arXiv:2611.29844v1 [math.MG] 23 Nov 2026

通过滚动空间实现的二阶矩便士堆积

JOSÉ AYALA HOFFMANN 和 FABIÁN HENRY VILAXA

摘要。我们证明，平面上六个单位圆盘的无约束最小二阶矩问题的最小值为 $29/3$，且除等距变换和重新标记外，唯一的极值构型由三角晶格中的一个圆盘及其六个邻圆中的五个组成。

实际接触本身定义了允许运动空间，而一阶保持这些接触的方向则定义了滚动空间；该空间由满足以下条件的运动构成：在每个实际接触处，相对速度的法向分量均为零。这两个空间共同导出精确切锥公式，并给出一个判据：严格为正的质心接触平衡结合滚动刚性，可推出模去欧几里得运动后的严格局部极小性。我们的方法重现了 Graham 和 Sloane 提出的经典五圆盘最小值 $34/5$，这是此前已知的最大规模精确无约束情形。

几何约化和图枚举将全局搜索缩减为有限多个接触图类别。随后通过精确分析和经验证的区间算术排除其他竞争构型，从而确立全局界和唯一性。我们的方法使我们能够从推测的晶格极值构型推进到无约束最优性。

1. 前言

如何才能将有限个便士紧密地堆放在其质心周围，同时避免相互重叠？圆盘中心的二阶矩衡量它们的分散程度，并对离群点施加惩罚。Graham 和 Sloane 研究了平面情形下的这一问题 [8], ，其部分动机来自最小能量二维码。他们确定了五个圆盘时不受限制的最优解，并猜想，除非 $n = 4$，否则每种最优堆积都位于三角晶格中（相差一个等距变换）。Chow 随后提出了一种算法，用于在三角晶格内寻找二阶矩最小的堆积 [5]。这一结果确定了候选项，但从晶格最优解到不受限制的最优解，仍有很大距离。必须针对所有可行的平面构型证明最优性，包括三角晶格之外的构型。

Let $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n) \in (\mathbb{R}^2)^n$ 为 n 互不重叠的单位圆盘的中心，且令

$$\overline{\mathbf{c}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}_i$$

为它们的质心。我们考虑质心二阶矩

$$M(\mathbf{c}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{c}_i - \overline{\mathbf{c}}\|^2. \tag{1.1}$$

等价地，

$$M(\mathbf{c}) = \frac{1}{2n} \sum_{1 \le i < j \le n} \|\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j\|^2. \tag{1.2}$$

2020 数学分类。主分类 52C25，68V05。关键词和短语。圆盘堆积、便士图、二阶矩、滚动空间、刚性、计算机辅助证明、区间算术。ORCID：0000-0003-2649-6676。

我们的归一化与 Graham 和 Sloane 的归一化相差两倍，$M = 2U$，其中U 表示他们的二阶矩。

我们求解了平面上六个单位圆盘的无约束最小二阶矩问题，证明其最小值为 $29/3$；除等距变换和重新标记外，唯一的取值构型是一个圆盘与三角晶格中围绕它的六个邻居里的五个圆盘。我们的方法也重新得出了 Graham 和 Sloane 的经典五圆盘最小值 $34/5$。

对实际硬圆盘构型的微积分研究，源于我们对硬圆盘簇周长极小化的研究 [2]。本文将其内蕴接触几何应用于质心二阶矩，建立相应的平衡和局部极小性判据，为无约束六圆盘分类奠定基础。对于硬圆盘构型 $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$，局部分析围绕其实际接触展开。接触可以张开，但不能在一阶上缩短。这使我们能够定义可容许锥**可容许集(c)**。事实上，这个锥恰好与完整硬圆盘构型空间在$\mathbf{c}$处的切锥一致。所有接触处均取等号所定义的滚动空间**Roll(c)**，由保持接触至一阶的允许运动组成。在周长问题中，局部分析必须考虑实际接触以及周长泛函的变化；后者是分段光滑的（即使在同一接触类中，其局部公式也会随凸包的组合结构而变化）。另一方面，质心二阶矩 M 在整个环境构型空间上都是光滑的二次函数，因此，局部几何的变化完全源自实际的非重叠约束。这使最小二阶矩问题成为一个特别清晰的研究场景，可以将内蕴可行几何与所选泛函区分开来。

这一精确切锥恒等式消除了对一阶约束资格条件的需求。在环境局部极小值点处，$DM\mathbf{c}$ 在**可容许集(c)** 上非负，而极锥论证可得一个带有非负乘子的质心接触平衡。严格正的平衡结合滚动刚性，意味着模去保向欧几里得运动后具有严格局部极小性，无需假设主动接触梯度线性无关。尽管如此，图1所示的两个目标构型均满足线性无关约束规范，这一点已由接触秩计算验证。

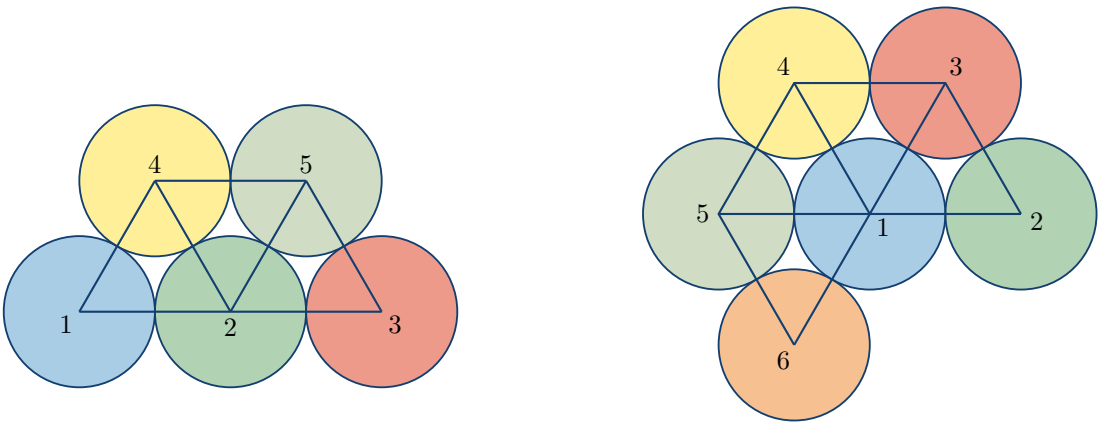


图1. 质心二阶矩的无约束全局极小构型。左：带有 $M = 34/5$ 的五圆盘双行簇。右：带有 $M = 29/3$ 的六圆盘缺邻花形构型。线段表示圆盘中心之间的实际接触。两种极小值解在等距变换和重新标记意义下均唯一。

全局证明将问题归结为五个圆盘的 13 类连通外平面接触图，以及六个圆盘的 46 类连通外平面接触图，均按同构计数。随后，在保留严格非接触不等式的前提下，分析这些图的相关实现。对于五个圆盘的接触图类中的 12 类，以及六个圆盘的接触图类中的 44 类，经验证的区间搜索结合了接触条件、平衡方程、几何排除条件和根隔离。其余类别则通过精确代数和内在二阶分析处理。严谨的矩比较以及排除非连通等号情形的单独论证共同完成了证明，详见第 8 节。

它与刚性理论的联系密切但又有所不同。在杆-节点刚性中，图是预先给定的；而在这里，图由已实现构型中的活跃非重叠不等式决定。因此，经典刚性和张拉整体的思想自然地融入其中 [1, 15] ，并结合了堵塞领域的相关思想 [7, 6]。

第 2 节介绍硬圆盘构型空间、已实现接触图、滚动空间和精确切锥。第 3 节构造局部欧几里得切片。第 4 节阐述质心接触平衡和内在海森矩阵，第 5 节则确立叶障碍和局部极小值判据。第 6 节计算五圆盘候选值 $M = 34/5$ ，并证明其严格局部极小性。第 7 节计算六圆盘花值 $M = 29/3$ ，并证明其严格局部极小性。第 8 节通过几何约化、精确代数和经验证的区间搜索，证明两种圆盘数量情形下的全局下界，以及模等距变换和重新标记的唯一性。补充说明包含详细的约化过程、区间覆盖和候选分析；代码仓库 [3]则提供计算数据、验证代码和可复现性记录。

2. 硬圆盘构型空间

2.1. **可行构型与紧致归一化**。对于 $n \geq 1$，定义

$$\mathcal{D}_n = \left\{ \mathbf{c} \in (\mathbb{R}^2)^n : \|\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j\| \geq 2 \text{ for all } i \neq j \right\}. \tag{2.1}$$

