arXiv:2611.29863v1 [math.CA] 23 Nov 2026

Muckenhoupt 基的尖锐常数非对角外推

DAVID CRUZ-URIBE OFS 和 FATIH S.IRIN

1. 引言

本文证明了矩阵权的非对角外推的一个尖锐常数版本，改进了我们在 [4] 中证明的结果。为介绍我们的结果，我们简要概述一些近期成果。矩阵权 W 是指一个 $d\times d$ 几乎处处有限且可逆的自伴矩阵函数：也就是说，其系数几乎处处可测且有限，并且 $W(x)$ 几乎处处可逆x。给定 $1\le p\le\infty$，定义空间 $L^p(\mathbb{R}^n,W)$ 为由可测向量值函数构成的巴拿赫空间 $f\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^d$ 其范数为

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n,W)}=\|Wf\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^d)}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|W(x)f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

注意，如果 $p=\infty$，第一个等式仍有意义。对于 $1<p<\infty$，矩阵权 W 属于 $\mathcal{A}_p$，当且仅当

$$[W]_{\mathcal{A}_p}=\sup_Q\left(\fint_Q\left(\fint_Q|W(x)W^{-1}(y)|_{\mathrm{op}}^{p'}\,dy\right)^{\frac{p}{p'}}dx\right)^{\frac{1}{p}}<\infty,$$

其中上确界取遍所有边平行于坐标轴的立方体。定义 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_\infty$ 为满足以下条件的矩阵权：

$$[W]_{\mathcal{A}_1}=\sup_Q\operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q}\fint_Q|W^{-1}(x)W(y)|_{\mathrm{op}}\,dy<\infty,$$

and

$$[W]_{\mathcal{A}_\infty}=\sup_Q\operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q}\fint_Q|W(x)W^{-1}(y)|_{\mathrm{op}}\,dy<\infty.$$

在 [1], 中，第一作者与 Bownik 解决了一个由 Nazarov 和 Treil 提出的公开问题 [12], , 证明了 Rubio de Francia 外推的如下推广。

定理 1.1. 设 T 是一个线性算子。假设对于某些 p_0、 $1\le p_0\le\infty$，存在一个递增函数 N_{p_0}，使得对每个 $W_0\in\mathcal{A}_{p_0}$,

$$\|Tf\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n,W_0)}\le N_{p_0}([W_0]_{\mathcal{A}_{p_0}})\|f\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n,W_0)}. \tag{1.1}$$

那么对于所有 p、 $1<p<\infty$，以及所有 $W\in\mathcal{A}_p$,

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^n,W)}\le N_p(n,d,p_0,[W]_{\mathcal{A}_p})\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n,W)}, \tag{1.2}$$

其中

$$N_p(n,d,p_0,[W]_{\mathcal{A}_p})=C(p,p_0)N_{p_0}\left(C(n,d,p,p_0)[W]_{\mathcal{A}_p}^{\max\left\{\frac{p}{p_0},\frac{p'}{p_0'}\right\}}\right).$$

2010数学主题分类。 42B25, 42B35.关键词。 凸集值函数、极大算子、非对角不等式、Muckenhoupt 权重、矩阵权、Rubio de Francia 外推、尖锐常数。第一作者部分获得西蒙斯基金会数学家差旅资助项目以及美国国家科学基金会 DMS-2349550 号资助。第二作者获得了 T¨ubitak（土耳其科学技术研究委员会）提供的 2219 - 土耳其公民国际博士后研究奖学金计划资助。

这一结果的一个关键特征是，常数 N_p 取决于 $\mathcal{A}_p$ 特征 $[W]_{\mathcal{A}_p}$的幂，其指数与标量情形中出现的指数相同。在标量情形中，这被称为“尖锐常数”外推，因为如果从奇异积分的 $[w]_{A_2}$ 在 $L^2(w)$ 估计中关于 $[w]_{A_p}$ 的最佳可能依赖关系出发，那么该定理就会给出 $L^p(\mathbb{R}^n, w)$ 估计中关于$1 < p < \infty$的最佳可能依赖关系。这一事实在所谓的 A_2 猜想的最初证明中发挥了非常重要的作用：参见 Hyt¨onen [9, 10]。

在 [4], 中，我们将定理1.1 推广到了非对角外推，从而推广了 Harboure、Mac´ıas 和 Segovia [8]首先证明的相应标量定理。

定理 1.2。设 T 是一个线性算子。固定 s、 $1 \le s < \infty$。假设对于某些 p_0、 q_0、 $1 \le p_0 \le q_0 \le \infty$，其中 $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0} = \frac{1}{s'}$ 和 $r_0 = \frac{q_0}{s}$，存在一个正增函数 $N_{p_0,\, q_0}$ 使得对于每个满足 $W_0^s \in \mathcal{A}_{r_0}$ 的矩阵权 W_0，

$$\|Tf\|_{L^{q_0}(\mathbb{R}^n, W_0)} \le N_{p_0,q_0}\left([W_0^s]_{\mathcal{A}_{r_0}}\right) \|f\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n, W_0)} \tag{1.3}$$

那么，对于所有满足 $1 < p \le q < \infty$、 $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0}$、 $r = \frac{q}{s}$ 的 p、 q，以及所有满足 $W^s \in \mathcal{A}_r$ 的矩阵权 W，

$$\|Tf\|_{L^q(\mathbb{R}^n, W)} \le N_{p,q}(n, d, p_0, q_0, [W^s]_{\mathcal{A}_r}) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n, W)} \tag{1.4}$$

其中

$$N_{p,q}(n, d, p_0, q_0, [W^s]_{\mathcal{A}_r}) = C(d, p, q, p_0, q_0) N_{p_0,q_0}\left(C(n, d, p, q, p_0, q_0)[W^s]_{\mathcal{A}_r}^{\frac{r}{r_0} + \frac{r'}{r_0'}}\right).$$

我们特别指出这一证明的两个特点。首先，在标量情形下，条件 $[w^s]_{\mathcal{A}_r}$ 等价于 Muckenhoupt 和 Wheeden 引入的$\mathcal{A}_{p,q}$ 条件。但在矩阵情形下， [4,Example 2.8] 表明，相应的矩阵条件$\mathcal{A}_{p,q}$ 条件

$$[W]_{\mathcal{A}_{p,q}} = \sup_Q \left(\fint_Q \left(\fint_Q |W(x)W^{-1}(y)|_{\mathrm{op}}^{p'} \, dy \right)^{\frac{q}{p'}} dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

严格弱于条件 $W^s \in \mathcal{A}_r$。在这一较弱假设下，定理 1.2 是否仍然成立，还是一个尚未解决的问题。

其次，对本文的目的而言更重要的是，在定理 1.2中，常数 $N_{p,q}$ 大于 Lacey、Moen、P´erez 和 Torres [11]在标量情形下得到的最佳常数 $[w^s]_{\mathcal{A}_r}$ 中关于 $\max\left\{\frac{r}{r_0}, \frac{r'}{r_0'}\right\}$的指数。他们证明，最佳常数中该指数为 $[w^s]_{\mathcal{A}_r}$。我们的主要结果表明，在矩阵情形下也能得到这一指数，从而将定理1.2 改进为具有最佳常数的结果。

定理 1.3。设 T 是次线性算子。固定 s、 $1 \le s < \infty$。假设对于某些 p_0、 q_0、 $1 \le p_0 \le q_0 \le \infty$，其中 $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0} = \frac{1}{s'}$ 和 $r_0 = \frac{q_0}{s}$，存在一个正增函数$N_{p_0,\, q_0}$，使得对于每个满足 $W_0^s \in \mathcal{A}_{r_0}$ 的矩阵权 W_0，不等式 *(1.3)* 成立。则对于所有满足 $1 < p \le q < \infty$、 $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0}$、 $r = \frac{q}{s}$ 的 p、 q，以及所有满足 $W^s \in \mathcal{A}_r$ 的矩阵权 W，不等式 *(1.4)* 成立，其中

$$N_{p,q}(n, d, p_0, q_0, [W^s]_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}}) = C(p, q, p_0, q_0) N_{p_0,q_0}\left(C(n, d, p, q, p_0, q_0)[W^s]_{\mathcal{A}_r}^{\max\left\{\frac{r}{r_0}, \frac{r'}{r_0'}\right\}}\right).$$

我们实际上证明了一个更一般的结果。首先，在标量情形的 [4], 后续 [5] 中，我们引入了矩阵 Muckenhoupt 基的概念，并在这一一般背景下证明了我们的结果。这里我们也采用同样的方法。所谓基 $\mathcal{B}$，是指开集的集合。给定一个基 $\mathcal{B}$ 和一个矩阵权 W，定义 Christ-Goldberg极大算子

$$M_{W,\mathcal{B}} f(x) = \sup_{B \in \mathcal{B}} \fint_B |W(x)W^{-1}(y)f(y)| \, dy \cdot \chi_B(x).$$

通过在上述定义中用集合 $B \in \mathcal{B}$ 替代立方体，定义$\mathcal{A}_{p,\,\mathcal{B}}$ 权重的类：例如，对于$1 < p < \infty$,

$$[W]_{\mathcal{A}_{p,\mathcal{B}}} = \sup_{B\in\mathcal{B}} \left(\fint_B \left(\fint_B |W(x)W^{-1}(y)|_{\mathrm{op}}^{p'}\, dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

定义 1.4。 若基 $\mathcal{B}$ 满足：对于任意 $1 < p < \infty$ 和矩阵权$W \in \mathcal{A}_{p,\,\mathcal{B}}$, $M_{W,\,\mathcal{B}}$： $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^n)$, 并且存在一个递增函数 $K_{p,\,\mathcal{B}}$，则称其为矩阵 *Muckenhoupt* 基。

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |M_{W,\mathcal{B}} f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \le K_{p,\mathcal{B}}([W]_{\mathcal{A}_{p,\mathcal{B}}}) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

备注 1.5。 正如我们在 [4], 中所展示的，除了立方体基之外，二进立方体基以及 $\mathbb{R}^n$ 中边平行于坐标轴的矩形基（即平行六面体基）都是基。一个尚未解决且颇有趣的问题是证明：由边长为 s、t、 st、s、 $t > 0$的平行六面体构成的 $\mathbb{R}^3$Zygmund 基是矩阵 Muckenhoupt 基。

其次，我们利用外推对族 $\mathcal{F}$ 这一抽象概念证明我们的结果。该概念曾用于 [5] 中的标量加权外推，以及 [1,4] 中的矩阵加权外推。下文中， $\mathcal{F}$表示由可测向量值函数对 (f, g) 构成的族。若我们写出如下形式的不等式

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,W)} \le C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,W)}, \qquad (f,g) \in \mathcal{F},$$

我们的意思是，该不等式对所有满足以下条件的数对 $(f,\ g) \in \mathcal{F}$ 均成立：

$$0 < \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,W)}, \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,W)} < \infty.$$

无论该常数是显式给出还是隐式给出，都假设它与数对 $(f,\ g)$ 无关，仅取决于 $[W]_{\mathcal{A}_p}$，而不取决于具体的矩阵权重 W。

定理 1.6. 设 $\mathcal{B}$ 是一个矩阵 *Muckenhoupt* 基，且 $\mathcal{F}$ 是一个外推对族。固定 s、$1 \le s < \infty$。假设存在某些 p_0、 q_0、 $1 \le p_0 \le q_0 \le \infty$，其中 $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0} = \frac{1}{s'}$ 且 $r_0 = \frac{q_0}{s}$，并且存在一个正增函数 $N_{p_0,\,q_0}$，使得对于每个满足 $W_0^s \in \mathcal{A}_{r_0,\,\mathcal{B}}$ 的矩阵权重 W，

$$\|f\|_{L^{q_0}(\mathbb{R}^\cdot,W_0)} \le N_{p_0,q_0}\left([W_0^s]_{\mathcal{A}_{r_0,\mathcal{B}}}\right) \|g\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^\cdot,W_0)}, \quad (f,g) \in \mathcal{F}. \tag{1.5}$$

那么，对于所有满足 $1 < p \le q < \infty$、 $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0}$、 $r = \frac{q}{s}$ 的 p、 q，以及所有满足 $W^s \in \mathcal{A}_{r,\,\mathcal{B}}$ 的矩阵权重 W，

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^\cdot,W)} \le N_{p,q}(\mathcal{B},p_0,q_0,[W^s]_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}})\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,W)}, \qquad (f,g) \in \mathcal{F}, \tag{1.6}$$

