arXiv:2611.29872v2 [cs.CG] 24 Nov 2026

首次可见时的轨迹可见性*

Mohammad Ali Abam† Mohammad Ghodsi‡

Seyed Mohammad Hussein Kazemi§

摘要

设 P 为一个具有 n 个顶点的简单多边形，并设两个移动实体 $q(t)$ 和 $r(t)$ 分别以恒定的（可能不同的）速度 v_q 和 v_r 沿着位于 P 内部的线段轨迹 τ_q 和 τ_r 移动。我们研究首次可见时间 $t^* = \min\{\, t \geq 0 \mid q(t)\ r(t) \subseteq P \,\}$，即连接 $q(t)$ 和 $r(t)$ 的线段完全位于 P 内的最早时刻。Eades 等人 [12, 13] 研究了简单多边形中这一问题的判定版本。他们给出了一种一次性判定算法，其运行时间为 $\mathcal{O}(n)$。对于一个静止实体和一个移动实体，他们给出了一种数据结构，其预处理时间为 $\mathcal{O}(n\log n)$，空间复杂度为 $\mathcal{O}(n)$，并能在 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间内回答判定查询。对于两个移动实体，在经过 $\mathcal{O}(n\log^5 n)$ 的预处理时间后，他们构建了一个大小为 $\mathcal{O}(n\log^5 n)$ 的数据结构，查询时间为 $\mathcal{O}(n^{3/4}\log^3 n)$。对于带孔多边形域的变体，或实体穿过 P 边界的情形，不在我们的研究范围内。

在这项工作中，我们超越了判定问题，在简单多边形 P 中针对三种模型精确计算 t^*。当两条轨迹都预先固定时，我们用 P 在 $\mathcal{O}(n)$ 时间和空间内进行预处理，并在 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间内回答每个查询 $(v_q,\ v_r)$。若一条轨迹 τ_r 固定，而 τ_q 作为查询给出，我们构建一个耗时 $\mathcal{O}(n\log n)$ 时间和空间的数据结构，可在每次查询中用 $\mathcal{O}(\log^2 n)$ 时间计算 t^*。若两条轨迹都未预先给定，我们设计了一种数据结构，其预期预处理时间为 $\mathcal{O}(n^{1+\varepsilon})$，空间为 $\mathcal{O}(n)$，并能针对任意固定的 $\varepsilon > 0$，以 $\mathcal{O}(n^{1/2}\,\mathrm{polylog}(n))$ 的预期查询时间完成查询。

关键词：轨迹、可见性、半代数范围搜索。

1 引言

对移动实体的分析构成了一个广泛的研究领域，涵盖从机器人学和地理信息科学（GIScience）到气象学与生态学的诸多方向 [29, 4, 19, 25,

*本工作的初步版本发表于《计算机科学讲义》第 16444 卷，第 499–511 页，施普林格，2026 年出版的第 20 届国际算法与计算会议及研讨会（WALCOM 2026）论文集。

†谢里夫理工大学计算机工程系，伊朗德黑兰。电子邮箱：abam@sharif.edu。作者姓名按字母顺序排列。通讯作者。

‡谢里夫理工大学计算机工程系，伊朗德黑兰；以及基础科学研究所（IPM）计算机科学学院，伊朗德黑兰。电子邮箱：ghodsi@sharif.edu。§谢里夫理工大学计算机工程系，伊朗德黑兰；以及法国波尔多大学 LaBRI，法国波尔多。电子邮箱：skazemi@u-bordeaux.fr。

11]。大量研究致力于从历史轨迹数据中提取特征，例如识别实体何时彼此近距离经过，或检测以队形移动的群组 [16]。然而，当研究目标不是分析过去，而是预测已知或规划路径上的实体未来将发生的事件时，便会出现一类新的问题。在存在障碍物或明确边界的环境中，这一点尤为明显，而这也与我们的受约束的多边形环境相呼应。

此类预测性视线分析有许多实际应用。例如，在机器人学和自动化系统中，确定两个微型机器人何时能够建立直接通信 [27] ，或自动驾驶车辆何时能够清晰地观察到目标，是一项基础任务。在生物学中，追踪复杂栖息地内动物群落之间可能发生的相互作用 [3] ，以及优化基于传感器的系统（例如必须保持通往太阳的路径畅通无阻的双轴太阳能跟踪器）[20]，也面临着类似的挑战。随着这些系统的复杂度和自主性不断提升，对轨迹可见性稳健理论的需求，以及对高效且有理论保证的算法的开发需求，自然也随之增长。