因此，$\mathcal{D}_n$ 是完整的可行构型空间。

Let

$$Z_n = \left\{ \mathbf{c} \in (\mathbb{R}^2)^n : \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}_i = 0 \right\}.$$

$\mathcal{D}_n$ 中的每个平移轨道与 Z_n 恰好相交于一点。在 Z_n上，

$$M(\mathbf{c}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{c}_i\|^2. \tag{2.2}$$

对于 $U > 0$，定义归一化紧致子水平集

$$\mathcal{D}_n(U) = \left\{ \mathbf{c} \in \mathcal{D}_n : \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}_i = 0, \quad M(\mathbf{c}) \leq U \right\}. \tag{2.3}$$

引理 2.1。 对于每个 $n \geq 1$，泛函 M 在 $\mathcal{D}_n$上取得其最小值。此外，对每个 $U > 0$，$\mathcal{D}_n(U)$ 都是紧致的。

证明。 集合 $\mathcal{D}_n(U)$ 是闭集。如果 $\mathbf{c} \in \mathcal{D}_n(U)$，那么

$$\|\mathbf{c}_i\|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \|\mathbf{c}_k\|^2 = 2M(\mathbf{c}) \leq 2U$$

对于每个 i，因此该次水平集有界，故它是紧的。

任取一个可行构型 $\mathbf{c} \in \mathcal{D}_n$，并选择满足 $U \geq M(\mathbf{c})$ 的 $U > 0$。目标函数不超过 U 的每个构型都平移等价于 $\mathcal{D}_n(U)$ 中的某个点。M 的连续性和紧致性保证了最小值构型的存在。□

注记 2.2。图1中展示的候选构型给出了五圆盘和六圆盘最小值的上界 $34/5$ 和 $29/3$。因此，每个全局最小值构型经质心归一化后，分别属于 $\mathcal{D}_5(34/5)$ 和 $\mathcal{D}_6(29/3)$。因此，只需在这些紧致次水平集中排除其他竞争的全局最小值构型。

2.2. **精确接触与实现集**。对于 $1 \leq i < j \leq n$，定义

$$g_{ij}(\mathbf{c}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j\|^2 - 2. \tag{2.4}$$

对于 $i > j$，令 $g_{ij} = g_{ji}$。则

$$\mathcal{D}_n = \{\mathbf{c} : g_{ij}(\mathbf{c}) \geq 0 \text{ for every } i < j\},$$

且 $g_{ij}(\mathbf{c}) = 0$ 当且仅当圆盘 i 和 j 相切。

$\mathbf{c} \in \mathcal{D}_n$ 的实现接触图为

$$G(\mathbf{c}) = (V, E(\mathbf{c})), \qquad V = \{1, \ldots, n\},$$

其中

$$E(\mathbf{c}) = \{\{i, j\} : \|\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j\| = 2\}.$$

在不会引起混淆时，ij 表示无序边 $\{i, j\}$。实现接触图记录各接触对。以中心 $\mathbf{c}$ 实现该图，所得即为接触框架。

对于一个图 aph $G = (V, E)$，其顶点集为 $V = \{1, \ldots, n\}$，定义精确实现集合 t

$$\mathcal{C}(G) = \left\{ \mathbf{c} \in \mathcal{D}_n : \begin{array}{ll} g_{ij}(\mathbf{c}) = 0, & \{i, j\} \in E, \\ g_{ij}(\mathbf{c}) > 0, & \{i, j\} \notin E \end{array} \right\}. \tag{2.5}$$

对于 $G = (V, E)$，定义活动接触映射

$$F_G(\mathbf{c}) = \big(g_{ij}(\mathbf{c})\big)_{\{i,j\} \in E}. \tag{2.6}$$

仅给出边集时，我们也记作 F_E。

空间 $\mathcal{D}_n(U)$ 包含目标水平 U 以下所有可行精确接触类型的构型，而 $\mathcal{C}(G)$ 则施加一个固定的精确接触图。若对于$\mathbf{c} \in \mathcal{C}(G)$，存在一个$\mathcal{U}$ 邻域，使得$\mathcal{C}(G) \cap \mathcal{U}$ 是 $(\mathbb{R}^2)^n$ 的光滑子流形，我们就称这个局部片段为经过$\mathbf{c}$的实现的接触流形。请注意，抽象图、其精确实现集、实现的接触流形和选定代表元是彼此不同的对象。

引理 2.3。设 $G = (V, E)$，并假设 F_G 在$\mathbf{c} \in \mathcal{C}(G)$的某个邻域内具有常秩。那么，将邻域缩小为$\mathbf{c}$的某个邻域 U 后，

$$N = F_G^{-1}(0) \cap \mathcal{U} = \mathcal{C}(G) \cap \mathcal{U}$$

是经过$\mathbf{c}$的实现的接触流形，并且

$$T_{\mathbf{c}} N = \ker DF_G(\mathbf{c}).$$

If

$$\operatorname{rank} DF_G(\mathbf{c}) = |E|,$$

那么 a 活动接触约束满足线性无关约束规范。

证明。由 根据常秩定理，将范围限制在$\mathcal{U}$ **c**的一个邻域内后，该集合

$$F_G^{-1}(0) \cap \mathcal{U}$$

是一个光滑子流形，且其在**c** 处的切空间为

$$\ker DF_G(\mathbf{c}).$$

由于 $\mathbf{c} \in \mathcal{C}(G)$，每个非边$\{i, j\} \notin E$ 在 **c**处都有正松弛量。必要时缩小$\mathcal{U}$ 后，这些严格不等式在整个$\mathcal{U}$内仍成立。因此

$$F_G^{-1}(0) \cap \mathcal{U} = \mathcal{C}(G) \cap \mathcal{U} = N.$$

因此， N 是经过**c**的一个实现的接触流形，其中

$$T_{\mathbf{c}}N = \ker DF_G(\mathbf{c}).$$

满行秩恰好等价于活跃接触微分的线性无关性。 □

2.3. **滚动空间与可行锥**。对于每个实现接触 $\{i, \ j\} \in E(\mathbf{c})$，定义

$$\mathbf{u}_{ij} = \frac{\mathbf{c}_j - \mathbf{c}_i}{\|\mathbf{c}_j - \mathbf{c}_i\|}.$$

对于环境一阶可容许性，接触可以张开，但不能缩短。一阶可容许锥为

$$\mathbf{Adm}(\mathbf{c}) = \left\{ \mathbf{v} \in (\mathbb{R}^2)^n : \langle \mathbf{u}_{ij}, \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i \rangle \geq 0 \text{ for every } \{i, j\} \in E(\mathbf{c}) \right\}. \tag{2.7}$$

因此，**可容许集(c)**记录了由定义$\mathcal{D}_n$的非重叠不等式所导出的完整一阶可行性关系。

滚动空间是**可容许集(c)**中保持接触的等式部分:

$$\mathbf{Roll}(\mathbf{c}) = \left\{ \mathbf{v} \in (\mathbb{R}^2)^n : \langle \mathbf{u}_{ij}, \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i \rangle = 0 \text{ for every } \{i, j\} \in E(\mathbf{c}) \right\}. \tag{2.8}$$

因此

$$\mathbf{Roll}(\mathbf{c}) \subseteq \mathbf{Adm}(\mathbf{c}),$$

且它与可容许锥的关系为

$$\mathbf{Adm}(\mathbf{c}) \cap (-\mathbf{Adm}(\mathbf{c})) = \mathbf{Roll}(\mathbf{c}).$$

等价地,

$$\mathbf{Roll}(\mathbf{c}) = \ker DF_{G(\mathbf{c})}(\mathbf{c}).$$

根据引理 2.3，如果 $F_{G(\mathbf{c})}$ 在 **c** 的某个邻域内具有常秩，那么经过 **c** 的相应实现接触流形 N 满足

$$T_{\mathbf{c}}N = \mathbf{Roll}(\mathbf{c}).$$

设 $J\,(x, \ y) = (-y, \ x)$。无穷小保向欧几里得运动是 e

$$R(\mathbf{c}) = \left\{ (a + \omega J\mathbf{c}_1, \ldots, a + \omega J\mathbf{c}_n) : a \in \mathbb{R}^2, \ \omega \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2.9}$$

每个无穷小欧几里得运动都能在一阶上保持所有两两距离，因此

$$R(\mathbf{c}) \subseteq \mathbf{Roll}(\mathbf{c}).$$

不同于杆-铰框架，这里的接触图是由**c** 实现的，而不是预先规定的。于是，我们将关于**Roll(c)**的无穷小刚性称为滚动刚性。

定义 2.4。 若一个构型$\mathbf{c} \in \mathcal{D}_n$ 满足

$$\mathbf{Roll}(\mathbf{c}) = R(\mathbf{c}).$$

等价地，每一个 保持所有实际接触的一阶运动都是无穷小刚性运动 .