其中，若 $p < p_0$,

$$N_{p,q}(\mathcal{B},p_0,q_0,[W^s]_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}}) = 2^{\left(\frac{1}{s}+1\right)\frac{q}{p}} N_{p_0,q_0}\left(C(d,r)[W^s]_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}}^{\frac{r}{r_0}} K_{r,\mathcal{B}}([W^s]_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}})^{1-\frac{r}{r_0}}\right),$$

且若 $p > p_0$,

$$N_{p,q}(\mathcal{B},p_0,q_0,[W^s]_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}}) = 2^{r'\frac{p-p_0}{pp_0}} N_{p_0,q_0}\left(C(d,r)[W^s]_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}}^{\frac{r'}{r_0'}} K_{r',\mathcal{B}}([W^{-s}]_{\mathcal{A}_{r',\mathcal{B}}})\right)^{1-\frac{r'}{r_0'}}$$

注 1.7。 在标量情形中，通过逼近论证使用外推对证明关于算子的结果是直接的：详见 [3,5] 。对于矩阵权而言，存在一些微妙之处，尤其是对于非线性算子。下面在证明定理 1.2 作为定理 1.6的推论时，我们将简要讨论这些问题。详细讨论见 [1, 第 10]节。关于一种无需使用外推对的替代方法，见 Nieraeth [13]。

本文余下部分的安排如下。在第2节中，我们证明定理1.6，随后将定理 1.2 作为特殊情形推出。证明的基本思路是将 $p = q$中的对角情形（即 [1] 时）的尖锐常数证明改编到非对角情形。反过来，该证明则是通过改编 [5, 第 3 节4]中给出的标量情形下的尖锐常数外推证明得到的。 [11] 中原有的尖锐常数非对角外推证明依赖于一个关于 Muckenhoupt A_p 权重的非常技术性的引理，而该引理不易改编到矩阵情形。因此，为了证明我们所需的结果，我们首先必须将 [5, 第 3 节4] 中的尖锐常数外推证明扩展到非对角情形。我们认为这一结果本身也具有独立意义，因此将其收入附录 A。希望了解定理 1.6 证明的主要思想，以及矩阵权情形中的技术障碍出现在哪里的读者，应先阅读定理 A.1的证明，以及证明之后的注 A.4 。

注记 1.8。 Duoandikoetxea [7] 给出了关于最佳常数的另一种证明，并将非对角外推推广到了 $q < p$ 的情形。探究他的思路能否推广到矩阵情形，是一个有趣的问题。

本文中，我们采用 [1, 4] 中的记号；对于证明中所需的一些技术性结果，也请读者参阅这些论文。在欧几里得空间中，常数 n 表示 $\mathbb{R}^n$ 的维数，而 $\mathbb{R}^n$ 将作为函数的定义域。 d 表示向量值函数和集合值函数的维数。对于 $1 \le p \le \infty$， $L^p(\mathbb{R}^n)$ 表示标量函数的 Lebesgue 空间，而 $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$ 表示向量值函数的 Lebesgue 空间。标量权是指满足 $0 < w(x) < \infty$ 几乎处处成立的可测函数 w 。我们定义空间 $L^p(\mathbb{R}^n, w)$ 为所有满足 $wf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 的可测函数 f 所组成的空间。请注意，这并非标准定义；标准定义将权重视为测度，而非乘子。不过，这种定义使我们对标量权的定义与矩阵加权范数的定义保持一致。

给定 $v = (v_1, \ldots\ldots, v_d)^t \in \mathbb{R}^d$， v的欧几里得范数记为 $|v|$。 $\mathbb{R}^d$ 中的标准正交基记为 $\{e_i\}_{i=1}^d$。开单位球 $\{v \in \mathbb{R}^d : |v| < 1\}$ 记为$\mathbf{B}$，其闭包记为$\mathbf{B}$。矩阵均为 $d \times d$ 实值元素矩阵。给定两个量 A 和 B，若存在常数 $c > 0$ 使得 $A \le cB$，则记作 $A \lesssim B$，或记作 $B \gtrsim A$ 。若 $A \lesssim B$ 且 $B \lesssim A$，则记作 $A \approx B$。

2. 非-对角矩阵外推：定理1.6的证明

本节首先证明定理 1.6；随后，我们将定理 1.3 作为直接推论导出。证明需要用到 [1]中的若干定义和结果。下面先对它们作出精确表述，再给出具体证明。

我们先介绍一些基本定义。 $\mathbb{R}^d$ 中所有凸对称集的集合记为 $\mathcal{K}_{cs}(\mathbb{R}^d)$。 $\mathcal{K}_{cs}(\mathbb{R}^d)$中的有界集子集记为 $\mathcal{K}_{bcs}(\mathbb{R}^d)$。所谓可测凸集值函数，是指映射 $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{K}_{cs}(\mathbb{R}^d)$，满足对于任意开集 $U \in \mathbb{R}^d$，$F^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \cap U \neq \emptyset\}$ 是勒贝格可测的。若存在 $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$使得$F(x) \subset k(x)\mathbf{B}$ 对几乎处处的 x成立，则称其可积有界。若 k 属于 L^1_{loc}，则称 F 局部可积有界。给定一个矩阵权 W和 $1 \le p \le \infty$， $L^p_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n, W)$由所有满足下述条件的可测凸集值函数 F组成：

$$\|F\|_{L^p_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n, W)} = \||WF|\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W(x)F(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

其中 $|W(x)F(x)| = \sup\{|W(x)v| : v \in F(x)\}$。若 $W = I_d$，则记 $L^p_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n) = L^p_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n, I_d)$。

如果存在非负可测标量函数 f，使得 $F = f\mathbf{B}$，我们就称凸集值函数 F 是球值的。更一般地，如果存在矩阵权 W，使得 $F = fW\mathbf{B}$，则称 F 是椭球值的。

现在我们考虑将可测凸集值函数映射到自身的算子。若对任意两个此类函数 F 和 G，算子 T 都满足 $T(F + g)(x) \subset TF(x) + TG(x)$，且 $T(\alpha F)(x) = \alpha TF(x)$，其中 $\alpha \in \mathbb{R}$，并且这里的和是集合的闵可夫斯基和，则称其为次线性的。若每当 $F(x) \subset G(x)$ 时，都有 $TF(x) \subset TG(x)$，则称其为单调的。

我们主要研究的此类算子是凸集值极大算子。回顾一下，局部可积有界函数 $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{K}_{bcs}$ 在有界集 Ω 上的 Aumann 积分定义为凸集

$$\int_\Omega F(y)\,dy = \left\{ \int_\Omega f(y)\,dy : f \in S^1(\Omega) \right\};$$

此处， $S^1(\Omega)$ 是向量值函数 $f \in L^1\Omega)$ 的集合，其中 $f(y) \in F(y)$， $y \in \Omega$。给定一个基 $\mathcal{B}$，定义凸集值极大算子 $M_{\mathcal{B}}$ 为

$$M_{\mathcal{B}}F(x) = \overline{\operatorname{conv}}\left(\bigcup_{B\in\mathcal{B}} F(y)\,dy \cdot \chi_B(x) \right),$$

其中 $\overline{\operatorname{conv}}(A)$， $A \subset \mathbb{R}^d$，是 A的闭凸包。正如 [4, 第 3]节 $M_{\mathcal{B}}$ 所证明的， 是一个可测凸集值函数，并且是次线性且单调的。此外，我们有以下范数不等式。

定理 2.1。 设 $\mathcal{B}$ 是一个 *Muckenhoupt* 基。固定 $1 < p \le \infty$ 给定一个矩阵 $W \in A_{p,\,\mathcal{B}}$, $1 < p < \infty$, 凸集值极大算子 $M_{\mathcal{B}}$： $L^p_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n, W) \to L^p_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n, W)$ 是有界的：

$$\|M_{\mathcal{B}}F\|_{L^p_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n,W)} \le C(d)K_{p,\mathcal{B}}([W]_{\mathcal{A}_p})\|MF\|_{L^p_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n,W)},$$

其中 $K_{p,\,\mathcal{B}}$ 是定义*1.4*中的常数。此外，若 $\mathcal{B} = \mathcal{Q}$，即立方体基，则 n

$$\|M_{\mathcal{Q}}F\|_{L^p_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n,W)} \le C(n,d,p)[W]^{p'}_{\mathcal{A}_p}\|MF\|_{L^p_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n,W)}.$$

作为外推论证的一部分，我们需要从极大算子转向一个密切相关的函数，该函数取值为球或椭球。给定矩阵权 W，我们将椭球值算子N_W定义为 $N_WF(x) = |W(x)F(x)|W^{-1}(x)\mathbf{B}$。那么 N_W是次线性且单调的，并且是一个等距映射：对所有p, $\|N_WF\|_{L^p_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n,W)} = \|F\|_{L^p_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n,W)}$。参见 [1,引理 8.4]。

我们还需要 Rubio deFrancia 迭代算子的以下凸集值版本。以下结果已在 [1, 定理 7.6、引理 8.5] 中证明。

定理 2.2。 给定一个矩阵权和 $1 \le p < \infty$，假设 T 是一个凸集值算子，并满足以下性质：

(1) T： $L^p_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n, W) \to L^p_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n, W)$，其范数为 $\|T\|_{L^p_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n,\,W)}$；*(2)* T 是次线性且单调的。

给定 $G \in L^p_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n, G)$，定义

$$SG(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\|T\|^{-k}_{L^p_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n,W)}T^kG(x), \tag{2.1}$$

其中 $T^kG = T \circ T \circ \cdots \circ TG$对 $k \ge 1$和 $T^0G(x) = G(x)$成立。于是该级数在 $L^p_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n, W)$中收敛，并且 $SG\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{K}_{bcs}(\mathbb{R}^d)$ 是一个可测映射。此外，它具有以下性质：

(1) $G(x) \subset SG(x)$；*(2)* $\|SG\|_{L^p_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n,\rho)} \le 2\|G\|_{L^p_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n,W)}$；*(3)* $T(SG)(x) \subset 2\|T\|_{L^p_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n,W)}SG(x)$。

此外，如果 TG 是一个 椭球或球值函数，只要 G 是如此，那么 SG 也为椭球或球值 .

最后，我们需要关于矩阵权重 $\mathcal{A}_p$ 的三个结果。这些结果均已针对基立方体$\mathcal{Q}$证明，但同样的证明也适用于任意 Muckenhoupt 基 $\mathcal{B}$。第一个结果已在 [1, 推论 8.9]中证明。

引理 2.3。 给定一个 *Muckenhoupt* 基 $\mathcal{B}$、 $1 < p < \infty$ 和 $W \in \mathcal{A}_{p,\,\mathcal{B}}$，假设存在一个标量函数 s $_{-\quad p \quad 1-p}$使得 $W_1 = sW \in \mathcal{A}_{\infty,\,\mathcal{B}}$。那么对于 $p < p_0 < \infty$、 $\bar{W} = W^{\frac{p}{p_0}}W_1^{1-\frac{p}{p_0}} \in \mathcal{A}_{p_0,\,\mathcal{B}}$；此外，

$$[\bar{W}]_{\mathcal{A}_{p_0},\mathcal{B}} \le C(d)[W]^{\frac{p}{p_0}}_{\mathcal{A}_{p,\mathcal{B}}}[W_1]^{1-\frac{p}{p_0}}_{\mathcal{A}_{\infty},\mathcal{B}}.$$

同样地，如果存在一个标量函数 r 使得 $W_0 = rW \in \mathcal{A}_{1,\mathcal{B}}$，那么对于每个 $1 < p_0 < p$、$\bar{W} = W_0^{\frac{p_0'}{p_0}} W^{\frac{p_0'}{p_0}} \in \mathcal{A}_{p_0,\mathcal{B}}$；此外，

$$[\bar{W}]_{\mathcal{A}_{p_0,\mathcal{B}}} \leq C(d)[W_0]_{\mathcal{A}_{1,\mathcal{B}}}^{1-\frac{p_0'}{p_0}} [W]_{\mathcal{A}_{p,\mathcal{B}}}^{\frac{p_0'}{p_0}}.$$

第二个是矩阵权的一个众所周知的性质；见 [1, 命题 6。4]。

引理 2.4。给定一个基 $\mathcal{B}$ 和 $1 \leq p \leq \infty$，矩阵权 W 满足 $W \in \mathcal{A}_{p,\mathcal{B}}$ 当且仅当 $W^{-1} \in \mathcal{A}_{p',\mathcal{B}}$ 且此时 $[W]_{\mathcal{A}_{p,\mathcal{B}}} \approx [W^{-1}]_{\mathcal{A}_{p',\mathcal{B}}}$。