1.1 预备知识

本文全程采用标准实数 RAM 模型（如 [1]所述），并扩展以支持对 $\mathcal{O}(\log n)$ 位字进行的标准单位代价字 RAM 操作，例如按位逻辑运算和查表（如 [5]所述）。

设 P 是一个具有 n 个顶点的简单多边形，记 ∂P 为 P的边界，由其顶点和边组成。若存在一点 $q \in s$ 使得 $pq \subseteq P$，则称点 $p \in P$ 从线段 $s \subset P$ 弱可见。类似地，若一个线段上的每个点在另一个线段上都存在一个可见点 [15]，则称两个线段 s_1、$s_2 \subset P$彼此弱可见。对于查询点 $p \in P$，p的可见多边形为 $V(p) = \{q \in P \mid pq \subseteq P\}$，可在 $\mathcal{O}(n)$时间内计算 [24, 21]。给定线段 $s \subset P$，s 的弱可见多边形为$W(s) = \{q \in P \mid \exists r \in s$，满足 $qr \subseteq P\}$，可在 $\mathcal{O}(n)$时间内计算 [15]；其补集$\overline{P} \setminus W(s)$由若干两两不相交的口袋区域组成，每个口袋区域都由一条 $\partial W(s)$ [15]的直线窗与 $W(s)$隔开。射线投射查询要求，对于原点为 $p \in P$ 的查询射线 $\overrightarrow{r}$，求 $\overrightarrow{r}$与 ∂P的第一个交点；经过 $\mathcal{O}(n)$的预处理时间和空间后，这类查询可在 $\mathcal{O}(\log n)$时间内完成 [8]。

样条多边形 $\mathcal{S}$ 由一个简单多边形通过将其一条或多条边替换为曲边而形成，使得每条曲边与其弦所围成的区域都是凸的 [10]。给定一个有 n 条边的简单样条多边形 $\mathcal{S}$，存在一个 $\mathcal{O}(n)$ 空间的数据结构，可在 $\mathcal{O}(n)$ 时间内构建，并能在 [26, 14]时间内报告从点 $p \in \mathcal{S}$ 发出的任意查询射线 $\overrightarrow{r}$与其 $\partial\mathcal{S}$ 的第一个交点，查询时间为 $\mathcal{O}(\log n)$。

一个有 n 个顶点的简单多边形 P 可在 $\mathcal{O}(n)$ 时间内完成三角剖分 [6]。通过平衡对角线切割递归地分割三角剖分的对偶树，并在分割任何由三条对角线围成的子多边形时，于将它们分隔开的唯一三角形处进行切分 [18, 8], ，可得到一个最大度为 3、高度为 $h \in \mathcal{O}(\log n)$ 的平衡层次结构 $\mathcal{D}$ 。每个节点 $u \in \mathcal{D}$对应一个由至多三条对角线围成的子多边形 $P_u \subseteq P$ ，而对偶树中任意两个三角形之间的路径都可以分解为 $\mathcal{O}(\log n)$ 个内部不相交的子多边形 $\mathcal{D}$。

考虑一个点 $p \in P$。对于 P的每个顶点 v，令 $\pi(p, v)$ 表示连接 p 和 v且位于 P 内部的最短欧几里得路径。以 p为根的最短路径树记为 $T(p) =$

$\bigcup_{v\in P}\pi(p,v)$，其上每条 $\pi(p,v)$ 的所有中间顶点都是 P [2]的凹顶点。将 $T(p)$ 的每条边 (u,v) 延伸过 v，直到与 ∂P相交，这会将 P划分为 $\mathcal{O}(n)$ 个区域，称为 p的最短路径图，使得给定区域中的所有点 q 沿着 $\pi(p,q)$ 都共享同一个父顶点（即 p 或 P的一个凹顶点）。将这些区域细分为三角形，可得到一个大小为 $\mathcal{O}(n)$ 的三角剖分，该过程耗时 $\mathcal{O}(n)$ [6, 17], ，之后可在 $\mathcal{O}(n)$ 的时间和空间内进行预处理，从而支持 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间的点定位 [23] ，以在 $T(p)$ 中定位任意查询点$q\in P$ 的父顶点。

