arXiv:2611.29832v1 [cs.LO] 22 Nov 2026

高阶可实现性拓扑斯

Yoshihiro Maruyama

京都大学
maruyama@i.h.kyoto-u.ac.jp

摘要。 在 ∞-tripos 理论的基础上，我们发展了可实现性 ∞-拓扑斯理论。我们运用∞-tripos 理论构造函数可实现性、修正可实现性和 Krivine 可实现性 ∞-拓扑斯。对于每种构造，我们通过展示一族 Eilenberg–MacLane n-类型来恢复指定局部真值的 Lawvere–Tierney 核 j： 对于任意 $n \geq 1$，当且仅当 $j(p)$成立时，这族类型在环境真值 p 处的纤维经层化后可缩。在函数可实现性中，我们将恒等类型与描述集合论联系起来。对于每个 $n \geq 2$，我们构造一个精确截断高度为 $n+1$的单值分类器 U_n。当从 Baire 空间到 U_n 的映射变化时，使得指定代码到终端代码之间存在全局路径的输入集合，恰好是 Baire 空间的 G_δ 子集。将 Baire 空间指数化后，在相同截断高度下，对终端代码处的常值映射进行类似检验，所得集合恰好是余解析集。在修正可实现性中，在稳定数值前提下对局部存在性的封闭证明，可得一个全递归函数，以及一个相干证明，证明只要前提成立，其输出就满足规格。在 Krivine 可实现性中，适用于合适 n-类型上$(n-1)$-截断族的上下文选择，恢复了定义布尔局部化的次终对象。即使 Anel–Awodey–Barton 的有效 ∞-拓扑斯的切片具有相同的普通 Hyland 有效拓扑斯，且它们的基底拥有等价的全局点空间，二元上同调仍能区分这些切片。因此，Hyland 的有效拓扑斯可作为零类型范畴出现在无穷多个两两不等价的可实现性 ∞-拓扑斯中（将 Hyland 的有效拓扑斯恢复为零类型范畴，并不能唯一确定一个有效 ∞-拓扑斯）。

关键词： 可实现性 ∞-拓扑斯 · 高阶三元组 · 函数可实现性 · 修正可实现性 · Krivine 可实现性 · Lawvere–Tierney 拓扑 · 上下文选择 · 描述集合论 · 单价宇宙

1 引言

我们在 ∞-tripos 理论 [28] 的基础上发展可实现性 ∞-拓扑斯理论。在普通可实现性 tripos 中，蕴涵由一个实现子见证；该实现子将前提的见证映射为结论的见证，并且对参数具有一致性。三元组到拓扑斯构造为这种逻辑赋予了一个集合范畴

与映射 [22]。高阶三元组理论允许类型值族及其截面空间。在单价宇宙中，两个编码之间的一条路径见证它们所指称的类型之间的等价。当参数变化时，实现子何时能一致地提供这样一条路径？更一般地，实现子何时能从一个高阶类型族中选择一个截面?

为研究这些问题，我们构造函数、修改的和 Krivine 可实现性 ∞-拓扑斯。每种构造都从组装出发，其映射由实现子跟踪。高阶精确完备化为 Segal 群胚 [41] 添入有效商。若 Q 是 $R_\bullet$ 的商，那么 $R_1 \simeq R_0 \times_Q R_0$，因此群胚的箭头描述了其对象在 Q 中的像之间的路径。 ∞-三元组结构为所得的族 [28] 提供依赖积和单值宇宙。

另外两个选择决定了一个族的解释。一个 Lawvere–Tierney 核 j 规定了命题逻辑，而一个类型 B 规定了该族在其上变化的语境。对于定义1意义下的容许装配表示 $\mathcal{C}$ ，我们构造

$$\mathfrak{R}(\mathcal{C}, j; B) := \mathrm{Sh}_j(\mathrm{Ex}_\infty \mathcal{C})_{/B}, \qquad B \in \mathrm{Sh}_j(\mathrm{Ex}_\infty \mathcal{C}). \tag{1}$$

记 $\mathcal{T} = \mathrm{Ex}_{1,\mathrm{reg}}(\mathcal{C})$ 为普通可实现性拓扑斯，$\mathsf{H}(\mathcal{T})$ 为其有界高阶精确完备化。我们将 j 一次一个截断度地延拓为层化，并证明它保持有限极限。这用到了单点集构造 [33] 以及左精确性的路径判据 [36]。对于我们的模型，我们得到

$$\mathrm{Ex}_{\infty}\,\mathcal{C} \simeq \mathsf{H}(\mathcal{T}), \qquad \mathrm{Sh}_j\,\mathsf{H}(\mathcal{T}) \simeq \mathsf{H}(\mathrm{Sh}_j\,\mathcal{T}). \tag{2}$$

因此，普通拓扑斯、核以及所选的高阶上下文 B 在等价意义下决定了高阶模型（定理 18）。

层化对高阶类型的作用在多大程度上足以恢复逻辑？固定 $n \geq 1$ 和一个谓词 P。沿用 Diaconescu 的思想，通过将两个元素 [12]，识别来编码一个命题，我们取二阶循环群 C_2 关于关系 $(a = b) \vee P$ 的商 H_P。当且仅当 P 成立时，这两个元素才相等。因此，其 Eilenberg–MacLane 型 $K(H_P,\ n)$ 当且仅当在该处可缩；经过纤维逐点层化后，它恰好在 P 的 j 闭包上可缩。在真值对象 Ω 上取泛谓词，可得到一个适用于每个核的族 $W_n \to \Omega$。经层化变为可缩的纤维所在位置具有特征映射 $j\colon\ \Omega \to \Omega$（推论 26）。

函数可实现性。 在 Kleene 第二代数中，一个实现子读取 Baire 空间中的流 $\mathbb{B}$。我们利用流的各个条目来指定一列二元群的过渡映射。零条目使过渡保持为恒等映射，而非零条目则将其设为零。当且仅当该流包含无穷多个非零条目时，直极限群才是平凡的。对于 $n \geq 2$，这些群的 Eilenberg–MacLane 型构成一个带有单值分类器 U_n 的族。令 u_* 为其对终类型的代码。如 $f\colon\ \mathbb{B} \to U_n$ 变化时，使全局路径将 $f(x)$ 与 u_* 连接起来的输入集合 x，恰好是 Baire 空间的 G_δ 子集。

到 $U_n^{\mathbb{B}}$ 的映射引入了第二个流。对于该族，当且仅当相应的群对于第二个流的每个取值都是平凡的，才存在一条通往 u_* 处常值映射的全局路径。随后，它们的零截面给出一种一致平凡化。这种全称量化恰好产生作为等值轨迹的余解析集。例如，当且仅当输入所编码的树没有无限分支时，才存在这样一条路径。两个分类器都具有精确截断高度 $n+1$（定理 43）。

修改的可实现性。 我们通过提升嵌套可实现性的闭定位 [50] 得到修改的模型。这里的问题是：从一个证明见证局部存在性时，可以提取出什么程序。自然数在修改的模型中是射影的（第 10 节），因此根据推论 22，它们具有上下文选择。于是，对于自然数上的有界高阶族，逐点局部存在性给出一个截面的局部存在性。自然数还在每个参数上下文中支持依赖归纳，其中零和后继数据决定了一个可缩的截面空间，并配备了指定的计算路径（定理 48）。

设 $P(k)$ 是一个稳定数值前提，即 $\neg\neg P(k)$ 蕴含 $P(k)$，并设 $C(k,\ m)$ 是在某个所承认的宇宙层级上的有界族。假设一个封闭证明确立：对于每个满足 $P(k)$ 的 k，局部存在一个带有 $C(k,\ m)$ 的 m。我们提取出一个程序 e，它在每个输入 k 上都会停机。每当 $P(k)$ 成立时，输出都带有 $C(k,\ \varphi_e(k))$ 的证书（定理 52）。

***Krivine* 可实现性。** Krivine 用程序 [23] 解释经典证明。在此语义的相对布尔表示中，环境相对拓扑斯的一个次终对象 U 决定核 $b_U(p) = ((p \Rightarrow U) \Rightarrow U)$ [52]。我们通过追问局部见证何时能够协调地选取，来恢复这一逻辑极点。固定 $n \geq 1$。对每个环境真值 V，我们在布尔局部化中构造一个带基点的 n-类型。在此指标上，对 k-截断族的选择意味着每一个逐点局部有居留的此类族都局部容许一个截面。对 $-1 \leq k \leq n-2$，该测试对每个 V 成立。在 $k = n-1$ 处，从基点出发的路径构成一个测试族，而为每个点选取一条路径会使该指标收缩。在包含此族的一个宇宙层级上，选择恰好对真值 $V \leq U$ 成立。它们的最大元即该极（定理 55）。在单个宇宙代码处，指派给标准程序指标 e 的环路容许一条通向常值环路的路径，当且仅当 φ_e是全定义的。定理 57 对它所覆盖的数值表示中的每一个真极点确立了这一点。

有效可实现性。我们现在固定逻辑，并在 Anel、Awodey 与 Barton [5] 的有效 ∞-拓扑斯中变动语境。在匹配的规模界下，应用 Stefanich 识别定理 [41] 给出此模型与 H(Eff) 之间正合 ∞-范畴的一个等价，其中 Eff 是 Hyland 的普通有效拓扑斯。为看出高阶上下文能改变什么，取 $p\colon\ K(A,n)\to 1$ 于局部化完备化 $\mathcal{F}$ 中，其中 A 为阿贝尔零型且 $n\geq 2$。沿 p 的拉回在 $(n-2)$-截断对象上给出一个等价，因此该切片尤其具有相同的普通拓扑斯。若 A 非零，则 n 是使该切片成为正则 $(m,1)$-范畴的高阶精确完备化的最小 m （定理 30）。对每个阿贝尔零型 M，其次数-n 上同调分裂为

$$H^n(\mathcal{F}_{/K(A,n)};p^*M)\cong H^n(\mathcal{F};M)\oplus \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}(\mathcal{F}_{\leq 0})}(A,M).$$

限制到基点会投影到第一个直和项。因此，额外的上同调类由普通拓扑斯中的同态集索引（定理 32）。

在有效模型中，记 D 为二元群，其比特具有数值名称，并为群 $V=\bigoplus_{\mathbb{N}}\mathbb{F}_2$ 的每个元素赋予每个数作为组装 ∇V 中的名称。对于 $r\geq 0$，令 $A_r=D^r\times\nabla V$。从 A_r 到 D 的可追踪同态在 ∇V 上为零，因为跟踪器接收到一个公共名称时必须返回相同的比特。它对 D^r 的限制可以是任意二元线性泛函。因此， K 上的切片（A_r, n）在次数 n 的二元上同调为 $\mathbb{F}_2^r$。空间层中的类似构造给出了具有相同普通层托普斯的每个有限局部化秩 $n\geq 2$ 的 Grothendieck切片（定理59）。局部化秩是使得该拓扑斯在一个具有有限极限的小 q-范畴上拥有定义站点的最小 q。

固定 $n\geq 2$。 $K(A_r,\ n)$ 上的有效切片以 Hyland 的有效拓扑斯为其普通核心，并且它们的基底的全局点空间都等价于 $K(V,\ n)$。次数-n 二元上同调的秩可从切片本身恢复r (命题 36)。当 r 取遍非负整数时，这便给出了无穷多个两两不等价的可实现性 ∞-拓扑斯。

1.1 与先前工作的关系

本工作以 Stefanich 关于有界精确范畴 [41] 的识别定理以及高阶 tripos 理论 [28] 为基础，证明对于可容许表示，层化与有界高阶精确完备化可交换。因此，普通拓扑斯、核以及所选的高阶上下文共同决定了所得切片。这给出了函数、修改的和 Krivine 可实现性 ∞-拓扑斯的统一构造（定理 18）。

高层层给出了由格罗滕迪克 ∞-拓扑斯 [2]中的一个映射集合生成的左正合局部化。在此情形下，拓扑局部化对应于扩展 Grothendieck 拓扑 [3]。Quirin 和 Tabareau 按截断度逐步从核 j 构造层化 [33]。我们根据 j 对单个族的作用恢复它。在泛谓词处对商群 H_P 作解环后，对于每个 $n\geq 1$，都得到一个与 j无关的族 $W_n\to\Omega$。经过纤维逐点层化后，其可缩纤维所在的轨迹的特征映射正是 j （推论 26 ）。Lee 和 van Oosten 研究的局部算子上的序 [24]，以及通过预言机模态 [44] 对图灵可约性的诠释，启发我们比较每种局部化使哪些问题变得可解。对于 $n\geq 2$，我们证明， $j\leq k$ 当且仅当：在每个参数上下文中，由 W_n 得到的每个基点托orsor，若在 j 下获得截面，也会在 k 下获得截面（定理 28）。

Dubey 和 Buchholtz 提出了在 $\mathcal{K}_2$ [13] 上的函数可实现性单纯形模型。对于 $n\geq 2$，将 $c_n(\alpha)$ 写作流 α 处在我们对普通函数可实现性拓扑斯 RT($\mathcal{K}_2$) 的有界高阶完备化中时其纤维的代码，并将 v_n 写作 $K(C_2,n)$ 的代码。在最终为零的流上，恒等映射 $c_n(\alpha)=v_n$ 的支撑是这样一个内部命题： α 的非零位置具有一个界（引理 44）。这将代码恒等与有限集有界性 [32] 联系起来。对于终端代码 u_*，允许全局恒等见证的输入集合恰好遍历 Baire 空间的 G_δ 子集。用 Baire 空间对分类器取幂，得到的恰好是在相同截断高度上的余解析集。特别地，与常值终端代码的恒等映射能够识别树的良基性（定理 43）。

Awodey、Gambino 和 Sojakova 将归纳与代数的同伦初始性联系起来 [7]。在修改的可实现性中，我们证明普通自然数在每个参数上下文中都构成同伦初始的后继代数，从而得到具有相干计算路径的归纳（定理 48）。从一个关于稳定数值前提的局部存在性的封闭证明中，

我们提取出一个对所有输入均全定义的程序，并在该前提成立的任何地方为其提供相干证书（定理 52）。

在 Krivine 可实现性中，上下文选择检测由 van Oosten 和 Zou [52]定义相对布尔化的次终对象 U。指标上的选择是一个截面问题，等价于内射影性 [20]。对于每个 $n \geq 1$ 以及每个环境真值 V，我们构造一个 n-类型指标。在包含其基点路径族的任意测试层级上，该指标上的（$n-1$）-截断族具有选择，当且仅当 $V \leq U$（定理 55）。

一个普通拓扑斯上可以变化多少高阶结构？Hyland 的有效拓扑斯通过分割组装的精确完备化 [21,37] 得到。Van den Berg 将其实现为路径范畴 [48]的同伦范畴。Awodey 和 Emmenegger 将 Hyland 的有效拓扑斯识别为其所提出的有效 2-拓扑斯中的零类型范畴，Anel、Awodey 和 Barton 在其高阶有效拓扑中也给出了相同的识别 [6,5]。Speight 在分区群胚组装中对 1-截断内涵类型论进行建模 [40]。对于任意部分组合代数 A，外部选择将 RT(A)识别为其分割组装的普通精确完备化 [17]。Agwu 将 RT(A)恢复为分区群胚组装中零类型的同伦范畴 [1]。在立方组装中，Uemura 构造了一个单值非谓词宇宙 [47]。在同一模型中，Swan 和 Uemura 构造了一个反射子宇宙，其中 Church 论题成立 [45]。

全局点与计算观察之间的区别也出现在类型代码中。Escardó 和 Streicher 的 Rice 定理将宇宙的外延布尔观察与弱有限全知联系起来 [16]。高阶 tripos 理论通过映射到自然数，将全局点空间等价的两个分类器区分开来 [28]。对于每一种有限数值简单类型 σ，我们都将整个观察对象识别为：对于程序索引分类器，是 σ；对于带标记分类器，则是 $\sigma \times \sigma$（定理 41）。

Swan 运用上同调研究可实现性中的可数选择 [43]。对于具有 Eilenberg–MacLane 纤维的族，Shulman 判据将主性与平凡单值化联系起来 [38]。在我们的有效例子中，相应的上同调类决定了两个这样的族在拉回后等价所需的最少二元扭子坐标数（定理 38）。阿贝尔扩张还给出了 Eilenberg–MacLane 型之间的带基点映射 [11]。我们在有效拓扑斯中构造了一个非零阿贝尔群 Q，其唯一的全局元素是零。对于 $n \geq 2$，从 Q 到二元群的一个非分裂扩张给出了 $K(Q,\ n)$ 上的一个二元上同调类，其次数为 $n+1$；这是二元上同调非零的第一个正次数（定理 40）。

上同调也能区分切片本身。Zoethout 通过内部部分组合代数 [54] 给出了普通组装上的切片。对于高阶上下文 $K(A,\ n)$，当 A 为阿贝尔零型且$n \geq 2$时，我们利用 Eilenberg–MacLane 型 [25,53] 之间的映射，计算对来自阿贝尔零型 M的系数进行拉回后，切片对次数为-n的上同调增加了什么。额外的直和项是普通核心中的同态群 $A \to M$（定理 32）。在有效模型中，基底的正次数上同调消失，因此对于 $A = A_r$ 和二元素系数 $M = D$，该直和项给出了整个次数为-n 的群，即 $\mathbb{F}_2^r$。在固定 n时，每个有限秩 $r \geq 0$ 都会出现，而基底 $K(A_r,\ n)$具有等价的全局点空间（命题 36）。因此，上同调能够区分无穷多个高阶可实现性拓扑斯，它们共享 Hyland 的有效拓扑斯作为普通核心。

1.2 论文结构

第2节给出了组装表示满足的条件；在高阶精确完备化后，这些条件可导出依赖积和单值宇宙。附录 A 验证了相对装配与嵌套装配满足这些条件。第3节和第4节构造了有限同伦次数下的层化，并说明它与高阶精确完备化及切片的相互作用。我们在第5节运用这些结果构造可实现性模型，并确定哪些指标允许上下文选择。

第 6 节根据核在高阶族上的作用恢复核。第7节研究 Eilenberg–MacLane 型上切片的源维数和上同调。这些计算区分了第8节中的有效切片。接下来的三节分别讨论函数可实现性中的识别（第 9 节）、修正可实现性中的归纳和提取（第 10 节），以及 Krivine 可实现性中的选择和二阶恒等式

（第 11 节）。第 12 节按局部化秩和二元上同调对有效切片的 Grothendieck 对应物进行分类。

2 可容许表示与高阶精确完备化

组装之间的函数若存在一个单一跟踪器，将每个输入的名称映射到其输出的一个名称，则它就是一个态射。高阶精确完备化通过向这些普通对象添加群胚商来构造。源中的带跟踪的截面和小族的编码，为在完备化中解释依赖类型提供了两项要素。截面表示依赖积，而编码表示单值宇宙。

2.1 大小与基本约定

我们采用外部选择，并使用一列嵌套的 Grothendieck 宇宙，其基数为强不可达基数$\kappa_0 < \kappa_1 < \cdots$。每个载体的基数都小于某个 i对应的 κ_i。转至更大的宇宙即可使范畴和层位变小。这个通用的大小约定使我们能够在每个层级比较普通的可实现性对象与空间。

覆盖是有效满态射。 X 的图册是从指定类别中的某个对象出发的覆盖 $A \twoheadrightarrow X$ ，例如一个组装或一个零类型。正则 ∞-范畴具有有限极限，并且 Čech 神经的实现对拉回稳定。在正合 ∞-范畴中，所有内部 Segal 群胚都具有对基变换稳定的有效实现。正则函子保有限极限和覆盖。因此，在正合范畴之间，它也保有效群胚实现。若每个映射 $P \to Y$ 都能经由任意覆盖 $X \twoheadrightarrow Y$提升（允许相差同伦），则对象 P 称为正则射影。等价地，对于每个这样的覆盖， π_0 同态集$(P, X) \to \pi_0$ 同态集(P, Y)都是满射。

一个 n-型是一个 n-截断对象。在内语言中，(-1)-型是一个命题，而零类型是一个集合。对于 $n \geq 0$ ，一个 $(n+1)$-型具有 n-截断的恒等类型。零类型构成普通核心。对于 $q \geq -1$，映射 $X \to B$ 的相对高度至多为 q ，当且仅当它是切片 B 上的一个 q-截断对象；等价地说，当且仅当它的同伦纤维在各自的参数上下文中是 q-型。例如，点 $b\colon \mathbf{1} \to B$ 在 b 上的纤维是环对象 $\Omega_b B = \mathbf{1} \times_B \mathbf{1}$。在该切片中，记 $\tau^B_{\leq q} X$，或在基底已明确时记 $\|X\|_q$ ，表示 $X \to B$ 的 q-截断。它是一个从 X （位于 B之上）接收映射的、位于 B 之上的泛 q-截断对象。若映射 $X \to B$ 满足 $\tau^B_{\leq q} X \simeq \mathbf{1}_B$，则称其为 q-连通 ，其中 $\mathbf{1}_B$ 是 B的恒等映射；若对每个有限 $q \geq -1$都满足这一条件，则称其为无限连通。若每个对象都允许由某个 q-截断对象 [41] 覆盖，则称正合 ∞-范畴为 q-复杂 。术语有界表示每个对象都有一个有限截断界，且该界依对象而定。

我们采用 Apol 和 Petrowitsch [4], 提出的基于宇宙的初等 ∞-拓扑斯定义；这类拓扑斯具有有限极限、局部笛卡尔闭性以及足够多的闭单值宇宙族。本文构造的高阶可实现性模型还具有在基变换下稳定的有效群胚商、不交有限余积，以及一个用于所有单态射的特定分类器$\mathbf{1}, \to \Omega$ 。

我们注意到，Rasekh 对初等 ∞-拓扑斯的公理化采用足够多的完备 Segal 宇宙 [35]；Rasekh 还在 [34] 的框架下证明了初等 ∞- 拓扑斯中自然数对象的存在性定理。

2.2 容许计算表示

对于正则源$\mathcal{C}$，令

$$\mathcal{H}_{\mathcal{C}} = \mathrm{Sh}_{\mathrm{reg}}(\mathcal{C}, \mathcal{S}), \qquad \mathcal{E}_{\mathcal{C}} = \mathrm{Ex}_{\infty}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{H}_{\mathcal{C}}.$$

这里$\mathcal{S}$ 是所选环境宇宙中的空间的 ∞-范畴。正则拓扑由仅包含一个有效满态射的覆盖生成。完备化是可表对象在

有效群胚实现下的全闭包。其单位是全忠实且正则的。我们将$\mathcal{C}$原始的像中的对象称为原始对象。每个完备对象都有一个原始图册 [41]。

对于完备化中的一个族 $p\colon E \to V$，将其覆盖局部拉回类记为 $\mathcal{M}(p)$。若存在一个覆盖 $X' \twoheadrightarrow X$ 和一个映射 $X' \to V$，使得 $Y \times_X X' \to X'$ 在 X' 上等价于 p 的拉回，则映射 $Y \to X$ 属于 $\mathcal{M}(p)$。在原始基底上检验时，源覆盖已足够，因为完备覆盖都允许进一步取原始图册。在一个可呈示的局部笛卡尔闭 <v15> 范畴中，单值族与有界映射局部类 [18] 相对应。

定义 1（可容许呈示）。当计算表示具备以下数据时，称其为可容许的。

1. 一个普通正则范畴 $\mathcal{C}$，具有稳定不交有限余积，并通过正合／正则完备化呈示普通可实现性拓扑斯 $\mathcal{T}$。*2.* 一个全、重*plete*、对有限极限封闭的正则射影对象覆盖类 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$，以及 $\mathcal{C}$ 中的弱截面族。对于 $\mathcal{C}$ 中每个 $Z \to Y \to X$，存在 $W \to X \in \mathcal{C}$ 以及一个在 Y 上的求值 $W \times_X Y \to Z$。给定 $T \to X$ 和一个在 $\mathcal{C}$ 中、位于 Y 上的映射 $T \times_X Y \to Z$，存在一个正则满态射 $T' \to T \in \mathcal{C}$，以及一个位于 X 上的映射 $T' \to W$，其求值是给定映射的限制。*3.* 一组有限相对截断度的表示族 $p_\lambda\colon E_\lambda \to V_\lambda \in \mathrm{Ex}_\infty\mathcal{C}$，其中有 $V_\lambda \in \mathcal{C}$。类 $M_\lambda := \mathcal{M}(p_\lambda)$ 按包含关系构成有向系统，合起来包含完备化中的每个映射，并且包括由所有单态射构成的指定层级。选取一个共尾有向子系统，其中包括指定的单态射层级，且每个类都包含所有单态射。其成员称为工作层级。因此，每个表示类都包含于某个工作层级。我们要求每个工作层级对恒等态射、像包含、相对对角映射、复合，以及该层级中可复合映射的依赖积封闭。这些积在 $H_{\mathcal{C}}$ 中计算。下文中，λ 表示工作层级的指标。高阶三元组理论中的源代码条件和有界商条件，提供了一种在源中验证这些闭包性质的方法。

最后一项在普通命题三重态之上提供了一个类型值族层级。每个族在原始源中都有其代码基底，在完备化中都有其全空间。

根据引理 2，条件 (1) 和 (2) 确保这些依赖积属于$\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$。条件 (3) 要求每个工作层级都对这些积封闭。

不可达基数给出了编码大小的上界。截断度决定了下述图册构造的深度。令 $X \to V$ 为 n-截断的，且 V 原始，并选取一个原始图册 $A \twoheadrightarrow X$。对于 $n = -1$，子对象 $X \hookrightarrow V$ 是 $A \to V$ 的正则像。对于 $n \geq 0$，考虑 $A \twoheadrightarrow X$ 的核对 $A \times_X A$。其比较映射

$$A \times_X A \longrightarrow A \times_V A$$

是 $X \to V$ 的对角线的一个拉回。其基底是原始的，其全对象根据有限极限封闭性属于完备化，并且其相对高度至多为 $n - 1$。因此，递归给出了 $A \times_V A$ 上的核对表示。其在 A 上的迭代纤维积构成 $A \twoheadrightarrow X$ 的神经，其有效商恢复了 V 上的 X。源的正则性使得对 [28] 以下的高阶源也能采用相同的构造。

2.3 完备化中的依赖积与单值宇宙

根据 Carboni–Rosolini 判据，有限完备源恰好在其精确/有限极限完备化局部笛卡尔闭时具有弱依赖积 [10,14]。Emmenegger 也从丰满性公理的一种范畴形式推导出局部笛卡尔闭性 [15]。我们在每个切片中使用依赖类型记号。X 上的一个类型是到 X的映射，而该类型的一个项是一个截面。对于 $Z \to Y \to X$，$\Pi_{Y/X} Z$ 在 x 处的纤维是 $Z_x \to Y_x$的截面空间。相对对角线解释恒等映射。命题 $\mathsf{isContr}(T) = \sum_{t:T} \prod_{u:T} (t = u)$

断言 T有一个收缩中心。 $T \to 1$ 的像是命题截断 $\|T\|$，它断言 T的一个元素局部存在。

为了应用于相对装配与嵌套装配，我们用截面编码明确描述依赖积。令$\mathcal{H}$ 表示正则层的环境范畴，$\mathcal{E}$ 表示完备化。根据高阶 tripos 理论的投射覆盖判据， [28],在$\mathcal{E}$ 中的依赖积可在$\mathcal{H}$中计算。对于原始投射基底，我们为依赖积构造一个截面编码图册。其核对在任意两个编码上的纤维，是它们所表示的截面之间的路径空间。

引理 2（截面编码的有限下降）。假设定义 *1* 的前两个条件成立。设 $Z \to Y \to X$ 属于 E，且 $Z \to Y$ n是截断的。若 X 是原始投射对象，则存在一个原始 $W \to X$以及一个在 Y 上的求值，它诱导一个覆盖

$$W \longrightarrow S = \Pi^{\mathcal{H}}_{Y/X} Z.$$

这对每个有限 n都成立。对于完备化中的每个基底 X ，截面对象 S 都属于 E。

证明。首先考虑原始基底上的源图表。源对象映射之间的方程可以施加于截面编码。事实上，对于源单态射 $D \hookrightarrow C$ 和 $C \to A$，弱截面对象 $W_0 \to A$在正则层中的像恰为 $\Pi_{C/A} D \hookrightarrow A$ 。求值给出一个包含关系。反过来，在一个可表对象上检验，并利用截面编码的局部提升性质。源对象映射的像由正则性可知就是它们的源像。因此，单态射的有限交和这些积就在源本身中定义了满足任意有限个全称量化方程的编码子对象。

现在取 X 于所选的覆盖类 $\mathcal{P}$ 中，并使用 $\mathcal{P}$ 的成员进行投射测试 T 以及下面的所有投射覆盖。取 $m = n + 1$，于是对于 $n = -1$有 $m = 0$ 。在 X 上的切片中选择一个部分增广半单纯超覆盖 $U_{\le m} \to Y$：在每个次数上，取匹配对象的一个源投射覆盖，即取有限极限来指定 Y之上的所有相容面。根据图册性质和源投射覆盖，这样的覆盖确实存在。由于 X，T，U_k属于 $\mathcal{P}$，有限极限封闭性使每个 $T \times_X U_k$都属于源投射对象类。每个这样的投射对象 P在完备化中仍然是投射对象。事实上，给定一个覆盖 $E \twoheadrightarrow B$ 和一个映射 $P \to B$，取一个原始图册 $A \twoheadrightarrow P \times_B E$。复合映射 $A \to P$ 是源中的一个覆盖，因此它有一个截面。将此截面与 $A \to E$ 复合，即得到所需的提升。

令 $D_k = U_k \times_Y Z$。对于位于$\mathcal{E}/X$中的半单纯图表 $L_\bullet$，令 $M_k L$ 为该切片中其次数为 k 的边界图表的极限，其中 $M_0 L = X$。通过在每一步取一个投射覆盖，选取相对投射分解 $V_{\le m} \to D_{\le m}$

$$V_k \twoheadrightarrow D_k \times_{M_k D} M_k V$$

。复合映射 $V_k \to U_k$ 在普通源中构成一个有限图表。取这些映射在 X上的弱截面对象，将它们取积，并按照前述构造施加所有面方程。这就得到一个原始参数对象 W，用于相容的逐级截面。一个取值于 $T \times_X Y$、具有 T 原始投射对象的相干截面，给出 T上方 W 中的一个点：从每个投射对象 $T \times_X U_k$出发，沿相对匹配覆盖逐步提升。匹配对象会强制满足先前选定的面。所得源对象之间的映射空间是离散的，因此它们的面相容性恰好就是定义W时所用的方程。每个次数上的弱码都可以选在 T 上，因为 T 将源覆盖分裂。

反过来，通用相容截面给出了一个从$\mathcal{H}$中 $W \times_X U_{\le m}$ 的部分实现到 Z 在 Y 上的映射。沿此部分分解作限制，在 n截断族的截面上是一个等价。为此，利用匹配覆盖继续构造半单纯形分解。在 Grothendieck ∞-拓扑$\mathcal{H}/W$ 中，由此得到的超覆盖具有无限连通增广 [41]。因此，在 $W \times_X Y$上，根据与截断映射的正交性，截面空间彼此对应。在 $k > m$次中，给定边界后，跨越一个k-单形的扩张空间是可缩的。事实上，对于一个 n-类型 D，当 $k - 1 > n$时，将每个点映射到相应常值映射的映射 $D \to D^{S^{k-1}}$ 是一个等价。当 $n = -1$时，这一论证同样适用，此时一个命题至多有一个元素。实现和匹配覆盖条件与$\mathcal{H}$中的基变换相容。这给出了所述在 W 上的求值，并确定了以下对象的求值：

