(P_h) = R'_h$，方程 (4.11) 给出

$$B_{hk} = \frac{R'_h}{R'_k}(y_h - y_k)\mathscr{S}_z(P_h, P_k) \quad (h \neq k), \qquad B_{hh} = c_h. \tag{C.4}$$

因此，固定的对角相似变换消去 $R'_h/R'_k$，双线性和变为单个端点的$\widehat{\phantom{x}}$ $\widehat{\phantom{x}}$BA 比值。这里 B $=$ –X 且 $\mathsf{L}_{\mathrm{src}} =$ –L，其中 $\nu = \Lambda - \alpha$；因此，它的纵坐标是 L 的$\widehat{\phantom{x}}$的相反数。这确定了将正号矩映射转换为我们的负号约定时，首项矩阵和纵坐标的符号。在重复斜率组内，$y_h = y_k$，因此在这个适配基中，其非对角项消失；常数 $c_h$ 给出其对角元。即使首项斜率重复，正规化仍能区分各个无穷分支。

选取远离 BA 本质纤维的 $\alpha$，使这些求值都是正则的。平移源谱坐标只会使多项式生成元相差一个对角常数项：

$$(\mathsf{L}_{\mathrm{src}}^{,2}/(\Lambda - \alpha))_+ - (\mathsf{L}_{\mathrm{src}}^{,2}/\Lambda)_+ = \alpha\mathsf{Y}^2 = \alpha\mathsf{D}^2.$$

其作用是另一种固定的对角相位共轭。这些公式适用于正则谱轨迹，且选定的纤维非分歧、求值数据非特殊的情形。它们在方程和 BA 函数层面上确定了四次提升与三次实现；定理 3.3 和推论 3.4 中的有限指定点插值及完备化判据，则在本文中直接展开。

# D 任意相位下的完整刘维尔计数

我们利用第 2.2.3 节中定义的交换代数$A$ 证明定理 2.2。论证每次插入一个指标。在每一步中，新的正则对分解为两类方向：一类由谱不变量检测，另一类由等相位矩不变量检测。引理 D.1 为这两组方向构造互补的独立导数；其最后的循环向量检验表明，这两类方向可以同时出现。

该引理在模坐标中构造了一个独立性证书。若矩阵 Z 的大小为 $a$，则向量 $v$ 是循环的，当且仅当 $v$，Z$v$，……，Z$^{a-1}v$ 张成 $\mathbb{C}^a$。

**引理 D.1** (增加矩阵维数)。 将 $L$、$M$或 $N$ 中的一个增加 *1*。假设新相位在该组中已出现 $r$ 次，而其中另有 $c$ 个指标具有不同的相位。设另一组的大小为 $m_1$、$m_2$，并令 $n = m_1 + m_2$。假设 $r \ge n$ 或

$$|m_1 - m_2| \le r + c + 1. \tag{D.1}$$

如果旧代数 $A$ 提供完整刘维尔计数，则扩大的代数也提供完整刘维尔计数。该插入提供 $n - \min(r, n)$ 个新的独立谱函数，以及$\min(r, n)$ 个关于主矩的新独立函数。

证明。 将新的出射元素写成一行 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^{1\times n}$，将入射元素写成一列 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$。我们在 $\boldsymbol{a} = 0$处计算雅可比簇。于是，扩大的行列式等于$(\lambda - e - s\nu)F(\lambda,\ \nu)$，其中 $e$，$s$ 分别是新的截距和斜率。更一般地，边框行列式

等于该乘积减去一个关于新的出射元素和入射元素的双线性项。乘以 $\lambda - e - s\nu$ 是多项式系数上的单射线性映射。因此，固定的左逆可将每个旧谱系数提升为扩大后系数的函数。在 $\boldsymbol{a} = 0$ 处，该函数关于旧坐标的导数保持不变，关于新的入射列的导数则为零。旧的主矩也具有相同性质。我们还需要 $n$ 个关于旧坐标的导数为零、且在 $\boldsymbol{a}$上的导数彼此独立的函数。

证书将具有如下分块形式

$$\frac{\partial(\text{lifted old functions}, \text{new functions})}{\partial(\text{selected old coordinates}, \boldsymbol{a})} = \begin{pmatrix} J_{\text{old}} & * \\ 0 & J_{\text{new}} \end{pmatrix}.$$

这里 $J_{\text{old}}$ 已经非奇异。我们在 $\mathbb{C}^n$ 的一个直和项上取矩导数，并在其补空间上取谱导数，由此构造 $J_{\text{new}}$。只需在一点处证明这一点，因为该子式非零是一个扎里斯基开条件。

将旧指标依次排列为 $r$ 相位相同的指标、同一原始群中相位不同的指标，以及 $n$ 外部的指标：

$$\mathsf{X} = \begin{pmatrix} e\mathrm{Id}_r & 0 & \mathsf{F} \\ 0 & E_C & \mathsf{F}_C \\ \mathsf{G} & \mathsf{G}_C & X_{\text{out}} \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{W} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{s - s_h}\right)_{h \text{ outside}}. \tag{D.2}$$

这里 $e\mathrm{Id}_c - E_C$ 可逆。增长的矩块及其扩张为

$$\mathsf{J} = \mathsf{FWG}, \qquad \mathsf{J}_+ = \begin{pmatrix} \mathsf{J} & \mathsf{FW}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a}\mathsf{WG} & \boldsymbol{a}\mathsf{W}\boldsymbol{b} \end{pmatrix}.$$

主矩差 $\Delta_k = (\operatorname{tr} \mathsf{J}_+^k - \operatorname{tr} \mathsf{J}^k)/k$ 在 $\boldsymbol{a} = 0$处消失，并且

$$\mathrm{d}\Delta_k|_{\delta\boldsymbol{a}} = \delta\boldsymbol{a}\,\mathsf{WGJ}^{k-2}\mathsf{FW}\boldsymbol{b}, \qquad 2 \le k \le \min(r, n) + 1. \tag{D.3}$$

牛顿恒等式将阶数为 $r+1$ 的旧迹表示为前 $r$ 个迹的函数，因此每个 $\Delta_k$ 都属于扩大的代数。第一个差值 $\Delta_1$的导数为 $\delta\boldsymbol{a}\mathsf{W}\boldsymbol{b}$。我们不需要它：所示的高阶差值已经张成矩方向，而谱函数将补足其补空间。

首先假设 $0 < r < n$。一般情况下，$\mathsf{J}$ 可逆。令

$$\Pi = \mathrm{Id}_n - \mathsf{WGJ}^{-1}\mathsf{F}, \qquad \mathbb{C}^n = \ker \mathsf{F} \oplus \operatorname{im}(\mathsf{WG}). \tag{D.4}$$

若 $\mathsf{FW}\boldsymbol{b}$ 对 $\mathsf{J}$ 是循环的，则方程（D.3）中的 $r$ 向量张成第二个直和项。对于另一个直和项，使用 $R(\nu) = F_+(e + s\nu,\ \nu)$ 的系数，其中 $F_+$ 是扩大的行列式。这些系数在 $\boldsymbol{a} = 0$ 处为零。令 $\mathsf{K}(\nu) = (e + s\nu)\,\mathrm{Id} - \mathsf{X} - \nu\mathsf{D}_{\text{old}}$，由舒尔补可得

$$R(\nu) = -\boldsymbol{a}\,\operatorname{adj}(\mathsf{K}(\nu))_{\text{out,out}}\boldsymbol{b}, \qquad \mathrm{d}R(\nu)|_{\delta\boldsymbol{a}} = -\delta\boldsymbol{a}\,\det\mathsf{K}(\nu)\,(\mathsf{K}(\nu)^{-1})_{\text{out,out}}\boldsymbol{b}.$$

消去 $c$ 个不同相位的指标后，剩下一个外部块 $\nu\mathsf{W}^{-1} + \mathsf{C}$，其中

$$\mathsf{C} = e\mathrm{Id}_n - X_{\text{out}} - \mathsf{G}_C(e\mathrm{Id}_c - E_C)^{-1}\mathsf{F}_C, \qquad \mathsf{R}_0 = \Pi\mathsf{WC}|_{\ker\mathsf{F}}, \quad \boldsymbol{c} = \Pi\mathsf{W}\boldsymbol{b}.$$