第三个结果将凸集值极大算子与矩阵 $\mathcal{A}_1$ 权重联系起来。给定一个局部可积有界的凸集值函数 F，若存在常数 C，使得对几乎处处的 x，$M_{\mathcal{B}}F(x) \subset F(x)$，则称其属于凸集值 $\mathcal{A}_{1,\mathcal{B}}^{\mathcal{K}}$。所有此类常数的下确界记为 $[F]_{\mathcal{A}_{1,\mathcal{B}}^{\mathcal{K}}}$。以下结果证明于 [1,推论 7.4]。

引理 2.5。给定一个基 $\mathcal{B}$和一个矩阵权 W，$W \in \mathcal{A}_{1,\mathcal{B}}$ 当且仅当 $W\mathbf{B} \in \mathcal{A}_{1,\mathcal{B}}^{\mathcal{K}}$。此外，$[W]_{\mathcal{A}_{1,\mathcal{B}}} = [W_{\mathbf{B}}]_{\mathcal{A}_{1,\mathcal{B}}^{\mathcal{K}}}$

定理的证明*1.6*：我们将假设 $p_0 < q_0$，从而 $1 < s < \infty$。当$p_0 = q_0$时，证明只需作细微修改。此外，这一情形已在 [1, 定理 91] 中证明。当 $\mathcal{B} = \mathcal{Q}$时，立方体基的情形可直接推广到一般基。我们将证明分为四种情形：$1 < p_0 < q_0 < \infty$ 和 $p < p_0$；$1 < p_0$ 和 $q_0 = \infty$；$1 < p_0 < q_0 < \infty$ 和 $p_0 < p$；以及 $p_0 = 1$和$q_0 < \infty$。

情形 I： $\mathbf{1 < p_0 < q_0 < \infty}$ **和** $\boldsymbol{p < p_0}$。固定 $1 < p_0 < q_0 < \infty$，并令 p，q，r，s 满足假设。令 W为满足$W^s \in \mathcal{A}_{r\text{的矩阵权},\mathcal{B}}$。定义 $P_W = N_{W^s} M_{\mathcal{B}}$；则 P_W是次线性且单调的，并且根据定理2.1，

$$\|P_W\|_{L^r_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n,W^s)} = \|M_{\mathcal{B}}\|_{L^r_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n,W^s)} = K_r([W^s]_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}}).$$

若我们将迭代算子 R_W 定义为

$$\mathcal{R}_W H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \|P_W\|^{-k}_{L^r_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n,W^s)} P_W^k H(x),$$

那么由定理2.2 可知，它定义在 $L^r_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n, W^s)$ 上，并满足：

(A_0) $H(x) \subset \mathcal{R}_W H(x)$; ($\mathsf{B}_0$) $\|\mathcal{R}_W H\|_{L^r_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n,W^s)} \leq 2\|H\|_{L^r_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n,W^s)}$; ($\mathsf{C}_0$) $\mathcal{R}_W H \in \mathcal{A}_1^{\mathcal{K}}$ 和 $M(\mathcal{R}_W H)(x) \subset P_W(\mathcal{R}_W H)(x) \subset 2K_{r,\mathcal{B}}([W^s]_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}})\mathcal{R}_W H(x)$。

现在固定$(f, g) \in \mathcal{F}$；根据 $\mathcal{F}$的定义，$0 < \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,W)}\ \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,W)} < \infty$。定义凸集值函数

$$F(x) = \overline{\operatorname{conv}}\{-f(x), f(x)\}, \qquad G(x) = \overline{\operatorname{conv}}\{-g(x), g(x)\}.$$

于是我们有

$$N_W F(x) = |W(x)F(x)|W^{-1}(x)\overline{\mathbf{B}} = |W(x)f(x)|W^{-1}(x)\overline{\mathbf{B}};$$

同样，$N_W G(x) = |W(x)g(x)|W^{-1}(x)\mathbf{B}$。定义椭球值函数

$$H_1(x) = \left(\frac{|W(x)f(x)|}{\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,W)}} + \left[\frac{|W(x)g(x)|}{\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,W)}}\right]^{\frac{p}{q}}\right) W^{-1}(x)\overline{\mathbf{B}} = h_1(x)W^{-1}(x)\overline{\mathbf{B}};$$

则 $\|H_1\|_{L^q(\mathbb{R}^n,\ W)} = \|h_1\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le 2$。定义 $H_1^s = h_1^s W^{-s}\overline{\mathbf{B}}$；则

$$\|H_1^s\|_{L^r_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n,W^s)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|W^s(x)h_1^s(x)W^{-s}(x)\overline{\mathbf{B}}\right|^r\, dx\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h_1|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}s} \le 2^s. \tag{2.2}$$

因此，$H_1^s \in L^r_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n,\ W^s)$ 以及 $\mathcal{R}_W H_1^s$ 均已定义。由于 H_1^s 是一个椭球值函数，根据定理 2.2，$\mathcal{R}_W H_1^s$ 也是一个椭球值函数。因此，存在一个标量函数 $R_W h_1^s$ 使得

$$\mathcal{R}_W H_1^s(x) = \mathcal{R}_W h_1^s W^{-s}\overline{\mathbf{B}}.$$

我们断言，性质（A_0）、（B_0）和（C_0）蕴含以下结论：

（A_1）$h_1(x) \le h_1(x)$；（B_1）$\|h_1\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le 2^{\frac{1}{s}+1}$；（$C_1$）$h_1^s W^{-s} \in \mathcal{A}_{1,\ \mathcal{B}}$ 且 $[h_1^s W^{-s}]_{\mathcal{A}_{1,\ \mathcal{B}}} \le c(d)K_r([W^s]_{\mathcal{A}_{r,\ \mathcal{B}}})$。

为证明（A_1）：由（A_0）可得 $h_1^s(x) \le R_W h_1^s(x)$。因此，$h_1(x) \le (R_W h_1^s)^{\frac{1}{s}}(x) = h_1(x)$。不等式（$B_1$）由（$B_0$）和不等式（2.2）得到：

$$\begin{aligned}\|h_1\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|(\mathcal{R}_W h_1^s)^{\frac{1}{s}}(x)\right|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W^s(x)\mathcal{R}_W H_1^s(x)|^r\, dx\right)^{\frac{1}{rs}} \le 2^{\frac{1}{s}}\|H_1^s\|^{\frac{1}{s}}_{L^r_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n,W^s)} \le 2^{\frac{1}{s}+1}.\end{aligned}$$

为证明 (C_1)：由 (C_0) 可得

$$\mathcal{R}_W H_1^s(x) = \mathcal{R}_W h_1^s W^{-s}\overline{\mathbf{B}} \in \mathcal{A}^{\mathcal{K}}_{1,\mathcal{B}},$$

因此由引理 2.5，$h_1^s W^{-s} \in \mathcal{A}_{1,\ \mathcal{B}}$ 以及 $[h_1^s W^{-s}]_{\mathcal{A}_{1,\ \mathcal{B}}} \le c(d)K_r([W^s]_{\mathcal{A}_{r,\ \mathcal{B}}})$。

我们断言，若定义 $W_0(x) = h_1(x)^{-\frac{(q_0-q)}{q_0}} W(x)$，则 $W_0^s \in \mathcal{A}_{r_0,\ \mathcal{B}}$ 且

$$[W_0^s]_{\mathcal{A}_{r_0,\mathcal{B}}} \le C(d,r)[W^s]^{\frac{r}{r_0}}_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}} K_r([W^s]_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}})^{1-\frac{r}{r_0}}.$$

为证明 $W_0^s \in \mathcal{A}_{r_0,\ \mathcal{B}}$，注意到由 ($C_1$) 可得，$h_1^s W^{-s} \in \mathcal{A}_{1,\ \mathcal{B}}$；因此，$h_1^{-s} W^s \in \mathcal{A}_{\infty,\ \mathcal{B}}$。于是，由引理 2.3，$W_0^s = h^{-s(\frac{q-q_0}{q_0})} W^s = \left(h_1^{-s}W^s\right)^{1-\frac{r}{r_0}}(W^s)^{\frac{r}{r_0}} \in \mathcal{A}_{r_0,\ \mathcal{B}}$，并且

$$[W_0^s]_{\mathcal{A}_{r_0,\mathcal{B}}} \le C(d)[W^s]^{\frac{r}{r_0}}_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}}[h_1^{-s}W^s]^{1-\frac{r}{r_0}}_{\mathcal{A}_{\infty,\mathcal{B}}}.$$

由引理2.4可得$[h_1^{-s}W^s]_{\mathcal{A}_{\infty,\ \mathcal{B}}} \approx [h_1^s W^{-s}]_{\mathcal{A}_{1,\ \mathcal{B}}}$，并且根据 ($C_1$)，

$$[W_0^s]_{\mathcal{A}_{r_0,\mathcal{B}}} \lesssim C(d)[W^s]^{\frac{r}{r_0}}_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}}[h_1^s W^{-s}]^{1-\frac{r}{r_0}}_{\mathcal{A}_{1,\mathcal{B}}} \le C(d,r)[W^s]^{\frac{r}{r_0}}_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}} K_r([W^s]_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}})^{1-\frac{r}{r_0}}.$$

现在我们可以证明不等式（1.5）。由于 $\frac{1}{p_0} = \frac{1}{q_0} = \frac{1}{s'}$ 且 $p < p_0$，$q < q_0$。因此，根据指数为 $\frac{q_0}{q}$ 的 H¨older 不等式以及（B_1），

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,W)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W(x)f(x)|^q h_1(x)^{-\frac{q(q_0-q)}{q_0}} h_1(x)^{\frac{q(q_0-q)}{q_0}}\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W(x)f(x)|^{q_0} h_1(x)^{-(q_0-q)}\, dx\right)^{\frac{1}{q_0}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} h_1(x)^q dx\right)^{\frac{q_0-q}{qq_0}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W(x)f(x)|^{q_0} h_1(x)^{-(q_0-q)}\, dx\right)^{\frac{1}{q_0}} 2^{(\frac{1}{s}+1)(\frac{q_0-q}{q_0})}.\end{aligned}$$

根据 h_1 的定义和（A_1），我们有

$$\frac{|W(x)f(x)|}{\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,W)}} \le h_1(x) \le \overline{h}_1(x).$$

因此，

$$\int_{\mathbb{R}^n} |W(x)f(x)|^{q_0}\overline{h}_1(x)^{-(q_0-q)}\,dx \le \|f\|^{(q_0-q)}_{L^q(\mathbb{R}^n,W)} \int_{\mathbb{R}^n} |W(x)f(x)|^q dx = \|f\|^{q_0}_{L^q(\mathbb{R}^n,W)} < \infty.$$

再次利用性质 (A_1)，可得

$$\left[\frac{|W(x)g(x)|}{\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,W)}}\right]^{\frac{p}{q}} \le h_1(x) \le \overline{h}_1(x);$$

因此，

$$|W(x)g(x)|^{p_0} \le \overline{h_1}(x)^{\ \frac{q}{p}p_0}\|g\|^{p_0}_{L^p(\mathbb{R}^n,\ W)}.$$

因此，根据我们的假设（1.5）、W_0的定义、（B_1），并且由于 $N_{p_0,\ q_0}$ 是递增的，我们得到

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,W)} &\le 2^{(\frac{1}{s}+1)(\frac{q_0-q}{q_0})}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|W_0(x)f(x)|^{q_0}dx\right)^{\frac{1}{q_0}}\\
&\le 2^{(\frac{1}{s}+1)(\frac{q_0-q}{q_0})}N_{p_0,q_0}\left([W_0^s]_{\mathcal{A}_{r_0,\mathcal{B}}}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|W_0(x)g(x)|^{p_0}dx\right)^{\frac{1}{p_0}}\\
&\le 2^{(\frac{1}{s}+1)(\frac{q_0-q}{q_0})}N_{p_0,q_0}\left([W_0^s]_{\mathcal{A}_{r_0,\mathcal{B}}}\right)\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,W)}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\overline{h}_1(x)^{\frac{q}{p}p_0-\frac{(q_0-q)}{q_0}p_0}dx\right)^{\frac{1}{p_0}}\\
&= 2^{(\frac{1}{s}+1)(\frac{q_0-q}{q_0})}N_{p_0,q_0}\left([W_0^s]_{\mathcal{A}_{r_0,\mathcal{B}}}\right)\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,W)}\|\overline{h}_1\|^{\frac{q}{p_0}}_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\
&\le 2^{(\frac{1}{s}+1)(\frac{q_0-q}{q_0})}N_{p_0,q_0}\left([W_0^s]_{\mathcal{A}_{r_0,\mathcal{B}}}\right)\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,W)}2^{(\frac{1}{s}+1)\frac{q}{p_0}}\\
&\le 2^{(\frac{1}{s}+1)\frac{q}{p}}N_{p_0,q_0}\big(C(d,r)[W^s]^{\frac{r}{r_0}}_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}}K_r([W^s]_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}})\big)^{1-\frac{r}{r_0}}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,W)};
\end{aligned}$$