每个刚构造出的提升与原截面相对应。原始投射对象覆盖$\mathcal{H}$的可表生成元，因此 $W \to S$ 是一个有效满态射。任意原始正则射影对象 X 都是某个$P \in \mathcal{P}$ 的收缩，这是通过分裂一个覆盖得到的。将 $Y \to X$ 与由此得到的单态射 $X \hookrightarrow P$复合。将刚才在 P 上得到的截面代码限制回 X ，根据依赖积和覆盖的基变换，便得到所述的原始代码。

现在通过对 n 归纳来证明 S 属于$\mathcal{E}$ ，并允许每个阶段采用所有基底。在次数 -1 的原始投射基底上，S 是 $W \to X$ 的像。对于 $n \geq 0$，关系 $W \times_S W \to W \times_X W$ 是在 Y 上对两个取值截面之间的恒等态射族取依赖积。该族是 $(n-1)$-截断的。根据归纳，关系属于$\mathcal{E}$。其高阶神经项是有限纤维积，因此其有效商 S 也属于$\mathcal{E}$。

最后，为任意完备化基底选取一个投射覆盖 $P \to X$ 。前述论证表示 $S_P = P \times_X S$。其下降图的所有高阶项均可表示，因为在单纯形次数 k 下，该项为 $S_P \times_P P^{\times_X (k+1)}$，并使用其到 P 的第一投影。它们的有效商为 S。这就对所有基底完成了归纳。□

命题 3（有限高度逻辑完备化）。可容许呈示给出一个有界正合初等 ∞-拓扑斯$E_{\mathcal{C}}$，并且

$$(\mathcal{E}_{\mathcal{C}})_{\leq 0} \simeq \mathcal{T}.$$

单位识别原始映射空间和子对象格，并保留已有的依赖积。~每个对象都被某个原始零类型覆盖。对于每个层级，都存在一个单值族 $u_\lambda : U_\lambda \to U_\lambda$ ，其

$$\mathrm{Map}(X, U_\lambda) \simeq \big((\mathcal{E}_{\mathcal{C}}/X)_{\mathcal{M}_\lambda}\big)^{\simeq}.$$

这里，$(-)^{\simeq}$ 表示极大 ∞-群胚。此公式中的对象是 X 上的 M_λ-族，其路径是 X 上的等价，而更高阶路径则是这些等价之间的同伦。若该上同调类具有相对界 n，其分类器便是一个 $(n+1)$ 类型。该层级在相干等价意义下是累积的。

证明。 正则层构造将完备化识别为其源的全正合闭包。对于普通源，它是有界的：有界对象包含该源，并且在有效群胚实现下封闭，因为零次对象和箭头对象根据图册和对角线判据 [41] 界定了商的次数。引理 2 给出所有依赖积，并在正则层中计算它们。

在每个呈示族的截断度处应用单族重构 [28]。引理 2 提供该度处所需的截面编码。对于一个呈示 $E \to V$，构造其两个拉回到 $V \times V$ 后所得对象之间等价的内部对象。依赖积给出纤维映射对象。对于映射 $f\colon A \to B$，取由以下两种配对构成的空间之积：$(g,\ gf \simeq \mathrm{id}_A)$ 和 $(h,\ fh \simeq \mathrm{id}_B)$，其中 $g,\ h\colon B \to A$。这些是复合映射的同伦纤维。在任意测试对象上，该积中的一个点同时给出 f 的左、右同伦逆，因此 f 在该切片中是一个等价。在这种情况下，逆的两个空间都是可缩的，因为由 f 复合在映射空间上给出等价。由此构造出所需的子对象。结合律相干的复合给出一个群胚，其对象空间为 V，而这些等价作为箭头。更明确地说，它的 k-单纯形是可复合的 k 个等价所构成的序列，并配有切片范畴核心中的通常复合映射。其商 U 以该群胚作为 $V \twoheadrightarrow U$ 的神经。

群胚通过求值作用于的拉回发现作用神经得到一个族 $U \times U$ 拉回后，有效性将 U~中编码之间的路径与 $E \to V$ 中相应纤维之间的等价对应起来。随后通过沿 $U \times U$ 下降即可得到单值性。

族的局部表示现在给出到 U 的映射，因为重叠部分上的等价及其所有相容性构成了此映射的下降数据。反过来，到 U 的映射有到 V 的局部提升，且其拉回属于所表示的类。这证明了命题中的空间等价。对于高度为 n 的纤维，它们之间的等价是 n-截断的，因此 U 的高度至多为 $n+1$。类的包含通过表示性质诱导累积比较，其中也包括它们的复合相容性。

对于原始对象 A，完备子对象有一个原始图册 P，且是$P \to A$的正则像，因此也是原始的。零类型 X 有一个原始图册 $A \twoheadrightarrow X$。因此，其核对是一个普通等价关系 R，$\to A \times A$。反过来，此类关系的有效商是一个零类型，因为沿图册的平方拉回后，其对角线是单态射。对于第二个表示 $B \twoheadrightarrow Y$，其核对为 S，将图拉回到 $A \times B$ 后得到一个原始关系；该关系在 R 和 S 下不变，在 A 上全定义，并且模 S 意义下是单值的。反过来，这样的关系下降为 $X \times Y$ 的一个子对象。其到 X 的投影由全定义性可知是覆盖，由单值性可知是单态射，因此它是唯一映射的图。这就是对象与态射层面的普通精确/正则完备化。通过 Yoneda 嵌入到正则层中，单位是全忠实的。现有的源依赖积通过伴随，在可表对象测试上表示环境中的依赖积，因此由稠密性可知二者一致。普通子对象分类器也能分类高阶语境中的单态射：在原始图册上进行分类，在其重叠部分上下降特征映射（并在这些重叠部分上同样使用原始图册），再利用目标分类器是一个集合这一事实。由此实现指定单态射层级。

我们从源对象 0 和 2 入手，在完备化中内在地构造有限和。如引理 2 的证明所示，原有的正则射影对象在完备化中仍然是正则射影对象。从这类射影对象出发的映射保持覆盖和有限极限，因此也保持有效群胚商。源对象 0 和 $2 = 1 \amalg 1$ 是射影的。对于一个原有对象 X，从 0 到 X 的映射空间是可缩的，而从 2 到 X 的映射相当于 X 的一对全局截面。这些恒等关系可延拓至群胚商，使 0 成为初对象，并使 $2 = 1 \amalg 1$ 在完备化中内在地成立。对于任意 X，Y，选取一个将它们分类的共同宇宙；它们的两个编码给出一个族 $F \to 2$。在 2 上的切片中，两个点包含的余积就是 2 上的恒等映射。拉回到 F 保持这个余积，因为它有右伴随；复合到终端上下文也保持它，因为它是左伴随。因此 $F = X \amalg Y$。不交性可由拉回两个源包含到 2 的不交性得到。□

余域教义。取 $\mathbb{D}_{\mathcal{C}}(X) = \mathcal{C}/X$，其重索引由拉回给出，依赖和由复合给出。对于原始基底上的一个完备截面问题，用一个原始对象覆盖其依赖积，并将求值限制到该覆盖上。沿参数化截面的转置拉回该覆盖，便得到一个局部编码，以及族上从其求值到给定截面的同伦。当参数是原始的时，通过原始图册细化，可在源中得到一个覆盖。这种对截面的局部表示，包括表示它们之间恒等态射的较低高度问题，在给定高度上具有相干满性 。根据假设，弱宇宙具有原始代码基，其五类闭包为逻辑运算 [28]提供了源局部编码。这些数据赋予 $\mathbb{D}_{\mathcal{C}}$ 高阶 tripos 结构。应用高阶 tripos 到 topos 构造 T_∞，得到 $\mathrm{T}_\infty\mathbb{D}_{\mathcal{C}} \simeq \mathcal{E}_{\mathcal{C}}$。对于组装源，令 ∇I 为集合 I 上的余离散组装，其中每个点在每一层都具有完整的名称集合。教义$I \mapsto \mathcal{C}/\nabla I$ 记录类型值纤维及其相干映射。在每个纤维中取终对象的子对象，得到 $I \mapsto \mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(\nabla I)$，即该组装表示的普通实现三元组。

参数化截面的跟踪器。遵循 Hofstra [19], ，取一个带滤子的有序部分组合代数（OPCA）$(A, \leq, \cdot\ A')$。组装的名称属于 A，全局跟踪器属于滤子 A'。分割组装具有指定的名称 $\nu(x)$，并由 $\downarrow \nu(x)$实现 x。这类组装构成有限极限闭射影覆盖。 x 上的截面对象载体由那些存在属于 A的跟踪器的截面组成。一个截面的名称构成了如下各对 s, a 的向下闭包，其中 s 是 x 的一个名称，而 a 是该截面的一个跟踪器。设 h 跟踪从参数对象到基底的映射，且 d 跟踪成对输入上的求值。固定一个括号抽象 $c \in A'$，用于 $\lambda d\, r\, b.\, dr, b$，并令 $\sigma(d, r) = cdr$。于是，只要右侧有定义，$\sigma(d, r)b \leq dr, b$。因此，$\sigma(d, r)$ 跟踪参数名称 r处的纤维截面，而 $r \mapsto hr, \sigma(d, r)$ 跟踪转置。

附录 A 中的定理 63 为相对装配与嵌套装配构造了相应的单值层级。不可达基数限制了名称集和有限图表的大小。纤维高度决定了表示一个截面所需的匹配层级数。在嵌套可实现性中，一个实际层跟踪器会统一作用于潜在层和实际层名称。

3 有限截断高度下的 Lawvere–Tierney 层化

完备化具有与其普通核心相同的命题分类器。因此，该分类器上的核已经指定了任意高阶语境的哪些子对象是稠密的。我们从命题上的核作用出发，根据恒等类型的反射构造高阶类型的反射。

设 $\mathcal{E}$ 是一个具有上述闭层级的有界正合初等 ∞-拓扑斯。Lawvere–Tierney 核是一个映射 $j\colon \Omega \to \Omega$，使得所有内部真值 P, Q 都满足

$$P \le jP, \qquad j(jP) = jP, \qquad j(P \wedge Q) = jP \wedge jQ, \qquad j\top = \top.$$

这些定律在每个语境中都成立。对于特征映射为 $\chi_P\colon B \to \Omega$ 的子对象 $P \hookrightarrow B$，其 j-闭包 P^j 的特征映射为 $j \circ \chi_P$。当对每个语境中的每个真值 P 都有 $jP \Rightarrow kP$ 时，我们记作 $j \le k$。当 $P^j = P$ 时，子对象 $P \hookrightarrow B$ 是 j-闭的；当它作为 B 的子对象满足 $P^j = B$ 时，则是 $\overline{j}$-稠密的。若一个类型与稠密单态射右正交，且满映射空间等价，则称其为 j-局部的。在内部，这可表述为命题

$$\mathrm{Loc}_j(X) = \prod_{P:\Omega} \big(jP \to \mathrm{isEquiv}(X \to X^P)\big).$$

所有定义也在切片中，使用诱导核来给出。事实上，若 $D \hookrightarrow B$ 是稠密的，则它在每个 $b\colon B$ 处的纤维 P_b 都满足 jP_b。所示条件通过在每个 b 处取 $X \to X^{P_b}$ 的逆映射，将映射 $D \to X$ 延拓出去。反过来，对于任意语境中的命题 P，将语境限制到子语境 jP。在那里，P 是稠密的，并且在每次进一步拉回后仍保持稠密。Yoneda 引理表明，X 在所有这些检验上的正交性，使常值映射比较成为 jP 上的一个等价。

对于单值层级 U_λ中的代码 v，记 $\mathrm{El}(v)$ 为其泛族在 v处的纤维。子类型$U_{\lambda,\,\le n} = \sum_{v:\,U_\lambda} \mathrm{isTrunc}_n(\mathrm{El}(v))$ 分类其 n- 截断族。这里，$\mathrm{isTrunc}_{-1}(X)$ 是 $\prod_{x,\,y:\,X}(x = y)$，而 $\mathrm{isTrunc}_{r+1}(X) = \prod_{x,\,y:\,X} \mathrm{isTrunc}_r(x = y)$，其中 $r \ge -1$。这些断言都是命题：第一阶段的见证使 X 成为一个命题，并且只要存在端点，其恒等态射就是可缩的；归纳步骤则使用函数外延性。因此，到 U_λ 的包含是单态射。单值性将子类型中的恒等态射与 n-型之间的等价对应起来；这些型本身是 n-截断的，从而得到界限 $n+1$。

引理 4（局部单值子宇宙）。令$U_{\lambda,\,\le n}$ 分类包含所有单态射的封闭层级中的 n-截断族。子宇宙

$$U^j_{\lambda,\le n} = \sum_{v:U_{\lambda,\le n}} \mathrm{Loc}_j(\mathrm{El}(v))$$

是 j-局部的。其本 *tautological* 族是由局部类型构成的族。

证明。 在任意语境中工作，并设 P 是一个稠密命题。族 $F\colon P \to U^j_{\lambda,\,\le n}$ 可扩张为类型 $\prod_{p:P}\mathrm{El}(F(p))$. 由依赖积闭性以及包含所有单态射可知，它属于同一层级。它是一个 n-型，并且是局部的，因为局部族在依赖积下封闭：借助积伴随和稠密单态射的拉回稳定性来检验正交性。在 P 上，该扩张与原族等价。反过来，由局部性，常值族 X 的扩张是 $X^P \simeq X$。单值性将这些等价转化为分类器的逆映射，包括所有恒等数据。这证明了所示子宇宙在每个语境中的正交性。□

定理 5（有界 Lawvere–Tierney 层化）。上述每个核 j 都有一个左正合反射

$$a_j : \mathcal{E} \rightleftarrows \mathcal{E}_j : i_j$$

到其局部类型。它保留每个有限截断界，对命题的作用为 j，并且在切片中稳定。范畴 E_j 有界、正合且局部笛卡尔闭，并具有一个穷尽的闭层级单值宇宙。对于 λ 层级的每个族，局部宇宙 U^j_μ 分类其反射，其中 $M_\lambda \subseteq M_\mu$。

证明。 利用 Quirin 和 Tabareau 的单例构造 [33], ，我们通过对截断度进行归纳，在每个切片中构造反射子。在每个后继阶段，我们取单值层级中局部化单点映射之像的 j 闭包。对于每个 n-类型 X，单位 $X \to a_n X$ 到所得局部 n-类型的映射诱导出一个等价

$$\mathrm{Map}(a_n X, Q) \simeq \mathrm{Map}(X, Q) \quad \text{for every bounded local } Q. \tag{3}$$

局部目标 Q 可以具有任意有限截断次数，且与 n无关。在同一归纳过程中，我们证明了基变换下的稳定性以及对有限乘积的保留性。

若 $S \to Z$ 是 j-闭的，且 Z 是局部的，那么 S 是局部的。事实上，给定一个稠密单态射 $D \to T$ 和一个映射$D \to S$，利用 Z的局部性，将复合映射 $D \to S \to Z$ 扩张到 T。其扩张下 S 的逆像是闭的，且包含 D，因此等于整个 T。经由该单态射的分解空间是可缩的。这在每个切片中都成立。特别地， jP 是局部的，因为它是1的闭子对象。对于 $n = -1$ ，取 $a_{-1}P = jP$。单位是稠密单态射，因此由正交性得到 (3)；其余断言由核公理给出。

局部化单点集。 假设该构造已完成至 n，并令 T为一个 $(n+1)$-类型。穷尽性使整个族 $(x,\ t) \mapsto a_n(x = t)$ 位于 $T \times T$上方的同一层级中。其分类映射取值于引理 4 的局部子宇宙。构造

$$\sigma : T \longrightarrow Z = (U^{j}_{\lambda,\le n})^{T}, \qquad \mathrm{El}(\sigma(x)(t)) \simeq a_n(x = t).$$

类型 Z 是局部的且是 $(n+1)$-截断的。将 σ 分解为 $T \twoheadrightarrow S \to Z$，并定义 $a_{n+1}T$为 Z中 S的 j-闭包。令 $\eta_T \colon T \to a_{n+1}T$ 为复合映射 $T \twoheadrightarrow S \to a_{n+1}T$。局部类型的闭子对象是局部的，且子对象保留其截断界。因此， $a_{n+1}T$是局部的 $(n+1)$-型，且 $S \to a_{n+1}T$是稠密的。

单点之间的路径。 为了计算从 $\sigma(x)$ 到 $\sigma(y)$ 的路径类型，我们利用如下事实：两个局部类型之间的等价类型是局部的。将一个等价表示为一个函数，并为其配备一个左逆和一个右逆，各自都带有见证同伦。这个全空间是余域为局部类型的函数类型的有限极限，因此是局部的。写作 $F_x(t) = a_n(x = t)$。相对归纳假设与依赖 Yoneda 引理给出

$$\prod_{t:T} (F_x(t) \to F_y(t)) \simeq \prod_{t:T} ((x = t) \to F_y(t)) \simeq a_n(y = x).$$

我们断言，左侧的每个映射族 $F_x(t) \to F_y(t)$ 都由等价构成。对于 $p : y = x$，与 p 作前复合会得到纤维等价 $F_x(t) \simeq F_y(t)$。它们的类型 $\prod_t \mathrm{Equiv}(F_x(t)\ F_y(t))$ 是局部的，因此归纳伴随将此指派扩张到 $a_n(y = x)$。Yoneda 比较会在 $t = x$ 处对 refl_x 的单位求值。由路径归纳可知，它在给定变换上的值是 p 的单位。因此，该扩张是遗忘等价数据并应用 Yoneda 的右逆。由于「是等价」是一个命题，此遗忘映射是单态映射，因而是等价。反转路径 p 后，单值性和函数外延性给出，对 $x,\ y$ 一致成立，

$$(\eta_T x = \eta_T y) \simeq a_n(x = y). \tag{4}$$

映射 ap_{η_T} 将 T 中的一条路径映射为其在 η_T 下的像。在此比较下，它就是阶段-n 单位，因为路径归纳将该断言归约为刚刚算出的自反路径处的求值。对于 S 中的两个像，同样的计算也成立，因为 S 和 $a_{n+1}T$ 都是 Z 的子对象。

下降到像。令 $R_\bullet$ 为 $T \twoheadrightarrow S$ 的 Čech 神经。具有重复顶点的对角映射给出一个单纯映射 $d_\bullet \colon \mathrm{const}(T) \to R_\bullet$。在 T^{k+1} 上，其次数为 k 的映射的纤维为

$$\prod_{r=1}^{k} (t_0 = t_r) \longrightarrow \prod_{r=1}^{k} (\eta_T t_0 = \eta_T t_r).$$

对于 $k \geq 1$，根据 (4)、乘积保持和基变换，这就是阶段-n 单位。对于 $k = 0$，它就是恒等映射。对于任意有界局部 Q，取 $T^{k+1} \times Q$ 作为在 T^{k+1} 上的局部目标。相对归纳伴随将沿 d_k 的限制识别为一个等价 $\mathsf{Map}(R_k, Q) \to \mathsf{Map}(T, Q)$。由于这些限制由 $d_\bullet$ 诱导，它们给出了一个从余单纯空间到 $\mathsf{Map}(T, Q)$ 上常值图表的映射。有效性现给出

$$\mathrm{Map}(S, Q) \simeq \lim_{[k] \in \Delta} \mathrm{Map}(R_k, Q) \simeq \mathrm{Map}(T, Q).$$

限制 沿稠密单态射 S，$\to a_{n+1} T$ 对局部 Q 是一个等价，从而证明了 $n+$ 处的 (3) 1.

该构造是在任意切片中进行的。对于 $g : B \to C$，拉回保持局部族：其左伴随，即与 g 的复合，将 B 上的稠密单态射映至 C 上相同的稠密单态射。此外，若 Q 是 B 上的局部对象，则根据与拉回的稠密单态射的正交性，$\Pi_g Q$ 是 C 上的局部对象。因此，积伴随表明 $g^* a_{n+1} X$ 与 $a_{n+1} g^* X$ 具有相同的反射泛性质。通过对局部目标进行两次柯里化，并利用余域为局部对象的指数对象的局部性，可得有限乘积保持。伴随的唯一性保证了所有代换相容性和乘积相容性。

拉回的保持。根据 (3)，相邻阶段的运算在其共同定义域上相一致。由于每个对象都是有限截断的，它们可组装成一个反射。当基底为局部对象时，局部族在依赖和下封闭：将到局部基底的映射沿稠密单态射扩张，然后扩张其在所得局部纤维族中的截面；这两种扩张的选择空间都是可缩的。因此，这是一个模态。对于固定宇宙上的模态，路径比较等价于保持拉回[36]。下面的论证允许反射后的族处于更大的工作层级。记 L 为该反射。对于局部族 $D \to LA$，D 和 LA 都是局部对象。在到 $D \to LA$ 的映射所对应的限制方块中，取 $_{LA}$ 和 η_A 处的纤维，可知 D 在 LA 上的截面限制到 A 上的截面是等价的。此论证在每个参数切片中都成立。

对于 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ 置 $R = LX \times_{LZ} LY$。对于局部 Q，映射 $R \to Q$ 是以下内容的一个项

$$\prod_{x' : LX} \prod_{y' : LY} \big((Lf(x') = Lg(y')) \longrightarrow Q \big).$$

进入 Q 的函数类型是局部的，局部族的依赖积也是局部的。根据前述论证，依次沿着η_X 和 η_Y限制截面。对于 $x :\ X$ 以及 $y :\ Y$，(4) 将剩余的路径类型与该语境中的 $L(f(x) = g(y))$ 相识别，并且与单位相容。根据相对伴随，沿此单位进行前复合，将从反射后的路径类型到 Q 的函数与从 $f(x) = g(y)$ 到 Q 的函数相识别。这些等价将沿 $X \times_Z Y \to R$ 的限制识别为到 Q 的映射空间之间的等价。由于 R 由有限极限封闭性可知是局部的，它就是 $X \times_Z Y$ 的反射。终对象同样是局部的，从而证明了左正合性。

局部范畴及其宇宙。反射环境群胚商给出了它们在 $\mathcal{E}_j$ 中的商。左正合性证明了它们的有效性和基变换稳定性。局部对象之间的依赖积可在环境中计算，这归因于 a_j 的积伴随和左正合性。有限余积是被反射的余积。左正合性给出不交性，其中在拉回计算中使用了局部范畴的始对象。

设 n_λ 界定 u_λ 的纤维的截断度。则 $U_{\lambda,\ \leq n_\lambda} \to U_\lambda$ 是一个等价。因此，该层中局部类型的编码子类型为

$$U_\lambda^j := \sum_{v : U_\lambda} \mathrm{Loc}_j(\mathrm{El}(v)) \simeq U^j_{\lambda, \leq n_\lambda}.$$

将 u_λ 限制到 U_λ^j。根据引理 4，其基底是局部的；其全空间也是局部的，因为其纤维和基底都是局部的。对于局部基底，它恰好分类全局$\mathcal{M}_\lambda$-映射中全空间局部的那些。事实上，若一个映射的两个端点都是局部的，那么沿稠密单态射扩张截面，等价于这两个映射的

端点映射空间等价。因此，其族在切片中是局部的。分类和单值性给出了所述的族全空间之间的等价。

为了解局部范畴中的覆盖局部性，假设某个映射沿局部覆盖 $B' \twoheadrightarrow B$ 的拉回是小的。根据单值性，它在该覆盖的 Čech 神经上的限制给出局部分类器中的相容编码。局部范畴中的有效性将这些编码下降为 B 上的一个编码。其解码所得的族与原族等价：它们的拉回及所有转移等价在该神经上相同，而且实现这些拉回神经后，会得到它们在 B 上的全空间。因此，局部范畴内在的覆盖为小族提供了下降。复合和相对对角映射按环境方式计算，局部对象之间的依赖积也是如此。局部范畴中的像包含是单态射，因此属于每个工作层级。具体而言，它是环境像的闭包。这些类是有向且穷尽的，而它们的累积映射由分类相干地给出。因此，它们构成所断言的闭层级。在单态射层级，命题 P 是局部的，当且仅当 $jP = P$。局部性将其恒等映射沿稠密单态射 P 延拓，$\to jP$，反之则由闭性得出。因此，局部子对象分类器是 $\Omega_j = \sum_{P:\ \Omega} (jP = P)$，其中真值是其泛单态射。根据命题外延性，其典范全空间是可缩的。□

推论 6（局部化下的普通恢复）。假设 $\mathcal{E}$ 是零复合单纯的，且 $\mathcal{E}_{\le 0} = \mathcal{T}$。那么

$$(\mathcal{E}_j)_{\le 0} \simeq \mathrm{Sh}_j(\mathcal{T}).$$

证明。 包含 i_j 保留并反映截断。因此，局部零类型是普通的 j-层：只需在普通稠密单态射上检验正交性。反过来，设 Q 是普通的 j-层。正合范畴中存在有限截断，且可在其正则层表示 [41]中计算。由于 Ω 是零截断的， X 的子对象与 $\tau_{\le 0} X$的子对象相对应；单态射及其闭包可通过拉回 $\tau_{\le 0} X$上的相应单态射及闭包得到。从该拉回到普通子对象的映射是 0-连通截断单位的基变换，因此是 0-连通的。故其目标是该拉回的零截断。因此，稠密单态射 A , $\to B$ 诱导出普通稠密单态射 $\tau_{\le 0} A$, $\to \tau_{\le 0} B$。到 Q的映射可经由这些零截断分解。因此，普通层的正交性给出：对于高阶范畴中的每个稠密单态射，均有 $\mathrm{Map}(B,\ Q) \simeq \mathrm{Map}(A,\ Q)$。因此，局部零类型恰好就是普通层。□

4 表示无关性与语境变换

对普通可实现性拓扑斯作层化，再取其高阶完备化，所得高阶范畴与对完备化作层化所得的高阶范畴典范等价。局部化保留了命题 3 中由零类型构成的覆盖。切片提供了另一种改变模型的方式。新基底上的同伦纤维决定了其图册的相对高度。

根据 Stefanich 的识 别定理 [41]„ 对于有界、零复合单纯的精确 ∞-范畴 $\mathcal{E}$, 典范 l 正则函子

$$\mathrm{Ex}_\infty(\mathcal{E}_{\le 0}) \longrightarrow \mathcal{E}$$

是一个等价。反过来，同一结果也表明，普通正则范畴的高阶精确完备化具有有界性和零复合单纯性。其零类型构成普通精确/正则完备化 [41]。

4.1 组装表示的独立性

命题 7（先进行普　通精确完备化）。设 $\mathcal{C}$ 是一个普通正则 r 范畴，并令 T $=\mathrm{Ex}_{1,\mathrm{reg}}(\mathcal{C})$。典范正则函子诱导出一个等价

$$\mathrm{Ex}_\infty(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Ex}_\infty(\mathcal{T}).$$

这一等价对于普通源范畴的正则函子是自然的。因此，当一个组装范畴通过正合／正则完备化表示一个普通可实现性拓扑斯时，任一源范畴都会给出同一个高阶正合范畴。

证明。 设 $\mathcal{D}$ 是任意正合 ∞-范畴。其全子范畴 $\mathcal{D}_{\leq 0}$ 是一个普通的 Barr-精确范畴。特别地，对于零类型 A 上的一个普通等价关系，其有效商的对角线沿着从 $A \times A$ 到关系单态射的覆盖拉回。因此，对角线是单态的，而商再次是一个零类型。零类型之间映射的像是零类型的子对象。由此可知，包含函子在其对象之间保持并反映有限极限和正则满态射。从一个普通范畴到 $\mathcal{D}$ 的保有限极限函子取值于$\mathcal{D}_{\leq 0}$ ，因为它保持刻画零截断性的迭代对角条件。包含的满性还确定了自然变换的空间。因此，普通的精确／正则泛性质给出自然等价

$$\begin{aligned}\mathrm{Fun}_{\mathrm{reg}}(\mathcal{C},\mathcal{D}) &\simeq \mathrm{Fun}_{\mathrm{reg}}(\mathcal{C},\mathcal{D}_{\leq 0})\\ &\simeq \mathrm{Fun}_{\mathrm{reg}}(\mathcal{T},\mathcal{D}_{\leq 0})\\ &\simeq \mathrm{Fun}_{\mathrm{reg}}(\mathcal{T},\mathcal{D}).\end{aligned}$$

对两个端点应用高阶精确完备化泛性质即可证明该断言。自然性源于限制的自然性以及两个泛性质的自然性。□

注 *8*（大小层级的传递）。一个宇宙层级由其所分类的小映射的上同调类决定。该等价同时传输每个这样的上同调类及其分类族。当大小约定选出相同的上同调类时，这就确定了不同载体呈示之间相应层级的对应关系。

4.2 识别有界反射局部化

命题 9（由零类型重构反射）。设 $\mathcal{E}$ 是有界的、正合的且零复合单纯的，并且令

$$a : \mathcal{E} \rightleftarrows \mathcal{D} : i$$

是一个左伴随为左正合的反射嵌入。则 $\mathcal{D}$ 是有界的、正合的且零复合单纯的，并且存在一个典范等价

$$\mathcal{D} \simeq \mathrm{Ex}_{\infty}(\mathcal{D}_{\leq 0}).$$

特别地，设 T 是一个普通初等拓扑斯， j 是 T 上的 *Lawvere–Tierney* 拓扑，并且已在 $E = \mathrm{Ex}_{\infty}(T)$ 上构造出一个左正合反射式 j层化，其零类型恰为$\mathrm{Sh}_j(T)$。那么

$$\mathrm{Sh}_j(\mathrm{Ex}_{\infty}(\mathcal{T})) \simeq \mathrm{Ex}_{\infty}(\mathrm{Sh}_j(\mathcal{T})).$$

对于一个可容许的呈现，定理 *5* 构造了这个反射子，推论 *6* 则刻画了它的零类型 .