对于线段 $s\subset P$，我们用 p_s^+和 p_s^-表示其端点；考虑端点处于凸位置的两条线段 s_1、$s_2\subset P$ 时，$p_{s_1}^+$、$p_{s_2}^+$ 和 $p_{s_1}^-$、$p_{s_2}^-$ 表示其凸包边界上的对应端点对。对于任意点 $a\in P$和线段 $s\subset P$，所有最短路径 $\pi(a,b)$的并集构成一个漏斗$\mathcal{F}(a,s)$ [18]：路径 $\pi(a,p_s^+)$ 和 $\pi(a,p_s^-)$从 a到顶点 c（顶点）共享一段公共前缀（茎），随后分叉成两条内凸链 $\pi(c,p_s^+)$和 $\pi(c,p_s^-)$，分别通向 s的端点。更一般地，对于两条线段 s_1、$s_2\subset P$，其沙漏 $H(s_1,s_2)$（s_1 与 s_2上各点之间所有最短路径的并集）要么是开放的（由两条不相交的内凸链 $\gamma^+=\pi(p_{s_1}^+,p_{s_2}^+)$ 和 $\gamma^-=\pi(p_{s_1}^-,p_{s_2}^-)$ 围成），要么是闭合的（两个漏斗由连接其顶点的中央最短路径茎相连）[18]。它们的可见性玻璃 $L(s_1,s_2)$是位于 P内、连接 s_1 与 s_2 的所有线段（可能为空）的并集。当 $L(s_1,s_2)$非空时，存在子线段 $s_1'\subseteq s_1$和 $s_2'\subseteq s_2$，它们由沿交叉路径 $\pi(p_{s_1}^+,p_{s_2}^-)$和 $\pi(p_{s_1}^-,p_{s_2}^+)$的两条内部双切线界定，使得$L(s_1,s_2)=H(s_1',s_2')$（可在 $\mathcal{O}(n)$时间内计算 [12]），且每条交叉路径的转向至多改变一次（ [12]的观察1）。

在该层次结构 $\mathcal{D}$ 上，Guibas 和 Hershberger [18] 构建了一个 $\mathcal{O}(n)$-空间的两点最短路径结构，并在 $\mathcal{O}(n)$ 时间内完成构建（三角剖分之后），可在 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间内回答最短路径查询。子多边形的基本沙漏通过 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间的链拼接自底向上持久化构建，将每条凸链表示为高度为 $\mathcal{O}(\log n)$ 的二叉树，其内部节点 v 存储一条公切线边 e_v 以及左右边检索列表（ [18] 的引理 4–6）。由于拼接两条链时会裁去隐藏在其公切线之后的子链，而不会修改原始子树，因此，树中更深处的边 e_v 可能位于沿 ∂P 的保留子路径之外（或者在共享顶点处退化为零长度切线）；对于沿 ∂P 跨越边界索引区间 $[a,b]$ 的任意保留子路径，可以在 $\mathcal{O}(1)$ 时间内测试 e_v 是否落在 $[a,b]$ 内（ [18] 的第 4.2 节），并将零长度切线边替换为检索列表中的相邻边。利用这一结构，Eades 等人 [12] （引理 8）在 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间内判断 $L(s_1,s_2)$ 是否为空，或计算 $H(s_1',s_2')$。

在关于半代数范围搜索的研究中，Agarwal 等人 [1] 证明，对于固定常数 d，Δ，s 以及任意 $\varepsilon>0$，任意一个包含 n 个点的 $\mathbb{R}^d$ 点集都存在一棵划分树，其$\mathcal{O}(n^{1+\varepsilon})$期望 预处理时间为 $\mathcal{O}(n)$，空间为 $\mathcal{O}(n)$，并且能在 $\mathcal{O}(n^{1-1/d}\log^{B_0} n)$ 期望 时间内回答任意复杂度为常数的半代数范围查询，其中 $B_0=B_0(d,\Delta,s,\varepsilon)$。[1]在他们的 $d=2$ 构造中（ [1]的第 6 节和第 7 节），每个输入点都唯一地位于某个叶节点中，该叶节点要么属于二维划分子树，要么属于一条特殊单调代数弧上的一维二叉搜索树，因此，中序叶节点遍历会产生一个排列，其中每个

[1]在 D_0-一般位置条件下（ [1] 的定理 1.2），期望预处理时间提升至 $\mathcal{O}(n\log n)$，期望查询时间为 $\mathcal{O}(n^{1-1/d+\varepsilon})$。