2.4. **精确切锥**。 我们考虑切锥

$$T_{\mathcal{D}_n}(\mathbf{c}) = \left\{ \mathbf{v} \in (\mathbb{R}^2)^n : \begin{array}{l} \text{there exist } t_m \downarrow 0 \text{ and } \mathbf{c}^{(m)} \in \mathcal{D}_n \\ \text{such that } (\mathbf{c}^{(m)} - \mathbf{c})/t_m \longrightarrow \mathbf{v} \end{array} \right\}.$$

引理 2.5。 对于每个 $\mathbf{c} \in D_n$，切锥为

$$T_{\mathcal{D}_n}(\mathbf{c}) = \mathbf{Adm}(\mathbf{c}).$$

证明。 首先假设 $\mathbf{v} \in T_{\mathcal{D}_n}(\mathbf{c})$。存在 $t_m \downarrow 0$ 和 $\mathbf{c}^{(m)} \in \mathcal{D}_n$ 使得 t

$$\frac{\mathbf{c}^{(m)} - \mathbf{c}}{t_m} \longrightarrow \mathbf{v}.$$

对于每个活跃接触 $\{i, \ j\} \in E(\mathbf{c})$,

$$g_{ij}(\mathbf{c}^{(m)}) - g_{ij}(\mathbf{c}) \geq 0.$$

除以 t_m，并令 $m \to \infty$。这便得到

$$Dg_{ij}(\mathbf{c})[\mathbf{v}] \geq 0.$$

在接触处,

$$Dg_{ij}(\mathbf{c})[\mathbf{v}] = \langle \mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j, \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \rangle = 2\langle \mathbf{u}_{ij}, \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i \rangle.$$

因此 $\mathbf{v} \in$**可容许集(c)**。

反过来，设 $\mathbf{v} \in$**可容许集(c)**。对于一个活跃接触，精确的二次展开为

$$g_{ij}(\mathbf{c} + t\mathbf{v}) = tDg_{ij}(\mathbf{c})[\mathbf{v}] + \frac{t^2}{2}\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|^2. \tag{2.10}$$

当 $t \geq 0$ 时，右侧两项均非负。每一对非活跃对象都有正松弛量，因此对所有充分小的 $t \geq 0$, 它们仍不重叠。这样的对象对只有有限多个，因此

$$\mathbf{c} + t\mathbf{v} \in \mathcal{D}_n$$

对所有充分小的 $t \geq 0$ 均成立。因此 $\mathbf{v} \in T_{\mathcal{D}_n}(\mathbf{c})$。 □

3. 局部欧几里得切片

若存在 c 的一个邻域 $\mathcal{U}$，使得对于每个 $\mathbf{x} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{D}_n$，都有 $M(\mathbf{x}) \geq M(\mathbf{c})$，则称构型 $\mathbf{c} \in \mathcal{D}_n$ 是 M 的一个环境局部极小值点 。

定义 3.1. 若存在 c 的一个邻域 $\mathcal{U}$，使得每个不属于通过保向欧几里得运动由 $\mathbf{c}$ 得到的 $\mathbf{x} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{D}_n$ 均满足 $M(\mathbf{x}) > M(\mathbf{c})$.，则称构型 $\mathbf{c} \in \mathcal{D}_n$ 是 M 关于保向欧几里得运动的环境严格局部极小值。

对于 $n \geq 2$，硬圆盘不等式意味着这些中心彼此不同，因此 $R(\mathbf{c})$ 的维数为三。令 Q_θ 表示旋转角为 θ 的逆时针旋转。

引理 3.2。 令 $n \geq 2$ 和 $\mathbf{c} \in D_n$。在 $(\mathbb{R}^2)^n$ 上取标准欧几里得内积，仿射空间

$$\mathcal{S}_{\mathbf{c}} = \mathbf{c} + R(\mathbf{c})^{\perp}$$

是保向欧几里得运动作用的一个局部截面。更准确地说，每个充分接近$\mathbf{c}$ 的构型$\mathbf{x}$ 都有唯一的表示

$$\mathbf{x}_i = a + Q_\theta \mathbf{s}_i, \qquad \mathbf{s} \in \mathcal{S}_{\mathbf{c}},$$

其中$(\mathbf{s}\ a, \theta)$ 充分接近$(\mathbf{c}, 0, 0)$。

证明。 考虑光滑映射

$$\Phi : \mathcal{S}_{\mathbf{c}} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R}^2)^n$$

定义如下：

$$\Phi(\mathbf{s}, a, \theta) = (a + Q_\theta \mathbf{s}_1, \ldots, a + Q_\theta \mathbf{s}_n).$$

在$(\mathbf{c}, 0, 0)$处，其导数为

$$D\Phi(\mathbf{c}, 0, 0)[\mathbf{z}, b, \omega] = \mathbf{z} + (b + \omega J\mathbf{c}_1, \ldots, b + \omega J\mathbf{c}_n).$$

由于

$$(\mathbb{R}^2)^n = R(\mathbf{c})^{\perp} \oplus R(\mathbf{c}),$$

该导数是一个同构。逆函数定理 [12, 第 4] 章给出了所断言的局部微分同胚和唯一性。□

引理 3.3。 构型 $\mathbf{c} \in D_n$, $n \geq 2$ 是模去保向欧几里得运动后的环境严格局部极小值，当且仅当它是 M 上的严格局部极小值。

$$\mathcal{D}_n \cap \mathcal{S}_{\mathbf{c}}.$$

证明。 每个邻近构型都有唯一的表示

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{s}, a, \theta)$$

根据引理 3.2。可行集和目标函数在保向欧几里得运动下保持不变，因此

$$\mathbf{x} \in \mathcal{D}_n \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{s} \in \mathcal{D}_n$$

and

$$M(\mathbf{x}) = M(\mathbf{s}).$$

由局部唯一性可知，$\mathbf{x}$ 属于$\mathbf{c}$ 的轨道，当且仅当$\mathbf{s} = \mathbf{c}$。因此，这两个严格局部极小值陈述等价。□

4. 一阶变分、接触平衡与内在海森矩阵

4.1. **质心二阶矩的一阶变分**。对于$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$，其质心为

$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i.$$

沿着 $\mathbf{c} + t\mathbf{v}$，质心为 $\mathbf{c}(t) = \bar{\mathbf{c}} + t\mathbf{v}_\circ$对 (1.1) 求导可得

$$DM(\mathbf{c})[\mathbf{v}] = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{c}_i - \overline{\mathbf{c}}, \mathbf{v}_i - \overline{\mathbf{v}} \rangle. \tag{4.1}$$

由于

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{c}_i - \overline{\mathbf{c}}) = 0,$$

这可简化为

$$DM(\mathbf{c})[\mathbf{v}] = \sum_{i=1}^{n}\langle \mathbf{c}_i - \overline{\mathbf{c}}, \mathbf{v}_i\rangle. \tag{4.2}$$

Thus

$$\nabla_{\mathbf{c}_i} M(\mathbf{c}) = \mathbf{c}_i - \overline{\mathbf{c}}. \tag{4.3}$$

对于 $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$，令 $\overline{\mathbf{w}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{w}_i$。环境海森矩阵为常数：

$$D^2M(\mathbf{c})[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \sum_{i=1}^{n}\langle \mathbf{v}_i - \overline{\mathbf{v}}, \mathbf{w}_i - \overline{\mathbf{w}}\rangle. \tag{4.4}$$

特别地，

$$D^2M(\mathbf{c})[\mathbf{v}, \mathbf{v}] = \sum_{i=1}^{n}\|\mathbf{v}_i - \overline{\mathbf{v}}\|^2 = \frac{1}{n}\sum_{i<j}\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|^2. \tag{4.5}$$

4.2. 质心接触平衡。 假设 F_E 在 $\mathbf{c}$ 的某个环境邻域内具有常秩，其中 $E \subseteq E(\mathbf{c})$，并假设 $\mathbf{c}$ 是 M 在所得局部等式流形 $F_E^{-1}(0)$ 上的限制的临界点。那么，M 的微分属于活跃接触微分张成的空间。因此，存在实乘子 λ_{ij}，它们不一定非负，使得

$$\nabla M(\mathbf{c}) = \sum_{\{i,j\}\in E}\lambda_{ij}\nabla g_{ij}(\mathbf{c}). \tag{4.6}$$