证明。 $\mathcal{D}$ 中的有限极限由其全忠实右伴随计算。对于$\mathcal{D}$中的群胚对象 $R_\bullet$ ，在$\mathcal{E}$ 中实现$iR_\bullet$ 并应用 a。由于 a 是左伴随，这就计算出了$\mathcal{D}$中的实现。由于 a 保持有限极限，它将该群胚与其商的 Čech 神经之间的等价映射为$\mathcal{D}$中的相应等价。为证明稳定性，记 $S = |iR_\bullet|$ ，并取$\mathcal{D}$中的 $Z \to aS$ 。在$\mathcal{E}$ 中，拉回后的图表实现为 $S \times_{iaS} iZ$，这是沿 $S \times_{iaS} iZ \to S$对 $iR_\bullet$ 作基变换所得。对其实现施加反射得到 $aS \times_{aS} Z \simeq Z$。因此$\mathcal{D}$ 是正合的，且 a 保持有效满态射。

a 和 i 都保有限极限，因此也保截断。$\mathcal{E}$ 的有界性蕴含$\mathcal{D}$的有界性。对于 $X \in \mathcal{D}$，取一个覆盖 $A \twoheadrightarrow iX$ ，其对象是$\mathcal{E}$中的零类型 A 。应用 a 可得$\mathcal{D}$中的零类型aA 所给出的覆盖 $aA \twoheadrightarrow X$ 。因此$\mathcal{D}$ 是零复合单纯的。识别适用于$\mathcal{E}$ 和$\mathcal{D}$。在所得等价之下，反射子是 $a_{\leq 0}$ 的正则延拓：$\mathcal{E}_{\leq 0} \to \mathcal{D}_{\leq 0}$，因为 a 是正则的，且精确完备化泛性质确定了该延拓。其全忠实右伴随随后由伴随关系确定。取普通反射为 j-层化，即得第二个等价。□

推论 10（切片　　在普通基底上）。设 T 是一个普通正合范畴，且令 $B \in T$。则

$$\mathrm{Ex}_{\infty}(\mathcal{T}/B) \simeq \mathrm{Ex}_{\infty}(\mathcal{T})/B.$$

证明。 右侧的切片是有界且正合的。对象在 B 上的一个原始图册 $A \twoheadrightarrow X$ 是该切片中的一个图册；由于 A 和 B 是零截断的，作为该切片中的对象， $A \to B$ 也是零截断的。其零型范畴为 $\mathcal{T}/B$。应用识别定理。 □

注 *11*（在更高基底上的图册维数）。对于非零阿贝尔群 G，考虑有界空间中位于 $K(G,2)$ 上的基点对象 $* \to K(G,2)$。由于基底是连通且单连通的，每个零截断的族都是常值局部系统 $S \times K(G,2) \to K(G,2)$。从该族到基点对象的映射，为每个 $s \in S$ 指定 $K(G,2)$ 的恒等映射的一个零伦。由于恒等映射在 π_2 上诱导出非零映射 id_G ，这迫使 $S = \varnothing$。基点对象在基点处的纤维为 $K(G,1)$，并且自身提供了一个高度为一的图册。因此，一就是最小图册高度。定理 30 将这一环空间计算推广到了更高次数。

4.3 局部化与切片的交换

定理 12（任意基底上的切片局部化）。设 $a\colon\ E \rightleftarrows D\colon\ i$ 是有限完备 ∞-范畴的一个反射嵌入，其中 a 左正合，并且令 $B \in E$。存在一个左正合反射局部化

$$a_B : \mathcal{E}/B \rightleftarrows \mathcal{D}/aB : r_B$$

由……给出

$$a_B(X \to B) = (aX \to aB), \qquad r_B(Y \to aB) = (B \times_{iaB} iY \to B).$$

局部映射 $p\colon\ X \to B$ 恰好是单位的自然性方块为笛卡尔的映射，等价地

$$X \longrightarrow B \times_{iaB} iaX$$

是一个等价。

若 E 有界，且 a 是一个拓扑 j-层化，则将其诱导的切片拓扑记作 j_B 。当其底层单态射为 j-稠密时， j_B 上的单态射恰好是 j_B-稠密的。于是

$$\mathrm{Sh}_{j_B}(\mathcal{E}/B) \simeq \mathrm{Sh}_j(\mathcal{E})/aB.$$

对于 $B \in D$，这可特化为

$$(\mathrm{Sh}_j(\mathcal{E}))/B \simeq \mathrm{Sh}_{j_B}(\mathcal{E}/iB),$$

右侧的局部对象恰好是指向 iB 且全空间为局部对象的映射。对于普通的 *Lawvere–Tierney* 算子，切片子对象分类器上的诱导算子为 $j \times \text{恒等}_B\colon\ \Omega \times B \to \Omega \times B$。

证明。 对于 $X \to B$ 和 $Y \to aB$，由伴随 $a \dashv i$ 和拉回的泛性质可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Map}_{\mathcal{D}/aB}(aX, Y) &\simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{E}/iaB}(X, iY) \\ &\simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{E}/B}(X, B \times_{iaB} iY).\end{aligned}$$

这里， $X \to iaB$ 是 $X \to B$ 与 B的单位的复合映射。这就证明了该伴随。其余单位是一个等价，因为左正合性给出

$$a(B \times_{iaB} iY) \simeq aB \times_{aB} Y \simeq Y.$$

因此， r_B 是全忠实的。单位就是所示的比较映射，因此它的可逆性给出了局部映射的上述刻画。 a_B 的左正合性由 a 的左正合性以及有限极限的切片公式推出。

对于拓扑断言，若一个切片对象与底层单态射为 j-稠密的单态射正交，就称它为局部对象。根据伴随，每个 $r_B Y$ 都具有这一性质，而且这些正交条件在有限极限下封闭

。我们断言，局部切片对象之间一个被 a_B 反转的映射 f 已经可逆。由有界性，其相对截断度有限。若 f 是单态的，则其底层单态射被 a 反转，因此 f 稠密。沿 f 的限制于是给出到任一端点的映射之间的等价，从而得到逆映射。在更高的次数下， Δf 介于局部对象之间，其相对度较低，并由左正合性反转。归纳可知 Δf 可逆，因而单态情形适用于 f。对于局部的 X ，将此断言应用于单位 $X \to r_B a_B X$。这就将内禀切片局部性与 r_B 的像相对应。当 B 是局部对象时，其单位是等价，因此 r_B 化为包含。

最后，切片中单态射的特征谓词是其普通特征谓词与到 B 的映射的结合，因此切片闭包算子为 $j \times \mathrm{id}_B$。□

4.4 按环境拓扑进行切片与局部化的标准形

定理 13（下降局部化与切片的标准形）。设 E 是一个有界有限完备 ∞-范畴。从 E 开始，考虑以下操作组成的有限序列。假设序列中的每个局部化都具有拓扑反射子，正如定理 *5* 的核所提供的那样。

1. 对当前范畴中的任意对象进行切片；*2.* 通过一个拓扑对未切片的环境范畴进行局部化；*3.* 在进行切片后，通过从当前未切片的环境范畴拉回的拓扑进行局部化。

该序列确定了一个闭包算子 j、一个语境 B，以及从所得范畴到

$$\mathrm{Sh}_j(\mathcal{E})/B, \qquad B \in \mathrm{Sh}_j(\mathcal{E}).$$

这里 j 是由复合环境局部化诱导的、对拉回稳定的子对象闭包算子。若 E 有子对象分类器 Ω，则此算子由 *Lawvere–Tierney* 核 $j : \Omega \to \Omega$表示。对于 $E = \mathrm{Ex}_\infty(T)$，若有界 j-层化具有指定的普通零类型，则同一个范畴是

$$\mathrm{Ex}_\infty(\mathrm{Sh}_j(\mathcal{T}))/B.$$

证明。 设有一个表示 $\mathcal{E}_j/B$，其中 $\mathcal{E}_j = \mathrm{Sh}_j(\mathcal{E})$。初始时取恒等拓扑和 $B = 1$。再次按对象 $C \to B$ 取切片，会依切片的结合律将此表示替换为 $\mathcal{E}_j/C$。若 k 是 $\mathcal{E}_j$上的一个拓扑，则用其诱导的切片拓扑将 $\mathcal{E}_j/B$ 局部化，得到

$$\mathrm{Sh}_k(\mathcal{E}_j)/a_k B$$

根据定理 12。两个反射子的复合，其局部对象恰为同时正交于 j-稠密单态射以及 i_j 下 $\mathcal{E}_j$的 k-稠密单态射的像的对象。第一个条件使对象属于 $\mathcal{E}_j$，在此处，全忠实性将第二个条件识别为 k-局部性。这两类都由单态射构成，因此这是一个拓扑局部化。具体而言，其对 $P \hookrightarrow C$ 的闭包，是沿 $C \to i_j a_j C$ 拉回 i_j 作用于 k-闭包 $a_j P \hookrightarrow a_j C$所得的结果。此公式可通过对单态射的复合单位方块取拉回得到，并且在代换下稳定。将此闭包算子记为 j'。当 Ω 存在时，泛单态射 $1 \hookrightarrow \Omega$ 的 j'-闭包的特征映射，依拉回稳定性表示 j'。更新后的有序对为 $(j', a_k B)$。未取切片的局部化是特例 $B = 1$。由归纳可证第一个断言。每个用到的比较都是由拉回泛性质或反射伴随给出的自然比较，因此这些比较在典范相容性的意义下与复合及恒等态射相容。命题 9 给出了第二个展示的描述。□

备注*14*（二分量切片上的拓扑）。在**集合**$/2 \simeq$ **集合** $\times$**集合**中，反射性局部化可以独立作用于两个连通分支。例如，某个局部化固定第一因子，并将第二因子映射到终对象范畴。从**集合**经由定理 13诱导的拓扑，会以相同方式作用于两个连通分支。恒等拓扑固定两个因子，而混沌拓扑将二者都映射到终对象范畴。

4.5 闭限制与开观测

在嵌套可实现性中，一个次终对象决定开子拓扑斯和闭子拓扑斯。为了比较这两个模型中的观察结果，考虑任意一个初等模型中的次终对象 U 以及核 $o_U(P) = (U \to P)$ 和 $c_U(P) = U \vee P$。在 $P = U$ 处检验开局部性，由常值映射比较得到 $X \simeq X^U$。反之，只要 $U \to P$，投影 $U \times P \to U$ 就是一个等价。于是，指数伴随使常值映射比较 $X^U \to (X^U)^P$ 成为一个等价。因此，该条件刻画了开局部对象。

在 $P = \bot$ 处检验闭局部性，得到 $U \to \mathsf{isContr}(X)$，等价地，$X \times U \to U$ 是一个等价。反过来，给定此条件和 $U \vee P$，只需证明命题 $X \to X^P$ 是一个等价。在 P 下，命题 P 是可缩的，因此求值映射使比较映射可逆。在 U 下，X 和 X^P 都是可缩的。由析取消去可得闭局部性。这两个判据在任意参数变更后仍成立。

命题 15（闭到开的常值性）。设 E 是局部笛卡尔闭的，且 U、$\to 1$ 是次终对象。假设 $C \times U \simeq U$，并且典范映射 $O \to O^U$ 是一个等价。常值映射比较是一个等价

$$O \longrightarrow O^C.$$

特别地，

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{E}}(C, O) \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{E}}(1, O).$$

此断言在每个切片中对相应的次终对象都成立。

证明。 指数伴随和两个假设给出自然等价

$$O^C \simeq (O^U)^C \simeq O^{U \times C} \simeq O^U \simeq O.$$

逆复合由 $C \to 1$ 诱导，因此就是常值映射比较。取全局截面，或在切片中重复同样的计算。□

注 *16*（闭反射下的指数对象）。箭头拓扑斯给出了一个显式计算。取 $\mathcal{E} = \mathbf{Set}^{[1]}$ 和 $U = (\varnothing \to 1)$。其闭子范畴由箭头 $S \to 1$ 构成，反射子为

$$a(A \to B) = (A \to 1).$$

取 $X = (\varnothing \to 1)$ 和 $Y = (\varnothing \to 2)$。Y^X 的定义域分量是从 X 到 Y 的交换方块所构成的二元素集合，因此 $a(Y^X)$ 对应于 2。在反射后计算指数对象，得到 $(aY)^{aX} = \varnothing^{\varnothing} = 1$，采用相同的对应。对于闭对象之间的映射，我们可以在环境范畴中计算依赖积。将这些映射拉回到 U 后，它们都是等价，因此它们的依赖积也都是等价。所以环境范畴中的积是闭的，并且表示闭子范畴中的依赖积。

5 统一模型与上下文选择

一个普通可实现性拓扑斯、其命题上的一个核，以及一个参数上下文，共同指定了一个高阶模型。它的依赖积刻画了这样一些指标：在覆盖参数之后，每个纤维中的局部见证能够组装成一个相干截面。

定义 17（语境中的局部化高阶可实现性）。对于一个可容许呈示 C、T j 上的一个核 $= \mathrm{Ex}_{1,\ \mathrm{reg}}C$，以及局部化完备化中的一个有界对象 B，定义

$$\mathfrak{R}(\mathcal{C}, j; B) = \mathrm{Sh}_j(\mathrm{Ex}_\infty \mathcal{C})_{/B}.$$

我们也写作 $\mathfrak{R}(T\ \ j; B) = \mathsf{H}(\mathrm{Sh}_j T)/B$，其中 $\mathsf{H}(T) = \mathrm{Ex}_\infty T$。这个表达式直接用普通拓扑斯来描述同一个切片。

普通分类器 Ω 也能对高阶语境中的子对象进行分类，因为特征映射会沿零类型覆盖下降。因此，同一个核在每个语境中都起作用。

定理 18（统一构造与高阶拓扑斯演算表示）。设 $(\mathcal{C},\ j;\ B)$ 如上，令 $T_j = \mathrm{Sh}_j T$，并设 B 是 s-截断的，且有 $s \geq 0$。令 $d = \max\{0, s-1\}$。则：

1. 范畴 $\mathfrak{R}(\mathcal{C},\ j;\ B)$ 是一个有界正合初等 ∞-拓扑斯，具有一个单值宇宙的累积闭层级。其在层级 λ 处的宇宙是局部宇宙到 B的拉回。*2.* 存在典范等价

$$\mathfrak{R}(\mathcal{C}, j; B) \simeq \mathsf{H}(\mathcal{T}_j)/B \simeq \mathrm{Ex}_\infty(\mathcal{C}_{j,B}^{(d)}), \quad \mathcal{C}_{j,B}^{(d)} := (\mathsf{H}(\mathcal{T}_j)/B)_{\leq d}.$$

范畴 $\mathcal{C}_{j,\ B}^{(d)}$ 是一个正则（$d+1$，1）-范畴，其余域教义在此完备化下承认高阶拓扑斯演算结构。

3. 等价的普通表示、对应的核以及传输的语境给出等价的高阶模型。选定的宇宙类沿该等价进行传输。

4. 沿语境映射进行拉回可实现代换，并提供依赖和、依赖积及其 *Beck–Chevalley* 等价。定理 *12* 的交换比较和定理 *13* 的规范化与这些代换相容。

证明。 命题 3 构造基底模型；定理 5 构造其具有局部宇宙的局部化。推论 6 和命题 9 将其识别为 $\mathsf{H}(\mathcal{T}_j)$。切片继承有限极限、局部笛卡尔闭性、精确性和不交有限余积。若u_λ^j 是一个局部泛族，那么

$$B \times \widetilde{U}_\lambda^j \longrightarrow B \times U_\lambda^j$$

在 B 之上分类切片中的相应族。分类、单值性和各层的闭包由拉回继承。全定义对象及 B 的有限截断界定了切片中的每个对象。

记 $\mathcal{F} = \mathsf{H}(\mathcal{T}_j)$。它是零复合单纯的。对于 $Y \to B$，选取一个由零类型 P给出的覆盖 $P \twoheadrightarrow Y$。对于复合映射 $f\colon P \to B$，纤维在 $b\colon B$之上是 $\sum_{x:P}(f(x) = b)$。其基底 P是零类型，且其路径纤维是$(s-1)$-截断的，因此 f是 d-截断的。所以 $\mathcal{F}/B$ 是 d-复合单纯的。切片中的 d-型对有限极限封闭。 d-型之间映射的像是其目标的子对象，因此它也是一个 d-型。故该子范畴继承$\mathcal{F}/B$ 的拉回稳定像分解，因而是正则的。有界性和 d-复合单纯性由此给出所述完备化 [41]。

对于此完备化中的截面问题 $Z \to Y \xrightarrow{f} T$，在 $T \in \mathcal{C}_{j\ B}^{(d)}$，上取一个由 d-类型W 给出的覆盖 $W \twoheadrightarrow \Pi_f Z$，并将求值限制到 $W \times_T Y$。任意参数化截面的转置都会将此覆盖拉回为一个覆盖，在该覆盖上可表示该截面。对于源中的一个参数，再用 d-类型覆盖这个拉回，从而得到一个源覆盖。这便在每个有限高度 [28]上提供了相干满性。对于切片中的每个选定宇宙，取一个由 d-类型给出的覆盖 $V_\lambda \twoheadrightarrow U_\lambda$，并将其泛族拉回到 V_λ。其相对高度仍然有限。因此，第 2 节中关于核对的递归给出了该全空间在此原始代码基底上的有限图册表示。给定从另一个源对象出发的分类映射，该代码覆盖的拉回还存在一个由 d-类型给出的进一步覆盖。二者的复合是一个源覆盖。因此，生成的局部类恰好就是所需的宇宙类。根据切片分类，这些表示构成有向且穷尽的族。定义 1 中的五种闭包性质对切片类均成立，因此泛恒等映射、像、对角线、复合映射和依赖积都具有源局部代码 [28]。带有这些数据的余域教义由此给出了所述的高阶拓扑斯演算表示。

表示无关性是命题 7，随后给出局部化的普通拓扑斯及其完备化之间的自然等价。等价通过其泛性质保持依赖积，并通过小映射的类传输宇宙。代换是切片中的普通拉回。其伴随分别是复合和依赖积。它们的 Beck–Chevalley 比较由拉回的泛性质诱导。相对局部化比较由相同的拉回和伴随单位诱导，因此它们在相容意义下保持一致。□

第7节确定了针对普通参数以及群分类类型的切片的普通源。对于带有 $K(A,n)$ 的切片，其中有 $A\neq 0$ 和 $n\geq 2$，最小正则源维数恰好是 n （推论35）。

5.1 计算表示及其局部化

对于一个离散偏组合代数 A 以及一个具有共同组合子并继承已定义应用的子代数 $A_{\#}$，将 $\mathcal{N}(A,A_{\#})$ 记为嵌套可实现性拓扑斯，将 $\mathcal{T}^{r}(A,A_{\#})$ 记为其相对开子拓扑斯，并将 $\mathcal{T}^{m}(A,A_{\#})$ 记为其修正的相对闭子拓扑斯。对于有序输入，将 $\mathrm{RT}(A',A)$ 记为滤过 OPCA 的相对拓扑斯。表1给出下文所用的特化。此处 $\mathcal{K}_1$ 与 $\mathcal{K}_2$ 分别为 Kleene第一和第二代数。

表1. 形式为 $\mathfrak{R}(\mathcal{T},j,B)$ 的可实现性模型。前六个模型使用终端上下文。有效切片使用 $K(A_r,n)$。

模型	普通拓扑斯与核	高阶模型
有效函数	$\mathcal{T}=\mathrm{Eff},\ j=\mathrm{id}$	$\mathsf{H}(\mathrm{Eff})$
相对嵌套	$\mathcal{T}=\mathrm{RT}(\mathcal{K}_2),\ j=\mathrm{id}$	$\mathsf{H}(\mathrm{RT}(\mathcal{K}_2))$
修改的 Krivine	$\mathcal{T}=\mathrm{RT}(A',A),\ j=b_U$ $b_U(P)=(P\Rightarrow U)\Rightarrow U$	$\mathsf{H}(\mathrm{Sh}_{b_U}\mathcal{T})$
有效切片	$\mathcal{T}=\mathrm{Eff},\ j=$ 恒等映射，$B=K(A_r,n)$	$\mathsf{H}(\mathrm{Eff})/K(A_r,n)$

函数可实现性。 在相对组装构造中赋予集合 $A=A'=\mathcal{K}_2$ 离散序，并选取$\kappa_0>|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$。定理 18 中恒等局部化的情形给出了高阶函数模型。凭借全忠实性，其原有的贝尔对象和数值对象保留了所有映射。对于通常的贝尔组装，这些恰好就是连续映射 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$。在这个绝对模型中，每个贝尔函数都可用作实现子。第 9 节利用连续性来确定由恒等映射与固定代码识别的 Baire 空间子集。

嵌套可实现性与修正可实现性。 将嵌套真值写作 (P,P_a)，其中潜在实现子为 $P\subseteq A$，实际实现子为 $P_a\subseteq A_{\#}\cap P$。对于子集 $P,Q\subseteq A$，将 $P\Rightarrow Q$ 记作满足以下条件的 $r\in A$ 所构成的集合：对每个 $a\in P$，$r\cdot a$ 有定义且属于 Q。于是，嵌套真值之间的蕴涵为

$$(P,P_a)\Rightarrow(Q,Q_a)=\big(P\Rightarrow Q,\,A_{\#}\cap(P\Rightarrow Q)\cap(P_a\Rightarrow Q_a)\big),$$

而蕴涵使用一个在指标集上统一的实际实现子。对于嵌套真值 Φ，次终对象 $u=(A,\varnothing)$ 确定开核 $o_u(\Phi)=u\Rightarrow\Phi$ 和闭核 $c_u(\Phi)=u\vee\Phi$。它们对应的普通层托普斯分别为 $\mathcal{T}^{r}$ 和 $\mathcal{T}^{m}$ [8]。所示公式采用 Maschio 和 Streicher 的潜在—实际表示法 [29]。将我们关于层化与高阶精确完备化之间的比较（命题 9）应用于这两个普通局部化，得到

$$\mathrm{Sh}_{o_u}\,\mathsf{H}(\mathcal{N})\simeq\mathsf{H}(\mathcal{T}^{r}),\qquad \mathrm{Sh}_{c_u}\,\mathsf{H}(\mathcal{N})\simeq\mathsf{H}(\mathcal{T}^{m}).$$

对于 $A=A_{\#}=\mathcal{K}_1,$，将 Sierpiński 底上的普通嵌套可实现性拓扑斯记为 $\mathbf{Eff}_2$。其开子拓扑斯和闭子拓扑斯分别为 Eff 和修正可实现性拓扑斯 Mod。Tarantino 恢复了这一对

由箭头代数 [46] 得到的普通拓扑斯。所展示的等价关系确定了它们在 $\mathsf{H}(\mathbf{Eff}_2)$ 中的高阶完备化。

根据命题 15 之前的层判据，闭对象由 $X \times u \simeq u$ 刻画。其宇宙公式变为

$$U_\lambda^c = \sum_{v : U_\lambda} \prod_{z : u} \mathrm{isContr}(\mathrm{El}(v)). \tag{5}$$

在 u 上，$\mathbf{1}$ 的代码为可缩小类型的类型提供一个中心。单值性将到该中心的路径与到 $\mathbf{1}$ 的等价对应起来，而对于每个这样的类型，这些等价都是可缩的。典范全空间在此处也可缩，因为它是定义在可缩基底上的可缩族。因此二者都是闭对象，而这个受限族对闭对象之间的环境小映射进行分类。命题 15 给出了每个更高次数下的闭到开常值定理。

***Krivine* 可实现性。** 固定一个 Streicher 意义下的抽象 Krivine 结构 [42]，并假设其三元组是非退化的。van Oosten–Zou 表示给出一个滤过 OPCA (A, A')，以及一个与 A' 不相交的 A 下集，它在其相对拓扑斯中表示一个真次终对象 U。Krivine 三元组等价于针对 $b_U(P) = ((P \Rightarrow U) \Rightarrow U)$ [52] 的相对布尔化。不动命题构成一个布尔代数，其底元为 $b_U(\bot) = U$。我们称这个次终对象为**逻辑极点**。因此，同样的高阶构造给出

$$\mathrm{Sh}_{b_U}\, \mathsf{H}(\mathrm{RT}(A', A)) \simeq \mathsf{H}\big(\mathbf{Set}[P_{\mathrm{Krivine}}]\big).$$

这里，P_{Krivine} 是所选 Krivine 结构的三元组，而**集合**$[P_{\mathrm{Krivine}}]$ 是通过三元组到拓扑斯构造由此得到的普通拓扑斯。在非退化的局部化模型中，典范二元阿贝尔群非零。它的有限去环化在所有正次数上都给出非平凡类型。第 6 节从一个更高阶的族中恢复b_U，进而恢复 U。

一致计算观察。 集值观测在等价的小类型上取值相同。在组装表示中，可以通过原始组装之间的单个可追踪映射来检验这种不变性。

命题 19（通过单值代码商进行观测）。 设 $p : X \to I$ 是一个族，且设 $c : I \twoheadrightarrow U$ 展示了它的单值完备化，因此 c 的 *Čech* 关系就是 p的逐纤维等价所构成的内部空间。对于每个零类型 D，映射 $U \to D$ 恰好是满足以下条件的映射 $g : I \to D$

$$\prod_{i,j : I} \big(\mathrm{Equiv}(X_i, X_j) \to (g(i) = g(j))\big).$$

这种对应是空间的等价。对于未局部化完备化中的原始组装 I、D，全忠实性将映射 g 识别为原始的可追踪映射 $I \to D$。

证明。 从有效商 c 映射出去给出其 Čech 映射图的全化。由于 D 是零类型，对箭头对象的两个限制相等，因而唯一地提供所有更高阶相容性。该箭头对象是纤维等价对象，因此下降条件就是上面所显示的条件。组装单位的全忠实性识别出原始对象之间的映射。□

5.2 刻画普通核心中的上下文选择

当其输出一致时，集值观测会下降。变化族的一个截面还携带着路径，用于标识其值在指标 I 中传输下的对应关系，以及这些路径的高阶相容性。哪些指标能将每个纤维中的局部存在性转化为此类截面的局部存在性？在完备化 $\mathcal{F} = \mathsf{H}(\mathcal{T})$ 中，由零类型构成的覆盖给出了普通核心中的一种刻画。记 $\|Y\|_q$ 为相对 q-截断，其中 $\|Y\|_{-1}$为结构映射的像。$\|Y\|_{-1}$ 中的一个项表示 Y的一个截面的局部存在性。有向性将每个族及其呈现图册置于同一个共同宇宙层级中。

定义20（上下文选择）。若对于每个 $C \in \mathcal{F}$ 以及 $C \times I$上的每个族 Y，映射均满足以下条件，则指标 $I \in \mathcal{F}$ 具有上下文高阶选择

$$\|\Pi_p Y\|_{-1} \longrightarrow \Pi_p \|Y\|_{-1}, \qquad p : C \times I \to C,$$

是 C 上的等价。若对每个零类型 C 和每个普通正则满态射 $V \twoheadrightarrow C \times I$，普通截面对象 $\Pi_p V$ 都覆盖 C，则零类型 I 具有普通上下文选择。

定理 21（选择由普通核心决定）。在具有零类型覆盖的有界高阶模型中，指标 I 具有上下文高阶选择，当且仅当它是核心中具有普通上下文选择的零类型。这些条件也等价于以下各项：

1. 每个 $\Pi_{C \times I \to C}$ 都保持覆盖；*2.* 对所有上述的 C、Y 以及所有有限的 $q \geq -1$、$\|\Pi_p Y\|_q \longrightarrow \Pi_p \|Y\|_q$，$q \geq -1$ 是等价。

这里，普通　　零类型族的覆盖和依赖积是在高阶模型中计算的　　.

证明。设高阶选择成立，并设 $Y \twoheadrightarrow Z$ 是 $C \times I$ 上的一个覆盖。沿求值映射 $(\Pi_p Z) \times I \to Z$ 对其作拉回。所得提升族的每个纤维都局部可居。语境 $\Pi_p Z$ 中的选择使该族的截面对象覆盖 $\Pi_p Z$。这恰好说明 $\Pi_p Y \to \Pi_p Z$ 是一个覆盖。反过来，对 $Y \twoheadrightarrow \|Y\|_{-1}$ 应用覆盖保持性。它经过 Π_p 后的目标是命题，因此它是 $\Pi_p Y$ 的像。

右伴随保持有限极限。因此，对对角映射作归纳可得，保持覆盖的Π_p 保持有限 $q \geq -1$ 的 q-连通映射。基例是保持覆盖。对于 $q \geq 0$，一个映射是 q-连通的，当且仅当它是一个覆盖，且其对角线是 $(q-1)$-连通的。根据对角判据，函子 Π_p 也保持q-截断映射。将其应用于截断单位，得到一个映射到 q-截断对象的 q-连通映射，即相对泛截断。取 $q = -1$ 即得反向蕴含。

取一个由零类型覆盖的 $A \twoheadrightarrow I$。高阶选择使其截面对象覆盖 $\mathbf{1}$。在该覆盖之后，泛截面表明 I 的拉回是参数切片中 A 的拉回的一个收缩。截断在退缩下稳定，并沿覆盖下降，因此 I 是零类型。限制到普通参数即可得到普通上下文选择。

反过来，假设 I 是这样的零类型。为检验 $\Pi_p(Y \twoheadrightarrow Z)$，取一个由零类型覆盖的 $P \twoheadrightarrow \Pi_p Z$。在 $P \times I$ 上求值，拉回该覆盖，并用零类型 R 覆盖所得的提升对象。复合映射 $R \twoheadrightarrow P \times I$ 是普通核心中的正则满态射。普通选择给出一个覆盖 $S = \Pi_{P \times I \to P} R \twoheadrightarrow P$。现在求值提供了一个位于 $\Pi_p Z$ 上方的提升 $S \to \Pi_p Y$。由于 $S \to \Pi_p Z$ 是覆盖，$\Pi_p Y \to \Pi_p Z$ 也如此。这证明了对每个高阶 C，该断言都成立。普通运算的假设在 $\mathcal{F}$ 中成立：满核心在所指的积、像和有限极限下封闭，并且集合之间的映射是覆盖，当且仅当其像是整个目标。□

推论 22（射影指标与有限高度检验）。如果环境模型具有一个包含$\mathbf{1}$、对有限积封闭的正则射影对象覆盖类，那么高阶选择恰好在其正则射影指标处成立。更一般地，在定理 *21* 的假设下，对于 $C \times I$ 上的 k-截断族，在每个参数上下文 C 中，$k \geq 0$ 上下文选择恰好在 $\tau_{\leq k+1} I$ 是零类型且 $\tau_{\leq 0} I$ 具有普通上下文选择时成立。对于命题值族的选择，对每个 I 都成立。

证明。如果 I 是正则射影的，它就是覆盖类中某个成员的收缩。因此，对每个成员 P，$P \times I$ 都是射影的。现在可以通过在 $P \times I$ 本身上进行提升，解决前述针对覆盖的求值检验。反过来，高阶选择会为每个到 I 的覆盖提供仅存在的截面。由于$\mathbf{1}$的射影性，这些截面便是实际截面。沿着任意从 I 出发的映射拉回一个覆盖，即可证明正则射影性。

对于有限高度断言，令 $J = \tau_{\leq k+1} I$。固定层级的 k-型的分类器是一个 $(k+1)$-型。因此，每个这样的族都沿着 $C \times I \to C \times J$下降。根据切片中的连通–截断正交性，拉回会保留下降后族的截面空间。其逐点命题值的截断也同样成立

。只需检验 J。一个零类型对这个 $(k+1)$-型的覆盖具有 k-截断的纤维，因此选择检验通过收缩论证迫使 J 成为集合。检验普通覆盖族即可得到 $J \simeq \tau_{\le 0} I$上的普通选择。反过来，该定理给出该指标上的完全选择。对于命题值的族，由于命题截断的幂等性，比较两边已经相同。□

6 恢复并比较 Lawvere–Tierney 核

基点路径族 $x \mapsto (b = x)$ 的一个截面将其基底收缩到 b。我们为每个谓词 P 构造一个带基点型，其收缩轨迹恰好是 P。随后对这个族进行局部化，即可在同一参数上下文中计算 P 的闭包。

设 $\mathcal{E}$ 是一个具有不交有限余积和子对象分类器 Ω的正合局部笛卡尔闭 ∞-范畴。假设 Lawvere–Tierney 核 j 具有一个左正合反射 $a_j : \mathcal{E} \rightleftarrows \mathcal{F}_j : i_j$，其诱导的泛闭包算子为 j。上文构造的有界初等模型满足这些假设。下面的构造将一个直觉主义谓词编码为商群中两个元素相等。

相对局部化。 谓词及其闭包是同一参数 B的子对象。要比较 B上的原始族与反射后的族，请使用定理 12 的切片伴随。其左伴随为

$$a_{j,B} : \mathcal{E}_{/B} \longrightarrow (\mathcal{F}_j)_{/a_j B}, \qquad (X \to B) \longmapsto (a_j X \to a_j B)$$

其全忠实右伴随为

$$r_{j,B}(Y \to a_j B) = \big(B \times_{i_j a_j B} i_j Y \to B\big).$$

记

$$\ell^j_B = r_{j,B} a_{j,B}, \qquad \ell^j_B X = B \times_{i_j a_j B} i_j a_j X.$$

$a_{j,B}$ 和 $r_{j,B}$ 都保有限极限。对于每个 $f : C \to B$，左正合性给出相容的基变换恒等式

$$f^* \ell^j_B X \simeq \ell^j_C f^* X. \tag{6}$$

对于单态射 $P \hookrightarrow B$，$\ell^j_B P$ 是其 j-闭包 $j_B(P) \to B$。

记 $A \dashv I$ 表示 $a_{j,B} \dashv r_{j,B}$。对于其目标中的映射 $p : Y \to Z$ 和 $q : W \to Y$，构造环境依赖积 $V = \Pi_{Ip}(IW) \to IZ$。对于每个 $T \to IZ$，A 的左正合性以及伴随给出

$$\begin{aligned} \mathrm{Map}_{/IZ}(T, V) &\simeq \mathrm{Map}_{/IY}(T \times_{IZ} IY, IW) \\ &\simeq \mathrm{Map}_{/Y}(AT \times_Z Y, W). \end{aligned}$$