在第三个不等式中，我们使用了 $\big(\frac{q}{p} - \frac{(q_0-q)}{q_0}\big)p_0 = q$这一事实。

情形 II： $\mathbf{1 < p_0 < \infty}$ **和** $\boldsymbol{q_0 = \infty}$。固定 $1 < p_0 < \infty$，令 p，q，r如假设中所述。注意，在此情形下，$s = p_0'$ 和 $r_0 = \infty$。固定一个矩阵权 W，使得 $W^{p_0'} \in \mathcal{A}_{r,\ \mathcal{B}}$。证明与情形 I 的证明类似，但更为简单。

如果我们按照前一种情形定义 H_1、h_1 和 h_1，那么条件（A_1）、（B_1）和（C_1）成立。根据 h_1 的定义和（A_1），

$$|W(x)f(x)|\overline{h}_1(x)^{-1} \le |W(x)f(x)|h_1(x)^{-1} \le \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,W)} < \infty. \tag{2.3}$$

因此，若定义 $W_0(x) = h_1(\overline{x})^{-1}W(x)$，则可得

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,W_0)} \le \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,W)} < \infty.$$

由 (C_1) 可知 $h_1(\overline{x})^{p_0'}W(x)^{-p_0'} \in \mathcal{A}_{1,\mathcal{B}}$；因此，$W_0(x)^{p_0'} = \overline{h_1}(x)^{-p_0'}W(x)^{p_0'} \in \mathcal{A}_{\infty,\mathcal{B}}$且

$$[\overline{h}_1^{-p_0'}W^{p_0'}]_{\mathcal{A}_{\infty,\mathcal{B}}} \le C(d)K_r\big([W^{p_0'}]_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}}\big).$$

因此，根据假设（1.6）和（B_1），

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,W)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}|W_0(x)f(x)|^q\overline{h}_1(x)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,W_0)}\|\overline{h}_1\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le 2^{\frac{1}{p_0'}+1}N_{p_0,\infty}\big([W_0^{p_0'}]_{\mathcal{A}_{\infty,\mathcal{B}}}\big)\|g\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n,W_0)}.
\end{aligned}$$

如果按照证明（2.3）时所采用的方法进行论证，我们得到

$$|\overline{h}_1(x)^{-1}W(x)g(x)| \le \overline{h}_1(x)^{\frac{q}{p}-1}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,W)}.$$

因此，

$$\|g\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n,W_0)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\overline{h}_1(x)^{-1}W(x)g(x)|^{p_0}dx\right)^{\frac{1}{p_0}} \le \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|g\|^{p_0}_{L^p(\mathbb{R}^n,W)}\overline{h}_1(x)^{(\frac{q}{p}-1)p_0}dx\right)^{\frac{1}{p_0}}$$
$$= \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,W)}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \overline{h}_1(x)^q dx\right)^{\frac{1}{p_0}} \le \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,W)}2^{(\frac{1}{p_0'}+1)\frac{q}{p_0}};$$

对于中间的等号，我们利用了这样一个事实：由于 $q_0=\infty$，$(\frac{q}{p}-1)p_0 = q$。若将此与前一个不等式结合，并利用 $N_{p_0,\,\infty}$ 递增这一事实，我们得到

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,W)} \le 2^{(\frac{1}{p_0'}+1)(1+\frac{q}{p_0})}N_{p_0,\infty}\big([W_0^{p_0'}]_{\mathcal{A}_{\infty,\mathcal{B}}}\big)\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,W)}$$
$$\le 2^{(\frac{1}{p_0'}+1)\frac{q}{p}}N_{p_0,\infty}\big(C(d)K_r\big([W^{p_0'}]_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}}\big)\big)\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,W)}.$$

情形 III： $\mathbf{1 < p_0 < q_0 < \infty}$ **且** $\boldsymbol{p_0 < p}$。固定 $1<p_0<q_0<\infty$，并按照假设定义 p，q，r，s。于是 $q_0<q$。取一个矩阵权 W，使得 $W^s\in\mathcal{A}_{r,\,\mathcal{B}}$。于是，由推论 2.4，$W^{-s}\in\mathcal{A}_{r',\,\mathcal{B}}$，因此 $M_{\mathcal{B}}$在 $L^{r'}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n,\ W^{-s})$ 上有界。若定义

$$M_s'H(x) = W^{-s}(x)M_{\mathcal{B}}(W^sH)(x),$$

then

$$\|M_s'H\|_{L^{r'}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n)} = \|M_{\mathcal{B}}(W^sH)\|_{L^{r'}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n,W^{-s})} \le K_{r'}([W^{-s}]_{\mathcal{A}_{r',\mathcal{B}}})\|H\|_{L^{r'}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n)}.$$

令 $P_I' = N_I M_s'$；则 P_I'是次线性、单调的，且其算子范数与 M_s'相同。因此，由定理 2.2，若定义迭代算子

$$\mathcal{R}_I'H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\|P_I'\|^{-k}_{L^r_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n)}(P_I')^kH(x),$$

则有以下结论：

(A_0') $H(x)\subset\mathcal{R}_I'H(x)$;
(B_0') $\|\mathcal{R}_I'H\|_{L^{r'}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n)} \le 2\|H\|_{L^{r'}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n)}$;
(C_0') $W^s\mathcal{R}_I'H\in\mathcal{A}_1^{\mathcal{K}}$ and $M(W^s\mathcal{R}_I'H)(x)\subset K_{r'}([W^{-s}]_{\mathcal{A}_{r',\mathcal{B}}})W^s\mathcal{R}_I'H(x)$.

1固定 $(f,g)\in\mathcal{F}$; 同样可得 $0<\|f\|_{L^q(w)}\ \|g\|_{L^p(w)}<\infty$. 由于 $\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,W)} = \||Wf|^s\|^{\frac{s}{r}}_{L^r(\mathbb{R}^{\bar{n}})}$，由对偶性可知，存在函数 $h_2(x)\in L^{r'}(\mathbb{R}^n)$,$\|h_2\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)}=1$，使得

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,W)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n}|W(x)f(x)|^s h_2(x)dx\right)^{\frac{1}{s}}.$$

令 $H_2(x) = h_2(x)\mathbf{B}$；则 $H_2\in L^{r'}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n)$，$\|H_2\|_{L^{r'}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n)}=1$，此外，由于 H_2 是球值函数，根据定理 2.2，$\mathcal{R}_I'H_2$也为球值。因此，存在标量函数 $h_2=\mathcal{R}_I'h_2$使得

$$\mathcal{R}_I'H_2(x) = \mathcal{R}_I'h_2(x)\overline{\mathbf{B}}.$$

我们现在断言以下结论成立：

(A_1') $h_2(x)\le\overline{h}_2(x)$;
(B_1') $\|\overline{h}_2\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)}\le 2$;
(C_1') $\overline{h}_2W^s\in\mathcal{A}_{1,\mathcal{B}}$ and $[\overline{h}_2W^s]_{\mathcal{A}_{1,\mathcal{B}}}\le c(d)K_{r'}([W^{-s}]_{\mathcal{A}_{r',\mathcal{B}}})$.

不等式 性（A_1'）由（A_0'）以及 h_2的定义得出。不等式（B_1'）由（B_0'得出):

$$\|\overline{h}_2\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{R}_I' H_2\|_{L^{r'}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n)} \leq 2\|H_2\|_{L^{r'}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n)} = 2.$$

最后，(C_1') 可由 (C_0') 和引理2.5 得出。

现在我们可以开始估计 (1.6)。由 (A_1') 以及指数为 ¨和 $r_0 = \frac{q_0}{s}$的 Hölder 不等式 $r_0' = \frac{p_0'}{s}$，

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,W)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W(x)f(x)|^s h_2(x)dx\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W(x)f(x)|^s \overline{h}_2(x)^{\frac{(q-q_0)}{q_0(q-s)}s} h_2(x)^{\frac{(q_0-s)q}{q_0(q-s)}}\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W(x)\overline{h}_2(x)^{\frac{(q-q_0)}{q_0(q-s)}} f(x)|^{q_0} dx\right)^{\frac{1}{q_0}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} h_2(x)^{\frac{q}{q-s}}\right)^{\frac{1}{sr_0'}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W(x)\overline{h}_2(x)^{\frac{(q-q_0)}{q_0(q-s)}} f(x)|^{q_0} dx\right)^{\frac{1}{q_0}};
\end{aligned}$$

最后一个等式成立，因为$\frac{q}{q-s} = r'$并且由$\|h_2\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)} = 1$。最后一项是有限的：由 $\frac{q}{q_0}$ 为 ¨的 Hölder 不等式、$(\frac{q}{q_0})' = \frac{q}{q-q_0}$，以及由 ($B_1'$),

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,W)} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W(x)f(x)|^{q_0} \overline{h}_2(x)^{\frac{(q-q_0)}{q-s}} dx\right)^{\frac{1}{q_0}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W(x)f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \overline{h}_2(x)^{r'} dx\right)^{\frac{q-q_0}{qq_0}} \leq 2^{r'\frac{(q-q_0)}{qq_0}} \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,W)} < \infty.
\end{aligned}$$

定义 $W_0(x) = h_2(x)^{(q-q_0)q_0(q-s)} W(x)$；我们声称 $W_0^s \in \mathcal{A}_{r_0,\mathcal{B}}$其中

$$[W_0^s]_{\mathcal{A}_{r_0,\mathcal{B}}} \leq C(d,r)K_{r',\mathcal{B}}\big([W^{-s}]_{\mathcal{A}_{r',\mathcal{B}}}\big)^{1-\frac{r'}{r_0'}} [W^s]^{\frac{r'}{r_0'}}_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}}.$$

为证明这一点，注意到根据（C_1'），$h_2 W^s \in \mathcal{A}_{1,\mathcal{B}}$。由于 $r' = \frac{p'}{s} = \frac{q}{q-s}$ 以及 $r_0' = \frac{p_0'}{s} = \frac{q_0}{q_0-s}$，我们得到$1-\frac{r'}{r_0'} = s(q-q_0)q_0(q-s)$。因此，根据引理2.3,

$$W_0^s(x) = \overline{h}_2(x)^{\frac{s(q-q_0)}{q_0(q-s)}} W(x)^s = \big(\overline{h}_2(x)W(x)^s\big)^{1-\frac{r'}{r_0'}} (W(x)^s)^{\frac{r'}{r_0'}} \in \mathcal{A}_{r_0,\mathcal{B}},$$

and

$$[W_0^s]_{\mathcal{A}_{r_0,\mathcal{B}}} \leq C(d)[\overline{h}_2 W^s]^{1-\frac{r'}{r_0'}}_{\mathcal{A}_{1,\mathcal{B}}} [W^s]^{\frac{r'}{r_0'}}_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}} \leq C(d,r)K_{r',\mathcal{B}}\big([W^{-s}]_{\mathcal{A}_{r',\mathcal{B}}}\big)^{1-\frac{r'}{r_0'}} [W^s]^{\frac{r'}{r_0'}}_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}}.$$

现在我们可以继续估计（1.6）。根据（1.5），H¨older 不等式，其指数为 $\frac{p}{p_0}$，$(\frac{p}{p_0})' = \frac{p}{p-p_0}$，

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,W)} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W_0(x)f(x)|^{q_0} dx\right)^{\frac{1}{q_0}} \\
&\leq N_{p_0,q_0}([W_0^s]_{\mathcal{A}_{r_0,\mathcal{B}}}) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W_0(x)g(x)|^{p_0} dx\right)^{\frac{1}{p_0}} \\
&\leq N_{p_0,q_0}([W_0^s]_{\mathcal{A}_{r_0,\mathcal{B}}}) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W(x)g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \overline{h}_2(x)^{\frac{p_0(q-q_0)}{q_0(q-s)}\frac{p}{p-p_0}} dx\right)^{\frac{p-p_0}{pp_0}};
\end{aligned}$$

