亏格二曲面的二十种三价德洛内类型的圆模式线性系统：秩、可行性与多胞体维数

Armando Rodado Amaris

中心 马会 量子软件与信息中心，悉尼科技大学，悉尼，新南威尔士州，澳大利亚 *lia*

arXiv:2611.29848v1 [math.GT] 23 Nov 2026

摘要

闭亏格二黎曼曲面的双曲椭圆商是一个带有六个锥点的双曲球面，锥角为 π。其德洛内三角剖分 T 对偶于二十种组合类型之一的三价 Voronoi 图 G 。对于每种类型，我们研究角度系统 $Ax = \mathbf{1},\ x \geq 0$，其中 A 是 T 的顶点–边关联矩阵，而 πx_e 是锥点处由与 e 对偶的沃罗诺伊边在锥点处所张的角，等价地说，是沿 e 相邻的两个外接圆的交角。我们证明，所有二十种类型的秩 $A = 6$ 均相同，其中包括三角剖分含有环的六种类型，因此仿射解空间始终具有 Teichmüller空间的维数。多胞体 $P = \{Ax = \mathbf{1},\ x \geq 0\}$ 的表现则有所不同。恰有十种类型的多胞体是六维的，即十种德劳内可实现的类型。对于九种类型，由于非负性迫使某些楔角为零，多胞体的维数为一、二或三；而对于特征为 (2, 2,2, 2, 8,8) 的类型，多胞体为空。我们证明，九种类型中的五种以及空类型从不作为德洛内三角剖分出现；其余四种则仅作为非三价德劳内分解的三角剖分出现。每个 P 的每个顶点都是半整数，与分数完美匹配多胞体的情况相同。对于十种满维类型，每个面 $x_e = 0$ 都位于一条允许进行怀特海德变换的边上，尽管反过来并不成立；该变换将两个多胞体的面对应起来，这些对应配对了十个胞在其自同构群作用下的面轨道。粘合的自由展开以约 7.093 的速率增长。所有有限结论均由独立程序检验，而秩、不可行性、强制坐标、维数、顶点及面均在 Lean 4 中得到验证。

关键词： 属二超椭圆曲面，德洛内三角剖分，Voronoi图，圆模式，关联矩阵，分数完美匹配多胞体，怀特海德变换，形式化验证*2020 MSC*： 30F60, 32G15, 52B05, 05C10, 52C26, 90C05

目录

1 引言 **2**

1.1 背景 .21.2 结果概要 .31.3 约定.

3

2 三价类型的角度系统 **3**

3 秩恒为六 **5**

电子邮件地址： armando@rodadolab.com (Armando Rodado Amaris)

4 可行性与多胞体的维数 **6**

5 算例 **6**
5.1 一个满维例子：立方体 .75.2 一个部分退化例子 .75.3 不可行例子 .7

6 完整结果表 **7**

7 多胞体的顶点 **9**

8 满维多胞体的面与 Whitehead移动粘合 **11**
8.1 面与强制分层的比较 .118.2 怀特海德变换粘合对应的面 .138.3 面粘合图 .138.4 从立方体生成顶点 .15

9 自同构与自由展开 **15**
9.1 粘合与自同构群相容 .159.2 自由展开 .169.3 与 Teichmüller空间的关系 .16

10 计算验证与形式化证明 **17**10.1 独立计算 .1710.2 Lean形式化 .17

11 讨论 **18**
11.1 一般性无法预测维数 .1811.2 强制坐标的含义 .1811.3 环 .1811.4 后续研究方向.18

12 结论 **18**

1. 引言

1.1. 背景

配套论文 [6] 对闭亏格二黎曼曲面 X的双曲椭圆商 $S = X/\iota$ 中六个二阶锥点所产生的三价德洛内图进行了分类。按嵌入图等价计，恰有两种一般类型（对偶三角剖分是简单的），它们由一个怀特海德移动轨道连接；在三价层级允许出现二边形后，恰有二十种类型 [6, 定理 8.1]。对于两种一般类型， [6, 第 6]节为德洛内三角剖分 T 附加了一个线性系统 $A_i x = \mathbf{1}$ ，其每条边对应一个变量，表示对偶沃罗诺伊边在锥点处所张的归一化角度；并证明该系统的秩为六 [6, 定理 6.9], ，即 Teichmüller空间 $\mathcal{T}_2$的实维数。

本文将这一构造扩展到全部二十种三价类型，并探讨秩计算能够以及不能够告诉我们什么。秩是关于仿射子空间 $\{x : \ A_i x = \mathbf{1}\}$本身的陈述。具有几何意义的对象是通过将该子空间与正交象限 $x \geq 0$ 相交而得到的多胞体，实际 Delaunay 三角剖分的楔角正位于其中。

我们的主要发现是，这两个问题的答案不同：全部二十种类型的仿射秩均为六，无一例外；而多胞体维数则变化显著，并且对于其中一种类型，多胞体为空。

1.2. 结果概要

第 2 节为一般三价类型建立角度系统，其中包括三角剖分含有环的六种类型（即一条边 G 两侧邻接同一个面的情形，见注 2.4）。第 3 节证明，对于全部二十种类型，秩$(A_i) = 6$ （定理 3.2）。第 4 节确定每个多胞体 P_i的维数：十种类型的维数为六，九种类型的维数为一、二或三，还有一种类型不可行（定理 4.3）；第 5 节逐一分析每种情形的一个例子，第 6 节给出完整表格及其几何意义（命题6.1）：十种满维类型恰好就是 [6], 中十种可实现为德劳内三角剖分的类型；六种类型根本不会作为德劳内三角剖分出现，另有四种仅作为细化非三价 Delaunay 分解的三角剖分出现。第 7 节证明，每个 P_i 的每个顶点都是半整数（定理 7.1），并以组合方式描述这些顶点。第 8 节确定十个满维多胞体的面，证明每个面都位于一条怀特海德可容许边上（定理 8.3），并表明怀特海德变换会将两个多胞体中相应的面对应起来（定理 8.4）；顶点可沿这些对应关系传递，除八个顶点外，其余顶点均由立方体的顶点生成（定理 8.9）。第 9 节表明，这些对应关系与自同构群相容，因此十个胞粘合成一个带有轨形胞腔的有限复形，并计算其自由树状展开的增长率。第 10 节介绍独立计算验证和 Lean 4 形式化，第 11 节讨论未决问题。

1.3. 约定

二十种类型的编号为 0、.....、19，如表 1 所示。该编号扩展了以下标签$g_0 = d_1$ （立方体，即八面体的对偶）， $g_1 = d_2$ （堆叠类型）以及 g_8， g_{19} （共享特征 （2、2、3、3、7、7）的两种类型）的 [6, 表 2]。类型的特征是 G的面度数按升序排列所得的列表，等价于 T的顶点度，其中环计数两次。

2. 三价类型的角系统

设 G 为二十种三价类型之一， $T = G^*$ 为其对偶：一个球面的三角剖分，具有六个顶点（锥点，每个对应于 G的一个面）、十二条边（每条对应于 G的一条边）以及八个三角形面（每个对应于 G的一个顶点）。对于一般类型， T 是简单的；一般而言，它可能具有重边和环。