在每个顶点处，这就是

$$\mathbf{c}_i - \overline{\mathbf{c}} = \sum_{j:\{i,j\}\in E}\lambda_{ij}(\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j), \qquad \lambda_{ij} = \lambda_{ji}. \tag{4.7}$$

我们将（4.7）称为质心接触平衡。

对于环境极小性，系数可以选为非负数，而且这一结论不需要非线性约束资格条件。

命题 4.1。 若 $\mathbf{c}$ 是 M 在 D_n 上的环境局部极小值点，则

$$DM(\mathbf{c})[\mathbf{v}] \geq 0 \qquad \textit{for every } \mathbf{v} \in \mathbf{Adm}(\mathbf{c}). \tag{4.8}$$

等价地，存在乘子

$$\lambda_{ij} \geq 0, \qquad \{i,j\} \in E(\mathbf{c}),$$

满足质心接触平衡（4.7）。

证明。根据引理 2.5，每个 $\mathbf{v} \in$ **可容许集(c)** 都会生成一条可行射线 $\mathbf{c} + t\mathbf{v}$，对充分小的 $t \geq 0$ 均成立。因此，局部极小性给出（4.8）。

锥 **可容许集(c)** 是多面体锥。有限维极锥恒等式（等价地，Farkas 引理）给出

$$\{\ell : \ell(\mathbf{v}) \geq 0 \text{ for every } \mathbf{v} \in \mathbf{Adm}(\mathbf{c})\} = \operatorname{cone}\{Dg_{ij}(\mathbf{c}) : \{i,j\} \in E(\mathbf{c})\};$$

例如，参见 [14, 第 6] 章。将此恒等式应用于 $DM(\mathbf{c})$ 可得到非负乘子和 (4.7)。□

4.3. 实现的接触流形上的内在海森矩阵。 即使等式集是光滑的，完整的活动接触系统也可能存在冗余。因此，内在二阶导数必须根据限制目标函数本身定义，而不能根据任意的乘子表示定义。

定义 4.2。 设 $N \subset (\mathbb{R}^2)^n$ 是一个光滑子流形，令 $\mathbf{c} \in N$，并假设

$$d(M|_N)(\mathbf{c}) = 0.$$

选取一个光滑的局部参数化

$$\phi : U \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow N, \qquad \phi(0) = \mathbf{c},$$

其在 0 处的导数是到 $T_{\mathbf{c}}N$ 上的一个同构。对于

$$\mathbf{v} = D\phi(0)\xi, \qquad \mathbf{w} = D\phi(0)\eta,$$

定义

$$\operatorname{Hess}_N M(\mathbf{c})[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = D^2(M \circ \phi)(0)[\xi, \eta]. \tag{4.9}$$

引理 4.3。 该 定义 *4.2* 中的双线性形式与所选的局部参数化无关 .

证明。 设 ψ 是另一个局部参数化。两个坐标系之间的过渡映射是一个局部微分同胚。经过变量替换后，二阶导数会多出一项，该项涉及 $M|_N$ 的一阶导数。该一阶导数在 $\mathbf{c}$ 处为零，因此新增项也为零。因此，两个坐标表达式在$T_{\mathbf{c}}N$上定义了同一个双线性形式。□

命题 4. **4.** 设 $N \subset (\mathbb{R}^2)^n$ 在 $\mathbf{c}$ 附近由相互独立的光滑方程局部定义 *ns*

$$h_1 = \cdots = h_r = 0$$

and

$$dM(\mathbf{c}) = \sum_{a=1}^{r} \mu_a \, dh_a(\mathbf{c})$$

作为 $(\mathbb{R}^2)^n$ 上的余向量。于是，对于 $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{c}}N$，

$$\operatorname{Hess}_N M(\mathbf{c})[\mathbf{v}, \mathbf{v}] = D^2 M(\mathbf{c})[\mathbf{v}, \mathbf{v}] - \sum_{a=1}^{r} \mu_a D^2 h_a(\mathbf{c})[\mathbf{v}, \mathbf{v}]. \tag{4.10}$$

证明。 设 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$ 是一条光滑曲线，且

$$\gamma(0) = \mathbf{c}, \qquad \gamma'(0) = \mathbf{v}.$$

由于 $h_a(\gamma(t)) = 0$,

$$dh_a(\mathbf{c})[\gamma''(0)] = -D^2 h_a(\mathbf{c})[\mathbf{v}, \mathbf{v}].$$

将 $M(\gamma(t))$ 求两次导，得到

$$\frac{d^2}{dt^2} M(\gamma(t))\Big|_{t=0} = D^2 M(\mathbf{c})[\mathbf{v}, \mathbf{v}] + dM(\mathbf{c})[\gamma''(0)].$$

代入

$$dM(\mathbf{c}) = \sum_{a=1}^{r} \mu_a \, dh_a(\mathbf{c})$$

并使用前面的恒等式。由此得到 (4.10)。 □

注 4.5（冗余的活跃系统）。 当活动接触映射在某个环境邻域内具有常秩时，可以选取活跃接触方程的一个局部独立子族，并使用命题 4.4。如果完整的活动接触系统存在冗余，则未经证明乘子独立性，不得将完整系统的任意乘子向量代入拉格朗日 Hessian。因此，经验证的计算采用以下任一方式：

(i) 实际实现的接触流形的经验证局部参数化；或 (ii) 独立局部定义子系统。

这一约定既适用于正则冗余系统，也适用于奇异秩片。在奇异秩片上，选项 (ii) 要求验证所选方程在局部定义了实际实现的接触流形。

假设 N 在临界点 $\mathbf{c}$ 附近由独立接触子系统 E_0 局部定义。选择乘子 λ_{ij}，使得 (4.6) 对 $E = E_0$ 成立。对于 $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{c}}N$，内在海森矩阵满足

$$\operatorname{Hess}_N M(\mathbf{c})[\mathbf{v},\mathbf{v}] = \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{v}_i - \overline{\mathbf{v}}\|^2 - \sum_{\{i,j\}\in E_0} \lambda_{ij}\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|^2. \tag{4.11}$$

其中 E_0 是所选的独立局部定义子系统。

引理 4.6。 设 N 是经过 $\mathbf{c}$ 的实现的接触流形，并假设

$$d(M|_N)(\mathbf{c}) = 0.$$

如果存在一个切向量 $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{c}}N$ 使得

$$\operatorname{Hess}_N M(\mathbf{c})[\mathbf{v},\mathbf{v}] < 0,$$

那么 $\mathbf{c}$ i s 不是 M 在 N上的局部极小点，因此也不是 D_n上的全局最小值构型 .

证明。 为 N 选取一个局部坐标图，并用坐标向量表示$\mathbf{v}$ 。普通二阶导数检验给出一条经过$\mathbf{c}$的 N 中的光滑曲线，沿该曲线 M 递减。□

5. 接触叶障碍与局部极小值判据

5.1. 环境定向叶障碍。 若一个顶点 i恰有一个接触邻点，则它是接触叶 。

引理 5.1。 设 $\mathbf{c} \in D_n$，并假设 i 是一个接触叶，其唯一邻点为 j。若$\mathbf{c}$ 是 M的环境局部极小值点，则存在 $\alpha \geq 0$ 使得

$$\mathbf{c}_i - \overline{\mathbf{c}} = \alpha(\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j). \tag{5.1}$$

等价地，质心位于从叶中心出发、指向其接触邻点的射线上。

若(5.1) 不成立，则存在一个可行一阶方向$\mathbf{v} \in$ **可容许集**$(\mathbf{c})$，满足

$$DM(\mathbf{c})[\mathbf{v}] < 0.$$

证明。令

$$p = \mathbf{c}_i - \overline{\mathbf{c}}, \qquad a = \mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j.$$

对于 $w \in \mathbb{R}^2$，定义一个支撑在叶上的速度为

$$\mathbf{v}_i = w, \qquad \mathbf{v}_k = 0 \quad (k \neq i).$$

涉及 i 的唯一有效不等式给出

$$Dg_{ij}(\mathbf{c})[\mathbf{v}] = \langle a, w\rangle.$$

因此，恰当时 $\mathbf{v}$ ∈**可容许集(c)**

$$\langle a, w\rangle \geq 0.$$

一阶变分为

$$DM(\mathbf{c})[\mathbf{v}] = \langle p, w\rangle.$$

条件

$$\langle p, w\rangle \geq 0 \quad \text{whenever} \quad \langle a, w\rangle \geq 0$$