由于 $\frac{p_0}{\underline{(q-q_0)}\ q_0}\frac{p}{\underline{(q-s)}\ p-p_0}=r'$，根据（$\mathrm{B}_1'$），并且由于 $N_{p_0,\ q_0}$ 是递增的，

$$
\begin{aligned}
&= N_{p_0,q_0}([W_0^s]_{\mathcal{A}_{r_0,\mathcal{B}}})\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,W)}\|\overline{h}_2\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)}^{r'\frac{(p-p_0)}{pp_0}}\\
&\le 2^{r'\frac{p-p_0}{pp_0}}N_{p_0,q_0}\big(C(d,r)K_{r'}\big([W^{-s}]_{\mathcal{A}_{r',\mathcal{B}}}\big)^{1-\frac{r'}{r_0'}}[W^s]_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}}^{\frac{r'}{r_0'}}\big)\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,W)}.
\end{aligned}
$$

情形 IV：$p_0=1$ 和 $q_0<\infty$。 固定 $1<q_0<\infty$，并令 p，q，r 如假设中所述。注意，在此情形下，$s=q_0$ 且 $r_0=1$。固定一个矩阵权 W，使得 $W^{q_0}\in\mathcal{A}_{r,\ \mathcal{B}}$。证明与情形 III 中的证明非常相似。再次利用对偶性，存在 $h_2\in L^{r'}(\mathbb{R}^n)$,$\|h_2\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)}=1$，使得

$$
\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,W)}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|W(x)f(x)|^{q_0}h_2(x)dx\right)^{\frac{1}{q_0}}.
$$

按前述方式定义 H_2 和 $h_2=\mathcal{R}_I'h_2$。则 (A_1')、(B_1') 和 (C_1') 成立。定义矩阵 $W_0(x)=_1h_2(x)^{q_0}W(x)$；于是由 (C_1') 可得 $W_0^{q_0}\in\mathcal{A}_{1,\ \mathcal{B}}$ 且

$$
[W_0^{q_0}]_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}}\le C(d)K_{r'}\left([W^{-q_0}]_{\mathcal{A}_{r',\mathcal{B}}}\right).
$$

此外，根据对偶关系、指数为 $\frac{q}{q_0}$ 的 Hölder 不等式以及 (B_1')，

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^{q_0}(\mathbb{R}^n,W_0)}&=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|W(x)f(x)|^{q_0}\overline{h}_2(x)dx\right)^{\frac{1}{q_0}}\\
&\le\left(\int_{\mathbb{R}^n}|W(x)f(x)|^qdx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\overline{h}_2(x)^{r'}dx\right)^{\frac{1}{r's}}\le 2^{\frac{1}{s}}\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,W)}<\infty.
\end{aligned}
$$

现在我们可以证明 (1.6)。根据对偶关系 (A_1')、我们的假设 (1.5)（回想一下 $p_0=1$）、Hölder 不等式，以及由于 $N_{1,\ q_0}$ 是递增的，我们有

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,W)}&\le\left(\int_{\mathbb{R}^n}|W_0(x)f(x)|^{q_0}dx\right)^{\frac{1}{q_0}}\\
&\le N_{1,q_0}\left([W_0^{q_0}]_{\mathcal{A}_{r_0,\mathcal{B}}}\right)\int_{\mathbb{R}^n}|W_0(x)g(x)|dx;
\end{aligned}
$$

根据指数为 p 的 Hölder 不等式、(B_1')，并且由于$N_{1,\ q_0}$ 是递增的，

$$
\begin{aligned}
&= N_{1,q_0}\left([W_0^{q_0}]_{\mathcal{A}_{r_0,\mathcal{B}}}\right)\int_{\mathbb{R}^n}|W(x)g(x)|\overline{h}_2(x)^{\frac{1}{q_0}}dx\\
&\le N_{1,q_0}\left([W_0^{q_0}]_{\mathcal{A}_{r_0,\mathcal{B}}}\right)\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,W)}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\overline{h}_2(x)^{\frac{p'}{q_0}}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&= N_{1,q_0}\left([W_0^{q_0}]_{\mathcal{A}_{r_0,\mathcal{B}}}\right)\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,W)}\|\overline{h}_2\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{q_0}}\\
&\le 2^{\frac{1}{q_0}}N_{1,q_0}\big(C(d)K_{r'}\big([W^{-q_0}]_{\mathcal{A}_{r',\mathcal{B}}}\big)\big)\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,W)}.
\end{aligned}
$$

□

定理 *1.3* 的证明。为证明这一结果，我们首先估计定理 1.6 中的常数，其中 $\mathcal{B}$ 是立方体基 $\mathcal{Q}$。在此情况下，根据定理 2.1，对于 $W^s\in\mathcal{A}_r$，

$$
\|M\|_{L^r_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n,W^s)}\le C(n,d,r)[W^s]_{\mathcal{A}_r}^{r'}.
$$

因此，如果 $p < p_0$，由于 $N_{p_0,\ q_0}$ 是递增的，

$$\begin{aligned} N_{p,q}(\mathcal{B}, p_0, q_0, [W^s]_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}}) &= 2^{(\frac{1}{s}+1)\frac{q}{p}} N_{p_0,q_0}\big(C(d,r)[W^s]_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}}^{\frac{r}{r_0}} K_r([W^s]_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}})^{1-\frac{r}{r_0}}\big) \\ &\le 2^{(\frac{1}{s}+1)\frac{q}{p}} N_{p_0,q_0}\big(C(n,d,p,q,p_0,q_0)[W^s]_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}}^{\frac{r}{r_0}+(1-\frac{r}{r_0})r'}\big) \\ &= 2^{(\frac{1}{s}+1)\frac{q}{p}} N_{p_0,q_0}\big(C(n,d,p,q,p_0,q_0)[W^s]_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}}^{\frac{r'}{r'_0}}\big). \end{aligned}$$

另一方面，如果 $p > p_0$，根据推论2.4， $W^{-s} \in \mathcal{A}_{r'}$，因此

$$\|M\|_{L^{r'}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n, W^{-s})} \le C(n,d,p)[W^{-s}]^r_{\mathcal{A}_{r'}}.$$

那么，通过一个非常类似的论证，我们可得

$$\begin{aligned} N_{p,q}(\mathcal{B}, p_0, q_0, [W^s]_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}}) &= 2^{r'\frac{p-p_0}{pp_0}} N_{p_0,q_0}\big(C(d,r)[W^s]_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}}^{\frac{r'}{r'_0}} K_{r'}([W^{-s}]_{\mathcal{A}_{r',\mathcal{B}}})\big)^{1-\frac{r'}{r'_0}}\big) \\ &\le 2^{r'\frac{p-p_0}{pp_0}} N_{p_0,q_0}\big(C(n,d,p,q,p_0,q_0)[W^s]_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}}^{\frac{r}{r_0}}\big). \end{aligned}$$

结合这两个估计，我们得到定理1.3中出现的常数 .

为了完成证明，我们需要构造一个合适的外推对族。这已在 [1, 定理 1.5] 中完成，下面我们概述将其应用于非对角情形所需的改动。设 T 是一个线性算子，使得对于某个 p_0 以及所有满足 $W_0^s \in \mathcal{A}_{r_0}$ 的 W_0 ，(1.3) 成立。那么，令 W_0 为对角矩阵 $w_0 I_d$，其中 w_0^s 属于标量 $\mathcal{A}_{r_0}$，我们看到 $T\colon\ L^{p_0}(w_0) \to L^{q_0}(w_0)$。因此，根据下文的定理 A.1，对于任意满足 $w^s \in \mathcal{A}_r$ 的 w ，有 $T\colon\ L^p(w) \to L^q(w)$。

对于所有 $1 \le p < \infty$ 以及任意矩阵权重 W，由 [6, 命题 3.6]， $L^\infty_c(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^d)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n,\ W)$ 中稠密。由 [1, 推论 6.7],，若 $W^s \in \mathcal{A}_r$，则 $|W^s|_{\mathrm{op}} = |W|^s_{\mathrm{op}}$ 是 $\mathcal{A}_r$ 中的标量权重。因此，对于任意 $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^d)$，我们有，

$$\|Tf\|_{L^q(\mathbb{R}^n, W)} \le \|Tf\|_{L^q(\mathbb{R}^n, |W|_{\mathrm{op}})} \lesssim \|f_{\mathbb{R}^n, L^q(|W|_{\mathrm{op}})} < \infty.$$

现在我们可以将定理 1.6应用于族 $\mathcal{F} = \{(|Tf|,\ |f|)\colon f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^d)\}$，从而证明不等式 (1.4) 对所有 $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^d)$成立。为证明它对所有 $f \in L^p(\mathbb{R}^n,\ W)$成立，我们使用标准的逼近论证。 □

附录 A. 尖锐常数标量外推

在本附录中，我们证明定理 1.6 的标量版本。该结果最初发表于 [11]；此处我们给出一个更简单的证明，其依据是 [5, 第 3 节中对角情形下尖锐常数外推定理的证明4]。正如我们在引言中所指出的，定理 1.6 的证明以这一标量结果为蓝本，其证明可为理解矩阵情形中的更广泛思想提供指引。证明之后，我们将简要讨论从标量情形推广到矩阵情形时遇到的技术障碍。

We 首先给出一些定义。设 $\mathcal{B}$ 是一个基；定义标量极大算子 $M_{\mathcal{B}}$ b y

$$M_{\mathcal{B}} f(x) = \sup_{B \in \mathcal{B}} \fint_B |f(y)|\, dy \cdot \chi_B(x).$$

给定一个基 $\mathcal{B}$，若标量权满足 $w \in \mathcal{A}_{p,\mathcal{B}}, 1 \le p \le \infty$，则

$$[w]_{\mathcal{A}_{p,\mathcal{B}}} = \sup_{B \in \mathcal{B}} |B|^{-1} \|w\chi_B\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|w^{-1}\chi_B\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

注意到，根据定义可立即得出 $[w]_{\mathcal{A}_{p,\ \mathcal{B}}} = [w^{-1}]_{\mathcal{A}_{p',\ \mathcal{B}}}$。若对于每个 $1 < p < \infty$ 以及每个 $w \in \mathcal{A}_{p,\ \mathcal{B}}$、$M_{\mathcal{B}}$ 都有： $L^p(\mathbb{R}^n,\ w) \to L^p(\mathbb{R}^n,\ w)$，则称一个基 $\mathcal{B}$ 为 Muckenhoupt 基。与之前一样，我们用 $K_{p,\ \mathcal{B}}([w]_{\mathcal{A}_{p,\ \mathcal{B}}})$ 表示范数不等式中的最佳常数。

对于 $1 \le p \le q \le \infty$，我们将标量权的类 $\mathcal{A}_{p,\,q,\,\mathcal{B}}$ 定义为

$$[w]_{\mathcal{A}_{p,q,\mathcal{B}}} = \sup_{B} |B|^{-1} \|w\chi_B\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \|w^{-1}\chi_B\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

直接计算表明，若 $r = \frac{q}{s}$，其中我们通过 $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{s'}$ 定义 s，则 $r' = \frac{p'}{s}$。因此，$w \in \mathcal{A}_{p,q,\mathcal{B}}$ 当且仅当 $w^s \in \mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}$。事实上，我们有 $[w]_{\mathcal{A}_{p,q,\mathcal{B}}} = [w^s]^{\frac{1}{s}}_{\mathcal{A}_{r,\mathcal{B}}}$。当 $1 < p \le q < \infty$ 时，这可直接由定义得出，因为对所有 $B \in \mathcal{B}$,

$$\left(\fint_B w^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\fint_B w^{-p'}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\fint_B (w^s)^r\,dx\right)^{\frac{1}{rs}} \left(\fint_B (w^s)^{-r'}\,dx\right)^{\frac{1}{r's}}.$$

当 $p = 1$ 或 $q = \infty$ 时，类似的论证成立。因此，我们将针对 $\mathcal{A}_{p,q,\mathcal{B}}$ 权重陈述我们的结果，并在证明中使用这一等价条件。