定义 2.1 (角度系统**)**。 设 e 是 T 的一条边，其端点为 p、p' （可能为 $p = p'$），它邻接三角形 t、t'，这两个三角形的外心为 O、O'，也是与 e 对偶的 G 的沃罗诺伊边 e^* 的端点。令

$$x_e := \frac{1}{\pi} \cdot \angle_p(O, O'),$$

由 e^* 在 p 处张成的有向角。由于 t 和 t' 的两个外接圆都经过 p，圆心分别为 O、O'，因此 πx_e 也是它们在 p 处的交角，而 *Springborn* 内角为 $\theta_e^* = \pi(1 - x_e)$ *[6,* 第 *7* 节*.5]*。该类型的角度系统为

$$A_i x = \mathbf{1}, \qquad x \geq 0,$$

其中 A_i 是 T的 6×12 顶点–边关联矩阵，环在其顶点对应的行中贡献2 。

几何内容如下： [6, 命题 6。7]锥点 p 的沃罗诺伊胞以 p为星形中心，从 p 到其边界边端点的测地线将其分割成多个扇形，每个扇形对应于 T 在 p处的一条边的一个端点；这些扇形的楔角之和等于 π 的锥角， [6,命题 2。2], 即行方程 $\sum_{e\ni p} x_e = 1$。对于德洛内三角剖分，每个楔角均为非负；根据 [6, 命题 7，7] $x_e = 0$ 当且仅当 $O = O'$时，也就是说， $t \cup t'$ 的四个顶点共圆且沃罗诺伊边 e^* 的长度为零。因此，德洛内三角剖分的楔角属于多胞体

$$P_i := \{x \in \mathbb{R}^{12} : A_i x = \mathbf{1},\ x \geq 0\},$$

即 D_i 第 [6, 节中的多胞体；其中使用的界 $x \leq \mathbf{1}$ 可由行方程推出。如果 Voronoi图是三价的，则相邻三角形的四个锥点不会共圆，因此 x 位于相对内部 $\{x > 0\}$中。非三价 Delaunay 分解的 Delaunay三角剖分 （通过向其非三角形胞中添加对角线得到）仍给出P_i中的一个点，并且 $x_e = 0$ 恰好位于所添加的对角线上。

定义 2.2 （参考标记）。 对于每种类型，我们固定表 *1*中的标记：顶点1、……、8 按其端点的字典序排列（平行边按固定顺序排列），属于 G的边 e_1、……、 e_{12}，以及锥点 1、……、6。下面所有带标记的陈述（强制坐标、顶点列表、算例）均指此标记。

仅凭 G 的边列表无法确定类型：三对类型，即 $\{11, 12\}$、 $\{16, 17\}$ 和$\{18, 19\}$，具有不同嵌入但同构的底层抽象图，如 [6,第 8 节1] 和 [9, §71]（类型18和19 在我们的标记中甚至具有完全相同的边列表）所记录。因此，表1还列出了对于每条边 e_k，它所连接的两个锥点，即 k中的第 A_i列。

type	特征	e_k=uv/ab：边 uv，连接锥点 a， b
0	(4, 4, 4, 4, 4, 4)	e1=12/12, e2=13/13, e3=14/23, e4=25/14, e5=26/24, e6=35/15, e7=37/35, e8=46/26, e9=47/36 ， e10=58/45 ， e11=68/46 ， e12=78/56
1	(3, 3, 4, 4, 5, 5)	e1=12/12, e2=13/23, e3=14/13, e4=25/14, e5=26/24, e6=34/35, e7=37/25, e8=48/15, e9=56/46 ， e10=58/16 ， e11=67/26 ， e12=78/56
2	(2, 3, 4, 4, 5, 6)	e1=12/12, e2=13/13, e3=13/23, e4=24/24, e5=25/14, e6=36/12, e7=47/25, e8=48/45, e9=56/16 ， e10=58/46 ， e11=67/26 ， e12=78/56
3	(2, 3,3, 4, 6,6)	e1=12/12, e2=13/13, e3=13/23, e4=24/14, e5=25/24, e6=36/12, e7=45/45, e8=47/15, e9=58/25 ， e10=67/16 ， e11=68/26 ， e12=78/56
4	(3, 3, 3, 3, 6, 6)	e1=12/12, e2=13/23, e3=14/13, e4=25/24, e5=26/14, e6=34/35, e7=37/25, e8=47/15, e9=56/46 ， e10=58/26 ， e11=68/16 ， e12=78/12
5	(2, 2, 3, 5, 5, 7)	e1=12/12、e2=13/13、e3=13/23、e4=24/24、e5=25/14、e6=36/12、e7=47/25、e8=47/45、e9=56/16 ， e10=58/46 ， e11=68/26 ， e12=78/24
6	(2, 3, 3, 4, 5, 7)	e1=12/12, e2=13/13, e3=13/23, e4=24/24, e5=25/14, e6=35/12, e7=46/25, e8=47/45, e9=58/24 ， e10=67/56 ， e11=68/26 ， e12=78/46
7	(2, 2, 5, 5, 5, 5)	e1=12/12, e2=13/13, e3=13/23, e4=24/14, e5=25/24, e6=36/12, e7=46/15, e8=47/45, e9=56/25 ， e10=58/45 ， e11=78/56 ， e12=78/46
8	(2, 2, 3, 3, 7, 7)	e1=12/12, e2=13/13, e3=13/23, e4=24/14, e5=24/24, e6=35/12, e7=46/12, e8=57/25, e9=58/15 ， e10=67/26 ， e11=68/16 ， e12=78/56
9	(2、2、2、4、6、8)	e1=12/12、e2=13/23、e3=13/13、e4=24/14、e5=25/24、e6=36/12、e7=47/45、e8=47/15、e9=57/14 ， e10=58/12 ， e11=68/16 ， e12=68/26

type	特征	e_k=uv/ab: 连接锥点 a, b 的边 uv, 属于 G和 T
10	(2, 2, 2, 6, 6, 6)	e1=12/12, e2=13/13, e3=13/23, e4=24/14, e5=25/24, e6=36/12, e7=47/15, e8=47/45, e9=58/26 , e10=58/46 , e11=67/14 , e12=68/24
11	(2、2、4、4、4、8)	e1=12/12, e2=13/13, e3=13/23, e4=24/24, e5=25/14, e6=35/12, e7=46/25, e8=47/45, e9=57/24 , e10=68/26 , e11=68/56 , e12=78/25
12	(2、2、4、4、6、6)	e1=12/12, e2=13/13, e3=13/23, e4=24/24, e5=25/14, e6=35/12, e7=46/25, e8=47/45, e9=56/24 , e10=68/45 , e11=78/46 , e12=78/56
13	(2、3、3、3、4、9)	e1=12/12, e2=13/13, e3=13/23, e4=23/12, e5=24/11, e6=45/14, e7=46/14, e8=57/15, e9=58/45 , e10=67/16 , e11=68/46 , e12=78/56
14	(2, 2, 2, 2, 8, 8)	e1=12/12, e2=13/13, e3=13/23, e4=24/14, e5=24/24, e6=35/12, e7=46/12, e8=57/25, e9=57/15 , e10=68/16 , e11=68/26 , e12=78/12
15	(2, 2, 2, 3, 5, 10)	e1=12/12, e2=13/13, e3=13/23, e4=24/12, e5=25/11, e6=36/12, e7=46/14, e8=46/24, e9=57/15 , e10=58/15 , e11=78/56 , e12=78/16
16	(2,2, 3, 3, 4, 10)	e1=12/12、e2=13/13、e3=13/23、e4=24/14、e5=25/24、e6=35/12、e7=45/14、e8=46/11、e9=67/15 , e10=68/15 , e11=78/56 , e12=78/16
17	(2, 2, 3, 4, 5, 8)	e1=12/12, e2=13/23, e3=13/13, e4=24/24, e5=25/14, e6=34/12, e7=45/14, e8=56/44, e9=67/45 , e10=68/45 , e11=78/46 , e12=78/56
18	(2, 2, 2, 3, 3, 12)	e1=12/12, e2=13/23, e3=13/13, e4=23/12, e5=24/11, e6=45/14, e7=45/14, e8=56/11, e9=67/15 , e10=68/15 , e11=78/56 , e12=78/16
19	(2, 2, 3, 3, 7, 7)	e1=12/12, e2=13/13, e3=13/23, e4=23/12, e5=24/11, e6=45/14, e7=45/14, e8=56/44, e9=67/45 , e10=68/45 , e11=78/46 , e12=78/56

表1: 参考标记（定义 2.2）。对于边e_k, 条目 uv/ab 表示 e_k 连接顶点 u、v （属于G ），并将面 a、b （属于 G）分隔开，因此 A_i的第 k 列在 a 和 b 行中具有非零条目（当$a = b$ 时为单个条目 2， T的环）。类型8和19具有相同的特征，而类型18和19共享一个边列表；锥点将它们区分开来。