由于 A 将 IZ上的单位 $T \to IAT$ 变为等价，沿单位的限制会在这些映射空间之间诱导一个等价。因此，在 $T = V$处，恒等映射延拓为切片中单位的一个回缩 $IAV \to V$。局部对象在退缩下封闭，因此 V 是局部对象。将同一等价限制到局部 T，可知 AV是 $\Pi_p W$，其中 $I\Pi_p W \simeq V$。这证明了局部笛卡尔闭性，以及 I对这些积的保持性。局部对象之间的依赖和就是复合，因此它们也得到保持。由此

$$r_{j,B}\,\mathrm{isContr}_{(\mathcal{F}_j)_{/a_j B}}(Y) \simeq \mathrm{isContr}_{\mathcal{E}_{/B}}(r_{j,B} Y). \tag{7}$$

6.1 有限去环化与截面空间

在以下论证中， C 上的类型指切片中的一个对象，其恒等族就是它的相对对角线。我们用 Map 和 Hom 表示内部对象，用 Map 和 Hom 分别表示外部映射空间和普通同态集。对内部映射对象取全局截面，可以恢复外部映射空间。

引理 23（有限 bar 构造及其内部映射）。在一个参数切片中，设 A, M 为阿贝尔群零型。令 $K(A,0) = A$，并设 $K(A,n+1)$ 为箭头群为 $K(A,n)$ 的单对象群胚的有效商。对于 $n \geq 1$，这给出一个带基点的$(n-1)$-连通 n-型，其中 $\Omega K(A,n) = K(A,n-1)$。对于 $n \geq 1$，存在自然等价

$$\underline{\mathrm{Map}}_{*}(K(A,n), K(M,n)) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Ab}}(A,M),$$
$$\underline{\mathrm{Map}}(K(A,n), K(M,n)) \simeq K(M,n) \times \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Ab}}(A,M).$$

对于等价，第二因子是系数同构对象。这些等价在参数变更下保持稳定。保持有效群胚商的左正合函子与所展示的 K 构造可交换。

证明。交换性通过有限乘积为每个后续 bar 构造赋予阿贝尔群结构。基点映射是一个覆盖，而有效性将其在基点上的纤维识别为前一个群。由此得到环路恒等式；再通过归纳，利用连通性和对角映射，得到截断与连通性断言。在进一步的测试 T 上，带基点映射就是切片 T 上的带基点映射。将该精确切片全忠实地嵌入其空间正则层范畴，并使其保持有效商。对于 $n = 1$，群与带基点连通一型之间的等价将带基点映射空间识别为同态的离散集合。对于 $n \geq 2$，使用带基点的 Eilenberg–MacLane 等价 [26]。全忠实性和有限极限将此计算中的群、映射与带基点实现识别为原切片中的相应对象。对所有 T 进行测试并应用 Yoneda，即可证明内部断言。对于无基点映射 f，分解为 $(f(0),\ f - f(0))$；加上常值映射即可恢复 f。平移是一个等价，因此同样的分解也限制为等价。拉回及所述函子逐项保留神经，并保留其实现。□

引理 24（挠子、截面与连接映射）。在任意这样的切片中进行讨论。对于一个具有有效 *bar* 构造 BG 和 $f : X \to BG$ 的群 G，拉回 $T_f = X \times_{BG} \mathbf{1}$ 是一个主 G-挠子。其截面空间是从 f 到 $\mathrm{Map}(X, BG)$ 中常值基点的路径空间。反过来，每个主 G-挠子都具有这种形式，正如 ∞-拓扑斯 *[31]* 中主 ∞-丛的分类所示。对于 X 上 T 的相干右 G 作用，主性意味着 $T \to X$ 是一个覆盖，并且 $(t, g) \mapsto (t, tg)$ 将 $T \times G$ 同一到 $T \times_X T$。对于阿贝尔零型的短正合列 $0 \to D \to E \to A \to 0$，当 $n \geq 1$ 时，存在一个带基点连接映射

$$\partial : K(A,n) \longrightarrow K(D, n+1) \quad \textit{with homotopy fibre } K(E,n).$$

∂ 的一个零伦会诱导原系数映射的一个分裂 $A \to E$。

证明。关于作用的断言可通过拉回 $\mathbf{1} \to BG$ 的 Čech 神经得到。其拉回的一个截面是一个映射 $X \to \mathbf{1}$ 以及在 BG 中的一个同伦；第一个选择空间是可缩的。反过来，主扭子的作用神经就是它的 Čech 神经。作用神经到单对象群神经的投影在实现上定义了$X \to BG$。沿 $T \twoheadrightarrow X$ 拉回后，这两个扭子通过该作用同构于平凡扭子，并且在交叠处相容。由下降可得在 X 上所述的等价。

考虑正则层环境拓扑斯中的 $q\colon K(E,\ n) \to K(A,\ n)$。其纤维的同伦序列在次数 n 有 D，在次数 $n-1$ 有平凡余核（对于 $n = 1$，则为平凡连通分支），而其余所有次数的群均为平凡群。因此，由有限 Postnikov 归纳可知，从 $K(D,\ n)$ 出发的典范映射是等价。

由满性和有限极限，该计算限制到精确切片。由于 $K(A,\ n)$ 连通， $K(A,\ n)$ 的基点是一个覆盖。它经由 $K(E,\ n)$ 的基点因子化通过 q，所以 q 是一个覆盖。平移将其核对识别为 $K(E,\ n) \times K(D,\ n)$。其分类映射为 ∂； $K(E,\ n)$ 的零元为其提供基点结构。若它是零同伦的，则 q 有一个截面。减去该截面在基点处的取值，并用同一平移对截面同伦作归一化。这就得到一个在带基点同伦意义下的带基点右逆。应用 π_n 得到 $A \to E$ 分裂 $E \to A$。所有论证均与切片变换相容。□

6.2 从一个泛族恢复一个核

在$\mathcal{E}_{/B}$ 中，取 $C_2 = 1_B \amalg 1_B$，并采用模二加法。给定 P，$\to 1_B$，通过将 1_B赋予其两个对角分量、将 P 赋予其两个非对角分量，定义一个等价关系R_P，$\to C_2 \times C_2$。将 $C_2 \times C_2$ 分解为四个直和项的分解在每次参数变更下都保持不变，因为余积是不相交的，并且在拉回下保持稳定。在逻辑记号中， $xR_Py \Longleftrightarrow$（$x = y$）$\vee P$。析取消去给出了对每个直觉主义谓词 P的加法相容性，因此 R_P 是一个群同余。令

$$H_P = C_2/R_P$$

其为有效商群，并令 $e,\ s:\ 1_B \to H_P$ 为两个直和项的像。有效性给出正合恒等式

$$(e = s) \simeq P. \tag{8}$$

商映射 $C_2 \to H_P$ 是一个有效满态射。沿其平方 $C_2^2 \to H_P^2$ 进行拉回，将 H_P 的对角线与 R_P，$\to C_2^2$对应起来。单态射沿有效满态射下降，因此 H_P 是一个零类型。若 $e = s$，则覆盖 $C_2 \to H_P$ 的两个直和项都映射到 e。 H_P 中的相等性是命题性的，因此该覆盖表明每个元素都等于 e。反之，可缩性蕴含 $e = s$。因此

$$\mathrm{isContr}(H_P) \simeq P. \tag{9}$$

根据引理 23，对于 $n \geq 1$ 该族

$$Q_n(P) = K(H_P, n) = B^n H_P$$

是一个带基点的（$n-1$）-连通 n-类型，具有 $\Omega^n Q_n(P) \simeq H_P$。如果 $Q_n(P)$ 是可缩的，那么 H_P 也是可缩的；如果 H_P 是平凡的，那么每个迭代巴构造都是终对象。因此

$$\mathrm{isContr}(Q_n(P)) \simeq P. \tag{10}$$

所有这些构造都与基变换交换。特别地，根据有效群胚实现的普遍性，拉回保持同余商和 bar 商。因此，所显示的可缩性等价在每个进一步的参数上下文中都作为内部子对象成立。

定理 25（核的可缩性重构）。固定 $n \geq 1$。对于每个 $B \in E$ 和 P、$\to B$，存在 B 的子对象之间的典范等价

$$\mathrm{isContr}_{\mathcal{E}_{/B}}\big(\ell_B^j Q_n(P)\big) \simeq j_B(P). \tag{11}$$

此外，对于 P、Q、$\to B$，

$$\ell_B^j Q_n(P) \simeq \ell_B^j Q_n(Q) \quad \Longleftrightarrow \quad j_B(P) = j_B(Q). \tag{12}$$

左侧的等价是无点的。

证明。 函子 $a_{j,\ B}$ 是左正合函子和左伴随。因此，它保持有限余积、有效同余商、群神经及其实现。因而存在典范等价

$$a_{j,B}H_P \simeq H_{a_{j,B}P}, \qquad a_{j,B}Q_n(P) \simeq Q_n(a_{j,B}P).$$

在局部切片中应用 (10)，再应用 (7)，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{isContr}_{\mathcal{E}_{/B}}(\ell^j_B Q_n(P)) &\simeq r_{j,B}\,\mathrm{isContr}_{(\mathcal{F}_j)_{/a_{j}B}}(Q_n(a_{j,B}P))\\ &\simeq r_{j,B}a_{j,B}P \simeq j_B(P).\end{aligned}$$

（12）中的无基点等价保留了这个可缩子对象，因此蕴含闭包相等。反过来，$r_{j,\ B}$ 的全忠实性将闭包相等转化为等价 $a_{j,\ B}P \simeq a_{j,\ B}Q$；商和 bar 构造的函子性随即给出所需的等价。□

推论 26（一个泛族检测所有核）。令 $t : 1, \to \Omega$ 为泛单态射，并在$\mathcal{E}/\Omega$中构造，

$$W_n = Q_n(t) = B^n_\Omega\big((C_2)_\Omega / R_t\big).$$

Then

$$\chi_{\mathrm{isContr}_{\mathcal{E}_{/\Omega}}(\ell^j_\Omega W_n)} = j : \Omega \longrightarrow \Omega. \tag{13}$$

因此，单个局部化 n-类型族 $\ell^j_\Omega W_n$ 在 Ω 上的等价类决定了核 j。对于具有所述反射的两个核，

$$j \le k \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{isContr}(\ell^j_\Omega W_n) \le \mathrm{isContr}(\ell^k_\Omega W_n) \quad in\ \mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(\Omega). \tag{14}$$

证明。 泛单态射 t 的特征映射是 id_Ω，因此其 j-闭包的特征映射是 j。应用 (11)。序关系断言指的是特征映射上的逐点序。通过沿特征映射拉回这个恒等式并使用 (6)，即可恢复所有语境。□

在局部切片中，反射基点覆盖反射后的族，因此每个纤维都是连通的。将其可缩性轨迹视为位于原参数之上，便可恢复该谓词的闭包。

6.3 编码之间的恒等态射与核上的序

可缩性告诉我们，何时 P 的探针与终类型具有相同的代码。比较两个谓词对应的探针，也会记录目标 Eilenberg–MacLane 纤维中的一个平移。固定 $n \ge 2$ 和 C 上的一个参数切片。选取一个单值层级来分类此切片中的探针，并选取一个单值层级来分类目标切片中的反射。命题 3 和定理 5 在有界初等模型中给出了这些层级。记作 $X_P = Q_n(P)$，并用同一符号表示其代码。

定理 27（探针代码之间的恒等类型）。存在一个内部等价

$$(X_P =_U X_Q) \simeq (P \leftrightarrow Q) \times X_Q.$$

特别地，$(X_P =_U \mathbf{1}) \simeq P$。在目标切片的一个单值宇宙中重新分类这些反射后的族，并将 $r_{j,C}$ 应用于这些代码之间的恒等式。由此得到的、位于 C 之上的恒等族为

$$(j_C(P) \leftrightarrow j_C(Q)) \times \ell^j_C X_Q.$$

在自恒等式上，从第一次计算到第二次计算的诱导映射就是模态单位 $X_P \to \ell^j_C X_P$。

证明。 记 g 为 H_P 中非零二元生成元的像。商覆盖给出析取式$x = 0 \vee x = g$，对每个 x 都成立： H_P。将其应用于 $x = u(g)$，其中 u 是一个自同构，命题目标为$u(g) = g$。 $u(g) = g$ 的情形显然成立；而在 $u(g) = 0$ 的情形下，应用 u^{-1} 得到 $g = 0$。现在通过商归纳可知 $u = \mathrm{id}$。给定两个同构 v， w： $H_P \to H_Q$，将此结论应用于 $w^{-1}v$。同构对象是一个集合，因此这证明了它在每个参数上下文中都是一个命题。任何同构都保持可缩性，因而给出 $P \leftrightarrow Q$。反过来，该逻辑等价确定了 C_2 上的定义同余，并诱导出互为逆映射的商映射。根据引理 23，无基点等价可分解为该同构对象与 X_Q 中的一个平移。单值性给出该公式。单位情形取 $Q = \top$ 。

在目标中，使用其内在二元群和方程 $a_{j,\ C} H_P \simeq H_{a_{j,\ C} P}$ 以及 $a_{j,\ C} X_P \simeq K(H_{a_{j,\ C} P},\ n)$。在那里重复第一次计算。右伴随在局部对象之间保积并保指数对象，因此它将逻辑因子映为闭包的等价，并将平移因子映为 $\ell^j_C X_Q$。点求值和平移对于反射子是自然的。在自恒等式上，逻辑因子是终对象，而在零点处的值上的比较恰好就是单位。□

基点挠子本身能够检测核的序。事实上， $\mathbf{1}_C \to Q_n(P)$ 是环群 $K(H_P,\ n-1)$ 下的挠子，而一个截面会收缩 $Q_n(P)$。因此，改变 P 可以检验截面何时从一个局部化传递到另一个局部化。

定理 28（挠子截面刻画核上的序）。固定 $n \geq 2$。对于两个核 j, k，不等式 $j \leq k$ 成立，当且仅当以下蕴含在每个参数切片中都成立：每个主$K(M, n-1)$-挠子，只要其在该切片中是一个阿贝尔零型，并且经 j-反射后有截面，那么经 k-反射后也有截面。具体而言，对于 E/C 中的挠子 $T \to X$ ，截面位于切片中 $a_j C$ 上的 $a_j X$ ，对于 k 亦然。只需对 $P, \to C$ 检验 $\mathbf{1}_C \to K(H_P, n)$。若 $j < k$，则某个位于零型参数上的此类挠子 $T \to X$，在 j 之后的截面空间为空，而在 k 之后的截面空间可缩。原挠子对每个 $-1 \leq q \leq n-2$ 都满足 $\tau^X_{\leq q} T \simeq \mathbf{1}_X$。

证明。 假设 $j \leq k$。我们首先证明，在每个切片中，有限相对截断度的映射若被j-反射反转，也会被 k-反射反转。对于单态射，这由 j-稠密性蕴含 k-稠密性得出。在归纳步骤中，像包含被 j反转，因为左正合反射子保覆盖和像。因此，其 k-反射可逆，反射后的映射是覆盖。其对角线的次数低一阶，且被 j反转。归纳和左正合性也使反射后的对角线可逆。对角线可逆的覆盖是等价。

令 $T \to X$为参数切片中基底 C上的指定托orsor。它的相对度至多为 $n-1$，可在其平凡化覆盖之后验证。因此，T和 $\ell^j_X T$都是基底 X上的 $(n-1)$-型。单位 $T \to \ell^j_X T$具有有限相对度，且被 a_j、x反转，因而也被 a_k、x反转。 $a_j X$ 上的截面通过伴随对应于 $\ell^j_X T \to X$的一个截面。应用 a_k、x ，并利用前述等价，得到 $a_k X$上的一个截面。由引理 24， $K(H_P, n)$的基点是一个主 $K(H_P, n-1)$-托orsor。一个截面将其基底收缩。因此，其反射后的截面存在，当且仅当反射后的系数是平凡的；等价地，当且仅当 $j_C(P) = \mathbf{1}_C$。给定测试蕴含，将 P限制到 C的子对象 $D = j_C(P)$上。在那里它是 j-稠密的，因而由测试可知也是 k-稠密的。闭包的拉回稳定性给出 $D \leq k_C(P)$。取 $C = \Omega$ 并使用泛单态射，得到 $j \leq k$。

对于严格序，取 $t :\ \mathbf{1}\ , \to \Omega$、 $C = k_\Omega(t)$，并将 $P = t$ 视为 C 的子对象。其 k-闭包为 C，而其 j-闭包是 C 的真子对象 $j_\Omega(t)$，因为两个特征映射彼此不同。当闭包充满 C 时，当且仅当存在截面。因此，k-反射基点是一个等价，而真j-闭包在 j-反射后给出空的截面空间。子对象 $j_\Omega(t) \to C$ 本身区分了这两个局部化。局部平凡性将原始纤维局部地识别为（$n-2$）-连通的 $K(H_P,\ n-1)$，从而给出截断断言。对于陈述中的每个 n ，相同的参数和谓词都适用。□

7 高阶语境的源维数与相对上同调

为了衡量语境如何影响具有固定逻辑的模型，考虑一个基点 $b : 1 \to B$。作为 B 上的对象，它在 b 处的纤维为 $\Omega_b B$ 。这个环对象的高度给出了呈现该切片的源维数的下界

。对于 $B = K(A,\ n)$，上同调还可以通过从 B 到其他 Eilenberg–MacLane 型的映射来检测系数 A 。

正则层中的图册维数。 设$\mathcal{F}$ 是一个正合 ∞-范畴，并带有一个全忠实的保有限极限函子

$$i : \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{H}$$

进入某个 Grothendieck ∞-拓扑斯，其本质像对内部 Segal 群胚的实现封闭。在$\mathcal{F}$ 中的这类实现是在$\mathcal{H}$中计算的。嵌入和完备化使用相容的外部大小界。对于 $q \geq -1$，称$\mathcal{F}$ 的图册维数至多为 q ，如果每个对象都存在一个由 q-类型构成的覆盖；也就是说，如果$\mathcal{F}$ 是 q-复形的。

嵌入 i 保留并反映有限截断：从等价开始，使用对角刻画。它也保留并反映覆盖，因为它计算每个 Čech 神经的实现。这些断言在切片中也成立。因此，截断的环境局部性和环境缩回论证适用于$\mathcal{F}$的对象和映射。

对于局部化正合范畴$\mathcal{F}$，其自身的正则层表示在所选的外部大小下提供了这样一个嵌入。

$$\mathcal{F} \simeq \mathrm{Ex}_\infty(\mathcal{F}) \hookrightarrow \mathrm{Sh}_{\mathrm{reg}}(\mathcal{F}, \mathcal{S}).$$

这一嵌入　　使用局部化模型所固有的商来计算有效满射　　.

引理 29（图册维数的环空间下界）。令 $b\colon\ 1 \to B$ 为 F 的一个带基点对象，并令 $q \geq -1$。如果 F/B 中的对象 b *admits a cover from a* q*-truncated object of that slice, then* $\Omega_b B$ *is*q*-truncated in* F*.*

证明。将所提出的切片覆盖写作

$$(Y_0 \xrightarrow{f} B) \longrightarrow (1 \xrightarrow{b} B).$$

它由一个映射 $p_0\colon\ Y_0 \to 1$ 以及一个指定的同伦 $f \simeq bp_0$组成。由于切片中的覆盖可由底层映射检测，p_0 是一个覆盖。根据假设， f 是 q-截断的。沿着 b 拉回 f ，因此得到一个 q-截断的对象

$$T = Y_0 \times_B 1 \simeq Y_0 \times \Omega_b B.$$

同伦 $f \simeq bp_0$ 给出了在 Y_0上的乘积分解。

现在沿覆盖 p_0 对 $T \to 1$ 作基变换。其拉回 $T \times Y_0 \to Y_0$ 是 q-截断的。在位于 Y_0 上的切片中，对象 $\Omega_b B \times Y_0 \to Y_0$ 是该拉回的一个收缩。在乘积坐标中，截面和回缩为

$$\begin{aligned} s(\omega, y) &= (y, \omega, y), \\ r(y', \omega, y) &= (\omega, y), \end{aligned} \qquad rs = \mathrm{id}\,.$$

Y_0 的对角线和乘积投影在切片中定义了 s 和 r 。截断映射在退缩下封闭，因此沿 $Y_0 \to 1$ 对 $\Omega_b B \to 1$ 的拉回是 q-截断的。在 $\mathcal{H}$ 中，截断对于有效满态射是局部的，因此 $i\Omega_b B$ 是 q-截断的。由于 i 反映截断性， $\Omega_b B$ 在$\mathcal{F}$中是 q-截断的。□

定理 30（高阶语境的精确维数）。假设 F 有界且有零类型覆盖。令 $n \geq 2$ ，并令 $b\colon\ 1 \to B$ 为一个带基点的 n-型，其环对象 $\Omega_b B$ 具有精确截断高度$n-1$。那么

1. F/B 是有界的，且图册维数恰为 $n-1$；*2.* 范畴 $R_B = (F/B)_{\leq n-1}$ 是一个正则$(n,1)$-范畴，且典范函子诱导出一个等价

$$\mathrm{Ex}_\infty(\mathcal{R}_B) \simeq \mathcal{F}_{/B};$$

3. 若一个正则$(m,1)$-范畴的高阶精确完备化与 $\mathcal{F}_{/B}$ 等价，则 $m \geq n$。

证明。对于对象 $Y \to B$，选择覆盖 $P \to Y$，其中 P 是零截断的。复合映射 $P \to B$ 是 $(n-1)$-截断的。更一般地，对于来自一个 a-型的映射 $f\colon X \to B$，在广义点 $y\colon T \to iB$ 上计算其在 $\mathcal{H}$ 中的纤维。在 T 上的切片中，它是路径类型 $((if)(x) = y)$ 关于 $x : (iX)_T$ 的依赖和。基底是 a-截断的，而路径是 $(n-1)$-截断的，因此利用截断映射在复合下的闭性，得到界 $\max\{a, n-1\}$。将此应用于 $a = 0$，可知 $P \to B$ 是切片中的一个 $(n-1)$-截断对象，并给出 $Y \to B$ 的一个覆盖。这证明了上图册界。

根据引理 29，覆盖 b 的 q-截断对象给出 $\Omega_b B$ 的一个 q-截断界。其精确高度为$n-1$，因此每个这样的界都满足 $q \geq n-1$。结合上界可得图册维数$n-1$。

如果 Y在 $\mathcal{F}$ 中是 a-截断的，则同一个估计表明 $Y \to B$ $\max\{a, n-1\}$-截断。因而，$\mathcal{F}$ 的有界性蕴含其切片的有界性。$(n-1)$-截断对象在有限极限和正则像下封闭：一个像是其截断目标的子对象。因此 $\mathcal{R}_B$ 是正则的，且其映射空间是 $(n-1)$-截断的，从而它是一个 $(n,1)$-范畴。精确完备化识别定理 [41] 现在给出所显示的等价，所用条件是有界性和 $(n-1)$-拟范畴性。

最后，正则 $(m,1)$-范畴的高阶精确完备化是 $(m-1)$-拟范畴 [41]。因此，切片的一个正则源满足 $m-1 \geq n-1$，其图册维数正是上面计算出的结果。源 $\mathcal{R}_B$ 达到等式。□

注 *31*（最高同伦群与相对截断）。对于一个带基点的 n-类型，内部同伦群 $\pi_n(B, b)$ 是带有其环乘法的零类型 $\Omega_b^n B$。如果 $\Omega_b B$ 是 $(n-2)$-截断的，则其 $(n-1)$-重环对象是一个带基点命题，因而是可缩的。因此，一个非零的内部 $\pi_n(B, b)$ 给出 $\Omega_b B$ 的精确高度$n-1$。例如，有效 ∞-拓扑斯在其普通核心中包含一个非零阿贝尔群 Q，其唯一的全局元素是零（引理 39）。然而，$\pi_n(K(Q,n),0) \cong Q \neq 0$。基点映射 $b\colon 1 \to B$ 说明了为何维数是在切片中度量的。其定义域是 $\mathcal{F}$ 中的一个零类型，而其在 b 处的纤维是高度为 $n-1$ 的环对象。

7.1 Eilenberg–MacLane 语境的上同调

在定理 30 的假设下，对每个非零阿贝尔零型 A 和 $n \geq 2$，$K(A,\ n)$ 上方切片的最小源维数为 n。为了区分固定 n 下的群 A，考察映射 $K(A,\ n) \to K(M,\ n)$，其中M 不断变化。进一步假设$\mathcal{F}_{\leq 0}$ 是一个初等托扑斯。对于 $A \in \mathrm{Ab}(\mathcal{F}_{\leq 0})$，引理 23 的有限 bar 构造给出 $K_{\mathcal{F}}(A,\ k)$。到 $\mathcal{H}$ 的嵌入保留此构造及其截断和连通性界。

对于 $k \geq 1$，令

$$H^k(\mathcal{F}; M) = \pi_0 \operatorname{Map}_{\mathcal{F}}(1, K_{\mathcal{F}}(M, k)).$$

这里，M是一个阿贝尔零型。将其限制到基点，会从切片的上同调中分离出 $H^k(\mathcal{F};\ M)$。其核衡量语境所带来的贡献。

定理 32（高阶上下文带来的上同调）。令 $A, M \in \mathrm{Ab}(\mathcal{F}_{\leq 0})$，令 $n \geq 2$，并设$B = K_{\mathcal{F}}(A, n)$，$p\colon B \to 1$，其典范基点为 $b\colon 1 \to B$。那么

$$p^* : \mathcal{F}_{\leq q} \simeq (\mathcal{F}_{/B})_{\leq q} \qquad (0 \leq q \leq n-2),$$

其逆为 b^*。此外，存在自然同构

$$\begin{aligned} H^k(\mathcal{F}_{/B}; p^* M) &\cong H^k(\mathcal{F}; M) && (0 < k < n), \\ H^n(\mathcal{F}_{/B}; p^* M) &\cong H^n(\mathcal{F}; M) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}(\mathcal{F}_{\leq 0})}(A, M). \end{aligned}$$

在次数 n 上，第一个包含是 p^*，其回缩是 b^*，第二个直和项是 b^* 的核。

证明。 首先在 $\mathcal{H}$ 中进行。对象 iB 是 $(n-1)$-连通的。 q-截断小族的分类器是 $(q+1)$-截断的。如果 $q \le n-2$，那么从 iB 出发的每个分类映射都因此经由 $iB \to 1$ 因子分解，并且选择的空间是可缩的。对于所讨论的每个族，都可以在足够大的环境宇宙中取分类器。对于 q-截断的 X，Y 在 $\mathcal{H}$ 中，其指数对象 Y^X 是 q-截断的。令 $\bar{p}\colon iB \to 1$，则有

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{H}_{/iB}}(\bar{p}^*X, \bar{p}^*Y) \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{H}}(iB, Y^X) \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{H}}(1, Y^X).$$

第二个等价是沿 $\bar{p}$ 拉回的逆，并且在映射空间上给出全忠实性。因此，从 1 拉回会在 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}/iB$ 的 q-截断对象之间诱导一个等价。

对于 $\mathcal{F}$ 中的 q-截断映射 $Y \to B$，由有限极限封闭性，纤维 b^*Y 属于 $\mathcal{F}$。由满性，环境等价 $Y \simeq p^*b^*Y$ 是 $\mathcal{F}/B$ 中的等价。同样的论证也适用于环境映射空间等价。这就证明了第一个断言。

基变换与 bar 构造相交换，因此

$$K_{\mathcal{F}_{/B}}(p^*M, k) \simeq (B \times K_{\mathcal{F}}(M,k) \longrightarrow B).$$

其截面空间为 $\mathrm{Map}_{\mathcal{F}}(B,\ K_{\mathcal{F}}(M,\ k))$。当 $k < n$ 时，iB 的连通性和目标的截断性给出一个等价

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{F}}(B, K_{\mathcal{F}}(M,k)) \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{F}}(1, K_{\mathcal{F}}(M,k)).$$

全忠实性将环境等价限制到 $\mathcal{F}$。取连通分支即可证明低次数公式。对于 $k = n$，在 $\mathcal{H}$ 中将引理 23 的带基点和无基点映射公式应用于 iA 和 iM。该嵌入是满的，并保留表达阿贝尔群律的有限极限。因此，其外部带基点映射是离散集合 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}(\mathcal{F}_{\le 0})}(A,\ M)$。无基点映射空间是该集合与 $\mathrm{Map}_{\mathcal{F}}(1,\ K_{\mathcal{F}}(M,\ n))$ 的积。按照陈述中的因子顺序，在 b 处求值就是对第一个因子的投影，而其截面将一个全局点映射为常值映射。在连通分支上，这个分裂将 $[f]$ 送到

$$\big([f(b)],\ \pi_n(f - \mathrm{const}_{f(b)})\big).$$

差具有其在 b 处的典范基点结构。求值保持加法，而 π_n 将带基点映射的和映为同态的和，因为它保持积。逆映射将 $([u], h)$ 映为 $[\mathrm{const}_u + K(h,n)]$。这些群同构与由源上诱导的映射 $K(g,n)$ 的前复合，以及与由系数对象上诱导的映射的后复合相交换。□

推论 33（局部化 Eilenberg–MacLane 语境的维数）。设 E 有界、正合且为零复合单纯，并且 $L : E \rightleftarrows F :\ i$ 是左正合反射性局部化。假设 F 满足上述逻辑假设和环境假设。对于 $A \in \mathrm{Ab}(E_{\le 0})$ 和 $n \ge 2$，

$$LK_{\mathcal{E}}(A,n) \simeq K_{\mathcal{F}}(LA, n).$$

若 $LA = 0$，则相应的切片就是 F。若 $LA \neq 0$，则切片 $F_{/K_{\mathcal{F}}(LA,n)}$ 的图册维数恰为 $n-1$，且其最小有限精确完备化源维数为 n。其上同调由定理 *32* 给出，其中 A 替换为 LA。

证明。 反射子保有限极限和所有已存在的余极限，尤其是有效群胚实现。将其应用于迭代巴构造，即可证明解环比较。$\mathcal{E}$ 中的零类型覆盖 $P \to iX$ 会变为$\mathcal{F}$中的零类型 LP 覆盖 $LP \to X$。因此$\mathcal{F}$ 是零复合单纯的。由全忠实的有限极限嵌入可知有界性：$\mathcal{F}$ 中的对象在$\mathcal{E}$中具有相同的有限截断界。若 $LA = 0$，则其解环是终对象。否则，$\Omega K_{\mathcal{F}}(LA,n) = K_{\mathcal{F}}(LA, n-1)$ 有非零的第 $n-1$ 个同伦群 LA，因此定理 30 适用。□

注记*34*（从标记切片中恢复系数）。随着 M 变化， b^* 在次数 n 上的核构成函子 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}(\mathcal{F}_{\le 0})}(A,-)$。因此，Yoneda 根据切片及其投影和基点恢复 A 。该核将系数同态与从$\mathcal{F}$拉回的上同调类区分开来。若 $\mathbf{1}$ 在$\mathcal{F}$中是射影对象，则全局截面保有效群胚实现，从而有 $\mathrm{Map}_{\mathcal{F}}(\mathbf{1}, K_{\mathcal{F}}(M,k)) \simeq K(\mathrm{Map}_{\mathcal{F}}(\mathbf{1},M),k)$。于是底上调在正次数上消失，因此整个次数-$n$群都由系数同态构成。

推论35（从普通语境到高阶语境的正合转移）。令 $\mathcal{F} = \mathsf{H}(\mathcal{T}_j)$。

1. 对于 $B \in \mathcal{T}_j$，$\mathcal{F}/B \simeq \mathsf{H}(\mathcal{T}_j/B)$。*2.* 对于 G $\mathcal{T}_j$ 的一个群对象，$\mathcal{F}/BG \simeq \mathsf{H}(\mathcal{T}_j^{\,G})$，其中 $\mathcal{T}_j^{\,G}$ 是内部 G-作用的普通拓扑斯。*3.* 对于非零阿贝尔 $A \in \mathcal{T}_j$ 和 $n \ge 2$，$\mathcal{F}/K(A,n)$ 具有零型范畴 $\mathcal{T}_j$，且最小正则源维数为 n。

证明。 第一条断言即推论 10。从零类型到一型的映射是零截断的；因此$\mathcal{F}/BG$ 是零复合单纯的。 BG 上的零截断族沿 $\mathbf{1} \twoheadrightarrow BG$ 拉回后得到一个零类型 X。在 $\mathcal{H}$ 中沿 Čech 神经 $G^\bullet$ 下降，得到一个普通的 G-作用于 X：由于 X 是零类型，相干性归结为作用方程。反过来，作用神经 $X \times G^\bullet$ 属于 $\mathcal{F}$，其有效商 $X/\!/G \to BG$ 由嵌入到 $\mathcal{H}$ 中计算。它到 $\mathbf{1}$ 的拉回是 X，因此该族由下降可知是零截断的。这两种构造由环境下降和满性互逆。在同一下降等价下，族之间的映射恰好是等变映射。这就将零类型范畴识别为$\mathcal{T}_j^{G}$。识别给出第二条断言。第三条断言由定理30和32得出。□

例如，取$\mathcal{T}_j$ 为第5节中的修改的或 Krivine 可实现性拓扑斯。在该拓扑斯中，对于每个非零阿贝尔 A 以及每个 $n \ge 2$，切片 $\mathsf{H}(\mathcal{T}_j)/K(A,n)$具有普通核心 $\mathcal{T}_j$ 和最小正则源维数 n。其次数-n 上同调包含环境上同调，后者是由基点分裂出的直和项。

8 有效可实现性中的切片上同调与数值观察

在高阶有效拓扑 $\mathcal{E} = \mathsf{H}(\mathrm{Eff})$ 中，我们使用基于 Kleene 第一代数的组装。一个组装为每个元素赋予一个非空的数值名称集合。每个态射都由名称上的一个偏递归函数进行跟踪。我们首先计算对切片中的二元上同调类有贡献的可追踪同态数量。随后计算一个类型代码的数值观察。在这两种计算中， $D = \mathbf{1} \amalg \mathbf{1}$ 都对其元素进行模二加法并使用数值名称。

8.1 $K(A_r, n)$上的有效切片的分类

在定理 32 的次数-n 分裂中，从基底的系数到 D 的同态给出一个二元上同调类。为了改变这类同态的数量，令 $V = \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{F}_2$，并将每个自然数都作为 V 的每个元素的名称。将这个余离散组装记作 ∇V，并令

$$A_r = D^r \times \nabla V, \qquad \mathcal{E}_{r,n} = \mathcal{E}/K(A_r,n), \quad r \ge 0,\ n \ge 2.$$

因子 ∇V 使每个 A_r 都非零，包括 A_0。到 D^r 的投影将被跟踪的同态 $A_r \to D$ 与 D^r 上的线性泛函相对应。

命题 36（有效切片的无标记分类）。令 $p_{r,n} : K(A_r,n) \to \mathbf{1}$ 为投影。范畴 $E_{r,n}$ 具有

$$(\mathcal{E}_{r,n})_{\le q} \simeq \mathcal{E}_{\le q} \quad (0 \le q \le n-2), \qquad H^n(\mathcal{E}_{r,n}; p_{r,n}^* D) \cong \mathbb{F}_2^r.$$

对于所有阿贝尔零型系数，其首个非零正上同调次数为 n。因此

$$\mathcal{E}_{r,n} \simeq \mathcal{E}_{s,m} \quad \Longleftrightarrow \quad (r,n) = (s,m).$$

对于固定的 n，定义基共享全局点空间 $K(V,n)$，在等价意义下如此 .