定理 A.1. 设 $\mathcal{B}$ 为 *Muckenhoupt* 基，且设 $\mathcal{F}$ 为外推对族。假设对某些 p_0、q_0、$1 \le p_0 \le q_0 \le \infty$，存在正增函数 N_{p_0,q_0}，使得对每个权重 $w \in A_{p_0,q_0,\mathcal{B}}$,

$$\|f\|_{L^{q_0}(\mathbb{R}^n,w_0)} \le N_{p_0,q_0}\left([w_0]_{A_{p_0,q_0,\mathcal{B}}}\right)\|g\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n,w_0)}, \quad (f,g) \in \mathcal{F}. \tag{A.1}$$

那么，对于所有满足 $1 < p \le q < \infty$、$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0}$ 的 p、q，以及所有权重 $w \in \mathcal{A}_{p,\,q,\,\mathcal{B}}$,

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,w)} \le N_{p,q}(\mathcal{B},p_0,q_0,[w]_{\mathcal{A}_{p,q,\mathcal{B}}})\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,w)}, \qquad (f,g) \in \mathcal{F}, \tag{A.2}$$

其中，当 $q < q_0$ 时，

$$N_{p,q}(\mathcal{B},p_0,q_0,[w]_{\mathcal{A}_{p,q,\mathcal{B}}}) = 2^{(\frac{1}{s}+1)\frac{q}{p}} N_{p_0,q_0}\left((2\|M_{\mathcal{B}}\|_{L^r(\mathbb{R}^n,w^s)})^{\frac{q_0-q}{q_0 s}} [w]^{\frac{q}{q_0}}_{\mathcal{A}_{p,q,\mathcal{B}}}\right), \tag{A.3}$$

并且，当 $q_0 < q$ 时，

$$N_{p,q}(\mathcal{B},p_0,q_0,[w]_{\mathcal{A}_{p,q,\mathcal{B}}}) = 2^{\frac{q-q_0}{q_0(q-s)}} N_{p_0,q_0}\left((2\|M_{\mathcal{B}}\|_{L^{r'}(w^{-s})})^{\frac{q-q_0}{q_0(q-s)}} [w]^{\frac{p'}{p'_0}}_{\mathcal{A}_{p,q,\mathcal{B}}}\right). \tag{A.4}$$

这里，$1 \le s < \infty$ 定义为 $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} = \frac{1}{p_0} = \frac{1}{q_0} = \frac{1}{s'}$。

注 A.2。在定理 A.1 的表述中，我们排除了 $s = \infty$ 的情形，该情形对应于 $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0} = 1$，因为只有当 p_0 和 q_0 取 $p_0 = 1$ 和 $q_0 = \infty$ 时才可能成立。在这种情况下，不存在可供外推的 p 和 q 值。

推论 A.3。若 $\mathcal{B} = \mathcal{Q}$ 为立方体基，则定理 *A.1* 中的常数变为

$$N_{p,q}(\mathcal{Q},p_0,q_0,[w]_{\mathcal{A}_{p,q}}) = C(p,q,p_0,q_0)N_{p_0,q_0}\left(C(n,p,q,p_0,q_0)[w]^{\max\{\frac{q}{q_0},\frac{p'}{p'_0}\}}_{\mathcal{A}_{p,q}}\right).$$

推论 *A.3* 的证明。当 $\mathcal{B}$ 是立方体基 $\mathcal{Q}$ 且 $M_{\mathcal{B}}$ 是 Hardy-Littlewood 极大算子时，Buckley [2]证明了

$$\|M\|_{L^r(\mathbb{R}^n,w)} \le C(n,r)[w]^{r'}_{\mathcal{A}_r}.$$

因此，

$$\|M\|_{L^r(\mathbb{R}^n,w^s)} \le C(n,r)[w^s]^{r'}_{\mathcal{A}_r} = C(n,r)[w]^{p'}_{\mathcal{A}_{p,q}},$$

将其代入（A.3），可知 $[w]_{\mathcal{A}_{p,\,q}}$ 上的指数为

$$p'\frac{q_0-q}{q_0 s} + \frac{sq}{sq_0} = \frac{p'}{p'_0}.$$

同理，我们有

$$\|M\|_{L^{r'}(w^{-s})} \le C(n,r)[w^{-s}]^{r}_{\mathcal{A}_{r'}} = C(n,r)[w^s]^{r}_{\mathcal{A}_r} = C(n,r)[w]^{q}_{\mathcal{A}_{p,q}},$$

将其代入 **(**A.4**)** 后，$[w]_{\mathcal{A}_{p,q}}$ 中的指数为 $\frac{q}{q_0}$。 □

定理 A.1 的证明。情形 $p_0 = q_0$ 已在 [5, 定理 322], 中证明，因此我们假设 $p_0 < q_0$，从而 $1 < s < \infty$。共有四种情形： $1 < p_0 < q_0 < \infty$和 $p < p_0$； $1 < p_0$ 和 $q_0 = \infty$; $1 < p_0 < q_0 < \infty$ 和 $p_0 < p$; 以及 $p_0 = 1$和 $q_0 < \infty$。

情形 I： $1 < p_0 < q_0 < \infty$ 且 $p < p_0$。 固定 $1 < p_0 < q_0 < \infty$，并令 p， q， r， s 如假设所述。固定 $w \in A_{p,\ q,\ \mathcal{B}}$; 于是 $w^s \in A_{r,\ \mathcal{B}}$，因此 $M_{\mathcal{B}}$ 在 $L^r(\mathbb{R}^n,\ w^s)$ 上有界。因此，给定非负的 $h_1 \in L^r(\mathbb{R}^n,\ w^s)$，我们可以定义迭代算子 $\mathcal{R}$ 如下：

$$\mathcal{R}h_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_{\mathcal{B}}^k h_1(x)}{2^k \|M_{\mathcal{B}}\|_{L^r(\mathbb{R}^n, w^s)}^k}.$$

容易证明（见 [5, 定理 3.9]）， $\mathcal{R}h_1$ 满足以下性质：

(A_0) $h_1(x) \le \mathcal{R}h_1(x)$; ($B_0$) $\|\mathcal{R}h_1\|_{L^r(\mathbb{R}^n, w^s)}$ $\le 2\|h_1\|_{L^r(\mathbb{R}^n, w^s)}$; ($C_0$) $[\mathcal{R}h_1]_{\mathcal{A}_{1,\ \mathcal{B}}} \le 2\|M_{\mathcal{B}}\|_{L^r(\mathbb{R}^n, w^s)}$.

固定 $(f, g) \in \mathcal{F}$; 根据 $\mathcal{F}$（标量情形）的定义，$0 < \|f\|_{L^q(w)}$ $\|g\|_{L^{p'}(w)} < \infty$。定义

$$h_1(x) = \frac{f(x)}{\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n, w)}} + \frac{g(x)^{p/q} w(x)^{p/q-1}}{\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n, w)}^{p/q}}.$$

Then

$$\text{(A.5)} \quad \|h_1\|_{L^q(\mathbb{R}^n, w)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (w(x)h_1(x))^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(w(x)f(x))^q}{\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n, w)}^q} dx\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(w(x)g(x))^p}{\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n, w)}^p} dx\right)^{\frac{1}{q}} \le 2.$$

因此， $h_1 \in L^q(\mathbb{R}^n, w)$。并且通过重新缩放，$\|h_1\|_{L^q(\mathbb{R}^n, w)} = \|h_1^s\|_{L^r(\mathbb{R}^n, w^s)}^{1/s}$，所以 $h_1^s \in L^r(\mathbb{R}^n, w^s)$。定义$H_1 = (\mathcal{R}h_1^s)^{1/s}$。我们声称 H_1 满足

(A_1) $h_1(x) \le H_1(x)$; (B_1) $\|H_1\|_{L^q(\mathbb{R}^n, w)} \le 2^{\frac{1}{s}+1}$; ($C_1$) $[H_1^s]_{\mathcal{A}_{1,\ \mathcal{B}}} \le 2\|M_{\mathcal{B}}\|_{L^r(\mathbb{R}^n, w^s)}$。

性质 (A_1) 立即由 (A_0) 得出。不等式 (B_1) 由 (B_0) 和 (A.5) 得出。不等式 (C_1) 由 (C_0) 得出。

现在我们断言 $w_0 \in A_{p_0, q_0, \mathcal{B}}$。我们根据定义来证明这一点。给定 $B \in \mathcal{B}$，由 (C_1) 可知，$A_{p_0, q_0, \mathcal{B}}$ 条件中的左侧积分变为

$$\left(\fint_B w_0^{q_0} \, dx\right)^{\frac{1}{q_0}} = \left(\fint_B H_1^{-(q_0-q)} w(x)^q \, dx\right)^{\frac{1}{q_0}} \le [H_1^s]_{A_{1,\mathcal{B}}}^{\frac{q_0-q}{q_0 s}} \left(\fint_B H_1^s \, dx\right)^{-\frac{(q_0-q)}{q_0 s}} \left(\fint_B w(x)^q \, dx\right)^{\frac{1}{q_0}}.$$

为了估计右侧积分，我们将对 $t = \frac{q_0 p'}{q p_0'}$ 使用 H¨older 不等式；由于 $\frac{q_0}{q} > 1$，且由于 $p < p_0$，有 $t > 1$。此外，由于 $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0} = \frac{1}{s'}$， $p_0' = \frac{q_0 s}{q_0 - s}$ 和 $p' = \frac{qs}{q-s}$。于是

$$t' = \frac{t}{t-1} = \frac{q_0 p'}{q_0 p' - q p_0'} = \frac{\frac{q_0 qs}{q-s}}{\frac{q_0 qs}{q-s} - \frac{q q_0 s}{q_0 - s}} = \frac{\frac{1}{q-s}}{\frac{1}{q-s} - \frac{1}{q_0 - s}} = \frac{q_0 - s}{q_0 - q}.$$

因此，

$$\fint_B w_0(x)^{-p_0'} dx = \fint_B H_1(x)^{(q_0-q)\frac{p_0'}{q_0}} w(x)^{-q\frac{p_0'}{q_0}} dx$$

$$\le \left(\fint_B H_1(x)^{\frac{q_0-q}{q_0}\frac{q_0 s}{q_0-s}\frac{q_0-s}{q_0-q}}\,dx\right)^{\frac{q_0-q}{q_0-s}} \left(\fint_B w(x)^{-p'}\,dx\right)^{\frac{qp_0'}{q_0p'}}$$
$$= \left(\fint_B H_1(x)^{s}\,dx\right)^{\frac{q_0-q}{q_0-s}} \left(\fint_B w(x)^{-p'}\,dx\right)^{\frac{qp_0'}{q_0p'}};$$

如果我们取 $1/p_0'$ 次幂，就得到

$$\left(\fint_B w_0^{-p_0'}\,dx\right)^{\frac{1}{p_0'}} \le \left(\fint_B H_1(x)^{s}\,dx\right)^{\frac{q_0-q}{q_0 s}} \left(\fint_B w(x)^{-p'}\,dx\right)^{\frac{q}{p'q_0}}.$$

因此，

$$\left(\fint_B w_0(x)^{q_0}\,dx\right)^{\frac{1}{q_0}} \left(\fint_B w_0^{-p_0'}\,dx\right)^{\frac{1}{p_0'}} \le [H_1^s]_{A_{1,\mathcal{B}}}^{\frac{q_0-q}{q_0 s}} \left(\fint_B w(x)^{q}\,dx\right)^{\frac{q}{qq_0}} \left(\fint_B w(x)^{-p'}\,dx\right)^{\frac{q}{p'q_0}}$$
$$\le [H_1^s]_{A_{1,\mathcal{B}}}^{\frac{q_0-q}{q_0 s}} [w]_{A_{p,q,\mathcal{B}}}^{\frac{q}{q_0}} \le \left(2\|M_{\mathcal{B}}\|_{L^r(\mathbb{R}^n,w^s)}\right)^{\frac{q_0-q}{q_0 s}} [w]_{A_{p,q,\mathcal{B}}}^{\frac{q}{q_0}} < \infty.$$

由于此估计对所有 B、$w_0 \in A_{p_0,\ q_0,\ \mathcal{B}}$均成立。

现在我们可以证明（A.2）。由 H¨older 不等式（指数为 q_0/q ）以及（B_1），

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,w)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (w(x)f(x))^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(w(x)H_1(x)^{\frac{q_0-q}{q_0}} H_1(x)^{-\frac{(q_0-q)}{q_0}} f(x)\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{q_0} H_1(x)^{-(q_0-q)} w(x)^q\,dx\right)^{\frac{1}{q_0}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} H_1(x)^q w(x)^q\,dx\right)^{\frac{q_0-q}{qq_0}}$$
$$\le 2^{(\frac{1}{s}+1)(\frac{q_0-q}{q_0})} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{q_0} H_1(x)^{-(q_0-q)} w(x)^q\,dx\right)^{\frac{1}{q_0}}.$$