剩余的线性方程给出 $(\mathsf{K}^{-1})_{\text{out},\ \text{out}}\boldsymbol{b} = (\nu\mathrm{Id} + \mathsf{R}_0)^{-1}\boldsymbol{c}$。为计算其行列式，首先消去 $c$ 不同相位的指标，将外部各行乘以 $\mathsf{W}$，并使用方程 (D.4) 中的分解。等相位行通过 $\mathsf{J}$ 与 $\operatorname{im}(\mathsf{WG})$ 配对，在 $\ker\mathsf{F}$ 上留下$\nu\mathrm{Id} + \mathsf{R}_0$。因此

$$\det\mathsf{K}(\nu) = (-1)^r \det(e\mathrm{Id}_c - E_C)\det(\mathsf{W}^{-1})\det\mathsf{J}\,\det(\nu\mathrm{Id} + \mathsf{R}_0).$$

该前因子非零且与 $\nu$无关。因此，如果 $\boldsymbol{c}$ 对 $\mathrm{R}_0$是循环的，新谱导数的系数向量张成 $\ker \mathrm{F}$。这些系数是$\boldsymbol{c}$、$\mathrm{R}_0\boldsymbol{c}$、……、$\mathrm{R}_0^{n-r-1}\boldsymbol{c}$的三角组合。这样的系数共有 $n-r$ 个，因为 $\deg R \le n-r-1$。当 $r=0$ 时，使用 $\Pi = \mathrm{Id}_n$ 并省略矩差。

我们验证这两个循环性条件都能成立。选取 F，使其选出 $r$ 外部坐标方向；再选取 G，使 J 为对角矩阵且对角元互不相同且非零。于是 $\Pi$选出其余方向。条件（D.1）允许这些方向的外部组大小相差至多 $c+1$。在两个组之间将它们配对，至多留下 $c+1$ 个未配对指标。在这个测试点，$\mathrm{R}_0$ 是若干块的直和

$$\begin{pmatrix} d_h & a_h \\ b_h & d'_h \end{pmatrix} \quad \text{and scalar blocks} \quad d_j + \delta_j .$$

这些 $d_h$、$d'_h$、$d_j$由外部相位确定；乘积 $a_h b_h$则是自由的。因此，每个配对块都可以有两个不同的特征值，且避开所有已选取的特征值。对于除至多一个未配对指标外的所有指标，使用一个相位不同的指标，通过项 $-\mathrm{G}_C(e\mathrm{Id}_c - E_C)^{-1}\mathrm{F}_C$ 调整其对角元；这些就是独立平移量 $\delta_j$。因此，至多只剩一个标量特征值固定不变，而全谱可以取为互异。这说明了大小假设的作用：即使所有未配对的外部相位都相同，$c$ 可用的平移量仍能区分至多 $c+1$ 个未配对方向中的除一个以外的所有方向。最后，$\boldsymbol{b} \mapsto (\mathrm{FW}\boldsymbol{b}$、$\Pi\mathrm{W}\boldsymbol{b})$ 是到$\mathbb{C}^r \oplus \ker \mathrm{F}$ 上的可逆映射，因此可以独立选取这两个循环向量。所需条件是非空的扎里斯基开条件。

如果 $r \ge n$，选择 F，G，使得 $\mathrm{R} = \mathrm{WGF}$ 具有互异的非零特征值。方程（D.3）中的 $n$ 向量现在是 $\mathrm{R}^{k-1}\mathrm{W}\boldsymbol{b}$、$2 \le k \le n+1$，并且对于循环 $\mathrm{W}\boldsymbol{b}$，张成 $\mathbb{C}^n$。不需要新的谱函数。

在这两种情况下，开条件都与旧的雅可比行列式非零轨迹相交。旧坐标导数和新的 $\boldsymbol{a}$ 导数构成一个分块三角雅可比矩阵，其对角子式非零。这证明了插入步骤。

□

## D.1 完整计数的证明

定理 *2.2* 的证明。 对于 (1，1，1)，两个二次谱系数给出相互独立的幂组合。第三个系数包含定向三角形乘积之和，而在幂固定时该和会变化。对于每个相位三元组，它们的秩都是三。

满足三角不等式的正尺寸三元组可以通过减小其中最大的项化归为 (1，1，1)；前一个三元组仍满足这些不等式。反向执行此过程，将指标按其等相位块中的顺序追加到末尾。在每一步 $|m_1 - m_2| \le r + c$，这比引理 D.1 中的充分界 $r + c + 1$ 更强。

如果某一组的规模超过其余各组规模之和，则先利用该组规定相位块的初始段，构造一个平衡三元组，使其规模等于该总和。再附加剩余指标。增长中的组规模为 $r + c \ge m_1 + m_2$，因此每一步都适用该引理。每次插入都会增加 $n$ 个正则对和 $n$ 个独立对易函数。这就证明了完整计数。由于 $H$ 与它们对易，因此它局部上是一个完备集的函数，并且在 $\mathrm{d}H \neq 0$ 的任何位置都可以替换一个合适的成员。 □

## D.2 重复相位处的谱亏损

证明还明确计算了谱亏损。对于每个等相位块 $B$，令 $r_B = |B|$ 表示其原始群之外的大小，并设

$$k_B = \min(r_B, o_B), \qquad q_B = r_B k_B - \frac{k_B(k_B+1)}{2}. \tag{D.5}$$

一般谱秩为 $p-\sum_{B\in\mathcal{B}} q_B$；证明给出了 $\sum_{B\in\mathcal{B}} q_B$ 个额外的线性无关主矩函数，其中$\mathcal{B}$ 是所有等相位块的集合。对于下界，每次插入都会使其所在块的 $q_B$ 增加 $\min(r,n)$，并且沿着所选构造，不改变其他块的 $q_B$ 。谱导数提供互补的 $\min(r,n)$ 个方向。对于上界，$\mathrm{J}_B$ 具有 $k_B$ 个不同的非零特征值和一个重数为 $r_B-k_B$ 的半单零特征值，因此其共轭轨道的维数为 $2q_B$。由矩函数生成的切空间的辛秩因此为 $2\sum_{B\in\mathcal{B}} q_B$。对易谱场位于其辛正交补中，而该补空间的最大各向同性维数为 $p-\sum_{B\in\mathcal{B}} q_B$。

例如，当 $L=M=2$、 $N=1$ 且各外群内部的相位均为常相位时，会有两个大小为二的等相位块，每个块含有 $q_B=1$。谱秩为六；再加上两个主矩函数，即构成八个积分。

## E 不同相位系数的显式谱积分

对于每个群内互不相同的相位系数，完备积分组可直接由谱值及其导数选取。这给出了定理 2.2 的一个显式特化。选取点由铅笔的固定对角元确定。在 $(\nu,\ \lambda)$ 平面上，对角因子 $\lambda-X_{hh}-\nu D_{hh}$ 在直线 $\lambda=X_{hh}+\nu D_{hh}$、$1\le h\le d$ 上为零。由方程 (2.12) 和 (2.13)，可得以下三族

$$\begin{aligned}
&\lambda=\nu-2b_\ell^L, && 1\le \ell\le L,\\
&\lambda=-\nu-2b_m^M, && 1\le m\le M,\\
&\lambda=b_n^N, && 1\le n\le N.
\end{aligned}\tag{E.1}$$

因此，一族不过是一列彼此平行的直线：有 $L$ 条斜率为 1 的直线， $M$ 条斜率为−1的直线，以及 $N$ 条水平线。 $\lambda$ 截距是在 $\nu=0$ 处的取值，即 $X_{hh}$；三组截距分别为 $-2b_\ell^L$， $-2b_m^M$， $b_n^N$。

一个交点 $q=(\lambda_q,\ \nu_q)$ 由这些相位系数确定。在该处计算谱行列式，可得到演化模态的函数 $F(q)=F(\lambda_q,\ \nu_q)$。根据命题 2.1，这些值是守恒的且彼此对易。每个族内的截距各不相同，因此至多只有来自每个族的一条直线经过任意一点，所以交点涉及两条或三条直线。

**定理 E.1**。 假设三个相位系数列表中的每一个

$$b_1^L,\dots,b_L^L;\qquad b_1^M,\dots,b_M^M;\qquad b_1^N,\dots,b_N^N$$

都是两两不同的。在每个两线交点 $q$ 处，取 $F(q)$；在每个三线交点处，取 $F(q)$ $\partial_\lambda F(q)$ $\partial_\nu F(q)$。这些 $p=LM+MN+NL$ 函数是一般独立的对易第一积分。因此，对于任意正的 $L$、 $M$、 $N$，方程 (2.3) 是刘维尔可积的。完备局部集合可以在 $\mathrm{d}H\neq 0$ 的任意位置包含 $H$ 。