证明。从 ∇V 到 D 的可追踪映射是常值的。单个输入实现子为 V 中的每个元素命名，因此跟踪器会将其发送到所有像的一个公共名称。在 D 中，每个名称指定一个比特。如果该映射是同态，则该比特为零。因此限制到 $D^r \times \{0\}$ 将每个同态 $A_r \to D$ 识别为 D^r 上的一个二元线性泛函。反之，每个这样的泛函在投影到 D^r 后都由其有限表追踪。因此

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}(\mathsf{Eff})}(A_r, D) \cong \mathbb{F}_2^r.$$

在有效高阶完备化中，终对象是正则射影对象：原始分割投射对象通过原始图册保留其提升性质。整体截面函子 $\Gamma = \mathrm{Map}_{\mathcal{E}}(\mathbf{1}, -)$ 因而是正则的，并保有效群胚商。正次数基上同调消失。应用定理 32 可得所显示的上同调公式和低型等价。

对任意系数，次数为 $0 < k < n$ 时上同调均消失。在次数 n，$A_r \neq 0$ 的恒等映射给出一个系数为 $p_{r,n}^* A_r$的非零类。每个等价都会保留零类型、阿贝尔群对象、它们的迭代巴实现以及全局截面。因此，它也保留这个最小次数。此外，它还将 $p_{r,n}^* D$ 映射到相应的群：其底层对象是 $\mathbf{1} \amalg \mathbf{1}$，单位是第一个直和项，而四个积直和项上的加法由模二加法规定。因此，系数为此对象的次数-n 上同调的维数可以恢复 r，包括 $r = 0$。根据构造，参数相等也给出了反向的等价。

外部地，$\Gamma A_r \cong \mathbb{F}_2^r \oplus V \cong V$。因此，$\Gamma$对迭代巴构造的保留给出$\Gamma K(A_r, n) \simeq K(V, n)$。□

A_r 的恒等映射有一个具体的托orsor代表。其解环是 $K(A_r, n)$ 的恒等映射，而其在零点上的纤维给出基点覆盖 $\mathbf{1} \to K(A_r, n)$。该覆盖的一个截面是 $K(A_r, n)$ 的收缩。因此，$\pi_n K(A_r, n) \cong A_r \neq 0$ 见证了切片中该托orsor的非平凡性。

8.2 二元扭子坐标的最少数量

每个二元上同调类都确定一个托orsor，其全空间使该上同调类平凡化。给定同一语境上的两个族，我们计算使它们等价所需的此类坐标的最少数量。

固定 $r \geq 0$、$n \geq 2$，并写作 $B_{r,n} = K(A_r, n)$。选择 $s \geq 0$，并置 $G_s = K(D^s, n-1)$。具有纤维 G_s 的族，是指局部等价于常值 G_s-族的族。我们在固定基底上按等价对这些族进行分类，同时允许对纤维进行坐标变换。对于大小为 $d \times r$ 的二元矩阵 L，令

$$\lambda_L(a, v) = La, \qquad f_L = K(\lambda_L, n) : B_{r,n} \longrightarrow K(D^d, n).$$

令 P_L 为零点上的同伦纤维，映射为 $t_L : P_L \to B_{r,n}$。沿 t_L 扩张语境会添加一个见证，证明 f_L 在当前点为零。其二元坐标的数量为 d。

引理 37（族的矩阵坐标）。 G_s-族在 $B_{r,n}$ 上的等价类与 $(\mathbb{F}_2^r)^*$ 的维数至多为 s 的子空间一一对应。矩阵 M 所对应的 $s \times r$ 矩阵族 P_M 对应于其行空间。

证明。在内部，同态 $A_r \to D^s$ 构成一个由 $s \times r$ 矩阵组成的有限数值组装。要验证带参数的断言，只需在普通对象上检验，因为到零类型的映射都可经由零截断分解。取一个普通对象 T，并选择一个组装覆盖 $C \twoheadrightarrow T$。对于 $c \in C$和 $a \in D^r$的固定载体值，当 v遍历 V时，元组 (c, a, v) 有一个共同的实现子。

该同态的跟踪器在这些输入上具有相同的输出名称，而 D^{s} 中的不同输出具有互不相交的实现集合。因此，其值与 v无关。在 D^{r} 的标准基上求值，定义了一个 T 上的矩阵，其乘法公式在覆盖之后、因而在覆盖之前，都与该同态一致。反过来，有限二进制元组上的所有矩阵运算都是可跟踪的。这就证明了内部公式，包括零行或零列的情形。

设 H_{s} 为有限数值群 $\mathrm{GL}_{s}(\mathbb{F}_{2})$。根据每个切片中的引理 23，在相干同伦意义下，对零点求值可将 G_{s} 的自等价唯一分解为 $x \mapsto u + K(h,\ n-1)(x)$，其中 $u\colon G_{s}$ 且 $h\colon H_{s}$。复合遵循半直积乘法。这些公式也适用于 $n=2$，此时带基点连通一型将群分类。因此， G_{s} 的代码在单价宇宙中的像就是 $G_{s} \rtimes H_{s}$的解环：其基点是一个覆盖，其环群为这个自同构群。用 $Y//H$ 表示作用群胚的有效商。分裂扩张给出从该连通分支到 BH_{s}的投影，其纤维为 $BG_{s} = K(D^{s},\ n)$，单值化则是 H_{s}的系数作用。事实上，沿 BH_{s} 的点覆盖拉回，会将群扩张化为其核，而通过 h 改变提升会产生共轭作用。因此，该连通分支为 $K(D^{s},\ n)//H_{s}$。

置 $B = B_{r,\ n}$。由于 B 是单连通的，而 BH_{s} 是一型，求值给出 $(BH_{s})^{B} \simeq BH_{s}$，且在参数上是稳定的。对上述投影取指数并沿 $1 \to BH_{s}$ 拉回，得到纤维$K(D^{s},\ n)^{B}$，具有相同的单值化。在 B的基点处求值，再减去该值，将此纤维识别为

$$K(D^{s}, n) \times \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Ab}}(A_{r}, D^{s}).$$

对于带基点因子，通过在每个参数切片中检验带基点映射即可得到该公式。下降表明，将此积按 H_{s} 取作用商，得到族的完整内部对象。由射影性，全局截面保持这个有效商。在外部看来，其上同调类是二进制矩阵在可逆行变换下的轨道，因为 $\Gamma K(D^{s},\ n)$ 是连通的。具有 s 行的两个矩阵恰好在同一轨道中，当且仅当它们具有相同的简化行阶梯形，或等价地，具有相同的行空间。映射 f_{M} 表示矩阵 M，其在基点处的值为零。它的纤维是相应的平移挠子，经取作用商后变为所述的无框架族。□

行空间对原始语境上的族进行分类。沿 t_{L} 拉回，当且仅当某一行属于 L各行张成的空间时，该行才会变得平凡。因此，我们可以通过寻找一个维数最小的子空间，使两个分类子空间在模去该子空间后具有相同的像，从而求得最小值。

定理 38（二元挠子坐标的最小数量）。设两个 G_{s}族定义在$B_{r,n}$ 上，其行子空间分别为 Y、Z。在扩张 t_{L} 中加入坐标后，使这两个族全局等价所需的二元坐标最少数量为

$$d_{\min}(Y, Z) = \max\{\dim Y, \dim Z\} - \dim(Y \cap Z).$$

满行秩矩阵可达到这一最小值。等价地，这是在扩展语境中使它们的宇宙编码相等所需的此类坐标的最小数量。

证明。设 $\ell =$的秩为 L，$W =$为行 L。在通过有限递归坐标变换实现的基底中，系数映射具有如下形式

$$D^{\ell} \times A_{r-\ell} \longrightarrow D^{\ell} \times D^{d-\ell}, \qquad (u, a) \longmapsto (u, 0).$$

取其 n重解环的纤维，得到$P_{L} \simeq B_{r-\ell,n} \times K(D^{d-\ell}, n-1)$。在同伦意义下，$t_{L}$是先投影到第一因子，再包含进解环后的核。采用这些基底时，系数包含映射$A_{r-\ell} \to A_{r}$将(v, w)映为$(0, v, w)$，其中 w是余离散坐标。投影到第一因子存在一个截面。因此，当且仅当某一行在系数核上为零时，它才给出零映射 $f_{a}t_{L}$：由带基点分类可知这是必要条件（从无基点零伦中减去基点值），而通过限制 $K(-, n)$可知这是充分条件。等价地，$a \in W$。

选取矩阵 M, N'，用于 Y, Z。拉回到 P_{L} 后，两个分类映射都提升到其作用商中的 $K(D^{s}, n)$。它们底层族之间的等价是该商中的一条路径。它在

BH_s 上的投影是一个环路，因此有一个线性部分，即映射 $P_L \to H_s$。对于 $n \geq 2$， P_L 的分解中的两个因子都是连通的，所以这个映射是一个单独的矩阵 h。对每个固定的 h，作用群胚中的路径提升将其余数据确定为从 $hf_M t_L$ 到 $f_{N'} t_L$ 的一个同伦。根据前述核检验，当且仅当 $N' - hM$ 的每一行都属于 W 时，这样的同伦才存在。在商 $(\mathbb{F}_2^r)^*/W$ 中，当且仅当两个行空间相同时，这样的 h 才存在。事实上，此时两个由 s 行组成的列表定义了从 $\mathbb{F}_2^s$ 到同一行空间的满射。选取该行空间的一组基，通过每个满射将其提升，并用各自核的一组基补全每个提升后的列表。由此得到的基变换就是所需的行变换，行空间为零时也成立。因此，判据是 $Y + W = Z + W$。

令 $a = \dim\ Y$、 $b = \dim\ Z$、 $c = \dim(Y \cap Z)$。若 $Y + W = Z + W$，则 Y模 Z的像包含于W的像中；反之亦然，只需交换 Y， Z。因此 $d \geq \dim\ W \geq \max(a, b) - c$。不妨设 $a \geq b$，必要时交换这两个空间。分别将 $Y \cap Z$的一组基扩充为 $y_1, \ldots, y_{a-c}$和 $z_1, \ldots, z_{b-c}$。取 L的行分别为$b - c$向量 $y_i + z_i$以及剩余的 $a - b$个向量 y_i。它们模 Z的投影是线性无关的。模掉它们张成的空间后，这两组基生成相同的子空间，因此该矩阵达到了这个界。关于编码的结论是单值性。□

该公式将此最小值与两个子空间 [39] 的注入距离对应起来。例如，在 $(\mathbb{F}_2^3)^*$ 中，平面 $\langle e_1, e_2\rangle$ 和 $\langle e_2, e_3\rangle$ 通过添加单个坐标 $e_1 + e_3$ 得以对应。每个像在商空间中的秩都是二。因此，一个坐标就能对应这两个族，而将二者同时平凡化则需要两个平面之和中的三个线性无关坐标。

8.3 在全局点空间可缩的基底上的上同调

A_r 的计算从次数为 n的二元上同调中读出 r。现在我们构造一个群 Q，使其第一个正上同调次数取决于系数。记 $p\colon K(Q,\ n) \to 1$ 为投影。 Q 的恒等映射给出一个系数为 p^*Q、次数为 n 的非零类。每个同态 $Q \to D$ 都是零，而一个非分裂扩张给出次数为 $n+1$ 的二元类，这是 p^*D 的第一个正次数。为同时构造 Q和该扩张，令 $C = \nabla\mathbb{F}_2$，并令 $j\colon D \to C$ 在载体上为恒等映射。在 Eff 的阿贝尔群中取其余核，得到

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{j} C \xrightarrow{q} Q \longrightarrow 0. \tag{15}$$

由其载体映射的单射性可知， j 是单态。这个商也可以通过由 D的平移给出的有效关系构造，该关系将其核与 D 等同。

引理 39（一个全局截面平凡的非零商）。群 Q 非零， $\Gamma Q = 0$，并且同态集$(Q,\ M) = 0$对于每个阿贝尔组装 M。

证明。 每个可追踪映射 $C \to D$ 都是常值的，因为 C 的两个元素共享一个名称，而 D 中的每个数值名称都指定一个比特。因此， j 是 C 的真子对象，其余核非零。由于射影性， Q 的每个全局点都能提升到 C，而 C 的每个全局点都来自 D。这就得到 $\Gamma Q = 0$。对于 $g\colon Q \to M$ 是一个群同态， gq 是一个具有 $gqj = 0$的组装映射。由于 j 在载体上映射为满射，gq 在载体上为零，因而作为组装映射也为零。满态 q 于是给出 $g = 0$。□

定理 40（商系数的首个检测次数）。设 $n \geq 2$、 $B_Q = K(Q、\ n)$，$p\colon\ B_Q \to 1$，以及 $Z_n = E/B_Q$。整体空间 ΓB_Q 是可缩的，而 Z_n 的普通核心是 Eff。其具有阿贝尔零型系数的首个非零正次数上同调出现在次数 n。在该次数中，$H^n(Z_n;\ p^*M) = 0$对每个阿贝尔组装 M均成立。内在二元系数 p^*D 具有非零上同调的首个正次数是 $n + 1$。

证明。 Γ对有限 bar 构造的保持性给出 $\Gamma B_Q \simeq K(0, n)$。根据定理 32，每个阿贝尔零型系数都是一个拉回 p^*M。由于 $\mathcal{E}$ 的终对象是射影的，取这些系数的上同调

在低于 n 的正次数上消失，而在次数 n 上为同态集 $\mathrm{Hom}(Q, M)$。Q 的恒等映射和引理 39 给出了所述的检测与消失。

对于二元类，将引理 24 应用于 (15)。这使得 n 重解环 $q_n\colon K(C,\ n) \to B_Q$ 成为一个主$K(D,\ n)$-托orsor，其分类 Bockstein 为 $\partial_n\colon B_Q \to K(D,\ n+1)$。$\partial_n$的零伦将分裂 q_n。减去截面在零点处的取值，就得到一个在同伦意义下的基点截面，因为规范化对群同态自然，并且将 id^{B_Q} 映为自身。取 π_n 将通过同态$Q \to C$ 分裂 q。由于 C 是阿贝尔组装，$\mathrm{Hom}(Q,\ C) = 0$，因此任何此类同态与 q的复合映射都为零。$Q \neq 0$ 的恒等映射非零。因此，$[\partial_n] \neq 0$ 具有系数 p^*D且次数为 $n+1$。它在全局点空间上的像为零，因为其源可缩，而目标连通。□

8.4 两类类型分类器的数值观察

我们从切片的上同调转向从类型分类器到数值组装 N 的映射，其中每个数码都以自身为名称。程序索引族和带有两个显式标签的族给出了全局点空间等价、但在 N [28] 中观察结果不同的分类器。我们计算了两种分类器在每一种有限数值简单类型上的观察内部对象。这一内部计算还描述了依赖于高阶参数的观察。

固定一个部分递归函数的可接受编号 $e \mapsto \varphi_e$。对于 $e,\ s \in \mathbb{N}$ 令 $l_e(s)$ 为满足如下条件的最大值：每个满足 $i < k$ 的计算 $\varphi_e(i)$ 都会在至多 s 步内停机。此函数可计算，且关于 s 单调不减。在阶段 s 和 $s+1$ 之间，取 D 的自同态：若 $l_e(s+1) > l_e(s)$，则该映射为零；否则为恒等映射。用 $d_e[s,t)$ 表示截至阶段 t 的复合映射。在 e 上，构造由对 $(s,\ a) \in \mathbb{N} \times D$ 的类组成的群 M_e，其中

$$(s,a) \sim_e (t,b) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists u \geq s,t \quad d_e[s,u)(a) = d_e[t,u)(b).$$

这是 M 上的一个单群组装。$(e,[s,a])$ 的名称是一个递归元组，它编码了 e 以及该上同调类的任意代表元。要将两个名称相加，先将它们传输到最大的阶段，再将它们的比特相加。再取一个共同阶段，即可验证代表元的独立性和群公理。零的名称为 $(e,0,0)$，而求逆会固定每个元素。这些公式以统一的方式跟踪 e 中的群运算，并将商直接表示为 N 上的组装。

如果 φ_e 是全定义的，l_e 会无限次增大，每个上同调类最终都映射到零，并且零截面将纤维识别为 1。否则，l_e 会稳定下来。固定一个稳定后的阶段 S。映射 $a \mapsto [S,a]$ 和 $[t,b] \mapsto d_e[t, \max(t,S))(b)$ 是 D 与 M_e 之间互为逆的可追踪群映射。因此，当 e 是全定义的时，M_e 同构于平凡群；否则，它同构于 D。

固定 $n \geq 2$。构造相对解缠 $K_N(M,\ n)$，并在一个包含这些可数呈示及其有限 bar 构造的层级中对其进行分类。令 $c\colon N \twoheadrightarrow \mathcal{M}_n$ 为其分类映射到该宇宙中的像分解。将泛族拉回到此像上所得的族是单值的：像的包含是单态，因此两个编码的恒等空间仍是其纤维之间的等价空间。固定分别对应全定义程序和处处未定义程序的指标$e_0,\ e_1$，并用 $u_i = c(e_i)$ 表示它们的宇宙编码。作为比较，令 $\mathcal{W}_n$ 为从 $1 \amalg 1$ 到同一宇宙的映射的像，该映射将 1 和 $K(D,\ n)$ 的编码加上标签。选择 $e_0,\ e_1$ 得到映射 $1 \amalg 1 \to N$，进而得到像之间的包含 $\mathcal{W}_n\ , \to \mathcal{M}_n$。在每个非初始上下文中，这两种带标签的纤维类型都不等价，因此标签下降为映射 $\mathcal{W}_n \to 1 \amalg 1$。若程序索引族可经由 $\mathcal{W}_n$ 分解，便能为每个程序计算出标签，从而判定其全定义性。同样的归约还确定了哪些数值观察下降到 $\mathcal{M}_n$。

定理 41（整体同伦与数值观察）。M_n 和 W_n 的全局点空间都等价于 $1 \amalg K(\mathbb{F}_2, n+1)$。对于每个由 1、N 经积和函数类型生成的有限数值简单类型 σ，分别在 u_0 和两个带标签码处求值，得到

$$\sigma^{\mathcal{M}_n} \simeq \sigma, \qquad \sigma^{\mathcal{W}_n} \simeq \sigma \times \sigma.$$

在 u_0、u_1 两处同时求值时，第一个比较给出 σ 的对角线。这些都是内部等价，因此适用于任意附加的高阶参数。

证明。 终对象组装在$\mathcal{E}$中是射影的，因为它是分割的，而且可以通过组装图册细化提升问题。因此， $\Gamma = \mathrm{Map}(1, –)$保留覆盖：射影性保证了连通分支上的满射。它保留有限极限，因此会将表示任意商的有效群胚映射为由所诱导的空间覆盖所构成的 Čech 群胚。由此可知， Γ 也保留有限去环化。特别地， $\Gamma\mathcal{M}_n$ 的每个连通分支都包含一个数码。纤维计算恰好得到两个连通分支。它们彼此不同，因为两个纤维之间若存在等价，则经过 n 次环化后会使 D 变得平凡。在终端代码处，环空间是可缩的。在另一个代码处，环群为 $\Gamma K(D, n)$。平移将 $K(D, n)$ 与其自等价 $[9]$ 的单位连通分支相识别。这就是整个自同构群，因为带基点的自等价对应于 D 的自同构，而 D 是二阶循环群。平移与复合相容。这些环群确定了所声称的全局连通分支。

这两个带标签码的纤维之间，在每个非初始上下文中都没有等价对象：在那里绕行一个等价关系会将 D 的两个不相交点识别起来。因此，它们的等价群胚就是两个自同构群胚的不交并。其商在内部给出 $\mathcal{W}_n \simeq 1 \amalg K(D,\ n+1)$。这个和的全局点沿着其到 $1 \amalg 1$ 的映射分裂，而 $1 \amalg 1$ 的全局点正是两个普通标签。这也证明了关于 $\Gamma\mathcal{W}_n$ 的断言。

设 $f\colon \mathcal{M}_n \to N$。根据组装上的全忠实性，复合映射 $fc\colon\ N \to N$ 是全递归的。根据 e 是否全定义，它分别取固定值 $f(u_0)$ 和 $f(u_1)$，因为等价的纤维会产生相同的输出。如果这些值不同， fc 就能判定全定义性。事实上，一个忽略其输入并模拟某个固定计算的程序，当且仅当该计算停机时才是全定义的，因此这样的判定将能够判定停机问题。对所有数码的相等性就是组装映射的相等性，而 c 是一个覆盖。因此， f 是常值的。

对于参数 X，令 $F\colon X \times \mathcal{M}_n \to N$，并设 $g(x) = F(x, u_0)$。选取一个组装覆盖 $A \twoheadrightarrow X$。 A 的每个载体元素 a ，任选其一个名称即可给出一个全局点。在该点应用前述结果可知， F和 $g\pi_X$ 在 $A \times N$上具有相同的载体值。那里的映射是组装态射，因此二者相等。由于 $A \times N \to X \times \mathcal{M}_n$是一个覆盖，且 N是一个集合，它们的等式下降。Yoneda 现将求值识别为 $N \to N^{\mathcal{M}_n}$的逆。对于任意对象 Z，若常值映射给出 $Y \simeq Y^{\mathcal{M}^n}$，则由指数伴随可得 $(Y^Z)^{\mathcal{M}_n} \simeq (Y^{\mathcal{M}_n})^Z \simeq Y^Z$。该性质也对积封闭，且包含终类型。对 σ 作归纳即可证明第一个公式。每个这样的 σ 都是一个集合。将连通的 $K(D, n+1)$映入一个集合，所得恰为常值映射，且在任意语境中皆如此。因此，$\mathcal{W}_n$的两个直和项允许给出两个独立输出。□

9 函数可实现性中的代码恒等式与经典反射

在定理 41 的程序索引族中，计算的进展会将二元群序列中的一个转移置为零。在函数可实现性中，我们可以直接用流的各项来指定这些转移。若非零项有无穷多个，所得的群便是平凡群。对于最终为零的流，非零位置的一个上界可以将该群识别为 C_2。平凡纤维给出了 Baire 空间子集的一个识别定理。循环纤维则将恒等态射的连续选择与尾界的连续选择联系起来。

写出 $B = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，令 $\mathbb{B}$ 为这样一个组装： $\alpha \in B$ 的唯一名称是 α，并在 $\mathbf{E}$ =H(RT($\mathbf{K}_2$)) 中工作。选取一个大于 $|B|$的可取不可达基数。在 $\mathbf{K}_2$，中， $r \cdot \alpha$ 的第 j 个输出，比 $r(j, \alpha|k)$ 的第一个正值小一；按前缀长度 k 递增的顺序考察。应用 $r \cdot \alpha$ 当且仅当对于每个输出坐标 j，都存在一个前缀长度 k ，使得 $r(j, \alpha|k) > 0$，此时它才定义为一个流。在数值组装 N 中， m 的名称是常值流 $\nu_m(k) = m$ ，对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。我们对有限词、自然数和元组使用固定的有效编码。因此，从具有继承流名称的子空间 $S \subseteq B$ 到 B 或 $\mathbb{N}$ 的映射可跟踪，当且仅当其载体映射连续。事实上，跟踪器会为每个输出读取有限个坐标。反过来，用常值流表示数值输出。对于一个

有限词 s，令 $[s]$ 为所有延伸 s 的流构成的集合。若 $S \cap [s]$ 非空，且第 j 个输出坐标在此处恒为 m，则令 $r(\langle j,\ s\rangle) = m+1$。将 r 的所有其他项设为零。由连续性，S 中的每个输入都有一个前缀，可为每个输出坐标提供证据，因此 r 跟踪该映射。组装的完全嵌入在 $\mathcal{E}$ 中保留这些映射。

9.1 Astream-索引族及其单值分类器

分别给出 $C_2 = \mathbb{Z}/2$ 流名称 $\nu_0\nu_1$ 的比特 0、1。对于每个阶段 s，使用 C_2 的一个副本，并令到下一个副本的转移 $d_{\alpha,s}$：如果 $\alpha(s) \neq 0$，则为零；否则为恒等映射。将 $d_\alpha[s,t)$ 记作有限复合，其中包括 $t = s$ 处的恒等映射。通过关系在代表元 $[s,a]$、$a \in C_2$ 上定义 M_α

$$(s,a) \sim_\alpha (t,b) \quad\Longleftrightarrow\quad \exists v \geq s,t \quad d_\alpha[s,v)(a) = d_\alpha[t,v)(b).$$

其全组件的名称为 $\langle \alpha,\ s,\ a\rangle$，对应于 $(\alpha,\ [s,a])$。传输到共同的较后阶段即可证明传递性。要将两个上同调类相加，就传输到较大的输入阶段，并在那里相加。通过传输到共同的见证阶段可知，这与代表元的选择无关；有限前缀检查对其进行跟踪。上同调类 $[0,0]$ 给出零元，并且每个上同调类都是自身的逆元。由此在 $\mathbb{B}$ 上的组装切片中构造出一个阿贝尔群 M。

置 $P = \{\alpha :\ \forall k\ \exists s \geq k\ \alpha(s) \neq 0\}$。对于 $\alpha \in P$，每个代表元都会归零，因此投影和零截面给出一个可跟踪同构 $M_\alpha \cong 0$。如果 S 是满足 $\alpha(t) = 0$ 对于 $t \geq S$成立的界，则一个可跟踪同构 $C_2 \to M_\alpha$ 将 a 发送到 $[S,a]$。其逆将 $[s,a]$ 发送到 $d_\alpha[s,\max(s,\ S))(a)$。这些公式对于所提供的界是一致的。代表元的组装具有可数纤维，且总载体的大小为$|B|$。其运算以及下文有限次迭代的巴构造在所选大小界下都有表示，因为神经项使用有限乘积，并且单纯次数是可数的。

命题 42（分类器及其泛族）。对于 $n \geq 2$，族 $K_{\mathbb{B}}(M,\ n)$ 具有一个~单值完备化 $u_n :\ U_n \to U_n$，以及代码覆盖 $c_n :\ \mathbb{B} \twoheadrightarrow U_n$。令 $a :\ \mathbb{B} \twoheadrightarrow Q$ 为关于如下关系的有效商：其在 $(\alpha,\ \beta)$ 处的纤维是群同构 $M_\alpha \cong M_\beta$的内部对象。于是 Q 是一个零类型，M 沿着 a 下降为 Q上的一个阿贝尔群 A，并且

$$U_n \simeq \sum_{q:Q} K(A_q, n+1), \qquad u_n \simeq \left(Q \xrightarrow{0} \sum_{q:Q} K(A_q, n+1) \right).$$

特别地，U_n 具有精确高度 $n+1$。常值流的编码 $u_* = c_n(1^\omega)$ 和 $v_n = c_n(0^\omega)$的纤维分别为 $\mathbf{1}$ 和 $K(C_2, n)$。

证明。构造组同构的组装 $H(\alpha,\beta)$ $M_\alpha \cong M_\beta$。其名称为逆同态提供跟踪器。同态方程和逆映射方程通过组装切片中函数对象的有限极限来定义它。这些对象在源嵌入下保持不变。每个载体群都是零群或二阶循环群，因此每对对象之上至多有一个同构。因此 H 是单态射，并且根据恒等映射、复合和求逆，它是一个等价关系。求值给出 M 沿其有效集合商 a 的下降数据，从而得到带有 $a^*A \simeq M$ 的 $A \to Q$。

在每个参数切片中，去环化之间的无基点等价可分解为目标中的一个平移和一个带基点等价。根据引理 23，后者对应于系数的同构。因此，以 $\mathbb{B}$ 为对象的纤维等价群胚，其箭头为 (b,ϕ)，其中 $\phi \in H(\alpha,\beta)$ 且 $b \in K(M_\beta, n)$。复合将 $(b',\psi),(b,\phi)$ 送至 $(b' + K(\psi,n)b, \psi\phi)$。去环化和平移使这一描述关于参数自然成立。与单值完备化 [49], 的单纯构造一样，实现该群胚，并使其在 $K_{\mathbb{B}}(M,n)$ 上具有求值作用。有效性将像编码之间的路径等同于它们的等价，而沿代码覆盖的下降则给出单值性。