查询返回的 $\mathcal{O}(n^{1/2}\log^{B_0} n)$ 个规范子集或一维区间都是一个连续子数组。

对于二维正交范围结构，Chazelle [5] 展示了如何将n 个点在 $\{1,\dots,n\}^2$ 跨越 $\mathcal{O}(\log n)$ 个二叉范围树层压缩到 $\mathcal{O}(n)$ 个字的空间中，并在$\mathcal{O}(n\log n)$ 时间内完成；借助位打包分割向量，还可支持 $\mathcal{O}(1)$ 时间的前缀计数查询。

对于一个有 m 个顶点的三维凸多面体，Dobkin–Kirkpatrick 层次结构使用 [9] $\mathcal{O}(m)$ 的空间和预处理时间，并能在 $\mathcal{O}(\log m)$ 时间内回答半空间空性查询；此外，借助点平面对偶，两个三维凸包可在 $\mathcal{O}(m)$ 时间内合并 [7]。给定一个按顺序排列、权重为正的元素序列 $w_1, \dots, w_k$，总权重为 $W = \sum_{i=1}^{k} w_i$，偏置二叉树是一种按顺序存储这些元素的二叉搜索树，使得每个元素 i 所处的深度为 $\mathcal{O}(\log(W/w_i))$ [28]。

考虑一棵有根树 T，它有 n 个顶点。Sleator 和 Tarjan [28] 将 T 划分为若干条顶点互不相交的实路径：若边 $(v,\ \text{parent}(v))$ 满足 $2\cdot\text{size}(v) > \text{size}(\text{parent}(v))$，则称其为实边；否则称为路径外边。每个顶点 $v \in T$ 的权重定义为 1 加上以其路径外子节点为根的子树大小之和，每条实路径则存储为一棵以这些权重为权的偏置二叉树。这样，每个顶点在其偏置二叉树中的深度均为 $\mathcal{O}(\log n)$。此外，T 中从祖先节点到后代节点的任意路径，都可以按路径顺序 [28]分解为这些树中的 $\mathcal{O}(\log n)$ 个典范节点和 $\mathcal{O}(\log n)$ 条路径外边。

将轨迹定义为 $\mathbb{R}^2$ 中的一系列带时间戳的位置，用以描述一个实体在多边形中的移动。Eades 等人 [12],研究了轨迹可见性问题，他们探讨两个移动实体 q 和 r 是否曾在某个时刻能够互相看见。在本文中，q 和 r 沿线段轨迹 τ_q，$\tau_r \subset P$ 以恒定（可能不同的）速度 v_q 和 v_r 移动，且无法透过 P的边看见彼此。令 t_{qf}和 t_{rf} 分别表示 q 和 r 走完 τ_q 和 τ_r 所需的时间。如果一个实体在时间 $t_{\min} = \min(t_{qf},\ t_{rf})$ 到达线段终点，而另一个实体要到$t_f = \max(t_{qf},\ t_{rf})$才走完线段，则运动分为两个匀速阶段 $[0, t_{\min}]$（两者都在移动）和 $[t_{\min}, t_f]$（一个静止，速度为零，另一个仍在移动）。将这两个阶段分别处理（若第一阶段可见，则返回其结果；否则检查第二阶段），因此下文假设在所考虑的时间区间内，两个实体始终以恒定速度移动，其位置为：

$$q(t) = (x_q(t), y_q(t)) = (x_{q,0} + v_{qx}t, y_{q,0} + v_{qy}t)$$

and:

$$r(t) = (x_r(t), y_r(t)) = (x_{r,0} + v_{rx}t, y_{r,0} + v_{ry}t)$$

其中，$(x_{q,\,0},\ y_{q,\,0})$ 和 $(x_{r,\,0},\ y_{r,\,0})$ 是它们在阶段开始时的位置（对于第二阶段，将时间平移至$t = 0$），而 $(v_{qx},\ v_{qy})$，$(v_{rx},\ v_{ry})$ 是它们的速度向量。

1.2 我们的贡献

从现在起，我们考虑一个简单多边形 P和线段轨迹 τ_q，$\tau_r \subset P$它们从不相交 ∂P。我们通过计算 [12, 13] 三种模型下的最早可见时间 t^*，来探讨表 1中尚未解决的方向：