当且仅当.....成立

$$p \in \mathbb{R}_{\geq 0} a.$$

这正是 (5.1)。若不成立，则将 p 与射线 $\mathbb{R}_{\geq 0}a$ 分离，可得一个可容许的 w，使得

$$\langle a, w\rangle \geq 0, \qquad \langle p, w\rangle < 0.$$

□

引理 5.2. 设$\mathbf{c} \in D_n$ 是 M 的一个环境局部极小值点，并设 i 是一个接触叶，其唯一邻点为 j。记

$$\mathbf{c}_i - \overline{\mathbf{c}} = \alpha(\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j), \qquad \alpha \geq 0,$$

如引理 *5.1* 中所示。则

$$0 \leq \alpha \leq \frac{n-1}{n}.$$

证明。令

$$a = \mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j,$$

使得 $\|a\| = 2$，并仅绕其接触邻点旋转该叶中心：

$$\mathbf{c}_i(t) = \mathbf{c}_j + Q_t a, \qquad \mathbf{c}_k(t) = \mathbf{c}_k \quad (k \neq i).$$

当 $|t|$ 充分小时，这是一条可行曲线。与 i 相接的唯一活跃接触保持不变，其他所有活跃接触均保持不变，并且所有非活跃对都保持正松弛。

在 $t = 0$ 处，

$$\mathbf{c}_i'(0) = Ja, \qquad \mathbf{c}_i''(0) = -a.$$

一阶导数为零：

$$\frac{d}{dt} M(\mathbf{c}(t))\Big|_{t=0} = \langle \mathbf{c}_i - \overline{\mathbf{c}}, Ja\rangle = \alpha\langle a, Ja\rangle = 0.$$

利用（4.5），

$$D^2 M(\mathbf{c})[\mathbf{c}'(0), \mathbf{c}'(0)] = \frac{n-1}{n}\|a\|^2,$$

而

$$DM(\mathbf{c})[\mathbf{c}''(0)] = -\alpha\|a\|^2.$$

因此

$$\frac{d^2}{dt^2} M(\mathbf{c}(t))\Big|_{t=0} = \|a\|^2 \left(\frac{n-1}{n} - \alpha\right).$$

环境局部极小性迫使该量为非负数，因此

$$\alpha \leq \frac{n-1}{n}.$$

□

注 5.3。 将式 (5.1) 与质心接触平衡 (4.7) 进行比较，由于顶点 i 的度为一，该和可化为单项，而标量 α 在唯一叶边上恒等于平衡接触乘子 λ_{ij} 。引理 5.2 强化了环境局部极小点处的一阶射线条件：由于

$$0 \leq \alpha \leq \frac{n-1}{n} < 1,$$

质心位于从叶中心指向其接触邻点的闭线段上，且严格位于该邻点之前。

5.2. **平凡临界锥判据**。定义临界锥

$$\mathbf{Adm}_M(\mathbf{c}) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{Adm}(\mathbf{c}) : DM(\mathbf{c})[\mathbf{v}] = 0\}. \tag{5.2}$$

定理 5.4. 设$\mathbf{c} \in D_n$, $n \geq 2$. 假设

$$DM(\mathbf{c})[\mathbf{v}] \geq 0 \qquad \textit{for every } \mathbf{v} \in \mathbf{Adm}(\mathbf{c}), \tag{5.3}$$

and

$$\mathbf{Adm}_M(\mathbf{c}) \cap R(\mathbf{c})^{\perp} = \{0\}. \tag{5.4}$$

那么$\mathbf{c}$ 是 M 在保向欧几里得运动下模去取商后的环境严格局部极小值。不需要约束资格条件。

证明。 转到切片

$$\mathcal{S}_{\mathbf{c}} = \mathbf{c} + R(\mathbf{c})^{\perp}.$$

Supp设切片上的严格局部极小性不成立。那么存在点 $\mathbf{c}^{(m)} \neq$ $\mathbf{c}$

$$\mathbf{c}^{(m)} \in \mathcal{D}_n \cap \mathcal{S}_{\mathbf{c}}$$

使得

$$\mathbf{c}^{(m)} \longrightarrow \mathbf{c}, \qquad M(\mathbf{c}^{(m)}) \leq M(\mathbf{c}).$$

Set

$$t_m = \|\mathbf{c}^{(m)} - \mathbf{c}\|, \qquad \mathbf{w}^{(m)} = \frac{\mathbf{c}^{(m)} - \mathbf{c}}{t_m}.$$

取一个子序列后,

$$\mathbf{w}^{(m)} \longrightarrow \mathbf{w}, \qquad \|\mathbf{w}\| = 1.$$

由于该序列位于仿射切片中,

$$\mathbf{w} \in R(\mathbf{c})^{\perp}.$$

可行性给出

$$\mathbf{w} \in T_{\mathcal{D}_n}(\mathbf{c}) = \mathbf{Adm}(\mathbf{c}).$$

泰勒展开给出

$$M(\mathbf{c}^{(m)}) = M(\mathbf{c}) + t_m DM(\mathbf{c})[\mathbf{w}^{(m)}] + O(t_m^2).$$

由于 $M(\mathbf{c}^{(m)}) \leq M(\mathbf{c})$, 两边除以 t_m并取极限:

$$DM(\mathbf{c})[\mathbf{w}] \leq 0.$$

一阶条件 (5.3) 给出等式。因此

$$\mathbf{w} \in \mathbf{Adm}_M(\mathbf{c}) \cap R(\mathbf{c})^{\perp},$$

这与 (5.4) 和 $\|\mathbf{w}\| = 1$ 矛盾。

因此，$\mathbf{c}$ 是该切片上的严格局部极小值。根据引理 3.3，模去保向欧几里得运动后的结论成立。□

推论 5.5。 设$\mathbf{c} \in D_n$, $n \geq 2$为滚动刚性。假设存在严格为正的乘子

$$\lambda_{ij} > 0, \qquad \{i,j\} \in E(\mathbf{c}),$$

满足质心接触平衡

$$\mathbf{c}_i - \overline{\mathbf{c}} = \sum_{j:\{i,j\}\in E(\mathbf{c})} \lambda_{ij}(\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j)$$

在每个顶点处。则 $\mathbf{c}$ 是 M 模去保向欧几里得运动后的环境严格局部极小值。

证明。 对于每个 $\mathbf{v}$ $\in$**可容许集(c)**，平衡方程给出

$$DM(\mathbf{c})[\mathbf{v}] = \sum_{\{i,j\}\in E(\mathbf{c})} \lambda_{ij} Dg_{ij}(\mathbf{c})[\mathbf{v}] \geq 0.$$

若等号成立，则每个乘子的严格正性迫使

$$Dg_{ij}(\mathbf{c})[\mathbf{v}] = 0 \qquad \text{for every } \{i,j\} \in E(\mathbf{c}).$$

因此

$$\mathbf{v} \in \mathbf{Roll}(\mathbf{c}) = R(\mathbf{c}).$$

因此

$$\mathbf{Adm}_M(\mathbf{c}) \cap R(\mathbf{c})^{\perp} = \{0\}.$$

应用定理 5.4。 □

5.3. **双接触附着下的刚性**。

引理 5.6. 设三个中心构成一个非共线三角形，其三条边均为实际接触。则该接触框架是滚动刚性的。

证明。 在六维速度空间中有三个接触方程。它们的梯度线性无关。事实上，若三个边梯度的某个线性组合为零，那么在一个顶点处，两条相邻边向量的线性组合等于零。由于这两条向量线性无关，相应的两个系数必为零；因此第三个系数也为零。

因此，接触雅可比矩阵的秩为三，其核的维数为三。由于三维刚体运动空间包含于该核中，因此这两个空间相等。□

引理 5.7。 设中心上的一个实现接触框架

$$\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m$$

是滚动刚性的。添加一个新中心 $\mathbf{c}_q$ ，使其与两个旧中心 $\mathbf{c}_i$、$\mathbf{c}_j$接触。 *If*

$$\mathbf{c}_q - \mathbf{c}_i \qquad and \qquad \mathbf{c}_q - \mathbf{c}_j$$

线性无关，则扩展框架是滚动刚性的。增加实际接触仍能保持这一结论。

证明。 设$\mathbf{v}$ 是扩展框架的滚动速度。其在旧顶点上的限制是一个无穷小欧氏运动，因此存在 $a \in \mathbb{R}^2$ 和 $\omega \in \mathbb{R}$ ，使得

$$\mathbf{v}_k = a + \omega J \mathbf{c}_k \qquad (1 \leq k \leq m).$$

Set

$$w = \mathbf{v}_q - (a + \omega J \mathbf{c}_q).$$

从所有速度中减去同一个无穷小欧氏运动后，新的滚动方程变为

$$\langle \mathbf{c}_q - \mathbf{c}_i, w\rangle = 0, \qquad \langle \mathbf{c}_q - \mathbf{c}_j, w\rangle = 0.$$