由（A_1），$\frac{f(x)}{\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,w)}} \le h_1(x) \le H_1(x)$；因此，

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{q_0} H_1(x)^{-(q_0-q)} w(x)^q\,dx \le \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,w)}^{q_0-q} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^q w(x)^q\,dx = \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,w)}^{q_0} < \infty.$$

因此，由（A.2）、性质（B_1），且由于 N_{p_0,q_0} 是递增的，

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,w)} \le 2^{(\frac{1}{s}+1)(\frac{q_0-q}{q_0})} N_{p_0,q_0} \left([w_0]_{A_{p_0,q_0,\mathcal{B}}}\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)^{p_0} \left(H_1(x)^{-(q_0-q)} w(x)^q\right)^{\frac{p_0}{q_0}}\,dx\right)^{\frac{1}{p_0}}$$
$$\le 2^{(\frac{1}{s}+1)(\frac{q_0-q}{q_0})} N_{p_0,q_0} \left([w_0]_{A_{p_0,q_0,\mathcal{B}}}\right) \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,w)}$$
$$\times \left(\int_{\mathbb{R}^n} H_1(x)^{\frac{q}{p}p_0 - \frac{q_0-q}{q_0}p_0} w(x)^{\left(\frac{q}{p}-1\right)p_0 + \frac{q}{q_0}p_0}\,dx\right)^{\frac{1}{p_0}}$$
$$= 2^{(\frac{1}{s}+1)(\frac{q_0-q}{q_0})} N_{p_0,q_0} \left([w_0]_{A_{p_0,q_0,\mathcal{B}}}\right) \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,w)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} H_1(x)^q w(x)^q\,dx\right)^{\frac{1}{p_0}}$$
$$\le 2^{(\frac{1}{s}+1)(\frac{q_0-q}{q_0})} N_{p_0,q_0} \left(\left(2\|M_{\mathcal{B}}\|_{L^r(\mathbb{R}^n,w^s)}\right)^{\frac{q_0-q}{q_0 s}} [w]_{A_{p,q,\mathcal{B}}}^{\frac{q}{q_0}}\right) \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,w)} \|H_1\|_{L^q(\mathbb{R}^n,w)}^{\frac{q}{p_0}}$$
$$\le 2^{((\frac{1}{s}+1)(\frac{q_0-q}{q_0})+(\frac{1}{s}+1)\frac{q}{p_0})} N_{p_0,q_0} \left(\left(2\|M_{\mathcal{B}}\|_{L^r(\mathbb{R}^n,w^s)}\right)^{\frac{q_0-q}{q_0 s}} [w]_{A_{p,q,\mathcal{B}}}^{\frac{q}{q_0}}\right) \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,w)}$$
$$= 2^{(\frac{1}{s}+1)\frac{q}{p}} N_{p_0,q_0} \left(\left(2\|M_{\mathcal{B}}\|_{L^r(\mathbb{R}^n,w^s)}\right)^{\frac{q_0-q}{q_0 s}} [w]_{A_{p,q,\mathcal{B}}}^{\frac{q}{q_0}}\right) \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,w)}.$$

情形 II： $\mathbf{1 < p_0 < \infty}$**和** $\boldsymbol{q_0 = \infty}$。固定 p_0，并令 p, q, r, s 与假设中的相同。在这种情形下，$s = p_0'$ 且 $r_0 = \infty$。固定一个权重 $w \in \mathcal{A}_{p,q,\mathcal{B}}$。按照情形 I 定义 h_1 和 H_1。令 $w_0 = H_1^{-1}$。对于$1 < p_0 < \infty$，我们有 $[H_1^{p_0'}]_{\mathcal{A}_1,\mathcal{B}} = [H_1^{-p_0'}]_{\mathcal{A}_{\infty},\mathcal{B}}$，且

$$\begin{aligned}[H_1^{-1}]_{\mathcal{A}_{p_0,\infty,\mathcal{B}}} &= \sup_{B\in\mathcal{B}} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in B} H_1^{-1}(x) \left(\fint_B H_1^{p_0'}(x)dx\right)^{\frac{1}{p_0'}} \\ &= \sup_{B\in\mathcal{B}} \left(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in B} H_1^{-p_0'}(x)\right)^{\frac{1}{p_0'}} \left(\fint_B (H_1^{-p_0'})^{-1}(x)dx\right)^{\frac{1}{p_0'}} = [H_1^{-p_0'}]_{\mathcal{A}_{\infty},\mathcal{B}}^{\frac{1}{p_0'}}.\end{aligned}$$

因此，由（C_1），

$$[H_1^{-1}]_{\mathcal{A}_{p_0,\infty,\mathcal{B}}} = [H_1^{-p_0'}]_{\mathcal{A}_{\infty},\mathcal{B}}^{\frac{1}{p_0'}} = [H_1^{p_0'}]_{\mathcal{A}_{1,\mathcal{B}}}^{\frac{1}{p_0'}} \le \left(2\|M_{\mathcal{B}}\|_{L^r(\mathbb{R}^n,w^s)}\right)^{\frac{1}{p_0'}} < \infty.$$

根据 h_1 的定义以及（A_1），

$$f(x)H_1^{-1}(x) \le \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,w)} < \infty.$$

于是，

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,w_0)} \le \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,w)} < \infty.$$

因此，根据我们的假设（A.1），

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,w)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(w(x)H_1(x)H_1^{-1}(x)f(x)\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,w_0)}\|H_1\|_{L^q(\mathbb{R}^n,w)} \\ &\le 2^{\frac{1}{p_0'}+1} N_{p_0,\infty}\big([w_0]_{\mathcal{A}_{p_0,\infty,\mathcal{B}}}\big)\|g\|_{L^{p_0}(w_0)} \\ &\le 2^{\frac{1}{p_0'}+1} N_{p_0,\infty}\big([w_0]_{\mathcal{A}_{p_0,\infty,\mathcal{B}}}\big) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(H_1^{-1}(x)g(x)\right)^{p_0} dx\right)^{\frac{1}{p_0}}.\end{aligned}$$

同样根据 h_1 的定义以及（A_1），我们有

$$\frac{g(x)^{p/q}w(x)^{p/q-1}}{\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,w)}^{p/q}} \le h_1(x) \le H_1(x),$$

这进而意味着

$$g(x) \le \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,w)} H_1(x)^{\frac{q}{p}} w(x)^{\frac{q}{p}-1}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(H_1(x)^{-1}g(x)\right)^{p_0} dx\right)^{\frac{1}{p_0}} &\le \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,w)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(H_1(x)w(x)\right)^{(\frac{q}{p}-1)p_0} dx\right)^{\frac{1}{p_0}} \\ &\le \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,w)}\|H_1\|_{L^q(\mathbb{R}^n,w)}^{\frac{q}{p_0}} \le 2^{(\frac{1}{p_0'}+1)\frac{q}{p_0}}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,w)}.\end{aligned}$$

结合这两个不等式，可得

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,w)} \le 2^{(\frac{1}{p_0'}+1)\frac{q}{p}} N_{p_0,\infty}\big((2\|M_{\mathcal{B}}\|_{L^r(w^{p_0'})})^{\frac{1}{p_0'}}\big)\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,w)}.$$

情形 III： $\mathbf{1 < p_0 < q_0 < \infty}$ **和** $\boldsymbol{p_0 < p}$。固定 $1 < q_0 < \infty$，并令 p，q r，s 如假设中所述。固定 $w \in A_{p,\ q,\ \mathcal{B}}$。由于 $w^s \in \mathcal{A}_{r,\ \mathcal{B}}$，$w^{-s} \in \mathcal{A}_{r',\ \mathcal{B}}$。因此，$M_{\mathcal{B}}$ 在 $L^{r'}(w^{-s})$ 上有界，所以我们可以定义迭代算子

$$\mathcal{R}'h_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(M_{\mathcal{B}})^k h_2(x)}{2^k\|M_{\mathcal{B}}\|_{L^{r'}(w^{-s})}^k}.$$

与前面一样，我们有 $\mathcal{R}'$ 具有以下性质：

(A_0') $h_2(x) \le \mathcal{R}'h_2(x)$；$(B_0')$ $\|\mathcal{R}'h_2\|_{L^{r'}(w^{-s})} \le 2\|h_2\|_{L^{r'}(w^{-s})}$；

(C_0') $[\mathcal{R}'h_2]_{A_1,\mathcal{B}} \le 2\|M_{\mathcal{B}}\|_{L^{r'}(w^{-s})}$。

固定 $(f,g) \in \mathcal{F}$；再次有 $0 < \|f\|_{L^{q}(w)}\ \|g\|_{L^{p}(w)} < \infty$。由于 $f^s \in L^r(\mathbb{R}^n, w^s)$，根据对偶性，存在 $h_2 \in L^{r'}(\mathbb{R}^n)$，$\|h_2\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)} = 1$，使得

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,w)} = \|f^s\|_{L^r(\mathbb{R}^n,w^s)}^{\frac{1}{s}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (w(x)^s f(x)^s) h_2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{A.6}$$

由于

$$\|h_2 w^s\|_{L^{r'}(w^{-s})} = \|h_2\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)} = 1,$$

我们可以定义 $H_2 = \mathcal{R}'(h_2 w^s) w^{-s}$，它具有以下性质：

(A_1') $h_2(x) \le H_2(x)$；(B_1') $\|H_2\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)} \le 2$；$(C_1')$ $[H_2 w^s]_{\mathcal{A}_{1,\mathcal{B}}} \le 2\|M_{\mathcal{B}}\|_{L^{r'}(w^{-s})}$。

不等式 (A_1') 由 H_2 的定义和 (A_0') 得出。不等式 (B_1') 由 (B_0') 得出，因为

$$\|H_2\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{R}'(h_2 w^s)\|_{L^{r'}(w^{-s})} \le 2\|h_2 w^s\|_{L^{r'}(w^{-s})} = 2.$$

最后，(C_1') 是 (C_0') 的推论。

我们声称 $w_0(x) = w(x) H_2(x)^{\frac{q_0-q}{q_0\ q-s()}} \in A_{p_0,\ q_0,\ \mathcal{B}}$ 和

$$[w_0]_{A_{p_0,q_0,\mathcal{B}}} \le \left(2\|M_{\mathcal{B}}\|_{L^{r'}(w^{-s})}\right)^{\frac{q-q_0}{q_0(q-s)}} [w]_{\mathcal{A}_{p,q,\mathcal{B}}}^{\frac{p'}{p_0'}}.$$

由 (A_1') 以及指数为 $r_0 = \frac{q_0}{s}$ 和 $r_0' = \frac{q_0}{q_0-s}$ 的 H¨older 不等式，

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} w(x)^s f(x)^s h_2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{s}} &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} w(x)^s f(x)^s H_2(x)^{\frac{(q-q_0)s}{q_0(q-s)}} h_2(x)^{\frac{(q_0-s)q}{q_0(q-s)}}\,dx\right)^{\frac{1}{s}} \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} (w(x)^s f(x)^s)^{r_0} H_2(x)^{\frac{(q-q_0)s}{q_0(q-s)} r_0}\,dx\right)^{\frac{1}{r_0 s}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} h_2(x)^{\frac{q}{q-s}}\,dx\right)^{\frac{1}{r_0' s}}.\end{aligned}$$

由 $\|h_2\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)} = 1$、指数为 $\frac{q}{q_0}$ 和 $\binom{q}{q_0} = \frac{q}{q-q_0}$ 的 H¨older 不等式以及 (B_1')，

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,w)} &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} w(x)^q f(x)^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} H_2(x)^{r'}\,dx\right)^{\frac{q-q_0}{qq_0}} \\ &\le \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,w)} \|H_2\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)}^{r'\frac{q-q_0}{qq_0}} \le 2^{r'\frac{q-q_0}{qq_0}} \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,w)} < \infty.\end{aligned}$$