证明。 不同族的直线共有 $LM+MN+NL$ 对。通常，每一对直线对应一次求值。若三条直线相交，则它们两两相交于同一点；该点处的函数值及其两个一阶谱导数提供三个函数。因此，总数仍为 $p$。对命题 2.1 关于固定谱参数求导，可知这些导数也彼此可交换。

为证明独立性，只需找到一个非零雅可比子式。将 $p$ 上三角非对角模态条目 $x_{hi}=X_{hi}$ 作为列坐标，其中 $1\le h<i\le d$ 位于不同的块中；将所提出的积分作为行。在测试状态 $X_{hi}=0$、$X_{ih}=\epsilon$处计算此雅可比，并固定所有相位系数。这里， $\epsilon$ 是用于选取测试状态的参数。我们得到首项行列式为 $\epsilon\to 0$。

记 $l_h = \lambda - X_{hh} - \nu D_{hh}$、 $1 \le h \le d$，并令 $R_q$为$1 \le h \le d$上非零 $l_h$（$q$）的乘积。在两线交点处，两个对角因子为零。一个关于 $x_{hi}$ 呈线性的一项行列式项，可通过与其反向元素 $\epsilon$ 配对而消去这两个零点；仅当边连接这两条线时，才会得到 $-\epsilon R_q$ 。所有其他列都以更高阶趋于零。因此，将这一行除以 $\epsilon$后，留下的首项只有一个非零元素 $-R_q$。

在一个三线交点处，三个对角因子均为零。 $F(q)$对应的雅可比行首先检测到一个阶数为 $\epsilon^2$的三边环。谱导数会消去一个零因子，因此$F_\lambda(q)$和 $F_\nu(q)$检测到阶数为 $\epsilon$的双边环。将三个相关列依次排列为 $L$–$M$、$L$–$N$、 $M$–$N$。分别将这三行除以 $\epsilon^2$， $\epsilon$， $\epsilon$后，对行列式求导可得首项块

$$R_q \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det = -R_q^3 \neq 0. \tag{E.2}$$

对应交点之外的边上的首项元素均为零，因为仍有一个对角因子为零。因此，完整的归一化雅可比矩阵是分块对角的：每个两线交点对应一个非零标量块，每个三线交点对应一个可逆的三乘三块。其行列式非零。因此，未缩放的子式是 $\epsilon$中的一个非零多项式，这证明模态相空间的一个稠密开集上各量相互独立。由于 $H$ 与这个完备集对易，它局部是这些积分的函数；凡是$\mathrm{d}H \neq 0$之处，都可以用它替换一个适当的成员。

□

可在完备集中保留这 $d-1$ 个独立功率荷，剩下

$$G = p - d + 1 = LM + MN + NL - L - M - N + 1.$$

个谱积分。除三线交点外，有一种简单的群对称选取方法：将模态视为完全三部图的边，任取一棵生成树，并保留其 $G$ 条补边上的求值。事实上，在证明所用的测试状态下，荷的微分构成一个加权关联矩阵，其树子式非零；互补谱行则给出其余的非零对角块。在三线交点处，从合流集合中选取微分行即可得到所需的补空间。对于 $N=1$，计数变为 $L+M$ 个幂荷和 $LM$ 个谱积分。

# F 标记谱曲线分类的细节

我们证明第 2.3 节中关于标记曲线的论述，包括存在性与重构，以便为谱讨论中采用的固定尺寸分类提供依据。

## F.1 正则谱曲线的存在性

对于任意正的 $L$， $M$， $N$，只要相位允许变化，正则轨迹便非空。为此，可选取截距 $e_h$，使其在每个组内互不相同，从而直线 $\lambda - e_h - s_h\nu = 0$、$1 \le h \le d$ 不存在三重仿射交点。令 $X = \mathrm{diag}(e_h) + \varepsilon A$，并使 $A$ 和 $A_{hi}A_{ih} \neq 0$ 中不同组之间的对角块为零。在 $\varepsilon = 0$ 处，曲线由这些直线组成。在斜率不同的直线 $h$， $i$ 的交点附近，将它们的方程作为局部坐标 $x$，$y$。通过舒尔补，可得以下表达式（相差一个非零因子）：

$$xy - \varepsilon^2 A_{hi}A_{ih} + O\big(\varepsilon^2 x, \varepsilon^2 y, \varepsilon^3\big).$$

其临界点处有 $x, y = O(\varepsilon^2)$，其中所示的非零二次项排除了小的非零 $\varepsilon$下出现奇点的可能。对三个无穷远点进行爆破后，它们各自不同的

切线分支便彼此分离。它们与例外曲线横截相交，因此当 $\varepsilon$足够小时，在这些点处始终保持光滑。由紧致性可知，不会再有其他奇点。在这个爆破曲面上，中心纤维是由直线组成的连通既约并，因此邻近的光滑纤维也是连通的，进而不可约。因此，足够小的一般耦合会给出正则曲线。光滑性和不可约性是开条件，所以它们在参数空间的一个非空扎里斯基开子集上成立。

## F.2 标记曲线刻画的证明

定理 *2.4* 的证明。 从 1 到 2 的蕴含关系由命题 2.3 得出。展开式 (2.31) 给出 3：减去或加上 $\nu$ 会消去所指分支族上的极点。这两个仿射坐标生成函数域，因为平面模型与$C$双有理等价。

反过来，3 中的极点条件意味着 $\nu$ 恰好有 $d$ 个单极点，每个标记点处各有一个。函数 1、$\lambda$、$\nu$定义了一个到平面的映射，且没有基点：在每个标记点处， $\lambda$、$\nu$ 中至少有一个具有单极点，而在这些点之外，常数截面非零。该映射是双有理的，因为 $\lambda$、$\nu$ 生成 $\mathbb{C}(C)$。像的次数为 $d$，因为这些函数的一个一般线性组合具有 $d$ 个极点。三次极点消去将标记分支置于 $[1:1:0]$, $[-1:1:0]$, $[0:1:0]$。它们的单极点使这些分支光滑，并且与无穷远点横截。亏格假设迫使它们的奇点亏格亏损总和恰好等于命题 2.3 中的总和。因此它们的切线彼此不同，且不存在其他奇点，从而证明了 2。

最后，2 中的平面模型可以重构为铅笔 $\mathrm{X}+\nu\mathrm{D}$。谱线丛构造 [8] 将乘以 $\lambda$ 表示为关于 $\nu$ 的仿射矩阵函数。其首项矩阵的特征值为 $1$，$-1$，$0$，重数分别为 $L$，$M$，$N$。不同的分支截距使三个常对角块可以对角化；其余六个块恰好是方程 (2.12) 中不受限制的模态块。F.3 节给出了这一构造，并证明了 1。

□

## F.3 从谱曲线重构铅笔

我们证明定理 2.4 中所用的逆命题。该构造遵循谱线丛方法 [8, §1], ，其中指定的无穷远分支决定首项矩阵的重复特征值。

设 $C$ 为定理 2.4 陈述 2 中平面模型的正规化。选取射影坐标，使公共直线为 $\tau=0$，其上标记的三个平面点为$[1:1:0]$、$[-1:1:0]$, $[0:1:0]$。横截性使 $\nu$ 有 $d$ 个单极点。因此

$$\pi=\nu: C\longrightarrow\mathbb{P}^1,\qquad \pi^{-1}(\infty)=\mathcal{D}_\infty=\mathcal{D}_L+\mathcal{D}_M+\mathcal{D}_N$$

是一个有限的次数为-$d$ 的映射，且 $\lambda$的极点由$\mathcal{D}_\infty$界定。

取一个次数为 $G-1$ 的线丛$\mathcal{E}$，使得 $H^0(C,\mathcal{E})=0$，并令$\mathcal{L}=\mathcal{E}(\mathcal{D}_\infty)$。这样的$\mathcal{E}$在 theta 除子之外均存在。由黎曼–罗赫定理，推前 $\pi_*\mathcal{L}$ 是 $\mathbb{P}^1$ 上的秩为-$d$ 的向量丛，次数为零。此外，投影公式给出

$$H^0\big(\mathbb{P}^1,(\pi_*\mathcal{L})(-1)\big)=H^0(C,\mathcal{E})=0.$$

每个 $\mathbb{P}^1$ 上的向量丛都分解为线丛。由消失性可知，这些线丛的次数均不大于零，而它们的次数之和为零。因此 $\pi_*\mathcal{L}\simeq\mathcal{O}^d$。