两个接触方向线性独立，因此 $w = 0$。由此，新的速度也与同一个无穷小欧氏运动一致。额外接触只会增加滚动方程，不会扩大滚动空间。□

备注 5.8。 两个接触附着只会传递刚性。增加一个中心会改变质心载荷，因此必须针对扩大的构型重新求解接触平衡方程。

6. Graham 和 Sloane 的五圆盘解及其局部极小性

我们以 Graham 和 Sloane 的五圆盘构型为例，开始探讨局部理论的应用。本节计算其目标值，并证明其具有严格局部极小性。第 8 节将通过对已实现接触图的清单以及后续的精确分析，建立无约束的全局下界和唯一性。

考虑质心归一化构型

$$\begin{aligned} &\mathbf{c}_1 = (-2, -2\sqrt{3}/5), \quad \mathbf{c}_2 = (0, -2\sqrt{3}/5), \quad \mathbf{c}_3 = (2, -2\sqrt{3}/5), \\ &\mathbf{c}_4 = (-1, 3\sqrt{3}/5), \qquad \mathbf{c}_5 = (1, 3\sqrt{3}/5). \end{aligned} \tag{6.1}$$

其接触边集为

$$E_5 = \{12, 23, 45, 14, 24, 25, 35\}. \tag{6.2}$$

三个非边满足

$$\|\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_3\| = 4, \qquad \|\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_5\| = \|\mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_4\| = 2\sqrt{3}.$$

因此，(6.2) 是精确的实现接触边集。

由于质心为零，

$$\sum_{i=1}^{5} \|\mathbf{c}_i\|^2 = \frac{68}{5},$$

因此

$$M(\mathbf{c}) = \frac{34}{5}. \tag{6.3}$$

命题 6.1。 五圆盘接触框架是滚动刚性的。其七个活跃接触梯度线性无关。质心接触平衡的解为

$$\lambda_{12} = \lambda_{23} = \frac{4}{5}, \qquad \lambda_{45} = \frac{3}{5},$$

and

$$\lambda_{14} = \lambda_{35} = \frac{2}{5}, \qquad \lambda_{24} = \lambda_{25} = \frac{1}{5}.$$

所有乘子均严格为正。

证明。 顶点 1、2、4 构成一个非共线接触三角形，并根据引理 5.6 具有滚动刚性。顶点 5 沿两个独立接触方向连接到顶点 2、4。随后，顶点 3 沿两个独立方向连接到顶点 2、5。两次应用引理 5.7 可得

$$\mathbf{Roll}(\mathbf{c}) = R(\mathbf{c}).$$

环境速度空间的维数为十，而 $R(\mathbf{c})$ 的维数为三。因此，接触雅可比矩阵的秩为七，等于活跃接触的数量，所以活跃梯度线性无关。

将上面给出的乘子和坐标 (6.1) 代入

$$\mathbf{c}_i = \sum_{j:\{i,j\}\in E_5} \lambda_{ij}(\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j)$$

可精确验证这五个顶点方程。 □

推论 6.2。 构型 (6.1)是 M 在保持定向的欧几里得运动下的环境严格局部极小值。

证明。 应用推论 5.5。 □

7. 六圆盘花及其局部极小性

现在我们计算 $M = 29/3$ 六圆盘花，并证明其严格局部极小性。第 8 节将确立全局下界和唯一性。。

考虑

$$\begin{aligned} &\mathbf{c}_1 = (0,0), \qquad \mathbf{c}_2 = (2,0), \qquad \mathbf{c}_3 = (1,\sqrt{3}),\\ &\mathbf{c}_4 = (-1,\sqrt{3}), \quad \mathbf{c}_5 = (-2,0), \quad \mathbf{c}_6 = (-1,-\sqrt{3}). \end{aligned} \tag{7.1}$$

其质心为

$$\overline{\mathbf{c}} = \left(-\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right).$$

其精确接触边集为

$$E_6 = \{12, 13, 14, 15, 16, 23, 34, 45, 56\}. \tag{7.2}$$

每个非边距离均为 $2\sqrt{3}$ 或 4，因此严格大于 2。

此外，

$$\sum_{i=1}^{6} \|\mathbf{c}_i\|^2 = 20, \qquad \|\overline{\mathbf{c}}\|^2 = \frac{1}{9}.$$

因此

$$M(\mathbf{c}) = \frac{1}{2}\left(20 - 6\cdot\frac{1}{9}\right) = \frac{29}{3}. \tag{7.3}$$

命题 7.1。 六圆盘接触框架是滚动刚性的。其九个活跃接触梯度线性无关。质心接触平衡的解为

$$\lambda_{12} = 1, \quad \lambda_{13} = \frac{2}{3}, \quad \lambda_{14} = \frac{1}{2}, \quad \lambda_{15} = \frac{2}{3}, \quad \lambda_{16} = 1,$$

and

$$\lambda_{23} = \frac{1}{6}, \quad \lambda_{34} = \frac{1}{3}, \quad \lambda_{45} = \frac{1}{3}, \quad \lambda_{56} = \frac{1}{6}.$$

所有乘子均严格为正。

证明。 顶点 1、2、3 构成一个非共线接触三角形。将顶点 4 连接到顶点 1、3，再将顶点 5 连接到顶点 1 、 4，最后将顶点 6 连接到顶点 1 、 5。每一步中，两个新的接触方向都是线性无关的。由引理 5.6 和 5.7 可得

$$\mathbf{Roll}(\mathbf{c}) = R(\mathbf{c}).$$

环境速度空间的维数为十二，滚动空间的维数为三。因此

$$\operatorname{rank} DF_{E_6}(\mathbf{c}) = 9,$$

等于活跃接触的数量，因此活跃梯度线性无关。将所示乘子代入

$$\mathbf{c}_i - \overline{\mathbf{c}} = \sum_{j:\{i,j\}\in E_6} \lambda_{ij}(\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j)$$

即可准确验证每个顶点方程。 □

推论 7.2。 构型 (7.1)在 M 取向保持欧几里得运动下是环境严格局部极小值。

证明。 应用推论 5.5。 □

8. 通过接触图进行全局分类

M 的五圆盘和六圆盘候选值分别为 $34/5$ 和 $29/3$。我们将这些比较值记为 U_5 和 U_6。现在我们证明全局下界并分类等号情形。下面的几何约化给出了有限个接触图。随后，代数论证和区间搜索涵盖了该列表中的每一个可能的环境局部极小值。补充说明包含详细的搜索论证、候选分析和计算记录。

8.1. 极小值解的结构性质。 根据引理 2.1，全局最小值构型存在，且其二阶矩至多为 U_n。现在我们证明，只需考虑具有连通外平面接触图的堆积。

引理 8.1 (约化为连通接触图)。 对于 $n \in \{5,6\}$，一个不连通的全局最小值构型可以在不改变其二阶矩的情况下移动为具有更少接触分支的堆积。因此，存在一个连通的全局最小值构型。

证明。 设 $\mathbf{c}$ 是一个非连通的全局最小值构型，因此 $M(\mathbf{c}) \le U_n$。由于不同分量之间没有接触，对每个接触分量进行任意方向的小幅平移都是可行的。由梯度公式 (4.3)，这些平移下的驻定性要求每个分量质心都等于 $\overline{\mathbf{c}}$。将它们的共同质心置于原点。绕原点旋转一个分量，不会改变其内部接触、总质心或二阶矩。

选取半径 r最小的中心 p，并令 C 为其所在分量。假设将 C旋转整周不会产生新的接触。根据连续性，C 与其他分量之间的所有距离始终大于二。对于半径为 $s \ge r$的某个外部中心，它与旋转中心 p之间的最小距离为 $s - r$。因此，每个外部中心的半径都大于 $r + 2$。外部中心至少有两个：否则，唯一的外部中心会在原点构成一个单点分量，这与上述不等式矛盾。

除 p外，每个半径为 s的中心都满足 $s \ge \max\{r,\ 2 - r\} \ge |2 - r|$，这是由$r$ 的极小性以及与 p的分离性所致。至少有两个这样的中心位于 C 外，因此它们的半径超过 $r + 2$。

因此，

$$M > \frac{1}{2}\left[r^2 + (n-3)(2-r)^2 + 2(r+2)^2\right] = \begin{cases} 8 + \dfrac{5}{2}r^2, & n = 5, \\ \dfrac{29}{3} + 3\left(r - \dfrac{1}{3}\right)^2, & n = 6. \end{cases}$$