表1：在简单多边形中，针对线段轨迹的轨迹可见性，其预处理、存储和查询时间复杂度。前两行列出了 Eades 等人提出的已知最佳数据结构界限。 [12] 用于判定是否曾出现相互可见性（**判定**）。后三行总结了我们的结果（定理1、2和3），这些结果求解最早可见时间 t^* （**求解** t^*）。

参考文献	场景	预处理	空间	查询时
[12] （第 5 节）	静止与移动（**判定**）	$\mathcal{O}$（n对数 n）	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}$（对数 n）
[12] （第 4 节）	查询轨迹（**判定**）	$\mathcal{O}(n$对数$^5\, n)$	$\mathcal{O}(n$对数$^5\, n)$	$\mathcal{O}\left(n^{3/4}\log^3 n\right)$
定理 1	固定轨迹（**求解** t^*）	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}$（日志 n）
定理 2	以一条轨迹作为查询（**求解** t^*）	$\mathcal{O}$（n日志 n）	$\mathcal{O}(n$日志 $n)$	$\mathcal{O}($日志$^2\, n)$
定理 3	查询轨迹（**求解** t^*）	$\mathcal{O}\left(n^{1+\varepsilon}\right)$（期望）	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}\left(n^{1/2}$日志$^B\, n\right)$（期望）

1. 给定两条固定的线段轨迹 τ_q， $\tau_r \subset P$ 对 P 进行$\mathcal{O}(n)$时间和空间的预处理，从而对于任意查询速度 v_q 和 v_r，最早可见时间t^* 可在 $\mathcal{O}(\log n)$时间内计算得出（定理1）。

2. 假设 $\tau_r \subset P$ 固定，而 $\tau_q \subset P$ 作为查询给定，同时给定 v_q 和 v_r。我们构建一个数据结构，其时间和空间复杂度为 $\mathcal{O}(n\log\, n)$，并能在 t^* 时间内以 $\mathcal{O}(\log^2 n)$ 计算（定理 2）。

3. 最后，当事先不知道 τ_q 、也不知道 τ_r、 v_q 和 v_r时，我们构建一个数据结构，其预处理时间为 $\mathcal{O}(n^{1+\varepsilon})$ 期望，空间复杂度为 $\mathcal{O}(n)$，并能在t^* $\mathcal{O}(n^{1/2}\log^B n)$ 期望 时间内计算，其中 B 是依赖于 ε 的常数（定理 3）。

我们注意到，部分作者此前发布过一篇初步预印本 [22]；我们目前的方法与其并不重叠，并解决了其分析中的严重问题。

2 条固定轨迹

考虑可见性玻璃 $L(\tau_q, \tau_r)$，它可以在 $\mathcal{O}(n)$ 时间 [12] 内构造；若其为空，则不发生可见性。对于其上链 γ^+ 上每一对连续的凹顶点 v_i 和 v_{i+1} （对 γ^- 亦然），令 $l(v_i, v_{i+1})$ 为经过它们的直线。令从 v_i 射向 v_{i+1}、位于 $l(v_i, v_{i+1})$ 上的射线，指以 v_i 为原点、沿 $l(v_i, v_{i+1})$ 朝向 v_{i+1} 的射线（从 v_{i+1} 到 v_i 的射线同理）。令每条这样的射线延伸至其与 ∂P 的第一个交点（不包括 v_i 和 v_{i+1}）。 $l(v_i, v_{i+1})$ 上介于

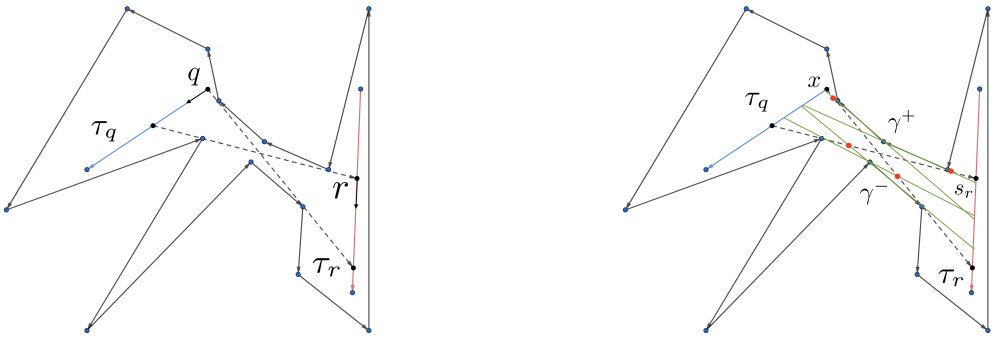


图 1：（左）给定两个移动实体 q 和 r，其轨迹分别为 τ_r 和 τ_q，在简单多边形内以红色和蓝色标示，虚线表示它们的可见性玻璃的双切线。（右）连接相邻凹顶点的线段延长线（绿色）（称为临界约束 [2]）与它们的双切线相交（红点）。对每个 $x \in I_q$，都有一个对应的子线段 $s_r \subset \tau_r$，使得 s_r 中的每个点在 x 内对 P可见。