乘以 $\lambda$现在定义了

$$\mathcal{O}^d\longrightarrow\mathcal{O}^d(1).$$

在某个平凡化下，它是一个仿射铅笔 $\mathsf{X}+\nu\mathsf{D}$。在 $\nu=\infty$ 处，其首项算子是在无穷远点上各个独立纤维上的乘以 $\lambda/\nu$。其取值为 $1$，$-1$，$0$，重数分别为 $L$，$M$，$N$；因此，经过一次常数基变换，可使 $\mathsf{D}=\operatorname{diag}(\mathrm{Id}_L,\ -\mathrm{Id}_M,\ 0_N)$。特征多项式就是平面方程：在一般的 $\nu$上，该算子的特征值为 $\lambda$ 的 $d$ 值。

$\mathsf{X}$ 的三个对角块的特征值就是分支截距。普通重数保证每个块内的截距各不相同，因此可以通过分块对角基变换将这三个块同时对角化，同时保持 $\mathsf{D}$ 不变。将它们的元素记为 $-2b_\ell^L$、$-2b_m^M$、$b_n^N$，其中 $1\le\ell\le L$、$1\le m\le M$、$1\le n\le N$。剩余六个块不受限制。为它们赋予方程 (2.12) 中的因子和符号后，得到三个模态矩阵及其独立伴随项，从而得到方程（2.3）的初始数据。这就证明了所需的实现。

### F.4 超椭圆判据的证明

命题 *2.5* 的证明。 两个单元素群给出了方程 (2.35) 中的二次映射，从而证明了充分性。对于必要性，将三个大小排序为 $a\le b\le c$，并设 $b\ge 2$。其中两个生成函数的次数分别为 $a+b$ 和 $a+c$，且

$$G-(a+c-1)=(a+b-2)c+(a-1)(b-2)>0.$$

因此，这两个次数都不超过 $G$。在亏格为 $G$ 的超椭圆曲线上，任何次数不超过 $G$ 的亚纯函数都可通过次数为二的超椭圆映射分解。事实上，否则该映射与该函数将生成函数域，而 Castelnuovo– Severi 不等式将给出 $G\le\deg(f)\,-1$；参见 $[32,\text{定理 }14]$。因此，两个生成函数都将属于超椭圆映射的有理函数域，这就产生了矛盾。 □

## G 含重复相位的 GenericBA 重构

本附录为任意正的 $L,M,N$ 以及任意固定相位分布补充定理 3.6 中的正则性步骤。基只能在等相位块内变换，从而保持典范括号和哈密顿量不变。

### G.1 常数典范基与非活跃方向

对于尊重相位块的常数可逆矩阵 $\mathsf{S}_L,\mathsf{S}_M,\mathsf{S}_N$，相应的正则变换为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}&\mapsto \mathsf{S}_L\boldsymbol{u}\mathsf{S}_M^{-1},\quad & \bar{\boldsymbol{u}}&\mapsto \mathsf{S}_L^{-\mathsf{T}}\bar{\boldsymbol{u}}\mathsf{S}_M^{\mathsf{T}},\\
\boldsymbol{v}&\mapsto \mathsf{S}_M\boldsymbol{v}\mathsf{S}_N^{-1},\quad & \bar{\boldsymbol{v}}&\mapsto \mathsf{S}_M^{-\mathsf{T}}\bar{\boldsymbol{v}}\mathsf{S}_N^{\mathsf{T}},\\
\boldsymbol{w}&\mapsto \mathsf{S}_N\boldsymbol{w}\mathsf{S}_L^{-1},\quad & \bar{\boldsymbol{w}}&\mapsto \mathsf{S}_N^{-\mathsf{T}}\bar{\boldsymbol{w}}\mathsf{S}_L^{\mathsf{T}}.
\end{aligned}\tag{G.1}$$

它们通过相应的三块矩阵对铅笔进行共轭变换。对于组 $A$中的一个等相位块$B$，守恒矩为

$$\mathsf{Q}_B=\sum_{\substack{h=1\\h\neq A}}^{3}\frac{\mathsf{X}_{B,h}\mathsf{X}_{h,B}}{d_A-d_h},\qquad (d_1,d_2,d_3)=(1,-1,0).$$

这里，$\mathsf{X}_{B,\,h}$ 的行位于 $B$，列则遍及整个 $h$组。守恒性由块共轭对称性的动量映射得出；这些矩也给出了无穷远点处的二阶谱修正。因此，它们的对角化基在时间上保持不变。

对于大小为 $r$ 的块，令 $n$ 表示三个组中各自的外部方向数：$n=M+N$、$L+N$ 或 $L+M$。将非零斜率分母吸收到

入射耦合中，其矩可写为 FG，其中 F 的大小为 $r \times n$，G 的大小为 $n \times r$。如果 $r > n$，则一般而言 GF 可逆，且

$$\mathbb{C}^r = \operatorname{im} \mathsf{F} \oplus \ker \mathsf{G} = \operatorname{im}(\mathsf{FG}) \oplus \ker(\mathsf{FG}). \tag{G.2}$$

这两个子空间是常定的。在适配基下，第二个直和项中的 $r - n$ 个方向没有入射耦合，也没有出射耦合。它们始终为零，只贡献谱因子 $(\lambda - e_B - s_B\nu)^{r-n}$，其中 $e_B, s_B$ 分别是它们的截距和斜率。将它们删去后重复上述过程。该过程最终会得到正的活跃维数 $L_a, M_a, N_a$，使得每个剩余块的大小都不超过其外部方向数。逆向进行基变换即可恢复所有原始坐标。

这种约化具有一般性：任意最大秩耦合对都可以表示为一个嵌入的活跃耦合对（额外方向为零），再经过分块基变换得到。因此，活跃耦合数据并未被限制在额外的例外代数子集上。

## G.2 活跃谱曲线的正则性

**命题 G.1.** 对于每个固定的相位分布，一般的活跃初始模态对应一条不可约谱曲线，该曲线在仿射平面上光滑，其正规化具有彼此不同的解消后的无穷远分支和非特殊标量 *BA* 除子。每个活跃矩块都具有简单非零谱。正规化的亏格为

$$G_a = L_aM_a + M_aN_a + N_aL_a - L_a - M_a - N_a + 1 - \sum_{h=1}^{3} \sum_{j=1}^{m_h} \frac{|B_{h,j}|(|B_{h,j}| - 1)}{2}, \tag{G.3}$$

其中 $B_{h,\,1}$、……、$B_{h,\,m_h}$ 是活跃群 $h$ 中的等相位块。通常除子和对偶多点除子的次数为 $G_a + N_a - 1$，并给出 $N_a$ 个截面的规范化基。

证明。 我们分别检验仿射曲线、其连通性以及无穷远点数据。一般光滑性和谱线丛对应是标准的 [25, 8, 1]。显式的耦合与插入论证验证了这些正则性假设对该模态空间固定的重复相位配置均成立。对于大小为 $r \le n$ 的块，乘积 FG 可以具有任意互异的非零特征值：选择 F 以选取 $r$ 外部方向，再令 G 给出预先指定的对角乘积即可。因此，最大耦合秩和简单的非零矩谱是非空开条件。块的数量有限，且这些条件在不可约活跃模态空间的某个非空开集上同时成立。

为证明仿射光滑性，令 $\mathsf{M} = \lambda\mathrm{Id} - \mathsf{X} - \nu\mathsf{D}$。若右核向量支撑于某个原始群，则根据对角方程，它必支撑于某个等相位块。该块上的入射耦合映射是单射，因此该向量为零。左核也有类似结论。在余秩为 $q$ 的点处，分别将右核和左核的基放入矩阵 R 的列和矩阵 S 的行中，其中 R 是 $d \times q$ 矩阵，S 是 $q \times d$ 矩阵。横截于矩阵秩分层的导数为

$$\delta\mathsf{X} \longmapsto \mathsf{S}\,\delta\mathsf{X}\,\mathsf{R}.$$

此映射是满射：若存在非零的 $q \times q$ 湮灭子 Z，则 RZS 将与所有块外变分正交，因此必为分块对角矩阵。该分块对角矩阵的任一非零列都会构成一个不允许出现的群支撑的右核向量。因此，非对角参数与每个秩分层横截相交。余秩至少为二的集合余维至少为四，而 $(\lambda,\ \nu)$ 仅提供两个变量。对一般参数而言，这类点不存在。余秩一行列式超曲面是光滑的，而其到参数空间的投影具有一般光滑性，因此仿射纤维光滑 [25, 第三章]。

为保证不可约性，每次插入一个指标，同时确保块的大小不超过其外部维数。这样的顺序是存在的。若有两个分块组，则重新标记后，其当前大小满足 {v1} 和 {v2}，这是不可能的，因为第三个组为正。

若只有一个组含有待处理指标，则其最终活动界允许进行下一次插入。(1，1，1) 基例具有一个不可约特化

$$(\lambda - e_N)(\lambda - \nu - e_L)(\lambda + \nu - e_M) - \delta_0 = 0, \qquad \delta_0 \neq 0.$$

作为关于 $\nu$ 的二次式，其在 $\lambda = e_N$ 处有一个奇数阶极点的判别式，因此不是平方 e.