注记2.3 （ T的重边）。 如果 G 的两个面共享两条边， T 就有两条端点相同的边，而 A_i 有两列相等。每条边都有其自身的沃罗诺伊边、风筝形和楔角，因此这两个变量彼此独立。度为二的锥点（ G的一个双侧面，由 G的两条平行边界定）总是伴随着这样的一对边：它的两个三角形共享这两条边，并且有两条端点相同但彼此不同的第三边。

注 2.4 （ T的环）。 一条边 e^* 可以在 G 的两侧都与同一个面相邻（ G的桥），从而在对应的锥点 T 处形成一个环 e p。 e的两个端点都位于 p，因此p 的沃罗诺伊胞从两侧都与 e^* 相交，并包含由它截出的两个扇形。它们具有相同的角度 πx_e，因为 e 的风筝形关于 e^*（ e的垂直平分线）反射对称。系数2 在 A_i 中恰好记录了这两个扇形。二十种类型中有六种包含环（表2）。

3. 秩始终为六

引理 3.1 （关联矩阵的秩，含环）。 设 H 是一个连通图，允许有环和重边，其无符号顶点—边关联矩阵为 M，其中环在其顶点对应的行中贡献 2 。如果 H 含有环或奇圈，则 秩$(M) = |V$（H）$|$；如果 H 无环且为二部图，则 秩$(M) = |V$（H）$| - 1$。

证明。 左零向量 y 满足 $y_u + y_v = 0$ 对每条边 uv 均成立，其中 $u \neq v$；并且 $2y_v = 0$ 对 v 处的每个环 。如果 在 v_0处有一个环，那么 $y_{v_0} = 0$；连通性沿着边传播 $y \equiv 0$ ，因此 M 具有满行秩。若 H 无环，则这就是 [6, 引理 6。8], 其证明不需要图是简单图。 □

定理 3.2 （秩(A_i) $= 6$对全部二十种类型）。对于二十种三价类型中的每一种，秩(A_i) $=6$，因此仿射解空间 $\{x : \ A_i x = \mathbf{1}\}$ 的维数为 $12 - 6 = 6$。

证明。 T 是连通的，并且其任一面的边界都是长度为三的闭游走。奇数长度的闭游走包含一个环或一个奇圈，无论 T 是否为简单图。应用引理 3.1，其中 $H = T$。 □

这将 [6, 定理 6。9] 从两种一般类型扩展到了全部二十种类型。我们还通过对二十个秩逐一进行精确有理数计算，并在 Lean 中（第 10节）验证了这一点。

4. 可行性与多胞体的维数

定理 3.2 确定了仿射子空间 $\{x : \ A_i x = \mathbf{1}\}$，但 维数 P_i =维数 aff(P_i) 可能严格更小，这是因为非负性迫使某些坐标在整个 P_i上 都取常数值；而且 P_i 可能为空集。这两种情况都会发生。

定义 4.1 （强制坐标）。 若对每个 $x \in P_i$ 都有 $x_e = c$ ，则坐标 x_e 称为强制的 （取值为 c）。出现的强制取值为0和1。

命题4.2。 若 $P_i \neq \emptyset$ ，且 F 是强制坐标的集合，则

$$\dim P_i = 12 - \operatorname{rank}\left([\, A_i;\ (e_j)_{j \in F}\,]\right),$$

其中 e_j 是第 j 个标准基行向量。

证明。 多面体 $\{x : \ Ax = b, \quad x \geq 0\}$ 的仿射包由方程 $Ax = b$ 以及在整个多面体上均取等号的不等式（即其隐含等式） [10, 第 8 节.2] 所确定。这里，这些方程是 那些取值被强制为 0 的坐标对应的方程；锥点 p 处一个被强制为 1 的坐标会 迫使 p 处所有其他坐标都为 0，因此再加入 $x_j = 1$ 也不会改变该仿射空间。所示公式即为其维数。 □

我们通过线性规划（分别求每个 F 在 P_i 上的最大值和最小值）确定了每种类型的 x_e，并通过精确有理数运算以及 Lean 中的验证予以确认；在 Lean 中，每个强制取值都是一个定理（第 10 节）。

定理 4.3 （多胞体维数）。 二十种类型中，十种的维数 $P_i = 6$；九种的维数 $P_i \in \{1, 2, 3\}$，其强制坐标及数值见表 2；而特征为 （2，2、2，2、8、8）的类型具有 $P_i = \emptyset$。

证明见第 5–6节：每种情形各有一个推导示例，以及采用相同方法得到的完整表格。

5. 算例

我们将 R_p 记作锥点 p的行方程 $\sum_{e \ni p} x_e = 1$ ，采用表 1中的标记。

5.1. 一个满维例子：立方体

对于 $G = d_1$， T 是八面体，且每个锥点的度数均为四，因此点$x_e = \frac{1}{4}$ 对全部十二个 e 满足 $A_0 x = \mathbf{1}$。它是严格正的，因此没有坐标被强制取值，且维数 $P_0 = 6$ 由定理3.2得到。它是 [6, 命题 72] 中显式八面体构型的楔形向量。

5.2. 部分退化例子

考虑类型 3，其特征为 (2，3，3，4，6，6)。其锥点 3 的度数为二，其边为 e_2， e_3（其中平行边 e_2, e_3 中的 G 界定相应的双侧面）。将锥点 1、2、5 的行方程相加，再减去锥点 3、4、6 的行方程，可得

$$(R_1 + R_2 + R_5) - (R_3 + R_4 + R_6): \qquad 2\big(x_{e_1} + x_{e_6} + x_{e_8} + x_{e_9}\big) = 0.$$

由于四项均为非负数,

$$x_{e_1} = x_{e_6} = x_{e_8} = x_{e_9} = 0$$

在所有 P_3上。这些是在 $A_3 x = \mathbf{1}$ 之外的三个独立等式（第四个等式可由它们和行方程推出），因此维数 $P_3 = 12 - (6 + 3) = 3$ 由命题4.2得到。相对内部中的一个点为

$$x_{e_1} = x_{e_6} = x_{e_8} = x_{e_9} = 0, \qquad x_{e_2} = x_{e_3} = x_{e_7} = x_{e_{12}} = \tfrac{1}{2}, \qquad x_{e_4} = x_{e_5} = x_{e_{10}} = x_{e_{11}} = \tfrac{1}{4},$$

它满足 $A_3 x = \mathbf{1}$，且在强制坐标之外为正。

5.3. 不可行例子

考虑特征为 (2，2，2，2，8，8) 的类型 14。其锥点 3，4，5，6 的度数为二，而锥点 1 和 2 处其余八个边端中，包含连接二者的四条平行边 e_1， e_6， e_7， e_{12}。将 1 和 2 的行方程相加，再减去 3，4，5，6 的行方程，得到

$$(R_1 + R_2) - (R_3 + R_4 + R_5 + R_6): \qquad 2\big(x_{e_1} + x_{e_6} + x_{e_7} + x_{e_{12}}\big) = 2 - 4 = -2.$$

左侧在正交象限上非负，因此 $P_{14} = \emptyset$。换言之，四个度为二的锥点总共占用了十二条边中的四条，而此时 1 和 2 处的锥角无法再由非负扇形填满。

推论5.1。 不存在具有六个锥角为 π 的锥点的双曲球面，其上有类型 14 的德洛内三角剖分，即使允许出现共圆四元组（即对非三价 *Delaunay* 分解进行细化的三角剖分）也不可能。