无论哪种情况，这都与 $M \le U_n$ 矛盾。

因此必然会出现新的接触。请在第一次出现时停止。所有先前的接触都得以保留，因此所得堆积具有更少的接触分量，并再次成为全局最小值构型。重复这一过程即可得到一个连通的全局最小值构型。□

引理 8.2（归约为外平面图）。 至多六个圆盘的每个接触图都是外平面图。

证明。 将接触边画成直线段。没有任何中心位于一条边的内部，因为它到任一端点的距离都会小于二。这也排除了共线重叠。如果两条独立的边 ab和 cd 相交，则通过它们的交点应用严格三角不等式可得

$$\|a-c\| + \|b-d\| < \|a-b\| + \|c-d\| = 4,$$

这与圆盘分离相矛盾。因此，该图形是一个平面嵌入。

假设中心 x 不在无界面的边界上。那么，简单接触圈 v_1、.....、v_m 围住 x，下标按循环顺序排列。在每个三角形 xv_iv_{i+1}中，边 v_iv_{i+1}的长度为二，其余边的长度至少为二。因此， x 处的角至多为$\pi/3$；若三点共线，该角为零。

设 Δ_i 为沿有向边 v_iv_{i+1}绕 x 的辐角变化。那么 $|\Delta_i| \le \pi/3$。由于该圈绕 x一周，

$$2\pi = \left|\sum_{i=1}^{m} \Delta_i\right| \le \sum_{i=1}^{m} |\Delta_i| \le \frac{m\pi}{3}.$$

因此 $m \ge 6$，这意味着至少需要七个中心（包括 x），矛盾。因此，每个顶点都在无界面的边界上。□

8.2. **有限图枚举**。前述引理将搜索范围缩小到连通外平面接触图。我们使用 `plantri` 生成具有五个和六个顶点的连通平面图，并使用 `shortg` 去除同构重复项 [4, 13]。所得列表分别包含 20 个和 99 个图。经过外平面性筛选后，分别剩下 13 个和 46 个（补充说明，第 2 节）。随后在几何分析中施加接触方程和严格非接触不等式。

表1根据验证路径对各图进行分类。目标图通过代数方法验证，一个六圆盘图则通过其临界族进行分析。其余所有图均采用相同的区间搜索。该搜索结合几何检验和接触平衡检验，并在适用时加入针对叶节点和桥的附加条件，详见第8.3节。

8.3. **区间搜索与覆盖**。区间搜索检验二阶矩局部极小所需的必要条件。它排除角度盒，或保留孤立根以供候选分析，分别处理有叶节点和无叶节点的情况。

对于接触图 $G = (V,\ E)$，选择一棵有根生成树，并将其第一条接触边的中心固定在 (0, 0) 和 (2, 0) 处。对于包含叶节点的图，第一条边与标签最低的

表1. 按验证路径划分连通外平面接触图类。每个条目代表一个图类的数量。

路径	$n = 5$	$n = 6$
区间搜索	12	44
通过代数方法验证的目标图	1	1
临界族	0	1
连通类总数	13	46

叶节点相接。否则，它就是存储的第一条接触边。按标签顺序以广度优先方式完成该树。对于其余每条父子边，其方向 θ 确定下一个中心的位置：

$$\mathbf{c}_j = \mathbf{c}_i + 2(\cos\theta, \sin\theta).$$

对于 n 个圆盘，这样会留下 $n-2$ 个自由角，并使树边连接的每一对圆盘之间的距离保持为 2。为每个自由角选择一个值，即可确定所有中心位置。

我们通过为每个自由角指定一个区间来对这些选择进行分组。角度盒 包含这些区间内所有值的组合。初始区间为每个自由角覆盖一个整周，但其中一个自由角除外；根据固定边上的反射，将该角限制在一个半周内。由此得到的角度盒覆盖了等距变换意义下的每一种实现。对于带有叶节点的图，进一步利用图对称性缩小定义域，同时保持覆盖范围（补充说明，第 4.4 节）。

区间算术利用带向外舍入 [10] 的 512 位 `Arb`算术，一次性界定一个角度盒内所有组合的表达式。这些界限可以排除整个角度盒。细分可以在保持覆盖范围的同时，收紧无法确定的界限。

对于每个角度盒，使用 g_{ij} 区间算术计算树以外每个接触以及每个非边的值。接触要求 $g_{ij} = 0$，而非边要求 $g_{ij} > 0$。如果接触区间不包含零，或分离区间没有正值，则丢弃该角度盒。每次丢弃都会结束对该角度盒的检查。

当图中存在叶节点时，检验其平衡状态以及必要的上界 $0 \le \lambda_{ij} \le (n-1)/n$（引理 5.1 和 5.2）。对于每座桥，检验其两侧的平衡状态，以及在旋转其中一个分量时的二次变分。这些检验直接使用中心坐标。在适用时，还要使用下文所述的 Krawczyk排除判据检验桥方程（补充说明，第 4 节和第 6.2 节）。

然后，根据命题 4.1 中的接触平衡方程检验保留下来的盒：

$$DF_G(\mathbf{c})^T \boldsymbol{\lambda} = \nabla M(\mathbf{c}), \qquad \boldsymbol{\lambda} \ge 0.$$

对所有坐标方程应用区间高斯消元，包括每个接触乘子。每个主元都必须排除零。若无法找到这样的主元，则进行盒细分。如果某个剩余行的系数全为零，而右端项排除零，则排除该盒。否则，通过回代得到每个乘子的上界。

保留每个乘子区间的非负部分，并在适当时应用叶片上界。空区间将排除该盒。利用保留的区间，计算

$$DF_G(\mathbf{c})^T \boldsymbol{\lambda} - \nabla M(\mathbf{c}), \qquad 2\sum_{e \in E} \lambda_e - M(\mathbf{c}).$$

在候选极小值处，这两个表达式都必须为零。如果任何分量排除了零，则舍弃该角度盒。二阶矩的等式可通过将顶点平衡方程与中心化位置配对，并利用接触距离得出。

在达到规定的细分深度后，每个保留下来的角度盒都会尝试进行根隔离。剩余的接触方程数量至多与自由角数量相同。当剩余的接触方程数量与自由角数量相等时，它们构成方阵系统。当方程数量较少时，在角度上加入二阶矩的驻定性条件，并为每个剩余接触设置一个乘子。树接触不产生任何贡献，因为它们的距离是常数。必要时，隔离盒会将角度盒与这些乘子的计算界限结合起来。

Krawczyk 检验计算该根盒的区间像 [11]。若区间像与根盒不相交，即可排除根。若区间像严格包含于根盒内部，则可证明存在唯一根。否则进行细分。隔离盒包含角度盒内所有可能的极小值所对应的角度和所需乘子，包括其边界。单独的桥接方程检验仅使用排除准则。

收缩唯一根包围，并验证严格非接触，然后将其保留为用于候选分析的**隔离盒**。隔离方程施加了规定的接触条件，但未施加严格非接触条件，因此一个根可能存在额外接触。若先前已验证的、存在额外接触的构型位于根盒内，则唯一性表明该根就是该构型。应将其归入具有更大接触图的情况（补充说明，第6.3节）。其他未能得出结论的分离检验则需进行细分。

待处理的盒保存在栈中。细分时，将最宽的角区间二等分，并添加两个闭子区间，以进行相同的检验。它们的并集保持了覆盖性。受操作限制而无法判定的盒保留为**未解决**。搜索完成要求每个盒都已被排除，或通过根隔离得到处理，且不存在未解决的盒。二阶矩的比较和二阶分析随后在候选分析中进行。

8.4. **候选分析**。 区间搜索分别完成了五个和六个圆盘的全部 12 个和 44 个指定图，且没有未解决的框。带有叶节点的 9 个和 33 个图均未保留候选项。其余搜索分别为五个圆盘保留了四个孤立框，为六个圆盘保留了七个孤立框。根据覆盖性和必要条件测试，区间搜索中指定图的每个可能极小值都由一个保留的根表示，视等距变换和重新标记为同一者（补充说明、命题 10.1 和第 10.2 节）。

每个孤立框都给出了中心化笛卡尔坐标和接触乘子的包围区间。阶数为 $|E|$ 的接触子式验证了引理 2.3 的秩假设。在严格非接触已得到确立的情况下，我们利用命题 4.4 和（4.11）计算内在海森矩阵

$$\operatorname{Hess}_N M(\mathbf{c})[\mathbf{v},\mathbf{v}] = \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{v}_i - \overline{\mathbf{v}}\|^2 - \sum_{\{i,j\}\in E} \lambda_{ij}\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|^2.$$