对于一次插入，在新外向耦合为零时，特征多项式为 $\ell F_{\mathrm{old}}$，其中$\ell = \lambda - e - s\nu$。假设有 $r$ 个旧指标与新指标具有相同的相位，并且有 $n$ 个方向位于其组之外。消去其组中的其他指标，得到

$$\deg_{\nu} F_{\mathrm{old}}(e + s\nu, \nu) = n - r.$$

对于 $r > 0$，首项系数是旧矩块行列式乘以一个非零常数；对于 $r = 0$，它是非零的外部首项行列式。允许的插入满足 $r + 1 \le n$，因此旧曲线在一个有限点处与新直线相交。在该点，光滑旧铅笔的余秩为一，且两个核中的外部分量均非零。选取新的耦合向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，使其支撑在外部指标上，从而 $\boldsymbol{a}\mathrm{adj}(\mathsf{M}_{\mathrm{old}})\boldsymbol{b}$ 在该处不为零。扰动行列式为

$$F_{\varepsilon} = \ell F_{\mathrm{old}} - \varepsilon \boldsymbol{a}\,\mathrm{adj}(\mathsf{M}_{\mathrm{old}})\boldsymbol{b}.$$

使互素首一因子 $\ell$，$F_{\mathrm{old}}$ 发生变形的因式分解，会迫使第一次扰动属于 $(\ell,\ F_{\mathrm{old}})$，因而在每个交点处都为零。这一障碍也排除了在有限代数参数扩张之后进行因式分解的可能性。首一性和高斯引理保证因子系数在 $\varepsilon = 0$ 处保持整性。经过有限分歧参数变换后，它们具有幂级数展开。令 $\varepsilon = \tau^{k}$，并假设首一因子专化为 $\ell$ 和 $F_{\mathrm{old}}$。这些是唯一的非平凡特殊因子，而首一性保证它们在专化下保持正的 $\lambda$-次数。将它们写成

$$G = \ell + \sum_{m \ge 1} \tau^{m} a_m, \qquad J = F_{\mathrm{old}} + \sum_{m \ge 1} \tau^{m} b_m, \qquad \deg_{\lambda} a_m < 1, \quad \deg_{\lambda} b_m < \deg_{\lambda} F_{\mathrm{old}}.$$

对于 $m < k$，对 $m$ 进行归纳可得 $a_m F_{\mathrm{old}} + b_m \ell = 0$。互素性迫使 $\ell$ 整除 $a_m$，因此根据次数界有 $a_m = b_m = 0$。在阶数 $k$ 处，同一个系数方程会将 $-\boldsymbol{a}\mathrm{adj}(\mathsf{M}_{\mathrm{old}})\boldsymbol{b}$ 置于理想 $(\ell,\ F_{\mathrm{old}})$ 中，这与它在所选交点处的非零值相矛盾。因此，分数次参数幂无法消除这一障碍。归纳可证，对于每种活动相位配置，一般几何不可约性都成立。

最后，将守恒矩块对角化。其单特征值 $\vartheta_i$ 给出无穷远展开

$$\lambda = s_B \nu + e_B + \vartheta_i / \nu + O(\nu^{-2}), \qquad 1 \le i \le |B|.$$

同一组中不同相位块的分支接触阶为一，而同一块中的分支接触阶为二。它们在正规化上是彼此不同的光滑点。将这些接触与异相属 $L_a M_a + M_a N_a + N_a L_a - L_a - M_a - N_a + 1$ 进行计数，可得方程 (G.3)。同样的计算也包括第三组中的解消分支。

对于特征线步骤，令 $t = 1/\nu$ 并考虑解析矩阵 $\mathsf{D} + t\mathsf{X}$。斜率在零阶处分裂，不同截距出现在阶数为 $t$处，而等相位块中的矩特征值出现在阶数为 $t^{2}$ 处。在固定的矩基中，解析后的特征向量构成矩阵 $\mathsf{V}(t)$，且 $\mathsf{V}(0)$ 可逆。因此，无穷远点处的分支模可通过可逆解析矩阵与原自由矩阵模相对应。在有限点处，光滑仿射曲线的余秩为一，因此其谱模已是线丛。于是，正规化分支线丛的推前为 $\mathcal{O}^{L_a + M_a + N_a}$。

减去完整的无穷纤维，得到一个向量丛 $\mathscr{E}$，其推前为 $\mathcal{O}(-1)^{L_a+M_a+N_a}$；其零阶和一阶上同调均消失。加上 $N_a$ punctures 可得精确的首项值同构 $H^0(\mathscr{E}(\sum_{k=1}^{N_a} R_k)) \simeq \mathbb{C}^{N_a}$。其次数为 $G_a + N_a - 1$，而转置模给出对偶陈述。这些正是定理 3.6 所需的非特殊多点基和核。

□

通过常数典范基方程 (G.1) 可恢复原始坐标；因此，各个元素可能是活跃 BA 求值的线性组合。这适用于每个固定相位分布下的一般初始模态。奇异层和非半单矩特化还需要额外的极限数据。

# H 对称约化的 Prym 条件

我们为对称约化建立谱对合和 Prym 约束，从而为第 2.4 节提供几何学上的依据。

## H.1 对称约化

模态的额外对称性可以将除子运动限制在谱雅可比簇内部一个更小的阿贝尔簇中。对于 $L = M = s$、$N = 1$，施加

$$\mathsf{B}_L = \mathsf{B}_M, \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{\mathsf{T}}, \qquad \bar{\boldsymbol{u}} = (\bar{\boldsymbol{u}})^{\mathsf{T}}, \qquad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}^{\mathsf{T}}, \qquad \bar{\boldsymbol{w}} = (\bar{\boldsymbol{v}})^{\mathsf{T}}. \tag{H.1}$$

矩阵上方的横线表示相互独立的配对数组；T 表示普通转置。方程 (2.11) 保持这些约束不变。受限辛形式是非退化的，其中包含 $s$ 个向量-模对和 $s$ 个 $(s+1)/2$ 对称矩阵-模对。通过常数缩放可将其化为正则形式。

由此得到的铅笔满足转置对称性，从而给出

$$F(\lambda, \nu) = F(\lambda, -\nu), \qquad \iota : C \longrightarrow C, \quad \iota(\lambda, \nu) = (\lambda, -\nu). \tag{H.2}$$

假设曲线是正则的，且 $F(\lambda,\ 0)$ 有互异的根。其亏格为 $s^2$。该对合在 $\nu = 0$ 上方有 $2s + 1$ 个不动点，并在中央无穷分支处有一个不动点；它交换另外两组无穷远点。因此，由黎曼–赫尔维茨公式可得

$$g(C/\iota) = \frac{s(s-1)}{2}, \qquad \dim \mathrm{Prym}(C/(C/\iota)) = \frac{s(s+1)}{2}. \tag{H.3}$$

Prym 簇是范数映射的核 $\mathrm{Jac}(C) \to \mathrm{Jac}(C/\iota)$ 的单位连通分支；它描述了被 $\iota$ [13, §3.1] 反转的除子类。对于这一约化，移动的特征向量除子类位于 Prym 簇的一个平移中。本附录中的特征向量—除子论证根据铅笔的转置对称性证明了这一断言。

对于 $s = 2$，有五个正则对：谱曲线的亏格为四，其商曲线是椭圆曲线，而约化除子运动有三个 Prym 坐标。两个模态规范方向使总数达到五。更一般地，总数为 $s(s+3)/2 = s + \dim \mathrm{Prym}(C/(C/\iota))$。这一族说明，即使谱曲线本身是非双曲椭圆的，谱对合也会如何约化承载该运动的阿贝尔簇。

## H.2 特征向量除子证明

根据方程 (H.1)，定义常矩阵

$$\mathsf{S} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_s & 0 \\ \mathrm{Id}_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{H.4}$$