证明。这种三角剖分的楔角将是 P_{14} （第 2 节）中的一个点。 □

6. 完整结果表

type	特征	秩(A_i)	维数 P_i	环	强制坐标
0	(4，4，4，4，4，4)	6	6	—	—
1	(3，3，4，4，5，5)	6	6	—	—
2	(2，3，4，4，5，6)	6	6	—	—
3	(2，3，3，4，6，6)	6	3	—	e_1，e_6，e_8，$e_9 = 0$

type	特征	秩(A_i)	维数 P_i	环	强制坐标
4	(3、3、3、3、6、6)	6	6	—	—
5	(2，2，3，5，5，7)	6	2	—	$e_1,\ e_4,\ e_5,\ e_6,\ e_{12}=0$
6	(2，3，3，4，5，7)	6	6	—	—
7	(2，2，5，5，5，5)	6	6	—	—
8	(2，2，3，3，7，7)	6	1	—	$e_1,\ e_6,\ e_7,\ e_8,\ e_9,\ e_{10},\ e_{11}=0;\ \ e_{12}=1$
9	(2，2，2，4，6，8)	6	1	—	$e_1, e_4, e_5, e_6, e_8, e_9, e_{10}=0;\quad e_7=1$
10	(2，2，2，6，6，6)	6	1	—	$e_1, e_4, e_5, e_6, e_{11}, e_{12}=0$
11	(2，2，4，4，4，8)	6	3	—	$e_1, e_6, e_7, e_{12}=0$
12	(2，2，4，4，6，6)	6	6	—	—
13	(2,3,3,3,4,9)	6	6	e_5	—
14	(2，2，2，2，8，8)	6	—	—	**不可行**
15	(2，2、2、3，5、10)	6	1	e_5	$e_1, e_4, e_5, e_6, e_9, e_{10}, e_{12}=0;\quad e_{11}=1$
16	(2，2、3、3，4、10)	6	2	e_8	e_1、e_6、e_8、e_9、e_{10}、$e_{12}=0$；$e_{11}=1$
17	(2，2、3、4，5、8)	6	6	e_8	—
18	(2，2、2、3，3、12)	6	1	e_5、e_8	e_1、e_3、e_4、e_5、e_8、e_9、e_{10}、$e_{12}=0$；e_2、$e_{11}=1$
19	(2，2、3，3、7，7)	6	6	e_5、e_8	—

表2：表1所标记的二十种类型各自的角度系统：秩、多胞体维数、T，以及在 P_i 的每一点都取相同值的坐标（命题4.2）。

十种类型的维数 $P_i = 6$；其余九种可行类型的维数 $P_i \in \{1,2,3\}$（其中五种维数为 1，两种维数为 2，两种维数为 3）；有一种类型不可行。每个结果均通过精确有理消元和浮点线性规划各计算一次，并在 Lean 中得到验证（第 10 节）。

该表具有直接的几何含义。令 Z_i 表示被强制设为 0 的坐标集合。

命题6.1（退化类型的定义）。

(*a*) 十种满维类型0、1、2、4、6、7、12、13、17、19恰好是具有 $A_i x = \mathbf{1}$严格正解的类型，也恰好是第 7 节 *[6,*中十种可作德洛内实现的三价类型*5]*。对于其他十种类型中的每一种，都不存在一个具有六个角度为π 的锥点的双曲球面，使其拥有该类型的三价沃罗诺伊图。

(*b*) 对于类型8、9、15、16、18（其中某个坐标被强制设为1），以及不可行类型14，根本不存在具有该类型的 *Delaunay* 三角剖分的此类球面，即使该三角剖分细分了一个非三价的 *Delaunay* 分解，也不存在。

(*c*) 对于类型3、5、10、11，图 $T_i \setminus Z_i$ 是连通的，且所有顶点的度数至少为二；P_i 是收缩图 G_i/Z_i 的多胞体，该收缩图具有严格正解。这些类型中的任一类型的 *Delaunay* 三角剖分都细分了一个 *Delaunay* 分解，其1骨架包含于 $T_i \setminus Z_i$ 中；该分解有 $12 - |Z_i| = 8$、7、6、8 条边。

证明。(a) 维数 $P_i = 6 =$ 维数$\{A_i x = \mathbf{1}\}$ 当且仅当没有坐标被强制取值时成立；此时，P_i 依次使每个坐标达到最大值的点的平均值是严格正的；反过来，严格正解不会强制任何坐标。三价 Voronoi 图给出 P_i (第 2节）的一个严格正点，因此排除了十种低维或空类型。十种满维类型

是在 [6, 第 7 节5] 通过 Springborn闭合条件发现可由 Delaunay 实现的十种类型；在 [6, 注 812]的独立验证中，同样这十种类型存在严格正解。

（b）类型为 i 的德洛内三角剖分给出 $x \in P_i$，其德劳内分解的边是满足 $x_e > 0$ 的边。对于坐标被强制设为 1 的五种类型，图 $T_i \smallsetminus Z_i$ 是不连通的，并且有度数为一的顶点（可直接由表 1 检查）。但是，德劳内分解的 1-骨架包含全部六个锥点且是连通的，并且根据 [6, 定理 65], Voronoi图没有单边形，也就是说， T 减去零边后没有度数为一的顶点。类型14 是推论 5.1。

（c）从 T_i 中删除边 Z_i 与在 G_i 中收缩这些边是对偶的，并且 P_i 位于 $\{x_{Z_i} = 0\}$ 中，因此去掉这些坐标后， P_i 与 $T_i \smallsetminus Z_i$ 的多胞体相同。其相对内部在 Z_i 之外为正。德劳内分解的边是满足 $x_e > 0$ 的边，它们是 Z_i 的补集的子集。

□

因此，这九个低维多胞体并不是新的胞：其中四个是具有较少边的可实现类型的闭多胞体，其中一个对应于类型 10，是收缩层级底部图 Θ_6的对偶六圈 [6, 定理 8.6], ；另外五个则完全不对应任何构型。

7. 多胞体的顶点

这些多胞体 P_i 的极点具有共同结构，即图的分数完美匹配多胞体的结构；对于三角剖分 T，这里将其推广到带环图。

定理 7.1 (半整数顶点)。 对于二十种类型中的每一种， P_i 的每个顶点的全部十二个坐标都属于 $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$。

对于简单图，这是关于分数匹配多胞体 [1]的 Balinski定理；另见 [11,定理 30.2]。我们给出证明；对于环，只需做一个小的改动。

证明。 设 x 是 P_i 的一个顶点，令 $F = \{e : 0 < x_e < 1\}$ 为其分数支撑，并令 V_F 为与 F 相 incident 的锥点集合。在每个 $p \in V_F$ 处，行方程中的整数坐标之和为整数，因此分数项 $\sum_{e \in F,\ e \ni p} x_e$ （环计数两次）之和为整数；由于它们严格介于 0 和 2 之间且为正，该整数必为 1。特别地，没有任何 $p \in V_F$ 仅通过一条非环边与 F 相连，因此图（V_F， F）的每个连通分量的边数至少等于顶点数。

由于 x 是一个顶点， A_i 中由 F 索引的列是线性无关的：否则， x 就可以沿着支撑在 F上的核向量向两个方向移动。限制到行 V_F （其他行在这些列上均为零）后，这是 （V_F， F）的关联矩阵。因此，根据引理 3.1，对每个连通分量应用该引理可知，每个连通分量的边数至多等于顶点数，且仅当其含有一个环或一个奇圈时取等号。因此，每个连通分量的边数恰好等于顶点数，且最小度为二，所以它是一个单独的圈（单个环是长度为一的圈），并且它不是二部图，因此该圈是奇圈。

对于按圈顺序排列、具有分数值 t_1、.....、t_ℓ 的奇圈，方程 $t_j + t_{j+1} = 1$（下标模 ℓ）有唯一解 $t_j = \frac{1}{2}$；对于环， $2t_1 = 1$。因此，每个分数坐标都等于 $\frac{1}{2}$。

□

推论 7.2 （顶点的组合描述）。 P_i 的顶点与 T 的生成子图一一对应，其中每个连通分量都是单边、长度至少为三的奇圈或单个环：在单边连通分量上，该顶点的值为$\frac{1}{2}$ ，在其他连通分量的边上，值为$\frac{1}{2}$

其余位置的值为0 。如果这样的子图有 m个单边连通分量，且其他连通分量覆盖 h 个锥点，那么该顶点有 m 个坐标等于1 ，有 h 个坐标等于$\frac{1}{2}$，并且$2m+h=6$。

证明。 定理 7.1 的证明表明，一个顶点的支撑就是这样的子图。反之，所描述的向量属于 P_i，根据引理 3.1，其支撑的列是线性无关的（每个连通分量或者是一条边，或者含有一个环或一个奇圈，且边数与顶点数相等），因此它是一个基本可行解，因而是一个顶点。不同的子图给出不同的支撑，因而给出不同的顶点。 □