为识别这两个实现，令 $T = \sum_{q:\ Q} K(A_q,\ n+1)$，并令 $z\colon Q \to T$为零。这就是相对 bar 覆盖。复合映射 za 是一个覆盖。其 Čech 群胚在 $(\alpha,\ \beta)$ 上的一个箭头，是 Q 中的一条路径，因此是一个

$\phi \in H(\alpha,\ \beta)$，并附带一条连接传输后的零点的路径。后者是一个元素 $b \in K(M_\beta,\ n)$。路径复合恰好就是上面的作用公式，其相干性由传输的函子性和环群律诱导。将 z 拉回到这个图册后，其纤维为 $K(M_\alpha,\ n)$，其传输为$x \mapsto b + K(\phi,\ n)x$。现在通过下降得到 $U_n \simeq T$，并将 u_n 与 z识别。基底 Q 是一个集合，而 $T \to Q$ 的纤维是 n-连通的 $(n+1)$-型。因此 $Q = \tau_{\le 0}U_n$，且在 v_n 处，$(n+1)$-重环对象为 C_2。这证明了正合界限以及对标记纤维的描述。□

9.2 G_δ 与固定截断高度下的共解析等式轨迹

代码 u_* 命名终端纤维。为了衡量识别它的复杂度，改变输入流，并记录与 u_* 之间存在全局见证的输入。对于 $f\colon\ \mathbb{B} \to V$和 $v\colon\ \mathbf{1} \to V$定义外部轨迹

$$L_v(f) = \{x \in B : \mathrm{Map}_{\mathcal{E}}(\mathbf{1}, (f(x) = v)) \neq \varnothing\}.$$

赋予 B 通常拓扑。G_δ 集合是开集的可数交。B 的共解析子集是 $B \times B$的某个闭子集在投影下的补集。我们采用粗体点类，并允许连续归约使用任意贝尔参数 [30]。

定理 43（从 G_δ 到共解析恒等态射）。对于 $n \ge 2$，轨迹 $L_{u_*}(f)$ 随着 $f\colon \mathbb{B} \to U_n$ 变化，恰好是 B的 G_δ子集。令 $V_n = U_n^{\mathbb{B}}$，并令 w_n在 u_*处为常值。对于 $f\colon \mathbb{B} \to V_n$，轨迹 $L_{w_n}(f)$恰好是 B的共解析子集。U_n和 V_n 的精确高度均为 $n+1$。对于 V_n，这类轨迹的一个例子是良基树的编码集合；在连续归约下，它对余解析集是完备的。

证明。根据命题 42 和纤维计算，$L_{u_*}(c_n) = P$。每个映射 $\mathbb{B} \to U_n$ 都可沿着 c_n提升至同伦，因为 $\mathbb{B}$ 是分割投射的。因此，其轨迹是集合 G_δ 的连续逆像 P。要实现任意 G_δ 集合，将其写成由 $i \in \mathbb{N}$索引的开集之交。通过基本柱集的枚举为每个开集编码，并允许空白项。在阶段 t，计算最大的 $k \le t$，使得每一行 $i < k$ 在其前 t 项中都包含一个词长不超过 t 且包含输入 x的柱集。所得整数序列是非递减的。每当序列严格增加时输出一个 $\mathbf{1}$，其余位置输出 $\mathbf{0}$。当且仅当 x 属于每个开集时，才会产生无穷多个 $\mathbf{1}$。这是关于代码和 x的单一连续过程，因为每个阶段只执行有限次有界测试。

将映射 $f\colon\ \mathbb{B} \to V_n$ 转置为映射 $\mathbb{B}^2 \to U_n$。该方块也是分割投射的，因此，对于联合连续的 $\eta\colon\ B^2 \to B$，转置与 $c_n\eta$ 同伦。对于每个外部参数 x，

$$x \in L_{w_n}(f) \quad\Longleftrightarrow\quad \forall \beta \in B \quad \eta(x,\beta) \in P. \tag{16}$$

求值证明了必要性。对于充分性，群 M 沿 $\eta(x,\ -)$ 的拉回是一个在 $\mathbb{B}$上的组装，其载体纤维为单点集。它的投影与其可跟踪的零截面互为逆组装映射。解环提供了一致平凡化，因而根据单值性，在函数类型中得到一个恒等映射。这种一致性使得 (16) 中的量词可以遍历外部分支。

右侧的补集是某个闭集的投影。一个见证由 β 和一个数m 组成，在此之后，$\eta(x,\ \beta)$ 的每一项都为零。将 m 编码为见证流的第一项，并将 β 编码为其尾部。反过来，对于闭集 $C \subseteq B^2$，其开补集是 G_δ。在 $B^2 \cong B$ 上应用第一约化，得到 η，使得 $\eta(x,\ \beta) \in P$ 恰好在 C之外成立。对 $c_n\eta$ 进行柯里化，根据 (16) 得到 C 投影的补集。指数化保持截断上界，而常值函数将求值分解于 0^ω，从而表明 U_n 是 V_n的收缩。因此，V_n 具有相同的精确高度。

对于显式轨迹，流 a 对有限词组成的树 T_a 编码，其中每个前缀 s 都满足 $t \preceq s\, a(\ulcorner t \urcorner) = 0$。对于输入 $(a,\ \beta)$，在阶段 r，如果 β 的某个长度为 $\le r$ 的前缀已经离开 T_a，则输出 $\mathbf{1}$，否则输出 $\mathbf{0}$。这就给出了式 (16) 中一个可跟踪的 η，用于识别不存在无限分支的情形。为完整起见，给定闭的 $C \subseteq B^2$，对每个 x，将满足 $([x||s|] \times [s]) \cap C \neq \varnothing$ 的词组成的树编码为 s，其中方括号表示柱集。s 的隶属关系取决于 $x||s|$，因此这些编码连续变化。由闭性可知，这棵树上的分支恰好是满足 $(x,\ \beta) \in C$ 的 β。这就得到了所述的归约。□

9.3 尾界与双重否定移位

用于 $K(C_2,\ n)$ 的代码 v_n 描述了每个最终为零的流的纤维。尾部界给出一致的系数同构，而该同构的一个跟踪器又能提供一个界。为表达这种对应关系，令 F 为最终为零的流所构成的子组装，每个流都以自身为名称。对于 $\alpha \in |F|$，令 $\ell(\alpha)$ 为满足对所有 $t \geq S,\ \alpha(t) = 0$ 的最小 S。为同一载体赋予精化后的名称 $\langle \alpha,\ \ell(\alpha)\rangle$，从而得到 $F_{\min}$，其遗忘单态射为 $j\colon F_{\min},\to F$。在内在逻辑中，写作

$$J(\alpha) = \left\| \sum_{S:N} \prod_{t:N} (S \leq t \longrightarrow \alpha(t) = 0) \right\|_{-1}, \qquad I(\alpha) = (c_n(\alpha) = v_n).$$

F 的载体中的每个流都有一个有限尾界。族 J 表达了在变化的流上局部存在这样的界。我们将其与 $I \to F$的支撑 作比较，即在 F 中的像，其纤维为 $\|I(\alpha)\|_{-1}$，位于 α处。

引理 44（代码恒等映射的支撑）。在 F上，J 由 j表示，并且

$$J(\alpha) \simeq (a(\alpha) = a(0^\omega))_Q, \qquad I(\alpha) \simeq J(\alpha) \times K(C_2, n).$$

对于 $-1 \leq r < n,\ I$ 的相对 r-截断是 J，且截断映射在 J上有一个截面。

证明。 有效对 $(\alpha,\ S)$ 以该对本身为名称，表示 J定义中的未截断和。在一个有效对上，全称尾部相等证明由数值相等检验跟踪，该检验针对 t 和 t处的流元素进行。通过扫描前 S 个元素，可以计算出 $\ell(\alpha)$。因此，有效对的组装通过一个分裂覆盖映射到 $F_{\min}$上，而该覆盖的截面会插入最小界。与 j 复合后得到其到 F的投影，因此像分解证明了第一个识别。

由 $[S, a]$的公式，可从界限一致地得到同构 $C_2 \cong M_\alpha$。反之，将其跟踪器应用于非零生成元，会返回一个非零类的代表 $[s, 1]$。在任意 $t \geq s$ 处进行重置都会消灭该类，因此 s 是一个有效界限。规范化为最小界限后，由于系数同构是唯一的，系数同构的组装与 $F_{\min}$之间存在互逆可跟踪映射。H 的有效性将此对象与 Q 中所指示的恒等映射相识别。纤维等价中的平移因子为 U_n 中的完整恒等映射添加 $K(C_2,\ n)$。到 J 的投影具有 $(n-1)$-连通纤维，而零点提供了一个截面。由于 J 是一个命题，所述相对截断随即成立。□

对于当前语境中的任意类型 X，记作 $\neg X = (X \to \mathbf{0})$。由于 $\mathbf{0}$ 是一个命题，命题截断的泛性质给出 $\neg X \simeq \neg\|X\|_{-1}$。特别地，根据引理 44，$\neg I(\alpha) \simeq \neg J(\alpha)$。

定理 45（尾界的逐点与一致双重否定）。对于命题族J,

$$\prod_{\alpha:F} \neg\neg J(\alpha) \simeq \mathbf{1}, \qquad \neg\neg \left(\prod_{\alpha:F} J(\alpha) \right) \simeq \mathbf{0}.$$

将 J 换成 I，同样的两个等价仍然成立。

证明。 对于组装单态射 $A,\to X$，其载体像为 S，其伪补是 $|X|\setminus S$ 上的继承子组装。事实上，不相交子对象在组装图册上的拉回是一个映射，其载体避开 S，因为任何具有相同像的元素对都会给出拉回的一个点。因此，同一个跟踪器将图册分解到继承子组装中。经由图册的分解可沿单态射下降。将这一计算应用两次可知，双重伪补是 S 上的继承子组装。对于 $F_{\min},\to F$，它就是整个 F，由此得到第一个等价。在 $\mathbb{B}$ 上，同样可将内部最终为零的双重否定识别为 F。

考虑任意连续函数 $|F| \to \mathbb{N}$。它在 0^ω 处的取值 s，在由 k 个初始零确定的相对柱集中为常数。在阶段 $t = \max(k, s)$ 处只有一个 1 的流属于该柱集，且具有最小尾部

界 $t+1>s$。因此，对每个连续候选，都存在一个流，使其取值严格小于最小界。j 的整体截面要求每个流上都有连续界。J 的内部积是次终对象。通过为组装图册中的一个元素选取名称，$\mathcal{E}$ 的每个非始对象都有一个点。因此 $\prod_{\alpha:F} J(\alpha)\simeq \mathbf{0}$，从而证明了第二个等价。根据引理 44，$I$ 的支撑是 J，且 I 的任意截面都投影为 J 的一个截面。这两个断言对 I 也成立。□

9.4 经典反射下的截面

双重否定层化使最小尾界可以统一获得。对于命题 42 的泛族，同一反射给出一个空间族，其相对截断的截面空间在次数 $n-1$ 以内均可缩。某个基底分支的非零最高同伦群，将完整截面空间与较低截断的截面空间区分开来。将反射子识别为全局截面，使我们能够明确计算这两个截面问题。

令 $\mathcal{S}_{<\infty}$ 表示在某个许可基数处大小较小且有限截断高度的空间。记作 $\Gamma=\mathrm{Map}_{\mathcal{E}}(\mathbf{1},-)$。终端分割组装对于完备覆盖是射影的。用组装图册细化一个提升问题，并利用射影性处理由此得到的源覆盖。因此 Γ 保持有效满射。由可表性可知，它保持有限极限，因此会将有效群胚及其商映为空间中的某个有效满射的 Čech 神经及其商。此外，ΓX 大小受许可基数约束。这对组装由载体公式可得。它在有效群胚实现下保持稳定：为对象和箭头的空间选取一个许可的不可达基数。所有神经项都是这些空间的有限纤维积，而其可数单纯实现仍在该基数处保持小。正合生成给出每个 X 的大小界。可表性也保持其有限截断界。

定理 46（函数可实现性的双重否定反射）。存在一个等价$\mathrm{Sh}_{\neg\neg}(E)\ \simeq\ \mathcal{S}_{<\infty}$，在此等价下，层化是 Γ。其全忠实右伴随 D_{cl} 将集合上的余离散组装函子扩展。

证明。利用$\mathcal{E}$ 在 $\mathrm{Asm}(\mathcal{K}_2)$ 上取值的正则层空间中的实现。对于一个有界空间 K，令

$$D_{\mathrm{cl}}K(A)=\mathrm{Map}_{\mathcal{S}}(|A|,K),$$

其中 $|A|$ 是该组装的离散载体。组装的覆盖在载体上是满射，且载体函子保持有限极限。因此，将其载体的 Čech 神经映入 K 即可验证下降。此构造保持有限极限。在环境层范畴中取商时，它也保持有效群胚商。若 $R_\bullet$ 呈现 K，则由外部选择，$R_0^{|A|}\to K^{|A|}$ 在连通分支上是满射；而有限极限保持性使其 Čech 神经得以识别。层的逐对象有效满态射是有效满态射，因此 $D_{\mathrm{cl}}K$ 实现了所得的群胚。

对于离散的 S，该公式表示组装 ∇S，其中每个名称都实现每个元素，因为常值名称可以跟踪到其中的任意函数。对高度 h 进行归纳。对于 $h\geq 1$，选取一个代表点的离散集合，使其覆盖各个连通分支。在 Čech 神经中，顶点字符串处的纤维是路径空间的积，其高度至多为 $h-1$。因此，其中所有项的高度至多为 $h-1$。所选集合与神经满足共同的允许大小界。经过归纳和有效实现，得到 $D_{\mathrm{cl}}K\ \mathcal{E}$。

在 $\mathbf{1}$ 处的求值将 $\Gamma D_{\mathrm{cl}}K=K$ 识别为自身。因此，应用 Γ 定义了一个自然比较

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{E}}(X,D_{\mathrm{cl}}K)\longrightarrow \mathrm{Map}_{\mathcal{S}}(\Gamma X,K).$$

根据层公式和 Yoneda，对于组装而言这是一个等价。由于 Γ 保持有效群胚商，两边都会将有效群胚商映到极限。由于组装在此类实现下生成 $\mathcal{E}$，因此对于每个 X，这个比较都是一个等价。由此确立了伴随、可逆的余单位，以及 $L=D_{\mathrm{cl}}\Gamma$ 的左正合性。

核由其稠密单态射决定。我们证明，单态射 $m\colon X,\to Y$ 关于双重否定是稠密的，当且仅当 Γm 是一个等价。稠密单态射在 Y 的每个点处拉回，得到一个稠密次终对象；它必为终对象，因为 **1** 只有空子对象和全子对象。反过来，若 Γm 是一个等价，那么伪补 $\neg_Y X$ 中的点会提升到 X，并属于空交集。根据上文的组装图册论证，没有点的对象是始对象。因此，伪补是始对象。伴随关系表明，每个 $D_{\mathrm{cl}}K$ 都与每个稠密单态射正交。对于双重否定层 Z，组装 A 的单位 $A\to\nabla|A|$ 是这样的单态射，因为它在载体上是恒等映射。因此，$\mathrm{Map}(LA,\ Z)\to\mathrm{Map}(A,\ Z)$ 是一个等价。由于 L 保持有效商，这一结论通过在有效商下生成而推广到每个 $A\in\mathcal{E}$。在 $A=Z$ 处，将恒等映射延拓后，Z 成为 LZ 的一个收缩，因此是局部的。这就将反射子像识别为双重否定层。□

推论 47（反射后的两个截面问题）。经典反射将 $F_{\min}\to F$ 变为可逆映射，因此恒等族 I 随后有一个截面。在反射范畴中，泛族 u_n 的截面空间为空，而其相对 r-截断的截面空间对于 $-1\le r<n$ 可缩。

证明。$F_{\min}\to F$ 的全局点构成一个双射。将反射子作用于 I 的乘积分解，即可得到由零给出的截面。要计算 Γu_n，通过终对象投射性将 Q 的点提升到 a。系数纤维计算以及 H 的有效性表明，当且仅当两个提升都具有无限多个重置或都具有有限多个重置时，它们才相同。因此，ΓQ 是一个含有两个点的离散空间。有限极限保持性确定了 ΓU_n 在这一对点上的两个纤维，而保持有效商则计算出它们的有限去环化。根据定理 46，反射后的族因此是

$$\{0,1\}\longrightarrow *\amalg K(\mathbb{F}_2,n+1),$$

选取这两个基点。在第二个分支上，一个截面就是 $K(\mathbb{F}_2,\ n+1)$ 的收缩。它的非零最高同伦群因此使截面空间为空。每个纤维要么可缩，要么等价于 $K(\mathbb{F}_2,\ n)$，因此所示范围内的每个相对截断都是终对象。□

10 修正可实现性中的归纳与提取

利用修正可实现性中的射影覆盖，我们直接证明高阶完备化 $\mathcal{M}=\mathrm{H}(\mathrm{Mod})$ 中普通自然数 N 的依赖归纳。在每个高阶参数上下文中，有界族上的零和后继数据确定了一个配备预定计算路径的可缩截面空间。

对于提取，我们使用上下文选择，以及第5节所述嵌套数值模型的闭子托扑斯中程序指标的解释。假设一个封闭证明对于每个满足稳定数值前提的输入，都给出了一个数值见证的局部存在性，并带有有界高阶证书。我们提取出一个在每个输入上都会终止的程序，并且在前提成立时，为其输出提供一个相干证书。

10.1 射影表示与自然数消去子

我们使用 Mod 的数值表示。与第5节一样，我们将真值写成潜在实现子集合与实际实现子集合组成的有序对（A^{p}, A^{a}）。对于闭真值的数值约定，$0\in A^{p}$ 和 $A^{a}\subseteq A^{p}$。一个射影对象可由集合 $X\subseteq Y\times I\subseteq\mathbb{N}$表示，其中 r 是满射。$y,\ y'\in Y$的等号关系，其潜在部分在对角线上为$\{0,\ r(y)+1\}$，在对角线外为$\{0\}$。其实际部分在 $y=y'\in X$ 时为$\{r(y)+1\}$，其他情况下为空。这些对象覆盖普通拓扑斯 [50]。用这些射影覆盖之一细化零类型图册，即可为每个完备对象得到射影图册。要将映射从原始投射对象提升经过一个高阶覆盖，可将该覆盖拉回到该投射对象，并用普通射影对象覆盖这个拉回。到原始投射对象的复合映射是普通覆盖，因而可分裂。

反射前，指定包含的一个箭头是潜在承载体、实际承载体和数值标签上的交换图。它在标签上的函数是部分递归的，并且定义在源标签集上。反射后，每个箭头都由细化上的此类交换图表示

$$(X \subseteq r^{-1}(J) \to J) \longrightarrow (X \subseteq Y \to I),$$

其中 $r(X) \subseteq J \subseteq I$，并且一个在 I 上处处有定义的部分递归判定可以判定 J 中的成员资格。反射子将这个包含 [50] 变为同构。这些图中的标记是未平移的 $r(y)$。闭表示中的相应正等式名称为 $r(y) + 1$。

反射之前，积将标记配对。对于具有潜在载体函数 g、$h\colon Y \to Y_1$ 的平行映射，其等化子具有潜在载体 $Y_e = \{y\colon g(y) = h(y)\}$、实际载体 $X \cap Y_e$，以及标记映射 $r|_{Y_e}\colon Y_e \to r(Y_e)$。事实上，任何等化映射在其载体上的因子化都会经过这些子集，且跟踪器相同。反射之后，从一个射影对象出发的两个箭头可以通过求两个可判定测试的交，在共同细化上表示。由此构造的等化子在反射之前是射影的；其反射也是射影的，并且根据左正合性计算出所需的等化子。对终对象图和积采用同样的论证，即可得到有限极限封闭性。根据提升性质，射影对象的有限余积仍是射影对象。
反射之前的分割自然数对象具有图表（$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{N}$）。其反射为 N，因为反射子保留终对象，并通过伴随传输普遍递归性质。特别地，$\mathbf{1}$ 和 N 是射影的。

固定一个高阶上下文 Γ。展示自然数代数由 $\Gamma \times N$ 上的有界族 E、一个截面 $z\colon E(0)$，以及映射 $d_n\colon E(n) \to E(n+1)$ 组成，且都处于该语境中。它们在 Γ 上的切片中的解对象为

$$\mathsf{Sol}(E, z, d) = \sum_{h:\prod_{n:N} E(n)} (h(0) = z) \times \prod_{n:N} (h(n+1) = d_n(h(n))).$$

其通过有限极限和依赖积构造的过程与基底 Γ 的变更相交换 .

定理 48（具有相干计算路径的归纳）。结构映射 $\mathsf{Sol}(E, z, d) \to \Gamma$ 是一个等价。因而，$\Gamma \times N$ 在 M/Γ 中的带基点自同态代数之中是同伦初始的。

证明。首先将该代数拉回到 Γ 的一个原始射影图册 R 上，并选择全族的一个原始射影图册 $q\colon Q \twoheadrightarrow E_R$。令 $p\colon Q \to R \times N$。全族上的零映射和后继映射利用 R 和 Q 的射影性提升为 $z'\colon R \to Q$ 和 $t\colon Q \to Q$，并带有指定路径 $qz' \simeq z$ 和 $qt \simeq dq$。它们在 $R \times N$ 中的像给出普通等式 $pz' = (\mathrm{id}_R,\ 0)$ 和 $pt = (\mathrm{id}_R \times s)p$，其中 s 是后继。这里原始零类型之间的所有映射都是普通映射。在 Mod/R 中，使用以初始值 z' 和步进 t 进行的普通递归，得到 $v\colon R \times N \to Q$。递归的普通唯一性给出 $pv = \mathrm{id}$。因此，qv 连同所选的两条路径构成了在 R 上的展示解。基底 $R \times N$ 是一个零类型，所以这些路径位于所需基底等式之上。由此可知，$\mathsf{Sol} \to \Gamma$ 是一个覆盖。

两个解的恒等族本身就是一个展示代数。对于解 h，记 $\beta^h_{\mathrm{zero}}\colon h(0) = z$ 为其零计算路径，并记 $\beta^h_{\mathrm{succ},\,n}\colon h(n+1) = d_n(h(n))$ 为其在 n 处的后继计算路径。对于两个解 h，h'，展示族 $D(n) \equiv (h(n) = h'(n))$ 的零 $\beta^h_{\mathrm{zero}}(\beta^{h'}{}_{\mathrm{zero}})^{-1}$ 和步进

$$a \longmapsto \beta^h_{\mathrm{succ},n}\ \mathrm{ap}_{d_n}(a)(\beta^{h'}_{\mathrm{succ},n})^{-1},$$

其中，连接按从左到右的顺序读取。根据依赖对的恒等规则和函数外延性，解 h and h' 之间的恒等类型等价于 D 上这个展示代数的解对象。事实上，在指定 $a_n\colon h(n) = h'(n)$ 之后，后继路径的相容性恰好就是 $a_{n+1}\beta^{h'}{}_{\mathrm{succ}\ n} = \beta^h_{\mathrm{succ},\,n}\mathrm{ap}_{d_n}(a_n)$，而零路径的相容性则是 $a_0\beta^{h'}{}_{\mathrm{zero}} = \beta^h_{\mathrm{zero}}$。

现在，我们对 E 的有限相对截断界进行归纳，并允许每一步都使用任意参数上下文。对于命题值的 E，解对象是一个命题且是一个覆盖，因此是切片中的终对象。在下一个高度，对 $\mathsf{Sol} \times_\Gamma \mathsf{Sol}$ 上的两个泛解，应用关于 D 的归纳假设。

$\mathrm{Sol} \to \Gamma$ 的对角线是一个等价。既是单态射又是覆盖的态射是一个等价，由此完成归纳。常值显示族给出了关于带基点的自同态代数的断言。因此，该消去子包含其命题值的计算路径，并且在代换下保持相干。□

推论49（列表与有限树的归纳）。对于原始投射标记 $A_0, \dots, A_m$，$F(X) = \coprod_{i=0}^{m} A_i \times X^i$ 的普通初始代数 W 可依赖消去到有界高阶族，并且其展示截面的对象可缩。特别地，这一结论适用于带有射影标记的列表和有限二叉树。

证明。通常，W 由有限有根有序树组成。在带有 N的初等托扑斯的内语言中，将每个有限形状编码为其顶点元数按前缀序排列而成的有限词；待处理槽位的数量按通常方式，在最后一个顶点之前始终为正，并在末尾归零。为每个元数为 i 的顶点附上 A_i的一个元素。单根分解以及对词长的递归给出构造子，以及到任意代数的唯一折叠。此构造适用于任意普通切片参数 R，从而给出$R \times W$在该处的初始性。列表和二叉树分别使用多项式 $\mathbf{1} + A \times X$ 和 $\mathbf{1} + A \times X^2$。

对于射影的 R，取总展示族在 $R \times W$ 上的一个射影图册 $Q \to E_R$。$F_R(Q)$ 的底层对象是由 A_i 与 Q 的 i 重纤维积（在 R 上）所组成的积的有限余积，空纤维积使用 R。它是射影的。因此，总展示构造子提升到带有其比较路径的 $F_R(Q) \to Q$。它到 $R \times W$ 的投影是一个普通代数映射，因为该基底是一个零类型。由初始性，普通折叠 $R \times W \to Q$ 是此投影的一个截面。正如定理 48 所示，这证明了局部存在性。在两个展示折叠之间，恒等族的构造子由将展示运算应用于输入之间的路径元组，并与两条计算路径复合而给出。依赖对的恒等规则将其截面识别为折叠之间的路径。现在对截断高度进行归纳，即可证明在每个语境中都具有可缩性。□

10.2 在稳定前提下提取全定义程序

用 $\| - \|$ 表示当前切片中的命题截断。命题 P在 $\neg\neg P \to P$时是稳定的。在 P下有一个局部见证，因此我们可以局部得到一个数值输出，该输出的选择独立于 P的证明，并附有一个在 P下有效的证书。

引理 50（稳定前提下的选择）。对于稳定子对象 $p\colon P \to \Gamma$，Π_p 保持覆盖。特别地，对于 P上的每个有界族，$\|\Pi_p Y\| \simeq \Pi_p \|Y\|$。

证明。在嵌套三元组中，拓扑 k_1 由检验实际层的存在性来表示。它在闭子托扑斯上的限制是双重否定。事实上，相应的集合嵌入是由双重否定包含映入 $\mathbf{Mod}$，再与嵌套托扑斯 [50]中的闭包含复合而成的。因此，在修正真值上，一个统一的代表是

$$(A^{p}, A^{a}) \longmapsto (\mathbb{N}, \{n \in \mathbb{N} : A^{a} \neq \varnothing\}).$$

因此，带名称的射影 $X \subseteq Y \to I$ 的稳定子对象由子集 $X' \subseteq X$ 表示，同时保留 $Y \to I$。将双重否定谓词与投射等式相交，恰好保留那些谓词具有实际实现子的对角实际名称，并保留所有原有的潜在名称。在双重否定代表中与一个固定数码配对，再投影回来，即可统一实现这一识别。对于每个子集 $X' \subseteq X$，所得的带名称包含都是射影的。

给定一个覆盖 $Y \twoheadrightarrow Z$ 到 P，在从原始射影对象 R 到 $\Pi_p Z$的映射上检验 $\Pi_p Y \to \Pi_p Z$。其伴随的定义域为 $R \times_{\Gamma} P$，这是 R的一个稳定子对象。原始基底上的子对象及其逻辑运算与通常运算一致，因此前面的论证表明该定义域是射影对象。沿覆盖提升，再转置回去。射影对象覆盖目标，因而能够检测覆盖。将此结果应用于 $Y \twoheadrightarrow \|Y\|$，即可得到所述结论，因为 $\Pi_p \|Y\|$ 是命题。所有运算都与参数拉回相容。□

对于一个稳定的 P 以及一个由高阶证书 $A(m)$组成的准许族，数值化的前提独立性（Numerical Independence of Premise）具有如下形式

$$\big(P \to \|\textstyle\sum_{m:N} A(m)\|\big) \;\longrightarrow\; \big\|\textstyle\sum_{m:N}(P \to A(m))\big\|. \tag{17}$$

见证 m 是在局部选择的，并且在 P 下，它携带有界类型 $A(m)$中的一个证书。定理 52 在每个输入处使用这一选择，从其前提的封闭证明中提取一个在所有输入上都会终止的程序；只要前提成立，该程序就带有相干证书。对于普通谓词，van Oosten 从针对 k_1-封闭前件的原理以及嵌套托扑斯 [50]中的对角见证对象，推出带有否定前件的数值前提独立性。该数值对象是对角的，因为它的实际层自等同性名称与潜在层自等同性名称一致，而稳定的 P 等价于否定命题 $\neg\neg P$。

要用高阶证书证明 (17)，取一个携带前提项的原始投射测试 $R = (X \subseteq Y \xrightarrow{r} I)$。它在 P 上的限制，其定义域是引理 50 中的射影 $R' = (X' \subseteq Y \xrightarrow{r} I)$。射影性将该项提升到 R' 上，经过从 $\sum_m A(m)$到其命题截断的覆盖。这给出一个数值映射 $f\colon R' \to N$，以及 R'上的 $A(f)$的一个截面。

在 R' 的细化 $r^{-1}(J)$ 上表示 f，其中 $r(X') \subseteq J$，且成员关系在 I 上是可判定的。其表示图的标记映射 φ 是部分递归的，并且在整个 J 上有定义。由于 N 的标记映射是恒等映射，在 $y \in r^{-1}(J)$ 上的取值为 $\varphi(r(y))$。首先运行对 J 的测试，并在 J 上返回 $\varphi(i)$，在 J 外返回 0。这个部分递归函数在整个 I 上都有定义。它给出标记映射，并通过与 r 复合，$\bar{}$得到一个箭头 $f\colon R \to N$ 的载体映射。它在 R' 上的限制与表示细化上的 f 一致，$\bar{}$因而在 Mod 中。沿着这一等式传输 $A(f)$ 的截面，得到一个位于 R 上的 $P \to A(f)$ 项。$\bar{}$与 f 构成的对证明了这里的截断结论。对于任何携带该前提的参数，这些测试都能覆盖它；由于结论是一个命题，因此可以下降。由此证明了上下文蕴涵。

引理 51（指标与计算轨迹）。固定一个偏递归函数及其有限停机计算的编码的可接受编号。使用原始递归轨迹谓词 $T(e, n, s)$和输出映射$\mathrm{out}(s)$，当且仅当存在某个 s满足 $T(e, n, s)$且$\mathrm{out}(s) = m$时，$\varphi_e(n)\downarrow = m$。模型 $\mathcal{M}$ 验证

$$\prod_{f:N^N} \left\| \sum_{e:N} \prod_{n:N} \sum_{s:N} T(e,n,s) \times (\mathrm{out}(s) = f(n)) \right\|.$$

证明。使用 Mod [51] 中双重否定分离对象的修正版组装表示。普通对象 X 在其对角线为双重否定闭时，是双重否定分离的。这表示 X 中的相等关系是稳定的，即对所有 x，y，内部成立 $\neg\neg(x = y) \Rightarrow (x = y)$：$X$。每个载体元素 x 在一个共同的非空潜在输入集合中都有一个非空的实际名称集合 $|x|$。跟踪器在每个潜在输入上都有定义，并将实际名称映射为输出的实际名称。在这一表示中，$|n| = \{n\}$，而 N 的潜在集合是 $\mathbb{N}$。其指数对象 N^N 的载体是全递归函数，实际名称是它们的指标，潜在集合是 $\mathrm{Tot} = \{e :\ \varphi_e$ 是全定义$\}$。分离对象构成一个关于有限极限封闭、并且对进入分离对象的指数化封闭的全子范畴。因此，这里的指数对象与拓扑斯中的指数对象一致。分离对象之间的映射的像是其陪域的分离子对象，因此像分解也一致。