方程 (2.12) 和 (2.14) 中的矩阵满足

$$\mathsf{S}^2 = \mathrm{Id}_{2s+1}, \qquad \mathsf{X} = \mathsf{S}\mathsf{X}^{\mathsf{T}}\mathsf{S}, \qquad \mathsf{S}\mathsf{D}\mathsf{S} = -\mathsf{D}, \qquad \mathsf{T}(\nu) = -\mathsf{S}\mathsf{T}(-\nu)^{\mathsf{T}}\mathsf{S}. \tag{H.5}$$

因此 $\mathsf{L}(\nu) = \mathsf{S}\mathsf{L}(-\nu)^{\mathsf{T}}\mathsf{S}$，由此证明方程 (H.2)。这也将 $\iota P$ 处的右特征向量与 $P$处的左特征向量对应起来。

将右特征向量的最后一个分量归一化为 1，并令$\mathcal{A}(t)$ 表示它在一般光滑谱图表上的有限极点除子。考虑最后一个对角余子式

$$A(\lambda, \nu) = \det\bigl(\lambda \mathrm{Id}_{2s} - \mathsf{L}_{\mathrm{upper}}(\nu)\bigr), \tag{H.6}$$

其中，$\mathsf{L}^{\mathrm{upper}}$ 是铅笔的前 $2s$ 行和列。这个余子式关于 $\nu$是偶函数。在 $C$ 的一个光滑有限点处，$\lambda \mathrm{Id}_{2s+1} - \mathsf{L}$ 的伴随矩阵秩为一。在局部处处非零的特征向量标架中，它等于一个非零标量乘以一个右向量和一个左向量。因此，其最后一个对角元的零点分解为这两个向量最后一个分量的零点。转置关系通过 $\iota$ 将这两个零点除子对应起来，从而得到

$$(A)_0 = \mathcal{A}(t) + \iota\mathcal{A}(t). \tag{H.7}$$

这里是在这些零点均为单零点、彼此不相交且有限的开图表上陈述的。

一般而言，$A$ 在 $2s$ 个外部无穷远分支上各有 $s-1$ 阶极点，在中心分支上有 $2s$ 阶极点。将方程 (2.31) 代入方程 (H.6) 即可得出这些阶数。因此，它的极点除子是固定除子

$$\mathcal{A}_\infty = (s-1)\left(\sum_{\ell=1}^{s} P_\ell^L + \sum_{m=1}^{s} P_m^M\right) + 2sP_1^N, \qquad \deg \mathcal{A}_\infty = 2s^2.$$

因此，$\deg\mathcal{A}(t) = s^2$ 且 $\mathcal{A}(t) + \iota\mathcal{A}(t) \sim \mathcal{A}_\infty$。对于固定的参考除子 $\mathcal{A}(0)$，零次类

$$\xi(t) = [\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(0)] \in \mathrm{Jac}(C)$$

因此满足 $\xi(t)+\iota(\xi(t)) = 0$。由于 $\xi(0) = 0$，连续演化将 $\xi(t)$ 置于单位连通分支，即 Prym簇中。因此，标准的等谱特征向量除子线性化 [4,§3] 将运动限制在该 Prym簇的一个平移上。这证明了约化除子运动的包含关系；若要重构整个约化等谱流形，还需要其规范化数据。

为完整起见，存在 $s$ 个常数对角模规范变换。记 $\boldsymbol{v} = (v_{i1})_{i=1}^{s}$，其作用为

$$v_{i1} \mapsto e^{\epsilon_i} v_{i1}, \qquad u_{ij} \mapsto e^{-\epsilon_i - \epsilon_j} u_{ij}, \qquad 1 \le i, j \le s,$$

在对应伙伴上使用逆因子，并对 $\boldsymbol{w}$施加相同的约束。它们保持正规化特征向量的极点除子不变。折叠后独立对的数量为$s + s(s+1)/2$。事实上，拉回的辛形式在每个向量-模对以及每个非对角对称矩阵-模对上都带有因子二。将每个此类对的两个成员都乘以 $\sqrt{2}$，而保持对角对不变，即可得到正则坐标。这解释了 H.1节中的规范维数和 Prym维数。

# I 四次谱哈密顿量

第 2.2.4 节的迹层级在不扩展模列表的情况下生成更高的相互作用阶数。第四个成员 $H_4 = \mathrm{tr}\,\mathsf{X}^4/4$ 在同一模列表中加入了四次相互作用。

其固定的对角元还提供了常数项、二次式项和三次项。在迹中取四个模态因子可得到其齐次四次部分：

$$H_4^{[4]} = 2\,\mathrm{tr}\Big[(\boldsymbol{u}\bar{\boldsymbol{u}}^{\mathsf{T}})^2\Big] + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}\Big[(\bar{\boldsymbol{w}}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{w})^2\Big] + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}\Big[(\boldsymbol{v}\bar{\boldsymbol{v}}^{\mathsf{T}})^2\Big] - 2\,\mathrm{tr}\Big(\boldsymbol{u}\bar{\boldsymbol{u}}^{\mathsf{T}}\bar{\boldsymbol{w}}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{w}\Big) - 2\,\mathrm{tr}\Big(\bar{\boldsymbol{u}}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\bar{\boldsymbol{v}}^{\mathsf{T}}\Big) + \mathrm{tr}\Big(\boldsymbol{w}\bar{\boldsymbol{w}}^{\mathsf{T}}\bar{\boldsymbol{v}}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{v}\Big). \tag{I.1}$$

例如，当 $L,\ M \geq 2$ 时，这包括四模交换

$$4\big(u_{11}u_{22}\bar{u}_{12}\bar{u}_{21} + u_{12}u_{21}\bar{u}_{11}\bar{u}_{22}\big).$$

因此，高阶混合项会伴随由谱迹确定的特定模态幂次项。

# J　C受约束 KP 正规化与典范流匹配

我们论证了命题 4.1 中所使用的矩阵波归一化，并解释了其时间变量如何在固定的双有理 BA 层上获得典范哈密顿量。

## J.1 波归一化、交换性与源演化

在每个 puncture 处，普通列在方程 (3.1) 中具有首项向量 $e_k$。收集其 $N$ 局部洛朗展开，可得到一个首项矩阵为单位矩阵的矩阵波函数。它确定了一个形式可逆的整饰算子 $\mathscr{W} = \mathrm{Id}_N + \mathsf{W}_1\partial^{-1} + \mathsf{W}_2\partial^{-2} + \cdots$。在规范变换之前，$N$ 洛朗展开 $h_A$ 构成一个与时间无关的对角形式算子 $\mathrm{H}_A(\partial)$。所有 puncture 处的谱方程蕴含 $\mathcal{A}_A\mathscr{W} = \mathscr{W}\mathrm{H}_A$。由于对角算子彼此交换，$\mathcal{A}_L$ 与 $\mathcal{A}_M$ 也彼此交换。这证明了方程 (4.16)，而无需仅根据一个特征函数列来推断交换性。

现在使用局部坐标 $s_k' = 1/h_L(P)$。规范 $\mathsf{G}^{-1} = e^{x\mathsf{C}_L}$ 将首项普通因子从 $e^{x/s_k}e_k$ 变为 $e^{xh_L(P)}e_k$；剩余因子的首项矩阵为单位矩阵。因此，在这些坐标下，重整化整饰算子满足

$$\mathcal{L}_{\mathrm{KP}} = \mathscr{W}\partial\mathscr{W}^{-1}.$$

对于一个高阶时间，$h_L^n$ 的主部规定了原始$s_k$ 坐标中的 BA 指数因子。将分量 $k$ 乘以 $\exp(x_n\mathrm{reg}_{R_k}h_L^n)$，即可补上所需的正则常数。对偶分量则乘以其逆因子。因此，正规化同时包含阿贝尔速度和分量相位。

采用这些时间的 BA 构造给出佐藤方程

$$\partial_{x_n}\mathscr{W} = -(\mathcal{L}_{\mathrm{KP}}^n)_-\mathscr{W},$$

其中 $-$ 保留负微分幂。等价地，从普通 BA 导数中减去$\mathcal{B}_n = (\mathcal{L}_{\mathrm{KP}}^n)_+$ 后，在每个 puncture 处的首项值均为零。固定除子和 BA 唯一性给出方程（4.19）中的第一个方程。

对于对偶波，留数配对使用 $d\Omega_0$。转换为局部谱测度 $dh_L$时，对偶波会乘上固定标量因子 $d\Omega_0/dh_L$。该比值在每个 puncture 处的首项值均为一。留数配对将所得对偶波与形式伴随波算子对应起来，其时间生成元为 $-\mathcal{B}_n^{\mathrm{ad}}$。由于该因子与所有 BA 时间无关，同一微分方程也适用于 $\widetilde{\psi}^{\vee}$ 本身。这些就是在当前正规化下标准的 BA 和伴随波论证 [38, 40]。