每个奇连通分量覆盖奇数个锥点，而6是偶数，因此奇连通分量的数量为偶数，且 $h \in \{0,2,4,6\}$。对于十四种无环类型，奇连通分量是长度至少为三的圈，因此 $h \in \{0,6\}$，其中 $h=6$ 仅在两个不相交的三角形情形下成立。表 3 列出了结果。

type	特征	$\lvert V(P_i)\rvert$	$(m,\ h)$-分布
0	(4, 4, 4, 4, 4, 4)	12	(3,0): 8, (0, 6): 4
1	(3, 3, 4, 4, 5, 5)	9	(3,0) : 7, (0, 6): 2
2	(2, 3, 4, 4, 5, 6)	7	(3,0): 5, (0, 6): 2
3	(2、3、3、4、6、6)	4	(3,0): 4
4	(3, 3,3, 3, 6, 6)	8	(3, 0): 6, (0, 6): 2
5	(2, 2, 3, 5, 5, 7)	3	(3, 0): 3
6	(2, 3, 3, 4, 5, 7)	7	(3, 0): 5, (0, 6): 2
7	(2, 2、5、5、5、5)	8	(3, 0): 4, (0, 6): 4
8	(2, 2、3、3、7、7)	2	(3, 0): 2
9	(2, 2、2、4、6、8)	2	(3, 0): 2
10	(2, 2, 2, 6, 6, 6)	2	(3, 0): 2
11	(2, 2, 4, 4, 4, 8)	4	(3, 0): 4
12	(2, 2, 4, 4, 6, 6)	8	(3, 0): 4, (0, 6): 4
13	(2, 3, 3, 3, 4, 9)	7	(3, 0): 4, (1, 4): 1, (0, 6): 2
14	(2, 2, 2, 2, 8, 8)	0	—
15	(2, 2, 2, 3, 5, 10)	2	(3, 0): 2
16	(2, 2, 3, 3, 4, 10)	3	(3, 0): 3
17	(2, 2, 3, 4, 5, 8)	9	(3, 0): 3, (1, 4): 2, (0, 6): 4
18	(2, 2, 2, 3, 3, 12)	2	(3, 0): 2
19	(2, 2, 3, 3, 7, 7)	11	(3,0): 2, (1,4): 4, (2,2): 1, (0,6): 4

表3：顶点数及 (m,h)-分布：通过枚举全部 $\binom{12}{6}=924$ 种六个基本列的选择并保留可行的基本解计算得到，并针对全部二十种类型与推论 7.2 中的子图计数进行了交叉核对。条目 (1,4) 出现在类型 13、17、19 中，来源是一个环与一个不相交的三角形；条目 $(2,2)$ 出现在类型 19 中，来源是两个环。

对于两种一般类型，顶点如下。

例 7.3 (立方体，类型 0)。 $\mathrm{Aut}^+(T)$的作用阶为24，作用于 P_0 的十二个顶点，形成两个轨道：八面体的八个完美匹配，其稳定子阶为3；以及四对

相对的面，其稳定子阶为6。在表 1的标记中，十二个顶点为

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

它们的平均值为$(\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{4})$，即八面体构型 [6, 命题7.2],的对称点：这必然如此，因为平均值在$\mathrm{Aut}^+(T)$的作用下保持不变，而该作用传递地作用于各条边。

例7.4 (堆叠类型，类型 1)。 同理， P_1 的九个顶点为

$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

的十二个顶点中有八个，以及 P_1 的九个顶点中有八个位于超平面 $x_{e_1}=0$上。这些顶点构成两个多胞体粘合时所沿的公共面（例8.5），而定理8.4中的识别将前八个顶点对应到后八个顶点。

8. 满维多胞体的面与 Whitehead移动粘合

二十种类型中有十种的维数为 $P_i=6$：类型0、1、2、4、6、7、12、13、17、19。对于这些类型， P_i 是仿射空间 $\{A_ix=\mathbf{1}\}$ 中的一个6维多胞体，其各个面位于超平面 $x_e=0$中。我们要考察它的各个面是否对应于 G_i处可用的怀特海德变换，以及通过怀特海德变换相关的两个多胞体是否沿一个公共面相交。

8.1. 面与强制分层的对比

超平面 $x_e=0$ 切割 P_i 出一个 面 （一个维数为 5 的面）当且仅当其上没有进一步强制确定的坐标；否则 $F_e=\{x\in P_i:\ \ x_e=0\}$ 是一个维数至多为 4 的面，我们按照命题 4.2 中的方法，应用于系统 $A_ix=\mathbf{1}$, $x_e=0$。

例8.1. 对于类型 1，锥点 5 的行方程为 $x_{e_6}+x_{e_7}+x_{e_8}+x_{e_{12}}=1$，行方程组合 $(R_1+R_2+R_5+R_6)-(R_3+R_4)$ 的一半为

$$x_{e_1}+x_{e_7}+x_{e_8}+x_{e_{10}}+x_{e_{11}}+x_{e_{12}}=1.$$

在 $x_{e_6}=0$ 第一个方程给出 $x_{e_7}+x_{e_8}+x_{e_{12}}=1$，随后第二个方程给出 $x_{e_1}+x_{e_{10}}+x_{e_{11}}=0$，因此 $x_{e_1}=x_{e_{10}}=x_{e_{11}}=0$。面 F_{e_6} 的维数为3，而不是5，尽管在 e_6处的怀特海德变换是可容许的（表4）。

type	#面	#可容许边	面且可容许	仅面	仅可容许
0	12	12	12	0	0
1	10	12	10	0	2
2	7	10	7	0	3
4	10	12	10	0	2
6	7	10	7	0	3
7	8	8	8	0	0
12	8	8	8	0	0
13	7	10	7	0	3
17	8	8	8	0	0
19	8	8	8	0	0

表4：对于十种满维类型中的每一种：面（$x_e=0$ 截出一个5维面）的数量、怀特海德变换可容许的边的数量，以及它们的重叠部分。“仅面”在所有情况下均为零（定理8.3）；“仅可容许”统计的是变换在组合意义下有效、但 F_e 维数小于5的边，如例8.1所示。

在 G 的边 e^* 上进行怀特海德变换，即在 T 的对偶边 e 上进行对角翻转：从由其两个三角形组成的四边形中删除 e，并插入另一条对角线。根据 [6,第 8 节。1] 当所得的图仍为 CE图（允许二边形），即连通且不含单边形时，该变换是可容许 的。翻转会使 e 的两个端点的度数各降低一（若为环则降低二），使两个对角顶点的度数升高，其他度数不变。因此，当且仅当 e 的两个端点的度数都至少为三时，该变换可容许；若为环，则其顶点的度数须至少为四。二十种类型中的每个环都位于度数至少为七的顶点上，因此只有度为二的锥点处的边才不可容许。

引理8.2。 设 P_i 为满维类型，且设 e为 T_i 的一条边，其一个端点 v 的度数为二。则 F_e 不是 P_i的面。

证明。 设 f 为 v处的另一条边，并记 $e=va$、 $f=vb$ （可能为 $a=b$）；二者都不是环，因为若在 v 处有一个环，它将是其唯一的边。 v 处的两个三角形都以 e 和 f为边，因此它们的第三条边 g、g' 都连接 a 和 b，且 $g\neq g'$，否则这两个三角形将闭合成一个具有三个顶点的球面。 g和 g'在 A_i中的列相等，且 g、$g'\notin\{e,f\}$。

在 F_e v 的行方程给出 $x_f=1$后， b 的行方程随即迫使 b 处的所有其他坐标都为零，其中包括 x_g。如果 F_e 是一个面，则其仿射包将是 $\mathrm{aff}(P_i)\cap\{x_e=0\}$。该仿射空间包含以下各点以及其中任意一点 y：对所有 $t\in\mathbb{R}$，点 $y+t(\mathbf{1}_g-\mathbf{1}_{g'})$ 都属于其中，因为 $A_i(\mathbf{1}_g-\mathbf{1}_{g'})=0$，且第 e 个坐标保持不变。在这些点上，x_g 不是常数，这与 F_e 上的 $x_g=0$ 矛盾。 □