令 I的载体为潜在集合 Tot，单例实际名称为 $|e| = \{e\}$。映射 $I \to N^N$, $e \mapsto \varphi_e$ 由恒等映射跟踪，并且是一个覆盖，因为每个函数的实际名称等于其纤维中实际名称的并集，且潜在集合相同。对于 $I \times N$，针对轨迹的最小阶段搜索会在每个潜在输入上终止（e，n），这恰恰是因为该定义域要求 $e \in \mathrm{Tot}$。搜索会返回第一个停机轨迹的数字编码。对该轨迹进行原始递归检查即可实现 T，而确定性则保证记录的输出与函数值一致。因此，在对 N^N作此覆盖之后，这些操作便为所显示的公式提供可跟踪见证。它在 N^N上的像是整个 N^N。到 $\mathcal{M}$的零类型嵌入保留这些有限极限、原始族上的依赖积以及覆盖。通过拉回，同一断言也适用于广义 f。□

定理 52（具有稳定前提的全提取）。对于稳定数值命题 $P(n)$和容许有界族 $C(n,m)$，存在一个上下文蕴涵

$$\prod_{n:N}\bigl(P(n)\to\|\textstyle\sum_{m:N}C(n,m)\|\bigr)\\ \longrightarrow\left\|\sum_{e:N}\prod_{n:N}\sum_{s:N}T(e,n,s)\times\bigl(P(n)\to C(n,\mathrm{out}(s))\bigr)\right\|.$$

对于闭数据和前提中的闭项，这就为程序提供了一个标准指标，使其在每个输入上全定义，并为每个满足其前置条件的输入提供相干证书。

证明。 在每个 n 的语境中分别应用 (17)。由于 N 是射影的，且原始投射对象对积封闭，推论 22 给出了 N 上有界高阶族的上下文可数选择。它给出了一个 f 的局部存在性： N^N连同 $\prod_n(P(n)\to C(n,\ f(n))$ 的一个项。结论是一个命题，因此消去这个截断以及引理 51 的截断。对于每个输入，沿所选轨迹的等式 $f(n)=\mathrm{out}(s)$ 传输证书，然后构造所显示的依赖积。最后进行命题截断。在射影参数上，可以将所得的见证覆盖提升为一个实际截面。对于终端参数，射影表示将 $\mathrm{Map}(\mathbf{1},\ N)$ 与 $\mathbb{N}$ 等同：终端命名包含有一个实际点，映射会选出其数值，而常值程序可实现每一个这样的选择。因此，每个闭前提见证都会为提取出的全定义程序给出一个标准指标。□

11 Krivine 可实现性中的谓词、选择与二阶恒等式

在 Krivine 可实现性的相对布尔表示中，逻辑极是普通相对拓扑斯的一个真次终对象 U。普通三元组是针对 $b_U(p)=((p\Rightarrow U)\Rightarrow U)$ [52] 的布尔化。对于容许滤过表示，定理 5 将这个核提升为反射 $a\colon\mathcal{R}\ \rightleftarrows\ \mathcal{K}$： $i\ \mathrm{on}\mathcal{R}=\mathrm{H}(\mathrm{RT}(A',A))$. 在 i 下，$\mathcal{K}$ 中的假命题对应于 U，而真命题对应于 $\top$。因此$\mathcal{K}$ 是非退化的。在绝对的 $\mathcal{K}_1$ 模型中，每个非空实现子集合都包含一个滤子元素，因此其真极点是 $\bot$，而 b_U 是普通的双重否定。$\mathcal{K}$ 中的每个谓词都会将其参数分解为两个互补部分。通过在每个部分上选择一个丛，我们可以用截面的存在性来记录该谓词。同样的分解也将使我们能够用固定类型的两个自等价之间的恒等式来记录该谓词。

在环境模型中，对 $V,\to Z$置 $U_Z=Z\times U$，并令 $\eta_Z\colon\ Z\to iaZ$ 为单位。目标否定在$\mathcal{R}/Z$ 中的解释为

$$\eta_Z^*i(\neg_{aZ}aV)=(V\Rightarrow U_Z).\tag{18}$$

事实上， Z 上的局部谓词是 $\mathrm{Sub}(Z)$ 中由 b_{U_Z} 固定的元素，其底为 U_Z。相对否定为 $p\mapsto(p\Rightarrow U_Z)$，三重相对否定等于单重相对否定。下面所有有限循环群都是目标中的内在有限循环群。置 $T_n=K(C_2,\ n)$，其中 $T_0=C_2$，并将底层二元对象记为 $2=\mathbf{1}\amalg\mathbf{1}$。

11.1 编码具有固定底和纤维的谓词

具有相同基底和纤维的两个丛使我们能够在其截面对象中编码一个谓词。乘积丛在参数的一部分上提供一个截面，而循环扩张在互补部分给出一个空的截面对象。

引理 53（循环扩张的连接映射）。对于 $n\geq1$ 扩张 $0\to C_2\xrightarrow{1\mapsto2}C_4\xrightarrow{\text{模}\ 2}C_2\to0$ 诱导出一个基点映射 $\beta_n\colon T_n\to T_{n+1}$。其在零点上的同伦纤维为 $K\ (\ C_4,\ n\ )$，并带有其到 T_n 的商映射 p_n ；其内部零伦类型是初始的。

证明。循环扩张由引理 24 给出所断言的纤维序列。 β_n 的一个零伦给出 p_n 的截面。在每个参数上下文中，减去该截面在零点处的值，即可得到一个基点截面。将此操作应用于同伦 $p_n s \simeq \mathrm{id}$ 也会减去其在零点处的路径。环路计算随后给出一个分裂模二约化的群同态 $C_2 \to C_4$。生成元的每个可能取值都被二所湮灭，因此在 C_4中只能是 0 或 2。其约化必须同时为零和一。这就在内部给出了一个从零伦类型到空类型的映射，正如所断言。□

定理54（谓词作为具有固定底和纤维的丛）。对于 $S \hookrightarrow C \in \mathcal{K}$ 和 $n \geq 1$，存在一个主 T_n-丛 $q_{S,\,n}$，其基底为 $C \times T_n$。沿 $C \times T_n \to C$取依赖积，其完整的内部截面对象为

$$\mathrm{Sec}_C(q_{S,n}) \simeq (\neg_C S) \times 2 \times T_n \quad over\ C.$$

两个这样的丛若定义在同一基底的恒等映射之上，则它们等价，当且仅当其定义谓词相同。对于 $C = aZ$ 和 $S = aV$，该丛存在截面，当且仅当 $V \leq U_Z$。

证明。在 $C = S \amalg \neg_C S$ 上，将 β_n 在 S 上与 $\neg_C S$ 上的零映射粘合，从而得到一个由 C 参数化的映射的带基点族 $T_n \to T_{n+1}$。沿此族拉回泛 T_n-torsor $\mathbf{1} \to T_{n+1}$。在 S 上，所得丛为 $K(C_4,\ n) \to T_n$，且引理 53 表明其截面对象在此处是始对象。在 $\neg_C S$ 上，它是乘积丛，其截面对象为

$$T_n^{T_n} \simeq T_n \times \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Ab}}(C_2, C_2) \simeq T_n \times 2.$$

这里，引理 23 将零点处的取值与基点映射区分开来，而二元自同态由其生成元的像指定。Beck–Chevalley 将两项局部计算都识别为截面对象的限制。粘合给出该公式，并表明其命题截断为 $\neg_C S$，因为另外两个因子都有点。取补集即可从丛中恢复 S。反过来，S 指定了丛的两个部分，且与拉回相容。对于 $S = aV$，截面条件是 $\neg_{aZ} aV = \mathbf{1}_{aZ}$，根据 (18)，这就是 $V \leq U_Z$。□

11.2 选择检测到极的首个纤维度

在前面的构造中，谓词确定了固定指标上的一个丛。对于选择检验，它确定的是指标本身。改变纤维高度，便可确定选择恢复极的首个次数。为在内部表述推论 22 的有限高度检验，固定一个单值宇宙 $\mathcal{U}_{\leq k}$，其元素为 k-型。对于指标 Z，选择命题为

$$\mathrm{Ch}_k(Z) = \prod_{F : Z \to \mathcal{U}_{\leq k}} \left(\left(\prod_{z : Z} \| F(z) \| \right) \longrightarrow \left\| \prod_{z : Z} F(z) \right\| \right).$$

这里 $\|X\| = \tau_{\leq -1} X$。对 F 的积检验由 $\mathcal{U}_{\leq k}$ 分类的族，并在包含这些积的宇宙中定义一个命题。对于局部命题 P，令 M_P 为阿贝尔群：在 P 上等于 C_2，在 $\neg P$ 上为平凡群，其底集为 $\mathbf{1} \amalg P$。该构造在任意参数下逐纤维进行。记作 $Z_{P,\,n} = K(M_P,\ n),\ n \geq 1$。

定理 55（选择阈值）。在任何允许的测试层级上，第二行的层级足够大，可以包含 $Z_{P,\,n}$ 的基点路径族，

$$\mathrm{Ch}_k(Z_{P,n}) \simeq \begin{cases} \mathbf{1}, & -1 \leq k \leq n-2, \\ \neg P, & k \geq n-1. \end{cases}$$

对于带有环境子终对象 V 的 $P = aV$，第二范围内的有效性等价于 $V \leq U$。在任意一个固定的 n 上，由环境真值索引的这些测试确定逻辑极点 U。

证明。 将 $Z = Z_{P,n}$ 记作其点的 z_0。若 $k \le n-2$， k-型的单值分类器至多是 $(k+1)$-截断的，而 Z 是 $(n-1)$-连通的。因此，在 z_0 处求值会将映射 $Z \to \mathcal{U}^{\le k}$ 与分类器本身等同，在每个参数上下文中也如此。于是，每个受测族都等价于 $F(z_0)$ 上的常值族。其逐点纯存在性给出 $\|F(z_0)\|$，而常值截面则提供所需的截断截面。

对于 $k \ge n-1$，检验族 $z \mapsto (z_0 = z)$。其纤维在每一点都是 $(n-1)$-截断的，并且局部有元素。截面是以 z_0 为中心的收缩。由于 $\mathrm{isContr}(Z)$ 是一个命题，截面的局部存在性蕴含可缩性。对一个可缩的 Z 取 n 重环路，得到平凡群 M_P。对平凡群进行解环即可证明逆命题。通过其布尔分解，该条件恰好就是 $\neg P$。反过来，在 $\neg P$ 上，基底是可缩的，在其中心处求值便可为每个族给出选择。这证明了这些公式作为内部命题的等价关系。现在将 (18) 与 $Z = \mathbf{1}$ 一起应用，以在第二范围中得到 $i\,\mathrm{Ch}_k(Z_{aV,n}) = (V \Rightarrow U)$。因此，满足选择检验的环境真值 V 构成 U 的主下集。其最大元恢复 U。□

例如，对于所有集合值族，选择在 $K(C_2,2)$ 上成立。它的基点路径族具有群胚纤维，并且每个点都有局部可达的路径。这个族的截面是 $K(C_2,2)$ 的收缩，因此，其非零的第二同伦群使截面类型为空。由此，群胚值族能够在最早可能的纤维度上，区分 $K(C_2,2)$ 上的选择与一点上的选择。

11.3 作为单个代码处第二个恒等映射的全定义性

引理 53 中的循环扩张还给出了单个宇宙编码处的恒等性检验。固定 $n \ge 1$，并选择一个代码 u，对应类型 $X = T_n \times T_{n+1}$。对于局部谓词 S，令 s_S 为 X 的自等价：在 S 上由 $(x,y) \mapsto (x, y + \beta_n(x))$ 给出，在其补集上则为恒等映射。减去相同的项即可得到它的逆映射。这两部分都固定基点，并在每个基点同伦群上诱导恒等映射： π_n 来自未改变的第一坐标，而 π_{n+1} 来自第一个基点处的第二坐标。单值性给出了参数上下文中的一个环路 $p_S : u = u$。

引理 56（剪切的第二恒等式）。对于 S、$\to C$， p_S 与 u处的自反环路之间的恒等类型为

$$(p_S = \mathrm{refl}_u) \simeq (\neg_C S) \times T_{n-1} \times T_n \times 2 \quad over\ C.$$

证明。在 S 上，从剪切映射到恒等映射的一个同伦，沿着 $x \mapsto (x,\ 0)$ 限制并投影到第二因子，会将 β_n 收缩到零映射。由引理 53，这给出空类型。在 $\neg_C S$ 上，单值性将第二恒等类型识别为自等价对象在恒等映射处的环空间。由于成为等价是一个命题，这也就是 X^X 在恒等映射处的环空间。对恒等映射逐点减法，将基点平移到这个阿贝尔群对象中的零映射。指数化保持有限极限，因此得到

$$\Omega_0(X^X) \simeq (\Omega X)^X \simeq (T_{n-1})^X \times (T_n)^X.$$

由于 $\tau_{\le n-1} X = \mathbf{1}$ 和 $\tau_{\le n} X = T_n$，第一因子是 T_{n-1}，第二因子是 $T_n^{T_n} \simeq T_n \times 2$。这些计算在任意基变换后仍成立，并且包括 $n = 1$。不交粘合证明了该断言。□

要通过剪切映射表达全定义性，先在环境相对模型中构造数值谓词，再将其反映为布尔谓词。令 N 为相对拓扑斯的数值组装。假设其标准数词具有滤子名称，原始递归测试在真实例上有一致跟踪的实现子、在错误的标准实例上实现子集合为空，并且配对、见证构造和部分数值计算在各自定义域上具有滤子跟踪器。在量词的通常可实现性解释中，存在量词名称包含一个见证及其实现子，而全称量词名称则作用于每个输入名称。在整个构造过程中，环境中的数都带有其数值实现关系。

Kleene 第一代数及其全滤子通过应用通常的偏递归指标而具有这些性质。对于带有递归贝尔函数滤子的相对第二代数，这些性质同样成立。将数码 m 表示为常值贝尔函数 ν_m。要转换为丘奇数码，读取坐标零处的 m，并通过原始递归构造其 m 重迭代器的代码。反过来，将丘奇数码作用于常值流上的递归后继函数和 ν_0。后继函数读取坐标零，并返回相应的后继流，因此迭代返回 ν_m，即 m 的名称。这两种转换在递归滤子中都有跟踪器。在应用的前缀约定下，输出坐标 j 是在表示 j 的代码和有限输入前缀上，首次得到肯定答复的位置减一。给定一个程序 e，使用如下全递归贝尔函数：对于非空前缀 σ，模拟 e 在 $\sigma(0)$ 上运行 $|\sigma|$ 步。若停机并输出 q，则返回 $q+1$；否则返回零，空前缀和格式错误的代码也不例外。在 ν_m 上，只要计算有定义，其应用结果就是 $\nu_{\varphi_e(m)}$；若计算发散，则应用无定义。此构造在 e 中有效。配对、有界模拟、比较，以及为真实的可判定测试构造见证，均可通过此构造和递归组合抽象获得。因此，递归滤子提供了跟踪器，而环境代数则提供所有贝尔函数作为潜在实现子。

定理 57（固定代码处的第二恒等完备性）。在这些数值假设下，对于每个固定的真极点以及每个 $n \geq 1$，都有一个位于 u 之上、在 aN 上的环的语义族 p。在反射后的标准指标 e 处，它满足

$$(p_e = \mathrm{refl}_u) \simeq \begin{cases} T_{n-1} \times T_n \times 2, & \varphi_e \ \mathit{total}, \\ \mathbf{0}, & \mathit{otherwise}. \end{cases}$$

具有非空第二恒等的标准指标在可计算多对一归约下构成一个 Π^0_2-完备集。所有这些环在基点同伦群上诱导相同的作用。

证明。令 $H(e,\ x,\ s)$ 表示在 s 步内对 x 的终止性进行判定的原始递归判定。在通常的环境相对拓扑斯形式中

$$T(e) = \forall x : N\, \exists s : N\, H(e,x,s), \qquad V = \neg T \hookrightarrow N.$$

在标准全指标 e 处，最小阶段搜索是全定义的。因此，将所得数码与有界判定的验证配对的滤子跟踪器实现了全称谓词，从而 $T(\bar{e}) = \mathbf{1}$。如果 e 在 x_0 处发散，则对于每个 s，$H(e,\ x_0,\ s)$ 的见证集都是空的。在 x_0 的一个名称处求值后，潜在全称名称的整个集合因此为空，所以 $T(\bar{e}) = \mathbf{0}$。环境否定交换这两种可能性。反射所得的子对象 $V,\to N$。左正合性保持到每个数码的拉回，而左伴随保持始对象。因此，布尔谓词 $S = aV$ 在全定义的标准指标处为假，在其他指标处为真。根据引理 56，积 $T_{n-1} \times T_n \times 2$ 在每个全定义的标准指标处提供第二恒等的一个点。在每个其他标准指标处，该恒等映射是始对象；由于极点为真极点，其全局点空间为空。

展示的公式根据 T 的数值定义给出了 Π^0_2 上界。对于任意递归谓词 R，程序在输入 x 上搜索满足 $R(z,\ x,\ s)$ 的 s 时，其指标可计算地依赖于 z。当且仅当 $\forall x\, \exists s\, R(z,\ x,\ s)$ 时，该程序才是全定义的，由此证明了困难性。对于每个固定的极，将标准数词代入同一个语义族，即可得到所有这些环路。在全定义指标处，第二个恒等类型的精确高度为 n，因为其因子 T_n 的 π_n 非零。□

12 具有无界局部框架秩和共同普通核心的 Grothendieck切片

对于第8节的有效语境 $K(A_r,\ n)$，基点处的环空间决定了该切片的正则源的最小维数。在可数的空间层中解释同一群 A_r

组装可得出第二种维数计算。呈现整个 Grothendieck 切片的位点的最小维数是 n，而二元上同调能区分每个固定 n 下的切片。

令 Asm_ω 为 Kleene 第一代数上具有可数载体的组装对象范畴的一个小骨架。它是正则且广延的。事实上，组装对象中的有限极限、正则像和不交标记有限和仍具有可数载体；因此，它们的典范分解和拉回可在这个全子范畴中计算。令 J 由有限覆盖族 $\{U_i \to U\}$ 组成，其中 $\coprod_i U_i \to U$ 是正则满态射，并包括始对象上的空族。固定一个包含 (Asm_ω, J) 的 Grothendieck 宇宙 $\mathbb{U}$。在 $\mathbb{U}$ 中取空间和集合，为层范畴及其有界精确完备化比较提供统一的大小约定。令

$$\mathcal{G} = \mathrm{Sh}_J(\mathrm{Asm}_\omega, \mathcal{S}), \qquad y : \mathrm{Asm}_\omega \longrightarrow \mathcal{G}.$$

引理 58（组装对象位点）。族 J 定义了一个次典范预拓扑。层 *Yoneda* 嵌入 y 保持有限极限、有限余积和覆盖。G 的终对象是射影的。

证明。覆盖公理由正则满态射的拉回稳定性、广延性以及对复合和有限和的稳定性得出。到任意可表对象的相容族给出一个映射 $\coprod U_i \to W$，它将覆盖到 U 的核对共等化。唯一诱导映射 $U \to W$ 体现了次典范性。这证明了 y 的全忠实性和有限极限保持性。单点集正则满态射是覆盖。空间层 F 将 0 映到 1；对于 $U \amalg W$ 的两个直和项，由于它们的交叉交为空，下降给出 $F(U \amalg W) \simeq F(U) \times F(W)$。Yoneda 嵌入保持有限余积。特别地，$yD$ 是内在二元群。

在终对象组装的一个有限覆盖族中，某个成员具有一个载体元素。选取其一个名称即可得到该成员的一个截面。因此，1 的每个覆盖筛都是最大的。由于终层是 $y1$，全局截面在 1 处取值。层的有效满态射在连通分支上是局部满射。对于 1 上的一个点，沿一个覆盖成员的截面限制局部提升，从而得到一个在同伦意义下的全局提升。这证明了射影性。有限极限和此类覆盖在全局截面下保持不变，因此根据定理 41 中的 Čech 论证，有效群胚商也保持不变。□

回顾一下，∞-topos 若存在一个位于小型 q-范畴上的位点，且该范畴具有有限极限，则称其为 q-局部化的；对于 $q \geq 1$，这样的范畴具有 $(q-1)$-截断的映射空间。我们将这样的 q 的最小值称为其 局部化秩。所有 A_r 都具有可数载体。对于 $r \geq 0$ 和 $n \geq 2$，令

$$\widetilde{B}_{r,n} = K_{\mathcal{G}}(yA_r, n), \qquad \mathcal{G}_{r,n} = \mathcal{G}/\widetilde{B}_{r,n}.$$

定理59（局部化秩与二元上同调）。令 $p:\ B_{r,\ n} \to \mathbf{1}$ 为投影。对于 $0 \leq q \leq n-2$，沿 p 拉回给出等价

$$p^* : \mathcal{G}_{\leq q} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{G}_{r,n})_{\leq q}.$$

特别地，普通核心始终是 Sh_J（Asm_ω，$\mathbf{Set}$）。$G_{r,\ n}$ 的局部化秩恰好为 n，其内在二元系数满足

$$H^n(\mathcal{G}_{r,n}; p^*(yD)) \cong \mathbb{F}_2^r.$$

当且仅当它们的参数对（r、n）一致时，这些范畴中的两个才等价。对于固定的 n，其基底具有等价的全局点空间 $\Gamma_{\mathcal{G}} B_{r,\ n} \simeq K$（$V$、$n$）。

证明。 定理 32 的证明可逐次数应用于 $\mathcal{G}$。q截断族的分类器高度至多为 $q+1$，因此沿着（$n-1$）连通基底的下降可识别低型范畴。对于阿贝尔零型 M和 $k \geq 1$，射影性将 $\Gamma_{\mathcal{G}} K(M,k)$ 与 $K(\Gamma_{\mathcal{G}} M, k)$ 等同起来，因此正次数基上同调消失。取 $M = yD$，并利用 y 的全忠实性和有限极限保持性，剩下的次数-n群为

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}(\mathcal{G}_{\leq 0})}(yA_r, yD) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}(\mathrm{Asm}_\omega)}(A_r, D) \cong \mathbb{F}_2^r$$

~根据命题 36 的共同实现子论证。相同的全局截面计算给出 $\Gamma_{\mathcal{G}} B_{r,n} \simeq K(V, n)$，因为 $\Gamma_{\mathcal{G}} y A_r \cong \mathbb{F}_2^r \oplus V \cong V$。

普通位点使 $\mathcal{G}$ 1-局部化，因此是 n-局部化的。将一个 n-局部化拓扑斯沿着一个 n-截断对象取切片，所得对象是 n-局部化的， [27], 从而得到上界。对于下界，回忆在一个具有$q \geq 1$的 q-局部化拓扑斯中，由于层化的左正合性，层化可表对象是 $(q-1)$-截断的。它们的余积具有相同的截断界，并且覆盖每个对象，因为该位点给出了一个生成族。应用于 ~基点对象，$\mathcal{G}$ 中的引理 29 随即将 $\Omega B_{r,n}$ 的高度界定为 $q-1$。这个环对象是 $K(yA_r, n-1)$，并且具有精确高度 $n-1$，因为 $yA_r \neq 0$ 由全忠实性可得，包括对 $r = 0$的情形。特别地，该切片的秩大于 $n-1$，因为任何更小维数的位点也是一个 $(n-1)$-位点。局部化秩以及典范二元系数上的群运算在等价下保持不变，因此所计算的两个不变量在未标记范畴中恢复了 n和 r。□

为了将这些切片与有界构造进行比较，先考虑未切片的 $\mathcal{G}$。每个对象都可由层化可表对象的余积覆盖，而这是一种零类型。有限截断对象的全子范畴 $\mathcal{G}_{<\infty}$ 是正合的：对于这类对象构成的群胚，其态射空间和对象空间的一个界，在对象覆盖之后限定了其商的对角线，正如命题 3 所示。其零类型是普通集合层。因此，有界正合完备识别给出

$$\mathrm{Ex}_{\infty}\big(\mathrm{Sh}_{J}(\mathrm{Asm}_{\omega}, \mathbf{Set})\big) \simeq \mathcal{G}_{<\infty}.$$

基点在两种情形下都给出了精确的维数 n。在有界有效模型中， n 是正则源的最小维数，用于精确完备化。在 Grothendieck 模型中，它是整个切片所需位点的最小维数。对于每个固定的 n, Grothendieck切片共享其普通层托普斯，且其基底的全局点空间等价。次数为-n 的二元上同调的秩可恢复 r，即从 A_r 到 D的可追踪同态空间的维数。

13 结论

三元组到拓扑斯构造为普通可实现性赋予了集合与映射中的语义。高阶三元组理论将这一解释扩展到类型族，其中分类映射之间的一条路径见证了族的一致等价。在函数可实现性中，这将恒等类型与描述集合论联系起来。对于自然数上的每一棵树，我们都赋予一个从 Baire 空间到单值分类器的映射。当且仅当这棵树是良基的时，才存在一条从该映射到终端代码处常值映射的全局路径。

选择截面有一种证明论解释。在修正可实现性中，假设一个封闭证明能够在稳定数值前提成立时，给出容许有界族中某个见证的局部存在性。那么我们便可以提取一个对每个输入都会终止的程序，并在每个满足前提的输入上返回一个经过认证的见证。在 Krivine 可实现性中，选择截面可以恢复定义布尔局部化的极 U。固定 $n \geq 1$。对于每个环境真值 V，我们构造一个带基点的 n-类型，在测试宇宙包含从基点出发的路径族这一条件下，只有当 $V \leq U$ 时，该类型上对（$n-1$）-截断族的选择才成立。

高阶类型还区分了逻辑与语境所扮演的角色。在任意固定的次数 $n \geq 1$ 上，层化使某个泛族的纤维变得可缩的轨迹，恢复了 Lawvere–Tierney 核。在逻辑固定的情况下，改变语境仍然可以得到无限多个高阶拓扑斯，其零类型范畴都是 Hyland 的有效拓扑斯。二元上同调在每个固定的次数 $n \geq 2$ 上区分了这些例子，即使它们的基底具有等价的全局点空间。对于基底 $K(A_r,\ n)$，次数-n 上同调类对应于从 A_r 到二元群的可追踪同态。因此，秩计算了实现子能够计算的相互独立的二元线性泛函的数量。

参考文献

1. Agwu, A.：《群胚组装中的类型论模型》。博士论文，约翰斯·霍普金斯大学（2025年）。arXiv:2507.16062。 2. Anel, M.、Biedermann, G.、Finster, E.、Joyal, A.：《 ∞-拓扑斯的左正合局部化 I：高层层》。《数学进展》400, 108268（2022年）。 3. Anel, M.、Biedermann, G.、Finster, E.、Joyal, A.：《 ∞-拓扑斯的左正合局部化 II：格罗滕迪克拓扑》。《纯粹与应用代数杂志》228(3)，107472（2024年）。 4. Apol, D.、Petrowitsch, M.：《类型论中的初等 ∞-拓扑斯》。arXiv:2512.18891v4（2026年）。 5. Awodey, S.：《高阶有效拓扑斯》。与 M. Anel 和 R. Barton 合作。范畴论 2025，布尔诺（2025年）会议幻灯片。 6. Awodey, S.、Emmenegger, J.：《迈向有效 2-拓扑》。《计算机科学中的数学结构》35，e32（2025年）。 7. Awodey, S.、Gambino, N.、Sojakova, K.：《类型论中的同伦初代数》。《美国计算机协会会刊》63(6)，文章 51（2017年）。 8. Birkedal, L.、van Oosten, J.：《相对实现性与修正的相对实现性》。《纯粹与应用逻辑年刊》118(1–2)，115–132（2002年）。 9. Buchholtz, U.、Christensen, J.D.、Flaten, J.G.T.、Rijke, E.：《中心 H-空间与带型》。《纯粹与应用代数杂志》229(6)，107963（2025年）。 10. Carboni, A.、Rosolini, G.：《局部笛卡尔闭精确完备化》。《纯粹与应用代数杂志》154(1–3)，103–116（2000年）。 11. Christensen, J.D. 、 Flaten, J.G.T.：《同伦类型论中的 Ext 群》。《高阶结构》 9(2)，17–61 （ 2025 年）。 12. Diaconescu, R.：《选择公理与补》。《美国数学会会刊》51(1)，176–178（1975年）。 13. Dubey, A.S.：《HoTT 的一个（函数）可实现性模型》。与 U. Buchholtz 合作进行中的工作。范畴论十月节，报告（2022年）。 14. Emmenegger, J.：《论精确完备化的局部笛卡尔闭性》。《纯粹与应用代数杂志》224(11)，106414（2020年）。 15. Emmenegger, J.：《丰满性公理与同伦范畴的精确完备化》。《范畴拓扑与微分几何札记》61(4)，427–449（2020年）。 16. Escardó, M.H.、Streicher, T.：《Martin-Löf 宇宙的内禀拓扑》。《纯粹与应用逻辑年刊》167(9), 794–805（2016年）。 17. Frey, J.：《刻画分割组装与可实现性拓扑斯》。《纯粹与应用代数杂志》223(5)，2000–2014（2019年）。 18. Gepner, D.、Kock, J.：《局部笛卡尔闭 ∞-范畴中的单值性》。《Forum Mathematicum》29(3)，617–652（2017年）。修正版，arXiv:1208.1749v5。 19. Hofstra, P.J.W.：《所有可实现性都是相对的》。《剑桥哲学学会数学学报》141(2)，239–264（2006年）。 20. HoTT 库开发团队：《投射型（`HoTT.Projective`）》。《HoTT 库》，正式库文档（访问于 2026年11月19日）。 21. Hyland, J.M.E.：《有效拓扑斯》。载于：Troelstra, A.S.、van Dalen, D.（编）：《L. E. J. Brouwer 百年纪念研讨会》。《逻辑与数学基础研究》110，165–216。北荷兰出版社（1982年）。 22. Hyland, J.M.E.、Johnstone, P.T.、Pitts, A.M.：《Tripos 理论》。《剑桥哲学学会数学学报》88(2)，205–232（1980年）。 23. Krivine, J.-L.：《经典逻辑中的可实现性》。载于：《计算与程序行为的交互模型》。《全景与综述》27，197–229。法国数学会（2009年）。 24. Lee, S.、van Oosten, J.：《有效拓扑斯的基本子拓扑斯》。《纯粹与应用逻辑年刊》164(9)，866–883（2013年）。 25. Licata, D.R.、Finster, E.：《同伦类型论中的 Eilenberg–MacLane 空间》。载于：CSL–LICS 2014，66:1–66:9。美国计算机协会（2014年）。 26. Lurie, J.：《高阶拓扑斯理论》。《数学研究年刊》170。普林斯顿大学出版社（2009年）。作者于 2017年4月9日修订。 27. Lurie, J.：《谱代数几何》。2018年2月3日版本。 28. Maruyama, Y.：《高阶三元组理论》。arXiv:2610.27163v1（2026年）。

29. Maschio, S., Streicher, T.：《嵌套可实现性拓扑斯的子拓扑斯中的直觉主义集合论模型》。《纯粹与应用逻辑年刊》166(6)，729–739（2015）。30. Moschovakis, Y.N.：《描述集合论》，第2版。《数学调查与专著》155。美国数学会（2009）。31. Nikolaus, T., Schreiber, U., Stevenson, D.：主 ∞-丛：一般理论。《同伦及相关结构杂志》10(4)，749–801（2015）。32. Pauly, A., Fouché, W., Davie, G.：逐层可计算性的 Weihrauch完备性。《计算机科学逻辑方法》14(2)，文章11，第1–15页（2018）。33. Quirin, K., Tabareau, N.：同伦类型论中的 Lawvere–Tierney 层化。《形式化推理杂志》9(2)，131–161（2016）。34. Rasekh, N.：每个初等高阶拓扑斯都有一个自然数对象。《范畴理论及其应用》37(13)，337–377（2021）。35. Rasekh, N.：初等高阶拓扑斯理论。arXiv:1805.03805v3（2022）。36. Rijke, E., Shulman, M., Spitters, B.：同伦类型论中的模态。《计算机科学逻辑方法》16(1)，2:1–2:79（2020）。37. Robinson, E., Rosolini, G.：余极限完备化与有效拓扑斯。《符号逻辑杂志》55(2)，678–699（1990）。38. Shulman, M.：纤维为 Eilenberg–MacLane 空间的纤维化。《同伦类型论》，研究札记（2014年6月30日）。39. Silva, D., Kschischang, F.R.：网络编码中的纠错度量。《IEEE信息论汇刊》55(12)，5479–5490（2009）。40. Speight, S.L.：内涵类型论的群胚可实现性。《计算机科学中的数学结构》34(9)，911–944（2024）。41. Stefanich, G.：作为正合完备化的导出 ∞-范畴。arXiv:2310.12925v1（2023）。42. Streicher, T.：从范畴论视角看 Krivine经典可实现性。《计算机科学中的数学结构》23(6)，1234–1256（2013）。43. Swan, A.W.：HoTT 可实现性模型中的上同调。同伦类型论／单值基础研讨会，奥胡斯，特邀报告（2026年）。44. Swan, A.W.：预言机模态。《计算机科学中的数学结构》36，e34（2026）。45. Swan, A.W., Uemura, T.：立方组装中的 Church 论题。《计算机科学中的数学结构》31(10)，1185–1204（2021）。46. Tarantino, U.：修正可实现性的箭头代数范畴。《范畴理论及其应用》44(4)，132–180（2025）。47. Uemura, T.：立方组装、单值且非谓词宇宙以及命题重缩放的失败。载于：第24届国际证明与程序类型会议（TYPES 2018）。LIPIcs 130，7:1–7:20（2019）。48. van den Berg, B.：单值多态。《纯粹与应用逻辑年刊》171(6)，102793（2020）。49. van den Berg, B., Moerdijk, I.：单值完备化。《数学年刊》371(3–4)，1337–1350（2018）。50. van Oosten, J.：修改的可实现性拓扑斯。《纯粹与应用代数杂志》116(1–3)，273–289（1997）。51. van Oosten, J., Simpson, A.K.：综合域论中的公理与（反）例。《纯粹与应用逻辑年刊》104(1–3)，233–278（2000）。52. van Oosten, J., Zou, T.：经典与相对可实现性。《范畴理论及其应用》31(22)，571–593（2016）。53. Wärn, D.：同伦类型论中的 Eilenberg–MacLane 空间与稳定化。《同伦及相关结构杂志》18(2–3)，357–368（2023）。54. Zoethout, J.：内部部分组合代数及其切片。《范畴理论及其应用》35(52)，1907–1952（2020）。

带追踪的图册与小宇宙

对于相对装配与嵌套装配，我们构造命题 3 的射影图册、截面编码和分类族。定理 63 使用两个界来编码一个族。基数界度量每个射影测试上的图册纤维，因此对每个获准大小的测试都一致适用。截断界决定代码所需的单纯形次数。

A.1 相对和嵌套组装

设 A 是一个有序部分组合代数。应用用并置表示，并按左结合方式结合。如果 ab 有定义，那么当 $a' \le a$ 和 $b' \le b$ 时， $a'b'$ 也有定义且不超过 ab 。固定一个由全局跟踪器组成的滤子 A' ，它在有定义的应用下封闭，并包含组合子 k、 s 的实现子。我们使用它们通常的有序抽象性质：由所指示的运算构成的 λ 项在 A' 中具有一致跟踪器；只要指定项有定义，抽象的值就有界于该项值之上。特别地，存在一致的配对、投影和有限分情况算子。用 $\langle a、\ b\rangle$ 表示配对，并对 $\lambda d\, r\, b.\, d\langle r、\ b\rangle$ 取单个括号抽象 $c \in A'$ 。它的前两次应用是全定义的。令 $\sigma(d、\ r) = cdr$；特别地， $r' \le r$ 蕴含 $\sigma(d、\ r') \le \sigma(d、\ r)$，并且

$$\sigma(d, r)b \le d\langle r, b\rangle \quad \text{whenever the right hand side is defined.}$$

I在离散代数中，只要右侧有定义，比较就是相等关系 .