对于一个 矩阵微分算子 $B$ 和列函数 $F,\ G$，有限秩恒等式为

$$[B, F\partial^{-1}G^{\mathsf{T}}]_- = B(F)\partial^{-1}G^{\mathsf{T}} - F\partial^{-1}(B^{\mathrm{ad}}(G))^{\mathsf{T}}$$

[16, 方程 (7)–(8)]。这证明了方程 (4.20) 中两个算子的负部均得以保持。它们的非负部保持不变：对于 $\mathcal{L}_{\mathrm{KP}}$，这由 $[\mathcal{L}_{\mathrm{KP}}^{n},\ \mathcal{L}_{\mathrm{KP}}]=0$ 推出；对于 $\mathcal{M}_{\mathrm{KP}}$，这由 $[\mathcal{L}^{\,n_{\mathrm{KP}}},\mathcal{M}_{\mathrm{KP}}]=0$ 及其常系数微分部分 $\mathrm{Id}_N\partial+\mathsf{C}_M-\mathsf{C}_L$ 推出。负阶算子与任一微分部分的交换子都具有负阶。至此，任意 $N$ 的算子与源流证明完成。

### J.2 在固定层上选取典范生成元

固定一个亏格为 $g$ 的双有理指定 BA 层。根据定理 3.8，选取 $g$ 个谱哈密顿量$H_1$，……，$H_g$，使其阿贝尔向量 $\boldsymbol{U}^{(1)}$，……，$\boldsymbol{U}_{(g)}$ 线性无关。为与物理哈密顿量约定进行比较，记作 $x_n=-it_n$，并令$\boldsymbol{U}_{\mathrm{KP},\ n}$ 由 $z(t_n)=z_0-it_n\boldsymbol{U}_{\mathrm{KP}\,n}$ 定义。所需谱组合的系数满足

$$\sum_{\alpha=1}^{g}\beta_{n\alpha}\boldsymbol{U}^{(\alpha)}=\boldsymbol{U}_{\mathrm{KP},n}. \tag{J.1}$$

The 这些向量构成的矩阵可逆。当 $g=0$ 时，无需谱组合 .

尖点时间代表元之差的其余部分与每个全纯微分的留数配对均为零。因此，根据米塔格-莱夫勒判据，它在相差一个加法常数的意义下，是一个支撑于尖点处的亚纯函数的主部。该函数在普通点处的求值及其正则 puncture 常数给出固定的顶点相位差 $\delta\varphi_\ell^L$、 $\delta\varphi_m^M$、 $\delta\varphi_k^N$。BA theta 平移已经一致；这些顶点相位补足了模态数组中其余的指数因子。

幂荷通过以下方式生成它们

$$\widehat{H}_n=\sum_{\alpha=1}^{g}\beta_{n\alpha}H_\alpha-\sum_{\ell=1}^{L}\delta\varphi_\ell^L Q_\ell^L+\sum_{m=1}^{M}\delta\varphi_m^M Q_m^M+\sum_{k=1}^{N}\delta\varphi_k^N Q_k^N. \tag{J.2}$$

$u_{\ell m}$， $v_{mk}$， $w_{k\ell}$的相位变化率分别为 $\delta\varphi_\ell^L-\delta\varphi_m^M$、 $\delta\varphi_m^M-\delta\varphi_k^N$ 和 $\delta\varphi_k^N-\delta\varphi_\ell^L$；对应模态的变化率则符号相反。因此，方程 (J.2) 与每个模态（包括其相位）相匹配。选定能级后，所有系数均为常数，且组合中的哈密顿量与荷彼此对易。若允许这些系数在同一个哈密顿量中随谱积分变化，就会引入额外的导数；这里采用的并非这种构造。

## 参考文献


[1] M. R. Adams、J. Harnad 和 J. Hurtubise。有限维与无限维中的等谱哈密顿流。II. 流的积分。《数学物理通讯》，134:555–585，1990。 doi:10.1007/BF02098447。

[2] M. R. Adams、J. Harnad 和 J. Hurtubise。环代数中的达布坐标与刘维尔–阿诺德积分。《数学物理通讯》，155(2):385– 413，1993。作者版本：
https://arxiv.org/abs/hep-th/9210089。 doi:10.1007/BF02097398。

[3] M. R. Adams、J. Harnad 和 E. Previato。《有限维和无限维中的等谱哈密顿流》。I. 广义莫泽系统及映射到环代数中的动量映射。《数学物理通讯》，117：451–500，1988年。
doi:10.1007/BF01223376。

[4] Mark Adler 和 Pierre van Moerbeke。AKS定理、A.C.I.系统与随机矩阵理论。《物理学杂志*A*：数学与理论》，51:423001，2018年。https://arxiv.org/abs/1810.03168。
doi:10.1088/1751-8121/aad82d。

[5]Mark S. Alber、Gregory G. Luther、Jerrold E. Marsden 和 Jonathan M. Robbins。共振三波相互作用的几何相位、约化与李–泊松结构。《物理学D：非线性现象》，123(1–4):271–290，1998。作者版本：https://www.cds.caltech.edu/~marsden/bib/1998/07-AlLuMaRo1998/AlLuMaRo1998.pdf。 doi:10.1016/S0167-2789(98)00127-4。[6] H. Aratyn、J. F. Gomes、E. Nissimov 和 S. Pacheva。KP 型可积层级的环代数与 Virasoro 对称性。《应用分析》，78(3–4):233–253，2001。作者版本： https://arxiv.org/abs/nlin/0004040。 doi:10.1080/00036810108840937。[7] H. Aratyn、E. Nissimov 和 S. Pacheva。KP 型可积层级中平方特征函数势的方法。《数学物理通讯》，193:493–525，1998。作者版本：https://arxiv.org/abs/solv-int/9701017。 doi:10.1007/s002200050338。[8] Arnaud Beauville。谱曲线的雅可比簇与完全可积哈密顿系统。《数学学报》，164:211–235，1990。 doi:10.1007/BF02392754。[9] David Ben-Zvi 和 Indranil Biswas。西塔函数与 Szegő 核。《国际数学研究通知》，2003(24):1305–1340，2003。作者版本：https://arxiv.org/abs/math/0211441。 doi:10.1155/S1073792803211181。[10] Marco Bertola。黎曼曲面上的帕德逼近与 KP τ 函数。《分析与数学物理》，11:149，2021。 https://arxiv.org/abs/2101.09557。 doi:10.1007/s13324-021-00585-2。[11] A. V. Bolsinov。李代数上的相容泊松括号与对合函数族的完备性。《苏联数学通报》，38(1):69–90，1992。开放文本：https://www.mathnet.ru/eng/im1026。 doi:10.1070/IM1992v038n01ABEH002187。[12] Harry W. Braden、Victor Z. Enolskii 和 Andrew N. W. Hone。超椭圆西格玛函数的双线性递推关系与加法公式。《非线性数理物理学杂志》，12(增刊2):46–62，2005。 doi:10.2991/jnmp.2005.12.s2.5。[13] Steven B. Bradlow 和 Laura P. Schaposnik。希格斯丛与例外等源。《数学科学研究》，3:14，2016。 doi:10.1186/s40687-016-0062-0。[14] Victor M. Buchstaber、Victor Z. Enolskii 和 Dmitri V. Leykin。超椭圆克莱因函数及其应用。载于《孤子、几何与拓扑：十字路口》，美国数学会译丛（第二辑）第179卷，第1–34页。美国数学会，1997。 https://arxiv.org/abs/solv-int/9603005。[15] P. L. Christiansen、J. C. Eilbeck、V. Z. Enolskii 和 N. A. Kostov。Manakov 型耦合非线性薛定谔方程组的准周期解与周期解。《伦敦皇家学会会刊 A 辑》，456:2263–2281，2000。 https://arxiv.org/abs/solv-int/9904017。 doi:10.1098/rspa.2000.0612。[16] O. I. Chvartatskyi 和 Yu. M. Sydorenko。一个新的（$1+1$）维矩阵 $k$约束 KP 层级。《数学研究》，39(2):164–177，2013。作者版本： https://arxiv.org/abs/1303.7064。 doi:10.30970/ms.39.2.164-177。[17] J. C. Eilbeck、V. Z. Enolskii 和 N. A. Kostov。向量非线性薛定谔方程的准周期解与周期解。《数学物理学杂志》，41:8236–8248，2000。 doi:10.1063/1.1318733。