定理 8.3（面是 Whitehead-可容许的）。 对于十种满维类型中的每一种， P_i 的每个面 $x_e=0$ 都出现在某条边 e 处，并且在该处怀特海德变换是可容许的。在这 98 条可容许边中，有 13 条不满足逆命题。

证明。 根据上述可容许性判据，不可容许边有一个度数为二的端点，因此引理 8.2 适用。计数结果见表 4，这是对十种类型的全部120 条边计算得出的；在13 条不是面片的可容许边中， F_e 的维数为 1、2 或 3。

□

8.2. 怀特海德变换将匹配的面片粘合起来

定理 8.4（粘合）。设 P_i 是满维的，且在 e 处的怀特海德变换是可容许的，并生成类型 j，其中 T_j 的新边为 e'。那么 $T_i \smallsetminus e = T_j \smallsetminus e'$，对偶地，收缩图 G_i/e^* 和 G_j/e'^* 同构；删去坐标 e 和 e' 后，面 $F_e \subset P_i$ 和 $F_{e'} \subset P_j$ 被识别为同一个多胞体，即 $T_i \smallsetminus e$ 的多胞体。特别地，F_e 是 P_i 的一个面，当且仅当 $F_{e'}$ 是 P_j 的一个面。

证明。翻转删除 e 并插入 e'，因此删除这些边后，两个三角剖分一致；删除 T 的一条边对偶于收缩 G 中对应的边，这正是收缩层级 [6, 定义 8.4] 中的操作。在 F_e 上，e 所对应的列乘以 0，因此删去坐标 e 将 F_e 双射到 $\{y \geq 0 : \mathsf{incidence}(T_i \smallsetminus e)\, y = \mathbf{1}\}$；对 $F_{e'}$ 也同理。若 F_e 是一个面，则该多胞体的维数为 5，因此 $F_{e'}$ 的维数也为 5；只要 P_j 是满维的，它就是 P_j 的一个面。根据下面的命题 8.6，对于每个面，P_j 确实是满维的。 □

我们还通过执行以下操作对定理8.4 进行了计算验证：在有向边层面执行每一个85次翻转，通过典范形式识别目标类型，并确认源的面与目标的面一致，且逆翻转会返回源。

例8.5（立方体和堆叠类型沿 e_1 粘合）。沿 e_1 收缩 G_0 得到七顶点图 H，其度序列为（3、3、3、3、3、3、4），面签名为（3、3、4、4、4、4），边列表为

e_1=(1，2)， e_2=(1，3)， e_3=(1、4)， e_4=(1, 5)，
e_5=(2、4)、 e_6=(2，6)， e_7=(3，5)， e_8=(3、6)、
e_9=(4，7)， e_{10}=(5，7)， e_{11}=(6，7)。

在 e_1 处进行怀特海德变换，将 G_0 变为 G_1；新边是表 *1* 标记中的边 e_1，属于 G_1；沿 G_1 收缩可得到相同的 H。面 $\{x \in P_0 : \ x_{e_1} = 0\}$ 和 $\{x \in P_1 : x_{e_1} = 0\}$ 在去掉零坐标后，都是 H^* 的多胞体，并且 P_0 和 P_1 沿其粘合（比较例 *7.3–7.4*）。

8.3. 面粘合图

命题 8.6。对于十个满维类型中的任意一个类型的任意面，在该边处进行怀特海德变换后，得到的仍是这十个类型中的一个；不会得到低维类型或不可行类型。

证明（计算性）。所有 85 个目标都位于 $\{0, 1, 2, 4, 6, 7, 12, 13, 17, 19\}$（图 1）。 □

根据定理 8.3 和 8.4以及命题 8.6，每个满维胞腔的每个面都与某个满维胞腔的一个面相对应，这些对应关系由图 1中的图记录。这是 [6, 第 8] 节中所提示结构的顶维部分，该结构由收缩层级给出，其中顶维胞腔之间的壁是一级图。表 4 中的“仅可容许”边表明，这种粘合只是完整怀特海德变换轨道的一部分，见 [6,定理 8。1]：轨道中的组合邻接并不总是伴随公共壁，因为使边 e退化会迫使其他边也随之退化（例 8.1）。第 9节表明，这些对应关系与胞腔的自同构群相容。

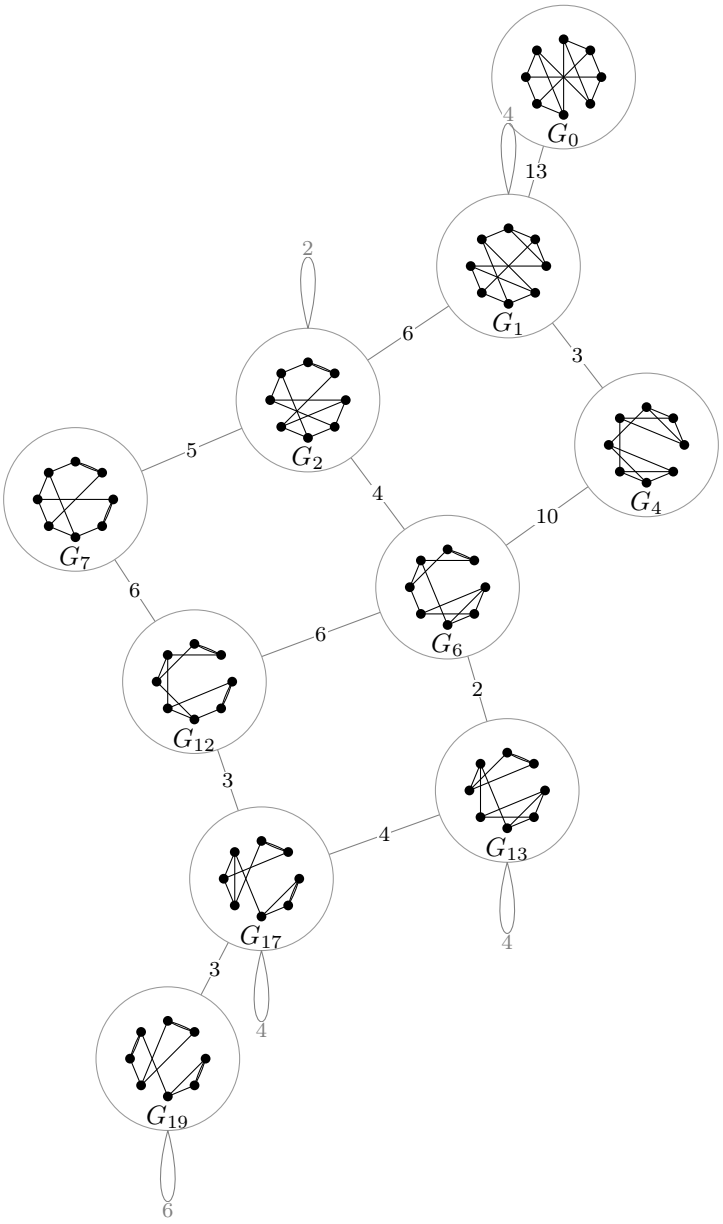


图1：定理 8.4 的面粘合图。每个满维类型对应一个节点，以其 Voronoi图表示G_i；当一个类型的某个面与另一个类型的某个面粘合时，两者之间便连一条边，并标注两侧粘合面的总数（因此，13 表示 G_0 与 G_1 之间的粘合面总数，计入了 P_0 的十二个面和 P_1 的一个面），而 G_i 上的环表示 P_i 与其自身粘合的面数。所有标注数值之和为 85，即面的总数。节点位置采用 Kamada–Kawai布局，不具有任何含义。