切向方向上的负值依据引理 4.6 排除了局部极小性。大于 U_n 的二阶矩排除了全局极小性。

全部 11 个保留盒所包围的根，其二阶矩都严格高于目标值。表 3 给出了适用于每个图的所有保留盒的界。表 2 记录了排除情况，并优先按负的内禀方向进行排除。其中的数值列统计的是盒的数量，这些盒不一定代表不同的几何类。保留盒数量为零，意味着搜索中没有具有该接触图的候选项；排除数量为零，则意味着没有盒被归入该原因。

`EElw` 和 `EQlw` 对应的保留根是滚动刚性的：其接触秩为九，因此没有可用于二阶检验的非欧几里得切向方向。

表 2. 按排除原因分类的保留角度盒。

n	Graph6	保留盒	负方向	二阶矩界
5	D`{	2	2	0
5	Dd[	1	1	0
5	DqK	1	1	0
6	EDZW	1	1	0
6	ETXW	1	1	0
6	EoSo	1	1	0
6	EoSw	1	1	0
6	EElw	2	0	2
6	EQlw	1	0	1
6	E@ro	0	0	0
6	E@rw	0	0	0
6	EPVW	0	0	0
6	E`NW	0	0	0
6	E`ow	0	0	0

表 3. 各图的每个保留盒均成立的界。 Q 是记录的切向测试向量的内禀二次型值。对于有两个盒子的图，显示 M 的较小下界，以及在可用时 Q的较大上界。小数值均从有理区间记录向外取整。短横线表示不存在内部切向方向。

n	Graph6	M下界	Q上界
5	D`{	7.99	-2.39
5	Dd[	6.98	-0.34
5	DqK	7.23	-4.87
6	EDZW	10.23	-0.60
6	EElw	9.99	—
6	EQlw	10.99	—
6	ETXW	11.46	-8.61
6	EoSo	11.99	-9.16
6	EoSw	11.50	-6.13

对 EPVW 的搜索发现了一个具有额外接触的根，属于 EQlw。测试盒中的代数见证和根的唯一性解释了这一边界情形，因此不留下接触图为 EPVW的候选项（补充说明，第6.3节）。

目标图 DR{ 和 EDZw 通过 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 中的计算进行分析。它们的 Graph6 顶点标签与（6.2）和（7.2）中的坐标标签不同。若 $p(i)$ 是对应于 Graph6 顶点 i的坐标标签，则

$$\begin{aligned} n = 5: &\quad (p(1), \dots, p(5)) = (1, 3, 4, 5, 2), \\ n = 6: &\quad (p(1), \dots, p(6)) = (2, 6, 4, 3, 5, 1). \end{aligned}$$

这些重新标记确定了接触边及其乘子。目标 EDZw与所搜索的图 EDZW 属于不同的图类。所有双圆附着分支均已列举：五个圆盘对应 4 个，六个圆盘对应 8 个。接触、严格非接触、全等和图自同构检查

为每个目标保留一个实现类。其 M、正乘子和完整接触秩均已得到验证（补充说明，第 8 节）。

六圆盘图 `E`dg` 具有一个完整的临界族，在该族上 $M = 11$。在其中每个构型处，都存在一个切向方向，其内禀二次变分为负，因此该族不包含环境局部极小值。其完整性在补充说明第 9 节中得到证明。

8.5. **全局分类**。 令 E(2) 表示平面的完整欧几里得等距变换群，令 S_n 表示圆盘标签的置换群。

定理 8.3（全局分类）。 对于每个 $\mathbf{c} \in D_5$, $M(\mathbf{c}) \geq 34/5$，等号仅在双行簇 （6.1）的$\mathrm{E}(2) \times S_5$ 轨道上成立。对于每个 $\mathbf{c} \in D_6$, $M(\mathbf{c}) \geq 29/3$，等号仅在缺邻花形构型 （7.1）的$\mathrm{E}(2) \times S_6$ 轨道上成立。

证明。 由引理 8.1，选取一个连通的全局最小值构型。根据引理 8.2，其接触图属于表1中的清单。临界族已被排除。分配给区间搜索的图上的每个可能极小值都位于一个保留的根盒中。对于每个这样的根，表 3 给出的下界表明 M 大于 U_n。因此，最小值构型必定具有目标图。分支枚举只留下一个实现类，其二阶矩为 U_n。

还需要排除非连通等号情形。根据推论 6.2 和 7.2，目标构型在模去欧几里得运动的意义下是环境严格局部极小值。若某个非连通堆积取得全局值，则连通性约化中的最后一次旋转会产生一列具有相同值的非连通堆积，并收敛到连通目标构型。它们不可能与目标构型全等，这与严格局部极小性矛盾。□

计算使用了 `DiskSecondMomentProof`，如有需要可提供。报告中的计数对应于归档运行 `20261029T063416Z-6281e07a4606`，该运行以 512 位精度针对两个至六个圆盘进行。归档记录了源代码修订版本、软件环境、复现参数、图输入、图约定、细分记录和候选分析。每次搜索均在没有未解决分支的情况下结束，并且每个保留的根都被排除为全局最小值构型。

致谢

在准备本文期间，我们使用了 OpenAI 的 ChatGPT 和 Anthropic 的 Claude，根据作者提出的问题和猜想来探索数学论证。通过这一互动，我们对初步的数学论证和证明策略进行了探索与完善，并考察了潜在的反对意见。相关协助包括以下活动：

- 为精确切锥公式（引理 2.5）、质心接触平衡（命题 4.1）以及局部极小性判据（定理 5.4 和推论 5.5）提出证明策略并探索替代方法。
- 探索处理冗余接触约束和二阶排除论证的方法。
- 提出涉及接触叶、例外构型和临界族的几何约化方法。
- 审视全局分类（定理 8.3），尤其关注接触图清单的完备性、边界情形，以及如何从局部分析过渡到不受限制的全局最优性。

•协助设计和审查计算程序，包括接触图枚举、根隔离、区间算术、搜索覆盖和候选项排除。

• 识别数学论证中可能存在的漏洞，提出修正建议，并协助进行文献检索、绘图、LaTeX 排版准备和编辑修订。

作者核查了纳入最终稿件的数学论证和计算结果，并对其内容承担全部责任。

参考文献

[1] L. Asimow 和 B. Roth，《图的刚性》，Trans. Amer. Math. Soc. 245 (1978), 279–289. [2] J. Ayala Hoffmann 和 F. Henry Vilaxa，《硬圆盘簇的内蕴几何》，arXiv: 2608 06513 [ ], . 2026 math.MG .[3] J. Ayala Hoffmann 和 F. Henry Vilaxa，DiskSecondMomentProof，版本 1.1.0，软件仓库，2026。可按要求提供。[4] G. Brinkmann 和 B. D. McKay，《平面图的快速生成》，MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 58 (2007), 323–357. [5] T. Y. Chow，《具有最小二阶矩的便士圆盘堆积》，Combinatorica 15 (1995), 151–158. [6] R. Connelly 和 W. Whiteley，《张拉整体框架的二阶刚性与预应力稳定性》，SIAM J. Discrete Math. 9 (1996), 453–491. [7] A. Donev、S. Torquato、F. H. Stillinger 和 R. Connelly，《用于检验硬球堆积是否堵塞的线性规划算法》，J. Comput. Phys. 197 (2004), 139–166. [8] R. L. Graham 和 N. J. A. Sloane，《便士圆盘堆积与二维码》，Discrete Comput. Geom. 5 (1990), 1–11.[9] H. Harborth，《问题664A的解答》，初等数学 29 (1974), 14–15. [10] F. Johansson，Arb：高效的任意精度中点半径区间算术，IEEE Trans. Comput. 66 (2017), 1281–1292.[11] R. Krawczyk，《带误差界的零点求解牛顿算法》，Computing 4 (1969), 187–201.[12] J. M. Lee，《光滑流形导论》，第二版，数学研究生教材 218，施普林格，2013。[13] B. D. McKay 和 A. Piperno，《实用图同构，II》，符号计算杂志 60 (2014), 94–112. [14] R. T. Rockafellar 和 R. J.-B. Wets，《变分分析》，Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 317，施普林格，1998。[15] B. Roth 和 W. Whiteley，《张拉整体框架》，Trans. Amer. Math. Soc. 265 (1981), 419–446.

塔拉帕卡大学，智利伊基克电子邮箱地址：
jayalhoff@gmail.com
塔拉帕卡大学，智利伊基克电子邮箱地址：
fabian.henry.vilaxa@alumnos.uta.cl