定义 $w_0(x) = w(x) H^{\frac{(\frac{q-q_0}{q-s})}{2}\ \ \ \

$$\begin{aligned}
&\le \left(\fint_B w(x)^q dx\right)^{\frac{1}{q_0\alpha}} \left(\fint_B (H_2 w^s)(x)dx\right)^{\frac{q-q_0}{q_0(q-s)}} \\
&= \left(\fint_B w(x)^q dx\right)^{\frac{q_0-s}{q_0(q-s)}} \left(\fint_B (H_2 w^s)(x)dx\right)^{\frac{q-q_0}{q_0(q-s)}} \\
&= \left(\fint_B w(x)^q dx\right)^{\frac{p'}{qp_0'}} \left(\fint_B (H_2 w^s)(x)dx\right)^{\frac{q-q_0}{q_0(q-s)}}.
\end{aligned}$$

为了估计定义中的第二个积分，由于 $p' = \frac{qs}{q-s}$, $p_0' = \frac{q_0 s}{q_0-s}$，根据 ($C_1'$) 可得

$$\begin{aligned}
\left(\fint_B w_0(x)^{-p_0'}\,dx\right)^{\frac{1}{p_0'}} &= \left(\fint_B \left(w(x)H_2(x)^{\frac{q-q_0}{q_0(q-s)}}\right)^{-p_0'} dx\right)^{\frac{1}{p_0'}} \\
&= \left(\fint_B \left(w(x)w(x)^{-\frac{s(q-q_0)}{q_0(q-s)}}(H_2 w^s)^{\frac{q-q_0}{q_0(q-s)}}(x)\right)^{-p_0'} dx\right)^{\frac{1}{p_0'}} \\
&= \left(\fint_B w(x)^{-\frac{q(q_0-s)}{q_0(q-s)}p_0'}(H_2 w^s)^{-\frac{q-q_0}{q_0(q-s)}p_0'}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p_0'}} \\
&\le [H_2 w^s]_{\mathcal{A}_{1,\mathcal{B}}}^{\frac{q-q_0}{q_0(q-s)}} \left(\fint_B (H_2 w^s)(x)dx\right)^{-\frac{(q-q_0)}{q_0(q-s)}} \left(\fint_B w(x)^{-p'}dx\right)^{\frac{1}{p_0'}}.
\end{aligned}$$

若将这两个不等式结合起来，再由 (C_1') 可得

$$\begin{aligned}
&\left(\fint_B w_0(x)^{q_0}\,dx\right)^{\frac{1}{q_0}} \left(\fint_B w_0(x)^{-p_0'}\,dx\right)^{\frac{1}{p_0'}} \\
&\qquad \le [H_2 w^s]_{\mathcal{A}_{1,\mathcal{B}}}^{\frac{q-q_0}{q_0(q-s)}} [w]_{\mathcal{A}_{p,q,\mathcal{B}}}^{\frac{p'}{p_0'}} \le \left(2\|M_{\mathcal{B}}\|_{L^{r'}(w^{-s})}\right)^{\frac{q-q_0}{q_0(q-s)}} [w]_{\mathcal{A}_{p,q,\mathcal{B}}}^{\frac{p'}{p_0'}} < \infty.
\end{aligned}$$

现在我们可以证明不等式 (A.2)。由于 $\|h_2\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)} = 1$，由 (A.1)、指数为 $\frac{p}{p_0}$ 和 $\left(\frac{p}{p_0}\right)' = \frac{p}{p-p_0}$ 的 H¨older 不等式 (B_1')，且 N_{p_0,q_0} 递增，我们有

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,w)} &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} w(x)^{q_0} f(x)^{q_0} H_2(x)^{\frac{q-q_0}{q-s}}\,dx\right)^{\frac{1}{q_0}} \|h_2\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{r'}{r_0' s}} \\
&\le N_{p_0,q_0}([w_0]_{A_{p_0,q_0,\mathcal{B}}}) \left(\int_{\mathbb{R}^n} (w(x)H_2(x)^{\frac{(q-q_0)}{q_0(q-s)}} g(x))^{p_0}\,dx\right)^{\frac{1}{p_0}} \\
&\le N_{p_0,q_0}([w_0]_{A_{p_0,q_0,\mathcal{B}}}) \left(\int_{\mathbb{R}^n} (w(x)g(x))^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} H_2^{\frac{(q-q_0)}{q_0(q-s)}p_0\frac{p}{p-p_0}}\,dx\right)^{\frac{p-p_0}{p_0 p}} \\
&= N_{p_0,q_0}([w_0]_{A_{p_0,q_0,\mathcal{B}}}) \|H_2\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)}^{r'\frac{p-p_0}{p_0 p}} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,w)} \\
&\le 2^{\frac{q-q_0}{q_0(q-s)}} N_{p_0,q_0} \left(\left(2\|M_{\mathcal{B}}\|_{L^{r'}(w^{-s})}\right)^{\frac{q-q_0}{q_0(q-s)}} [w]_{\mathcal{A}_{p,q,\mathcal{B}}}^{\frac{p'}{p_0'}}\right) \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,w)};
\end{aligned}$$

这里我们还用到了 $\frac{q-q_0}{q_0 q} = \frac{p-p_0}{p_0 p}$ 和 $r' = \frac{q}{q-s}$。

情形 IV： $p_0 = 1$ 且 $q_0 < \infty$。固定 $1 < q_0 < \infty$ 并令 p, q, r 满足假设中的条件。在此情形下，$s = q_0$, $r_0 = 1$, 且 $r = \frac{q}{q_0} > 1$。固定 $w \in A_{p,\,q,\,\mathcal{B}}$。我们仿照情形 III 的做法：首先定义迭代算子 $\mathcal{R}'$，然后利用对偶性得到 $h_2 \in L^{r'}(\mathbb{R}^n)\|h_2\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)}$, 使得 (A.6) 成立。

1定义 $H_2 = \mathcal{R}'(h_2 w^s) w^{-s}$。令 $w_0 = (H_2 \overline{w}^s)^{q_0}$；则性质 (C'_1) 蕴含 $w_0^{q_0} \in \mathcal{A}_{1,\ \mathcal{B}}$，因此 $w_0 \in \mathcal{A}_{1,\ q_0,\ \mathcal{B}}$。此外，根据定义，$[w_0^{q_0}]_{\mathcal{A}_{1,\ \mathcal{B}}} = [w_0]^{q_0}_{\mathcal{A}_{1,\ q_0,\ \mathcal{B}}}$。

由 H¨older 不等式和 (B'_1)

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} w(x)^s f(x)^s h_2(x) dx\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} w(x)^s f(x)^s H_2(x) dx\right)^{\frac{1}{s}}$$
$$\leq \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,w)} \|H_2\|^{\frac{1}{q_0}}_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)} \leq 2^{\frac{1}{q_0}} \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,w)} < \infty.$$

Th因此，为了证明（A.2），由（A.1）、H¨older 不等式、（B'_2）以及由于 $N_{1,\ q_0}$ 是递增的。 g,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,w)} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} w_0(x)^{q_0} f(x)^{q_0} dx\right)^{\frac{1}{q_0}} \\
&\leq N_{1,q_0}([w_0]_{\mathcal{A}_{1,q_0,\mathcal{B}}}) \int_{\mathbb{R}^n} w_0(x) g(x) dx \\
&= N_{1,q_0}([w_0]_{\mathcal{A}_{1,q_0,\mathcal{B}}}) \int_{\mathbb{R}^n} (H_2 w^s)^{\frac{1}{q_0}}(x) g(x) dx \\
&\leq N_{1,q_0}([w_0]_{\mathcal{A}_{1,q_0,\mathcal{B}}}) \left(\int_{\mathbb{R}^n} (w(x)g(x))^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} H_2(x)^{\frac{p'}{q_0}} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= N_{1,q_0}([w_0]_{\mathcal{A}_{1,q_0,\mathcal{B}}}) \|H_2\|^{\frac{1}{s}}_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,w)} \\
&\leq N_{1,q_0}((2\|M_{\mathcal{B}}\|_{L^{r'}(w^{-s})})^{\frac{1}{q_0}}) 2^{\frac{1}{q_0}} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,w)}.
\end{aligned}$$

□

注记 A.4。我们指出标量情形与矩阵情形下外推证明中的若干重要差异。标量迭代算法的有界性直接来自 Hardy-Littlewood 极大算子的加权范数不等式；而凸集值极大算子的定义、证明其在矩阵加权空间上的有界性，以及证明迭代算法的存在性（定理 2.2），都需要在 [1] 中发展凸集值函数理论。

此外，在矩阵情形中，我们需要引入辅助算子 N_W，以便迭代算子产生椭球值或球值函数。这使我们能够使用引理 2.5，将迭代算法产生的凸集 $\mathcal{A}_1^K$ 权重转化为矩阵 $\mathcal{A}_{1,\ \mathcal{B}}$ 权重。

在标量情形下，利用 $\mathcal{A}_{p,\ q,\ \mathcal{B}}$ 的定义，很容易证明权重 w_0 属于 $\mathcal{A}_{p_0,\ q_0,\ \mathcal{B}}$。这是因为很容易证明，若 w_0、$w_1 \in \mathcal{A}_{1,\ \mathcal{B}}$，则 $w_0^{1/p} w_1^{-1/p'} \in \mathcal{A}_{p,\ \mathcal{B}}$；这就是标量权的所谓逆因子分解性质。在矩阵情形下，要证明这一点困难得多；这一点隐含在对引理2.3的引用中。

最后，我们指出，在标量情形的证明中，可以定义函数的幂（例如，h_1^s 在情形 I 中）。但在矩阵情形下则需要更加谨慎（例如，H_1^s 在定理1.6的情形 I 中）。这也是我们引入算子 N_W 的另一个原因：若 F 是一般凸集值函数，那么除非它是椭球值的，F^s 否则其定义并不明确。

参考文献

[1] M. Bownik 和 D. Cruz-Uribe. 矩阵权的外推与因子分解. 《数学年刊》, 395(3):第 55 号论文, 84 页, 2026. [2] S. M. Buckley. 加权空间上算子范数的估计与反向 Jensen 不等式. 《美国数学学会汇刊》, 340(1):253–272, 1993. [3] D. Cruz-Uribe. 外推与因子分解. 载于 J. Lukes 和 L. Pick 编，函数空间、嵌入与外推 *X*，*Paseky 2017*，第 45–92 页。Matfyzpress，查理大学，2017。arXiv:1706.02620. [4] D. Cruz-Uribe 和 F. S.irin. Muckenhoupt 基的非对角矩阵外推. 《芬兰数学年刊》, 50(2):577–609, 2025.

[5] D. Cruz-Uribe、J. M. Martell 和 C. P´erez. 权重、外推与 *Rubio de Francia* 理论，《算子理论：进展与应用》第 215 卷。Birkh¨auser/Springer Basel AG，巴塞尔，2011。[6] D. Cruz-Uribe、K. Moen 和 S. Rodney. 矩阵 $\mathcal{A}_p$ 权、退化 Sobolev 空间与有限畸变映射.《几何分析杂志》, 26(4):2797–2830, 2016.[7] J. Duoandikoetxea. 权重外推再探：新的证明与尖锐界.《函数分析杂志》, 260 1901, 03 2011 6 1886 ( ): – .[8] E. Harboure、R. A. Mac´ıas 和 C. Segovia. 权重类的外推结果.《美国数学杂志》, 110(3):383–397, 1988. [9] T. Hyt¨onen. 一般 Calder´on-Zygmund 算子的尖锐加权界.《数学年刊》（第 *2* 辑）, 175(3):1473–1506, 2012. [10] T. Hyt¨onen. A_2 定理：评注与补充. 载于调和分析与偏微分方程，第 612 卷《当代数学》，第 91–106 页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2014。[11] M. T. Lacey、K. Moen、C. P´erez 和 R. Torres. 分数次积分算子的尖锐加权界.《函数分析杂志》, 259(5):1073–1097, 2010.[12] F. Nazarov 和 S. Treil. Bellman 函数的探索：其在奇异积分算子估计及调和分析其他经典问题中的应用.《代数与分析》, 8(5):32–162, 1996. [13] Z. Nieraeth. 矩阵权的格方法.《数学年刊》, 393(1):993–1072, 2025.

阿拉巴马大学数学系，美国阿拉巴马州塔斯卡卢萨，邮编 35487电子邮件地址：dcruzuribe@ua.edu

HALIC。大学数学系，伊斯坦布尔莱文特第五校区，邮编 34060，T¨URKIYE电子邮件地址：fatihsirin@halic.edu.tr