8.4. 从立方体生成顶点

定理 8.4 中的识别将顶点传递过去，并在图 1 的图上迭代该过程，可以从 P_0（例 7.3）中的十二个顶点生成几乎每个满维类型的顶点。

定义 *8.7*（顶点转移）。设在 e 处的怀特海德变换将 T_i 发送到带有新边 e' 的 T_j，并设 σ 是从 T_i 的除 e 之外的边到 T_j 的除 e' 之外的边的所得双射，再与将 T_j 的标记重新标记为表*1*中的标记复合（在 $Aut^+(T_j)$ 意义下定义）。对于满足 $x_e = 0$ 的 $x \in P_i$，定义 $\tau(x)_{e'} = 0$ 和 $\tau(x)_{\sigma(f)} = x_f$，并对每条其他边 f 作此定义。

命题 8.8（转移保持顶点）。如果 x 是满足 $x_e = 0$ 的 P_i 的一个顶点，那么 $\tau(x)$ 是 P_j 的一个顶点。

证明。根据定理 8.4，τ 将面上的内容限制为从面 F_e（属于 P_i）到面$F_{e'}$（属于 P_j）的仿射同构。它将 F_e 的顶点映射到 $F_{e'}$的顶点，而多胞体的面的顶点也是该多胞体的顶点。 □

定理 8.9（从立方体生成顶点）。从 P_0 的十二个顶点出发，沿着 85 个超面识别，在两个方向上并对σ的每一种选择进行所有转移，直到不再出现新的顶点，即可生成 P_0、P_1、P_2、P_4、P_6、P_7、P_{12} 的所有顶点（其 T 没有环的七种满维类型）、P_{13}的七个顶点中除一个之外的全部顶点、P_{17}的九个顶点中除两个之外的全部顶点，以及 P_{19}的十一个顶点中除五个之外的全部顶点。始终无法生成的八个顶点，恰好是 T 的某个环取值为 $1\ 2$ 的顶点。即使也允许通过低维类型进行转移，结果仍不变。

证明。正向结论是通过有限计算得到的，我们已经完成了这项计算。对于负向结论，翻转不会改变除 e 之外任何边的端点，因此，在 σ 下，T_j 的一个环（不同于新边 e'）是一个具有相同坐标的 T_i 的环，而 $\tau(x)_{e'} = 0$。立方体没有环，所以根据归纳法，每个生成的顶点在每个环上的值都是 0。 □

因此，传递只能携带种子中已有的结构；使用环的三角剖分的顶点中，带有环的那些是它唯一无法到达的顶点。

9. 自同构与自由展开

9.1. 粘合与自同构群相容

十种满维类型中的每一种都在图 1 中作为一个单独的多胞体出现，但某一类型可能有多个面与同一个邻居粘合：立方体的全部十二个面 P_0 都通向类型 1，而 P_1 只有一个面通向类型 0。这由对称性解释。群$\mathrm{Aut}^+(T_i)$由三角剖分的保定向自同构组成，通过置换坐标作用于 P_i 并置换其各个面；对于立方体，该群传递地作用于全部十二个面。

命题 *9.1.* 对于 *85* 个面中的每一个，定理 *8.4* 中的识别都将该面的 $Aut^+(T_i)$-轨道映射到目标中一个由面构成的 $Aut^+(T_j)$-轨道，且所得的轨道映射是一个无不动点对合。这十个胞分别有 *1*、*6*、*7*、*3*、*7*、*3*、*5*、*7*、*8*、*5* 个面轨道（对应类型 *0*、*1*、*2*、*4*、*6*、*7*、*12*、*13*、*17*、*19*），共计 *52* 个，它们两两配对形成 *26* 个壁。

证明（计算性）。我们计算了 $\mathrm{Aut}^+(T_i)$，其为实现最小规范代码的镖排列集合，阶数分别为 24、2、1、4、1、4、2、1、1、2，并直接检验了这一结论。 □

因此， $P_i/\mathrm{Aut}^+(T_i)$ 十个满维胞腔的商空间沿着26个壁粘合，构成一个带有轨形胞腔的有限复形。这是六个无序锥点的模空间的 Delaunay 分解中顶维部分的组合模型；通过超椭圆对应，这也适用于亏格二曲面 [6, 命题 5。2]这些楔角坐标是否将该分解的每个顶维胞腔识别为$P_i^\circ/\,\mathrm{Aut}^+(T_i)$，是 [6,节 7]中尚未解决的可实现性问题。

9.2. 自由展开

从商空间转到 Teichmüller空间，需要为每个带标记的德劳内三角剖分的每个单元各取一个副本。构造这些副本的一种简单方法是自由展开：从一个 P_0 的副本开始，给每个开面递归地附上一个新的目标单元副本，且绝不将两个副本识别为同一个。其组合结构是在弧上构成的一棵树：一条弧是一个类型与其 85 个面之一组成的有序对（t， e）；通过面 e 进入的类型 t 的副本，会为 t的每个其他面各有一个子节点。

深度	新副本	累计总数	与前一深度之比
0	1	1	—
1	12	13	12.00
2	108	121	9.00
3	828	949	7.67
4	6012	6961	7.26
5	44292	51253	7.37
6	322116	373369	7.27
7	2327988	2701357	7.23

表5：从立方体的一个副本开始的自由展开的增长。自深度1起的所有计数都能被12整除，这是必然的，因为 $\mathrm{Aut}^+(T_0)$传递地置换根的十二个面。

命题9.2（指数增长）。 自由展开中深度 d 处的副本数按 λ^d增长，其中 $\lambda \approx 7.0928$ 是 85×85 弧转移矩阵的谱半径；下一个特征值的模为 ≈ 6.0438。

表 5中的比值 λ 缓慢地趋近于；深度40 处的比值为7。0934。

9.3. 与*Teichmüller*空间的关系

自由展开不是Teichmüller空间的胞腔分解，其增长率也不是映射类群的增长率。在$\mathcal{T}_{0,6} \cong \mathcal{T}_2$这是 [3, 8], 的典范分解的一个实例，胞由带标记的德洛内三角剖分索引，而余维二面周围的胞会闭合：如果两条退化边位于不相交的四边形中，则其周围有四个胞；如果它们位于同一个五边形中，则有五个胞。自由展开从不识别副本，因此其对偶图是一棵树；每个余维二面只属于两个胞，并且该展开不是流形。真正分解的对偶图是六穿孔球面翻转图中可实现的部分，映射类群作用于其上且商为有限图，即图1 模去自同构后的图。它同样呈指数增长，因为六穿孔球面的映射类群包含自由子群，但其增长率尚未计算。

计算结果表明的内容与经典图景一致： $\mathcal{T}_2$ 与 $\mathbb{R}^6$同胚，例如可通过 Fenchel–Nielsen坐标 [4], 来描述；而对其进行局部有限胞腔分解时，6维胞必定有无穷多个，且每个壁恰好由两个胞共享。定理8.3和8.4 以及命题8.6 和9.1正是这一结构的有限组合影子。

10. 计算验证与形式化证明

10.1. 独立计算

脚本 paper2_verification.py 从头开始重新计算本文的每一项有限结论，不使用表格：它将具有六个顶点且没有度数为一的顶点的球面三角剖分枚举为弧系统（旋转系统），还原出二十种三价类型及其特征，并通过显式同构将它们与表1的参考标记对应起来。随后，它通过线性规划和精确有理数运算检查秩（定理 3.2）；强制坐标、维数和不可行性（表2）；第5.2–5.3节及例8.1中的行组合；命题6.1中 $T_i \smallsetminus Z_i$ 的结构；推论 7.2中的顶点、其半整数性以及子图计数（表3和例 7.3–7.4）；面、可容许边、翻转目标和可容许性判据（表4和图1）；例8.5中的收缩；顶点生成（定理 8.9）；轨道配对（命题 9.1）；以及自由展开的增长情况（表5和命题9.2）。该脚本使用 Python 3、numpy、scipy 和 networkx，运行时间不到一分钟，最后显示“所有检查均已通过”。

*10.2. Lean*形式化

文件 `Paper2CirclePatterns.lean`使用 Lean 对有限线性代数进行了形式化 4 [5]（版本 4.15.0，仅使用核心库）。根据表1 中的锥点列表，它构建了二十个关联矩阵，并证明：