一个相对组装由一个集合 X 和非空的向下封闭名称集 $\rho_X(x) \subseteq A$组成。当存在单个 $t \in A'$ 通过有定义的应用，将 x中的每个名称发送到$f(x)$中的某个名称时，函数$f\colon X \to Y$才是一个态射。一个分割组装具有指定的主名称 $\nu_P(p)$，且 $\rho_P(p) = {\downarrow}\nu_P(p)$。

对于嵌套情形，设 $A_\# \subseteq A$ 是离散部分组合代数的一个子部分组合代数，包含公共组合子，并且当环境中的两个元素的应用有定义时，对该应用封闭。一个两层装配是集合的一个箭头 $\alpha_X : X_a \to X_p$，在每一层都有满足以下条件的非空名称集

$$\rho_p(y) \subseteq A, \qquad \rho_a(x) \subseteq A_\# \cap \rho_p(\alpha_X x).$$

下标 p, a 表示潜在层和实际层。态射是函数的交换方块，其中一个跟踪器 $A_\#$ 在两层都发挥作用。分割对象是带名称的包含 $P_a \subseteq P_p$ ，以及一个函数 $\nu_P\colon P_p \to A$和 $\nu_P(P_a) \subseteq A_\#$。在两层中，名称都是单点集，且包含上的名称相同。令$\mathcal{P}$表示相应分割对象的充满类。每当计算对$P \in \mathcal{P}$使用主名称时，我们选取一个分割代表元，并沿所选同构将构造传输到 P。

引理 60（射影覆盖与截面对象）。两个组装范畴都是正则的，并具有稳定不交有限余积。它们的分割对象构成有限极限闭射影覆盖，而且这两个范畴都承认依赖积。它们的普通正合／正则完备化分别是相对可实现性拓扑斯和嵌套可实现性拓扑斯。

证明。有限极限通过名称的积以及对等化子载体的限制来构造。终端分割对象有一个固定的全局名称。带标记不交并给出余积，并由一个统一的分类算子跟踪其泛性质。对带标记和作拉回与载体分解相容，而配对为两个比较函数提供跟踪器。对于态射 $e\colon E \to B$ ，每一层上的像都具有载体像，以及其原像的名称集之并。因此， e 是覆盖，当且仅当存在一个全局的c 满足

$$r \in \rho_B(b) \quad \Longrightarrow \quad cr \text{ is defined and belongs to } \bigcup_{e(x)=b} \rho_E(x).$$

在嵌套情形中，这个公式在两层上都成立，且使用相同的 c。配对表明，这个分解在拉回下是稳定的。在核对上为常值的可追踪映射可以作为载体函数下降；若 d 跟踪给定映射，则其跟踪器为$r \mapsto d(cr)$。这验证了正则性。

每个相对组装都被由对 $(x,\ r)$、 $r \in \rho_X(x)$ 构成的分割组装所覆盖，其主名称为 r。在嵌套情形中，取实际关联 $(x,\ r)$、 $r \in \rho_a(x)$ 与潜在关联 $(y,\ r)$、 $r \in \rho_p(y)$ 的不交并作为潜在载体。第一个直和项是实际载体。二者的名称均为 r，其潜在像分别为 $\alpha_X x$ 和 y。恒等映射是一个覆盖跟踪器。给定一个由 t 跟踪的映射 $P \to B$，对每个 p，选择一个由 $c(t\nu_P(p))$ 命名、经 e 映至其原像的元素。对于带名称的包含，首先选择

实际层各点处的实际原像，在这些点保留其潜在像，然后在剩余的潜在载体上选择提升。复合映射 $r \mapsto c(tr)$ 跟踪该提升。单调性处理有序情形中的每个较小名称。这些都是外部选择。

对于 $Z \to Y \to X$， x 上的相对截面对象由载体截面 s 组成： $Y_x \to Z$ 在其输入的所有名称上都存在跟踪器 $e \in A$。令 s 为名称 $\langle r,\ e\rangle$ 的向下闭包，其中 $r \in \rho_X(x)$ 和 e 如上。在嵌套范畴中，潜在截面就是潜在纤维的一个这样的截面。 $x \in X_a$ 上的实际截面由一个 $\alpha_X x$ 上的潜在截面和一个 x 上的实际截面组成；它们与结构箭头相交换，并具有一个共同的跟踪器 $e \in A_{\#}$。它的像会遗忘实际截面。在两个层次上，名称都将一个基底名称与适当的跟踪器配对。求值将第二个分量作用于参数。对于一个以 $T \to X$ 为参数、具有基底跟踪器 h 和求值跟踪器 d 的截面，其转置的跟踪器为$r \mapsto \langle hr,\ \sigma(d,\ r)\rangle$。在实际名称处，两个分量都属于子部分组合代数。对于任意参数名称$\sigma(d,\ r)$，其取值范围可以是 A。逐点的载体描述给出逆伴随，而所有涉及的函数集都包含在某个共同的更大不可达基数之下。

对于通常的识别，给定一个集合 I，赋予它余离散组装 ∇I，使每个点都具有所有可能的名称；在嵌套情形中使用 $I \xrightarrow{1} I$。 ∇I 的子对象恰好是由名称集 U_i 构成的谓词（相对情形），或由满足 $U_{i,\ a} \subseteq A_{\#} \cap U_{i,\ p}$ 的对 $(U_{i,\ p},\ U_{i,\ a})$ 构成的谓词（嵌套情形），其中对象按一致相互蕴涵取等价类。每个分量的载体都是其非空支撑。要证明每个单态射都具有这种形式，只需注意其分量函数是单射：在相应层级上，可以从一个携带两个名称之对的单点集进行测试，从而区分两个原像。对于嵌套情形中的潜在层比较，测试集的实际载体为空。对于实际层比较，其单点集在两个层级上都存在，并具有相同的实际名称对。在这两种测试中，两个投影都跟踪这两个平行映射。一个这样的子对象包含于另一个，当且仅当存在全局跟踪器，在 $i \in I$ 中一致地见证相应的蕴涵。

每个分割对象都嵌入其（潜在层）载体上的余离散对象。因此，精确完备化中的每个对象都是余离散载体上某个部分等价关系的商：用一个分割对象覆盖它，并将该子对象上的核对扩展为在其支撑之外取空谓词。反过来，将任意此类关系限制到其支撑上并取其有效商，便得到完备化中的一个对象。将图沿商覆盖拉回，可得到定义在两个支撑上的关系。它同时保持两个部分等式，在源支撑上全定义，并且在目标等式意义下是单值的。反过来，此类关系会下降为一个图，而等价的谓词给出同一个图。在有序相对情形中，谓词是下集，蕴涵关系由 A' [52] 追踪。在嵌套情形中，这两组名称给出 Maschio 和 Streicher 的潜在层谓词与实际层谓词 [29]。借助这些谓词，上述对象和箭头恰好就是三元组到拓扑斯构造中的对象和箭头 [22]。□

A.2 纤维界与有界 Kan 表示

用 $\mathcal{E} = \mathrm{Ex}_\infty \mathcal{C}$ 表示任一源的完备化。引理 60 中的射影覆盖和截面数据给出了引理 2 中的有限下降与截面重构。特别地，环境正则层范畴计算 $\mathcal{E}$中的依赖积。在选定的不可达基数 $\kappa > |A|$处，令 $\mathcal{S}_{\kappa,-1} =${为 $\mathcal{E}$}中的所有单态射。对于$n \geq 0$，一个 n截断的 $Y \to X$ 属于 $\mathcal{S}_{\kappa,n}$，当且仅当其对角映射属于 $\mathcal{S}_{\kappa,n-1}$，并且对每个 $P \to X, P \in \mathcal{P}$，都存在覆盖 $D \twoheadrightarrow Y \times_X P$，使得 $D \in \mathcal{P}$，且 $D \to P$的所有载体纤维的基数均为 $< \kappa$。在两层情形中，我们计算潜在纤维的数量；它们已经为带名称的包含的实际纤维提供了界。

引理 61（小族的闭包）。这些类在拉回下稳定、覆盖局部、对两个指标均单调递增，且穷尽一切。每一层都包含所有单态射，并且在切片范畴中对复合、相对对角映射和有限极限封闭。若一个有效群胚中的对象相对于某个基底均为小对象，且其商具有所述相对截断界，则该商在同一层也是小对象。

证明。 原始投射对象在完备化中仍是射影对象：用一个原始对象覆盖覆盖在 P 上的源，并将所得的原始覆盖分裂。因此，每个投射测试都能经由其基底的一个覆盖提升。对这类提升进行测试即可得到局部性，而对测试进行预复合即可得到拉回稳定性；这两种情形都通过对角线上的归纳得到

。原始 P 的子对象也是原始的：用一个原始对象覆盖它，并取复合映射到 P 的像。其上方的分块关联覆盖中，每个潜在点至多对应 $2|A|$ 个点（所有情形下至多为 $2\,\max(1,|A|)$）。因此，该单态射处于零级。其对角线是一个同构。归纳可得相邻层级之间的包含，并且某一基数界下的每个图册在所有更大的基数界下都被接纳。反过来，一个已经处于层级 $n \geq m$ 的 m-截断映射，通过使用同一个图册并归纳降低其对角线的层级，也处于层级 m。

对于复合映射，先用一个小的分块图册 D 覆盖 Y_P，然后用一个位于 D 上的小分块图册覆盖 $Z \times_Y D$。它们的复合覆盖 Z_P，而由 κ 的正则性可知其纤维很小。Z/X 的对角映射通过 $Z \times_Y Z$ 分解：先通过 Z/Y 的对角映射，再通过 Y/X 的对角映射的一个拉回。归纳可证复合闭包。切片中的有限极限由积和对角映射得出。特别地，切片中小对象之间的每个映射都是小的：其图是目标对角映射的一个拉回，而后续投影是源结构映射的一个拉回。

对于商 Q 位于 X 上的群胚 $R_\bullet$，R_0 的一个图册也覆盖 Q_0。Q/X 的对角映射沿 $R_0 \times_X R_0 \twoheadrightarrow Q \times_X Q$ 拉回到 $R_1 \to R_0 \times_X R_0$。根据图的论证，此映射是小的，且具有与对角映射相同的截断界。降低其层级并使之下降。对于次数 -1，结论就是截断假设本身。最后，对于任意有界的 $Y \to X$，选取分块覆盖 $P_0 \twoheadrightarrow X$ 和 $D_0 \twoheadrightarrow Y_{P_0}$。选取一个大于它们全定义大小的选定基数。每个投射测试都可提升到 P_0，而 D_0 沿该提升的拉回是一个具有相同纤维界的分块图册。有限次提高该界，使其涵盖后续的对角映射。这证明了穷尽性。□

$Y \to P$ 上的*Kan* 表示由一个位于 P上的分割组装的单纯图、为其角映射选定的带跟踪截面，以及一个从其在正则层中的实现到 Y、位于 P 上的等价组成。对于 $m \geq 1$ 和 $0 \leq i \leq m$，角 $\Lambda^m_i \subseteq \Delta^m$ 是除第 i 个面以外的余维一面的并。角截面将这些面的每个相容元组映射到一个 m- 单形，使其限制为该元组。在一个 r-余骨架图中，对于 $m > r$，Δ^m 的 r-骨架上的每个相容赋值都唯一延拓为一个 m-单形。因此，在一个（$n+1$）-余骨架表示中，$n+2$ 维中选定的填充子由其缺失的（$n+1$）面以及给定的角确定。

引理 62（有限 Kan 表示）。对于 $P \in \mathcal{P}$ 和 $n \geq 0$，$\mathcal{S}_{\kappa,\,n}$ 中的每个 $Y \to P$ 都存在一个由分割对象构成的 *Kan* 表示，其载体纤维为 $< \kappa$。截至 $n+1$ 维的各层、它们的面算子和退化算子，以及截至 $n+2$ 维选定的角填充截面，确定了一个实现 Y/P 的（$n+1$）-余骨架表示。反之，这样的表示实现为 $\mathcal{S}_{\kappa,\,n}$中的一个对象。

证明。 构造一个分裂单纯超覆盖 $D_\bullet \to Y$。在次数 k，选取增广匹配对象的一个分割覆盖 N_k，其在 P 上的纤维大小为 $< \kappa$，并令

$$D_k = \coprod_{\theta:[k]\twoheadrightarrow[j]} N_j .$$

恒等满射提供新的直和项及其给定边界。退化映射通过对满射作前复合而作用于直和项。在真满射直和项上，面由以下方式确定：将与余面映射的复合分解为一个满射后接一个单射，并使用先前指定的面。序数分解的唯一性和匹配条件给出单纯恒等式。匹配对象是切片 over Y 中边界的有限极限，因此根据引理 61，它在 P 上很小。每个次数中都有有限多个退化直和项，其指标为从该序数出发的真满射。分割对象的带标签余积在完备化中也仍是余积。事实上，从该和映射出去所得的映射空间，与从各直和项映射出去所得映射空间的积，在原始目标上相同。二者都因射影性而保有限极限和覆盖，因而也保有效群胚商，这是因为每个商的 Čech 神经的像具有有效性。因此，二者在整个精确完备化上相同。这证明了其中的分裂匹配构造。相对情形取 $\mu = \mathrm{card}(|P|)$，嵌套情形取 $\mu = \mathrm{card}(P_p)$。在整个外部可数递归过程中，每个次数的全定义载体大小至多为 $\max(1,\ \mu)\kappa$。

对于维数为 m 的角，先沿其边界附加缺失的 $(m-1)$-面，然后附加 m-单形。在切片 over Y 中取极限，由匹配条件可得两个连续的覆盖，包括在 $m=1$ 时的$D_0 \twoheadrightarrow Y$。角的有限面范畴是可缩的，因此其极限与切片 over P 中底层角对象相同。这个角对象是 over P 的分割对象的有限极限。射影性使复合覆盖分裂，而全忠实性给出一个带跟踪的截面。选取这样的截面。对于每个测试组装 $T \to P$，这些截面都在单纯集合 $[m] \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/P}(T,\ D_m)$ 中提供角填充子，因此它是 Kan。

对于 Kan复形，映射到其（$n+1$）余骨架会保持直到 n 的同伦群：这些次数中的代表元和同伦只使用到次数 $n+1$ 的单形。次数高于 $n+1$ 的每个边界都能在余骨架中延拓，因此所有更高阶群都消失。直到次数 $n+1$ 的角保留其选定的填充子。次数为 $n+2$ 的角恰好需要其缺失的（$n+1$）面，该面由原始填充子提供。在更高次数中，角与单形具有相同的（$n+1$）骨架。这些事实逐对象成立，而左正合层化保留截断计算。超覆盖在每个有限截断后都诱导一个等价（如引理 2 中的有限超覆盖下降），因此其在此处的余骨架实现是 Y。

对于逆向蕴含，我们证明一个更强的断言。在分割基 P 上，设 $K_\bullet$ 是一个任意的分割对象的单纯图，在每个次数上都具有大小为 $<\kappa$ 的纤维，并为所有角映射选定可追踪截面。如果其环境实现 $Q \to P$ 是 r-截断的，则它属于 $\mathcal{S}_{\kappa,\ r}$。我们对所有此类单纯图和基底关于 r 进行归纳。对于 $r=-1$，该实现是顶点组装的像，因此是完备化中的单态射。

对 $r \geq 0$ 构造一个端点位于顶点处的单纯路径对象，

$$L_\bullet = K_\bullet^{\Delta^1} \times_{K_\bullet^{\partial\Delta^1}} (K_0 \times_P K_0).$$

这里，次数为 m 的有限余张量，是通过对 $\Delta^m \times \Delta^1$ 的非退化单形取有限极限得到的；其边界端点类比对象也同理。相对棱柱角通过连续取角嵌入的推出而延拓（采用标准棱柱三角剖分），因此只需选取 K 的有限个填充子。逐对象的 Kan 路径空间公式再经左正合层化后，将 $|L_\bullet|$ 与 $K_0 \times_Q K_0$ 识别。此处，为填充一个棱柱而延拓的包含为

$$(\Lambda^m_i \times \Delta^1) \cup (\Delta^m \times \partial\Delta^1) \ \hookrightarrow\ \Delta^m \times \Delta^1.$$

两个端面规定了端点对，因此所得填充子位于同一端点对之上。实现相对于 $K_0 \times_P K_0$ 的截断低一阶。这个端点基底是分割的。在每个次数上，路径对象都是由具有小纤维的分割对象取有限极限得到的，而刚构造的棱柱填充子则给出了它在端点基底上的、带跟踪器的角截面。因此，加强的归纳假设表明，这个核对处于第 $r-1$ 层。它的迭代纤维积给出 $K_0 \twoheadrightarrow Q$ 的 Čech 神经。它在 $\mathcal{E}$ 中的有效商实现了 Q。对于具有给定纤维界的分割层次，该论证中的有限极限仍是具有小纤维的分割对象。因此，对角线的小性断言可沿覆盖 $K_0 \times_P K_0 \twoheadrightarrow Q \times_P Q$下降；顶点覆盖则在每次投射基变换后提供图册条件。这就证明了逆向结论以及下文所用的有界实现。由此，普通 Kleene组装的实现论证与投射分解论证 [28] 可推广到相对装配与嵌套装配。相对角截面在滤子中具有跟踪器；根据引理 60 的投射提升性质，每个嵌套角截面都具有一个作用于两个层次的跟踪器。□

A.3 验证相对与嵌套组装的可容许性

定理 63（组装表示的验证）。假设 A 的载体小于某个选定的不可达基数。上述带滤子的有序 *PCA* 的相对组装表示，以及离散子部分组合代数的两级组装表示，满足命题 *3* 的可容许性假设。对于层级中的每个 $\kappa > |A|$ 和 $n \geq 0$，在载体大小至多为 κ 的分割基上，都存在 $\mathcal{S}_{\kappa,\ n}$ 的弱分类器。由此得到的单值层级包含所有单态射，并且满足

$$f \in \mathcal{S}_{\kappa,N},\quad g \in \mathcal{S}_{\kappa,r},\quad -1 \leq r \leq N,\quad N \geq 0 \quad\Longrightarrow\quad \Pi_f g \in \mathcal{S}_{\kappa,r}$$

对于可复合的 g, f。特别地，这一构造适用于相对数值可实现性和函数可实现性、它们的绝对情形 K_1,K_2, ，以及满足 $A_{\#} = A = K_1$ 的嵌套数值可实现性。

证明。族的编码。固定 n和 κ。一个潜在层编码 v由序数载体 B_0、.....、 $B_{n+1} < \kappa$、主名称函数 ν_k：$B_k \to A$、面函数和退化函数、维数不超过 $n+1$的角填充截面，以及维数为 $n+2$的角的缺面运算组成。这些算子满足截断单纯形恒等式和角填充截面方程，其中包括缺面所需的边界条件。选定的填充子及其跟踪器也是编码的一部分。特别是，对于每一种可容许的选择，都有相同的底层图表。为这些数据配备一个元组 q_v ，其中包含 A 中的跟踪器，用于作用于指定名称的所有上述运算。此处的角名称是由其各面的名称组成的有限元组，并采用迭代有限极限编码。在有序情形下，每个跟踪器作用于所示主下集中的所有名称。这些数据的可容许性是一个外部的集合论条件。相对编码基 V 以所有这类编码为载体，并赋予 v主名称 q_v。

在嵌套情形中， H 的增强是选择若干子集 $B_{k,\ a} \subseteq B_k$ ，其名称属于 $A_{\#}$。对于增强，算子和所选的角填充子保持该子图，而 q_v 的连通分支属于 $A_{\#}$。令

$$V_a = \{(v, H) : H \text{ enhances } v\}, \qquad V_p = V_a \amalg \{v : v \text{ is a potential code}\}.$$

结构映射是将实际载体作为潜在载体的第一直和项的包含。潜在副本和每个增强副本具有相同的名称 q_v，因此单个名称可以表示多个增强。在增强副本上，使用 B_k 作为潜在载体，并使用 $B_{k,\ a}$ 作为泛度 k 的实际载体。在仅有潜在层的副本上，在潜在侧取 B_k 。

在这两种情形中，泛单形（v， b）在存在增强时将其保留在基底中，其名称为 $\langle q_v,\ \nu_k(b)\rangle$。一致的全局跟踪器执行投影，从 q_v 中提取适当的算子，将其作用于所指明单形或角的名称上，然后再次与 q_v 配对。带跟踪的截面方程是载体函数的方程。在有序情形中，投影不等式产生所需下集中的输出。在嵌套情形中，共同的跟踪器保持增强。取余骨架并应用引理 62，得到一个族 $p_{\kappa,\ n} : E_{\kappa,\ n} \to V$，其中属于 $\mathcal{S}_{\kappa,\ n}$。根据强极限和正则性条件以及 $|A| < \kappa$，每个低于 κ 的固定有限序数元组所支持的名称赋值、函数、子集和跟踪器元组的可能数少于 κ 。这样的序数元组至多有 κ 个。因此， V 以及每个泛度的全定义大小都至多为 κ，并且属于下一个选定的大小层。

为分类 $Y \to X$，首先取一个投射覆盖 $P \twoheadrightarrow X$ ，以及引理 62 在 P 上的表示。在外部将每个（潜在层）纤维载体识别为一个序数，并传输其主名称、函数和填充子。对于一个实际层参数，取相应的增强副本，因为每个分割后的实际纤维都是潜在层纤维的子集。原有的结构映射和选定的截面由一个有限元组的全局跟踪器跟踪，该元组对所有纤维通用。当 P 上的算子需要参数名称时，输入角中的单形或顶点会通过其到 P 的受追踪投影提供一个参数名称；此处使用的角均非空。因此，单个元组 q 即可跟踪重新标记后的纤维运算。将每个参数映射到其代码的映射 $P \to V$，由常值 q 跟踪，在适用的两个层级上皆如此。若 π_k 跟踪原层级到 P 的投影，则到拉回的通用层级的比较在输入名称 r 上由以下方式跟踪：

$$r \longmapsto \langle \pi_k r, \langle q, r\rangle\rangle.$$

连续两次第二投影跟踪其逆映射。这两个映射在载体上互为逆映射，保留所有指定的运算，因此可在实现中恢复该族。因此，由 p_κ、$_n$ 生成的局部上同调类 $\mathcal{M}(p_{\kappa,\ n})$ 恰为 $\mathcal{S}_{\kappa,\ n}$。

截面的编码。 先在一个射影测试 $P \to X$上进行；将基变换映射记为 $Z \to Y \to P$。令 $m = r+1$，允许 $m = 0$。用一个覆盖P的部分半单纯射影超覆盖 $U_{\le m}$ 分解 Y，并选择一个具有匹配覆盖的相对分解

$$V_k \twoheadrightarrow D_k \times_{M_k D} M_k V, \qquad D_k = Z \times_Y U_k, \qquad 0 \le k \le m.$$

这里， M_k是 P上的有限边界极限，其中有 $M_0D = M_0V = P$。由于所有匹配对象都是第 N层上相对于 P 较小的对象的有限同伦极限，射影图册使 U_k， V_k 按纤维 $< \kappa$ 分区。

构造一个分割对象 $W \to P$。对于一个基点 b，将 $U_k(b)$ $V_k(b)$ $W(b)$ 记作位于 b 上方的载体纤维；在嵌套情形中取潜在载体。 $W(b)$ 的点由严格半单纯截面 s_k： $U_k(b) \to V_k(b)$ 构成，它们位于 $U_k(b)$ 上方，并带有一个元组 $(e_0, \dots, e_m) \in A^{m+1}$，用于跟踪输入名称上的分量映射。位于实际 b 上方的点若其所有跟踪器都属于 $A_{\#}$，且其函数将实际子图映入实际子图，则称为实际层。此时，其实际函数由限制唯一确定。使用主名称 $\langle \nu_P(b)\ e_0, \dots, e_m \rangle$。对于每个 b，

$$|W(b)| \ \le\ |A|^{m+1} \prod_{k=0}^{m} |V_k(b)|^{\,|U_k(b)|} < \kappa.$$

κ 的强极限性质限制了此估计中的基数幂。

应用 e_k 得到一个带跟踪的严格求值族，它定义在 U_k 上，取值于 V_k。将其复合到 D_k 中。对于一个 r- 截断映射的截面，有限下降等价（引理 2 ）将这些相容的求值转化为 $W \times_P Y$ 上的截面。反过来，取任意一个由完备的 $T \to P$ 参数化的截面，并以一个分割的 $T_\prime$ 覆盖 T。对象 $T' \times_P U_k$ 是射影的。沿相对匹配覆盖归纳提升，利用面上先前得到的提升以及给定到 D_k 中的截面。这给出到 V_k 中的严格分量函数；原始组装之间的映射所满足的方程是字面成立的，因为它们的映射空间是离散的。相对匹配映射保留了到 $D_\bullet$ 中的相干性。若 d_k 是这些提升的跟踪器，且 h 跟踪 $T_\prime \to P$，则表示映射 $T' \to W$ 由该抽象跟踪

$$t \longmapsto \langle ht, \sigma(d_0, t), \dots, \sigma(d_m, t) \rangle.$$

更明确地说，在 P 中像为 b 的点 t' of $T_\prime$ 处，使用其主名称 $t = \nu_{T'}(t')$ 来选择所显示的元组。对于另一个名称 $v \le t$，对于每个 k，我们有 $hv \le ht \le \nu_P(b)$ 和 $\sigma(d_k, v)\ \le \sigma(d_k, t)$。因此，所得元组命名了 W 中的同一点。在实际名称处，专门化的跟踪器属于 $A_{\#}$。下降等价将所表示的截面与给定截面识别起来，包括其在 Y 上的比较。将此构造应用于 $(\Pi_f g)_P$ 上的泛截面，可见 $W \to (\Pi_f g)_P$ 是一个覆盖。

现在对 r 作归纳。单态射的依赖积是单态的。对于 $r \ge 0$，令 $S = \Pi_f g \to X$，由于切片上的右伴随保持有限极限，它是 r-截断的。小覆盖 W 给出了其图册条件。在 $B = S \times_X S$ 上，求值给出了 Y_B 上 g 的两个截面。它们的恒等族 $I \to Y_B$ 是 Δ_g 的拉回，因此处于 $r-1$ 层。这个伴随（包括其在映射空间上的作用）将 B 上的 $\Delta_{S/X}$ 与 $\Pi_{Y_B/B} I$ 识别起来。对拉回 $Y_B \to B$ 应用归纳假设，该拉回属于 N 层。这证明了对角条件。

命题编码。普通子对象分类器 Ω 对零类型参数上的单态射进行分类。正如命题 3 中的普通核论证，特征映射沿任意参数到某个零类型的覆盖下降。对其核对上的一致性，可在进一步的零类型覆盖后检验；所有更高阶的一致性则都是唯一的，因为 Ω 是一个集合。因此， Ω 对 $\mathcal{E}$中的所有单态射进行分类。沿着 Ω 的一个分割覆盖拉回 $\mathbf{1} \hookrightarrow \Omega$，从而在原始基底上得到所需的弱族。前述构造、引理 60 和 61 以及积界共同验证了命题 3 的所有数据。其单价重构将这些分割基底上的带追踪族转化为完备化中的封闭的宇宙层级。□