[18] John D. Fay.《黎曼曲面上的θ函数》，数学讲义第 352 卷。Springer，1973。[19] Rui Loja Fernandes 和 Pol Vanhaecke。超椭圆 Prym 簇与可积系统。《数学物理通讯》，221(1):169–196，2001。 https://arxiv.org/abs/math-ph/0011051。 doi:10.1007/s002200100476。[20] Xue Geng、Liang Guan 和 Dianlou Du。与三波共振相互作用系统相关的李–泊松哈密顿系统的作用角变量。AIMS Mathematics，7(6):9989–10008，2022。 https://www.aimspress.com/aimspress-data/math/2022/6/PDF/math-07-06-557.pdf。 doi:10.3934/math.2022557。[21]Phillip A. Griffiths。流线性化与 Lax 方程的上同调解释。美国数学杂志，107(6):1445–1484，1985。开放文本： https://publications.ias.edu/sites/default/files/linearflow.pdf。 doi:10.2307/2374412。[22] P. G. Grinevich 和 A. Yu. Orlov。KP 理论中的旗空间以及 Virasoro 作用于 det $d_j$和 Segal–Wilson $\tau$-函数。在 A. A. Belavin、A. U. Klimyk 和 A. B. Zamolodchikov 编，《现代量子场论问题》，物理学研究报告，第 86–106 页。Springer，1989。作者版本： https://arxiv.org/abs/math-ph/9804019。[23] Victor Guillemin 和 Shlomo Sternberg。Gelfand–Cetlin 系统与复旗流形的量子化。泛函分析杂志，52(1):106–128，1983。doi:10.1016/0022-1236(83)90092-7。[24] John Harnad。对偶等单值变形与到环代数的动量映射。《数学物理通讯》，166:337–366，1994。作者版本： https://arxiv.org/abs/hep-th/9301076。 doi:10.1007/BF02112319。[25] Robin Hartshorne。《代数几何》，数学研究生教材第 52 卷。Springer，1977。 doi:10.1007/978-1-4757-3849-0。[26] G. F. Helminck 和 J. W. van de Leur。向量约束 KP 层次的解析描述。《数学物理通讯》，193(3):627–641，1998。作者版本： https://arxiv.org/abs/solv-int/9706004。 doi:10.1007/s002200050341。[27] Graham Hesketh。Generapy：数值阿贝尔积分与函数。 https://github.com/HeskethGD/generapy。文档： https://generapy.readthedocs.io/en/latest/。[28] Graham Hesketh。连续波四波混频的椭圆标准形与 Frobenius–Stickelberger 恒等式。 https://arxiv.org/abs/2601.11740，2026。[29] Graham Hesketh。多项式哈密顿系统的超椭圆 sigma 解。https://arxiv.org/abs/2610.22784，2026。 doi:10.48550/arXiv.2610.22784。[30] Graham D. Hesketh。具有二次或三次非线性的耦合模光学的一般复包络解。美国光学学会杂志 B，32:2391–2399，2015。 https://arxiv.org/abs/1512.03092。 doi:10.1364/JOSAB.32.002391。[31] Z. Jiang 和 S. Rauch-Wojciechowski。与分次李代数相关的二次和三次非线性可积动力系统。《数学物理学杂志》，32(7):1720–1732，1991。 doi:10.1063/1.529233。

[32] Maleeha Khawaja 和 Samir Siksek。曲线上的本原代数点。数论研究，10(2):57，2024。 doi:10.1007/s40993-024-00543-4。[33] Dmitry Korotkin。拟置换单值矩阵的矩阵黎曼–希尔伯特问题解。《数学年刊》，329(2):335–364，2004。作者版本：https://arxiv.org/abs/math-ph/0306061。 doi:10.1007/s00208-004-0528-z。[34] Dmitry Korotkin 和 Vasilisa Shramchenko。关于高亏格魏尔斯特拉斯西格玛函数。《物理学D：非线性现象》，241:2086–2094，2012。作者版本： https://arxiv.org/abs/1201.3961。 doi:10.1016/j.physd.2012.01.002。[35] N. A. Kostov。科特韦格–德弗里斯层级及相关完全可积系统：I. 代数几何方法。 https://arxiv.org/abs/solv-int/9904016，1999。[36] N. A. Kostov 和 A. V. Tsiganov。受限多重三波相互作用系统的新 Lax 对、准周期解与双哈密顿结构。《规则与混沌动力学》，13(6):593–601，2008。 https://arxiv.org/abs/0705.4363。doi:10.1134/S1560354708060099。[37] I. Krichever。具有自洽系数的线性算子与 KP 层次的有理约化。《物理学D：非线性现象》，87(1–4):14–19，1995。作者托管的已发表版本：https://www.math.columbia.edu/department/krichever/pdfs/1995-1999/1995-LOWSCARROKH.pdf。 doi:10.1016/0167-2789(95)00146-U。[38]I. M. Krichever。非线性方程理论中的代数几何方法。《俄罗斯数学调查》，32(6):185–213，1977。doi:10.1070/RM1977v032n06ABEH003862。[39] I. M. Krichever。KP 层次的一般有理约化及其对称性。《泛函分析及其应用》，29(2):75–80，1995。作者托管的已发表版本：https://www.math.columbia.edu/department/krichever/pdfs/1995-1999/1995-GRROTKHATS0.pdf。 doi:10.1007/BF01080005。[40] Igor Krichever 和 Takahiro Shiota。孤子方程与黎曼–肖特基问题。载于《模空间手册》第二卷，《数学高级讲义》第 25 卷，第 205–258 页。International Press，马萨诸塞州萨默维尔，2013。作者版本：https://arxiv.org/abs/1111.0164。[41] Shigeki Matsutani 和 Emma Previato。亏格三循环三角曲线的 al 函数。《数学汇刊》，66(3):311–349，2015。作者版本： https://arxiv.org/abs/1312.4107。 doi:10.1007/s13348-015-0138-y。[42] C. R. Menyuk、H. H. Chen 和 Y. C. Lee。可积哈密顿系统与 Lax 对形式体系。《物理评论A》，26:3731–3733，1982。 doi:10.1103/PhysRevA.26.3731。[43] C. R. Menyuk、H. H. Chen 和 Y. C. Lee。受限多重三波相互作用：该系统及其他相关系统的可积情形。《数学物理学杂志》，24:1073–1079，1983。 doi:10.1063/1.525832。[44] C. R. Menyuk、H. H. Chen 和 Y. C. Lee。受限多重三波相互作用：Painlevé 分析。《物理评论A》，27:1597–1611，1983。doi:10.1103/PhysRevA.27.1597。[45] A. S. Mishchenko 和 A. T. Fomenko。有限维李群上的欧拉方程。《苏联数学通报》，12(2):371–389，1978。开放文本： https://www.mathnet.ru/en

g/im1771. doi:10.1070/IM1978v012n02ABEH001859.

[46] David Mumford。*Tata Lectures on Theta II*，*Progress in Mathematics*丛书第 43 卷。Birkhäuser，1984 年。 doi:10.1007/978-0-8176-4578-6.[47] Atsushi Nakayashiki。KP 层次的退化加法公式及其应用。*SIGMA*，22:067，2026 年。 doi:10.3842/SIGMA.2026.067.[48] Yoshihiro Ônishi。超椭圆函数的行列式表达式。爱丁堡数学学会会刊，48(3):705–742，2005 年。 https://arxiv.org/abs/math/0105189。 doi:10.1017/S0013091503000695.[49] Marco Pedroni 和 Pol Vanhaecke。Mumford 系统的李代数推广、其对称性及其多哈密顿结构。《规则与混沌动力学》，3(3):132–160，1998 年。 doi:10.1070/RD1998v003n03ABEH000086.[50] Pol Vanhaecke。代数几何领域中的可积系统，数学讲义丛书第 1638 卷。Springer，第 2 版，2001 年。 doi:10.1007/3-540-44576-5.[51] Karl Weierstrass。阿贝尔函数理论。纯粹与应用数学杂志，52:285–380，1856 年。数字化单行本： https://www.gutenberg.org/ebooks/29780。 doi:10.1515/crll.1856.52.285.[52] S. Wojciechowski、Z. Jiang 和 R. K. Bullough。可积多波相互作用常微分方程系统。物理快报 *A*，117(8):399–404，1986 年。 doi:10.1016/0375-9601(86)90006-X.[53] Yongtang Wu 和 Xianguo Geng。与三波相互作用方程相关的有限维可积系统。《数学物理学杂志》，40(7):3409–3430，1999 年。 doi:10.1063/1.532896。