（i）所有二十种类型的秩 $A_i = 6$ （定理 3.2）；（ii） $A_{14}x = N\mathbf{1}$ 与 $x \in \mathbb{Z}^{12}_{\geq 0}$ 共同推出 $N = 0$，因此 P_{14} 没有有理点且为空（第 5.3 节）；（iii）对于九种低维类型中的每一种，所有满足 $A_i x = N\mathbf{1}$ 的 $x \in \mathbb{Z}^{12}_{\geq 0}$ 都具有表2给出的强制取值（乘以 N），消去分母后即为关于有理点的陈述；（iv）定理 4.3 中的维数，上界由 $[A_i$的秩给出；$(e_j)_{j\in F}]$ 以及由顶点的仿射秩给出的相应下界；（v）每种类型的每个基本可行解都是半整数，且顶点恰为表3所列，并具有其中给出的计数和（m，h）分布（定理 7.1）；（vi）表4中的面数和可容许边数，以及每个面都对应于一条可容许边（定理 8.3）。

强制坐标和不可行性由决策过程 `omega`证明，并由 Lean内核检查；其他结论则通过 `native_decide`进行有限计算并加以检查，而该过程也信任 Lean编译器。形式化中未证明而直接采用了标准事实： 的顶点是其基本可行解，且 是这些顶点的凸包。一般性结论——引理 3.1、关于任意图的定理 7.1 以及引理 8.2——已在正文中证明；要将其形式化，需要 Mathlib 这类图论和多面体几何库。翻转计算（定理 8.4、命题 8.6 和 9.1，以及展开过程）仅由 Python 脚本检查。

11. 讨论

11.1. 一般性无法预测维数

满维类型与一般类型（简单 T，仅类型 0 和 1）并不相同：八种非一般类型（2、4、6、7、12、13、17、19）同样是满维的；六种含环类型中，三种（13、17、19）是满维的，另外三种（15、16、18）则不是。根据命题 6.1(a)，相关的二分取决于可实现性本身。能否在不求解该系统的情况下，从 T 的某个简单不变量中读出可实现性，目前仍是一个开放问题。引理 8.2 和第 5.3 节中可以看出一个必要条件：二度锥点会强制产生等式；若有四个这样的点，如类型 14 中那样，就完全没有余地了。

11.2. 强制坐标的含义

强制坐标 $x_e = 0$ 意味着该类型的每个 Delaunay 三角剖分中，围绕 e 的四个锥点都共圆，因此沃罗诺伊边 e^* 的长度为零，并且 e 不是德劳内分解中的一条边 [6, 命题 7。7]。强制坐标 $x_e = 1$ 意味着在 e的某个端点处，单个楔形区域填满整个锥角，因此该锥点的沃罗诺伊胞会成为一个单边形，而这正是 [6, 定理 6。5] 所排除的情形。命题 6.1 将这两个观察转化为关于哪些类型会出现的结论。由于每个 Delaunay 三角剖分都给出 P_i中的一个点，因此关于不可行类型以及坐标被强制为 1 的类型的结论，仅凭线性系统即可证明，而无需借助 [12, 2]的非线性圆模式理论。

11.3. 含环类型

三个满维含环类型（13、17、19）表明， G 本身并不会阻碍满维解空间：一旦秩$(A_i) = 6$（引理3.1），环的列与其他列的表现相同。在三个低维含环类型（15、16、18）中，每个环坐标都被强制为0，并且每种类型还有一个坐标被强制为1，因此根据命题6.1（b），它不会出现。

11.4. 后续研究方向

还有两个问题。首先，第8 节中的粘合仅涉及顶维胞腔；将其扩展到所有余维的面，以及扩展到收缩层级中作为类型3、5、10、11 （命题6.1（c））出现的可实现类型（即各类型的多胞体），将得到完整的组合胞腔结构。随后可以将其欧拉示性数与 $\chi^{\mathrm{orb}}(\mathcal{M}_2) = -1/240$进行比较。其次，楔角映射是否将 P_i°与 Teichmüller空间中对应的胞腔对应起来，是 [6, 第 7]节中的非线性可实现性问题；本文计算的多胞体则是其线性必要条件。

12. 结论

[6], 中针对两种一般德洛内类型证明的秩六现象，对所有二十种三价类型都成立，包括三角剖分中含有环的六种类型。这种一致性掩盖了楔角多面体层面上的鲜明二分：恰有十种可实现类型对应六维多胞体，九种对应维数较低的多胞体，还有一种没有对应的多胞体。较低的维数具有几何意义：其中四个多胞体属于边数较少的可实现类型，其余六种类型则根本不会作为德洛内三角剖分出现。二十个多胞体的顶点全都是半整数。对于十种满维类型，面只出现在怀特海德可容许边处；怀特海德变换将相邻两个多胞体的面对应起来，而且这些对应与自同构群相容，从而得到由十个轨形胞腔组成的有限复形

这些胞腔沿着26个壁粘合。其自由展开以约7.093的速率增长；Teichmüller空间真正的胞腔分解是这一展开的一个商，其中余维二面周围的胞腔会闭合。

代码可用性

第 10 节的验证脚本和 Lean 4 形式化位于仓库https: // github.com/armandorodado/weierstrass-delaunay的paper2-circle-pattern-systems文件夹中，该仓库已存档于 Zenodo [7]。

工具使用

软件。 第 10 节的计算使用 Python 3 和`numpy`、`scipy` （HiGHS 线性规划求解器）以及`networkx`完成，形式化证明则使用 Lean 4（版本 4.15.0，仅使用核心库）进行了检查。论文使用 LaTeX 排版，图形使用 TikZ 绘制。

人工智能。 在准备本版论文时，使用了 AI 助手 Claude（Anthropic），具体如下：审阅草稿的数学正确性，以及与配套论文 [6], 的一致性，由此促成了对引理 8.2、定理 8.4和命题 6.1的修正和补充证明；编写独立的验证脚本以及第 10节的 Lean 4 形式化；并对语言、结构和 LaTeX 排版进行编辑。所有数学内容、代码和输出均由作者检查，作者对论文承担全部责任。

参考文献

[1] M. L. Balinski, 《整数规划：方法、用途与计算》, 《管理科学》12（1965）, 253–313。[2] A. I. Bobenko 和 B. A. Springborn, 《圆模式的变分原理与 Koebe定理》, 《美国数学会汇刊》356（2004）, 659–689。[3] B. H. Bowditch 和 D. B. A. Epstein, 《与曲面相关的自然三角剖分》, 《拓扑学》27（1988）, 91–117。[4] B. Farb 和 D. Margalit, 《映射类群入门》, 普林斯顿数学丛书第49卷, 普林斯顿大学出版社, 2012。[5] L. de Moura 和 S. Ullrich, 《Lean 4定理证明器与编程语言》, 载于：《自动演绎——CADE 28》, 计算机科学讲义12699, 施普林格, 2021, 625–635。[6] A. Rodado Amaris, 《闭亏格二黎曼曲面的模空间与Teichmüller空间的 Delaunay组合学》, 预印本, 2026年, arXiv:2611.18684 [math.CO]。[7] A. Rodado Amaris, 《weierstrass-delaunay：亏格二及双曲椭圆模空间的 Weierstrass–Delaunay胞腔分解的代码与形式化证明》, 软件, Zenodo, 2026年, DOI:10.5281/zenodo.23870957。[8] R. C. Penner, 《带 puncture 曲面的装饰Teichmüller空间》, 《数学物理通讯》113（1987）, 299–339。

[9]A. J. Rodado Amaris，亏格二黎曼曲面的模空间与 *Teichmüller*空间的魏尔斯特拉斯点和典范胞腔分解，博士论文，墨尔本大学，2007年。
https://minerva-access.unimelb.edu.au/items/db3ae682-386e-51d5-87cb-d755f4d0cb96

[10] A. Schrijver，线性与整数规划理论，威利，1986 年。

[11] A. Schrijver，《组合优化：多面体与效率》，算法与组合学**24**，施普林格，2003 年。[12] B. A. Springborn，《圆模式的变分原理》，博士论文，柏林工业大学，2003 年。