这两个位于 ∂P 上的交点被 Aronov 等人 [2] 及其前人记为一个 临界约束 。由于每条支撑直线 $l(v_i, v_{i+1})$ 在可见性玻璃 $L(\tau_q, \tau_r)$ 内部不受阻挡，它与 τ_q 和 τ_r 的交点可直接在 $\mathcal{O}(1)$ 时间内计算，总共耗时 $\mathcal{O}(n)$。定义：

$$I_q = \bigcup_i \big(l(v_i, v_{i+1}) \cap \tau_q\big) \quad \text{and} \quad I_r = \bigcup_i \big(l(v_i, v_{i+1}) \cap \tau_r\big)$$

包括两条双切线在 τ_q 和 τ_r上的端点。这些交点将 τ_q 和 τ_r 划分为子线段。对于每个交点 $x \in I_q$，都有一个对应的子线段 $s_r \subset \tau_r$，使得 s_r 中的每个点在 x 内对 P 可见（见图 1）。

接下来，我们定义一个映射，将 τ_q 和 τ_r 上的位置映射到二维图示 $D \subset \mathbb{R}^2$中。令 $\varphi_q\colon \tau_q \to [0, \text{len}(\tau_q)]$，$\varphi_r\colon \tau_r \to [0, \text{len}(\tau_r)]$ 分别为 τ_q 和 τ_r 的弧长参数化。注意，我们将轨迹的起点映射到 0。在 D中，x坐标由 φ_q 确定，y坐标由 φ_r确定。我们将该图示定义为：

$$D = [0, \text{len}(\tau_q)] \times [0, \text{len}(\tau_r)] \subset \mathbb{R}^2$$

点 $(x,\ y) \in D$ 表示 τ_q 上的点 $\varphi_q^{-1}(x)$ 与 τ_r 上的点 $\varphi_r^{-1}(y)$ 这一对。如果这两个点在 P 中相互可见，我们就称 $(x,\ y)$ 可见。D 中可见点的集合称为互可见区域 $V \subset D$，其边界由可见性成立时的参数对 $(x,\ y)$ 构成。

每个 $x \in I_q$ 都对应于 D 中的一条垂直线段，它表示沿 τ_r的一条线段，该线段上的每个点都与 x 相互可见（见图 3）。

请注意，从 τ_q 上的位置到 τ_r 上的位置的映射是非线性的。例如，一个实体以恒定速度 v 沿线段 s_1 移动时，会通过非线性函数 $f(t)$映射到另一条线段 s_2 上的一个点；该点到s_2 某个固定端点的距离 $d(t)$严格凸（或凹）。

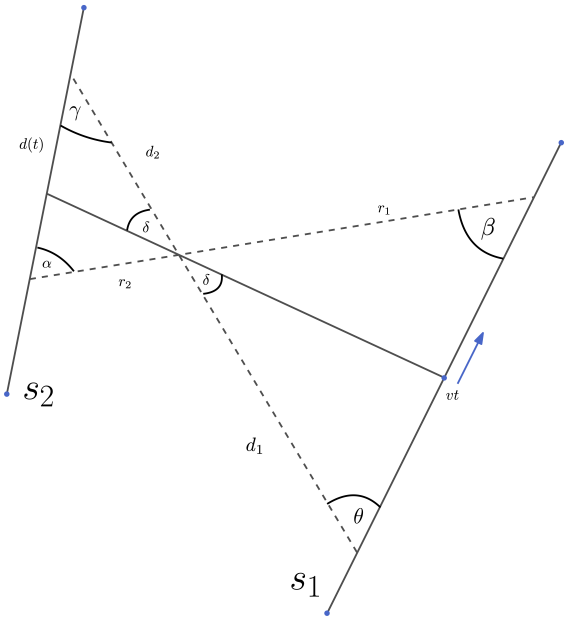


图2：一个实体以恒定速度 v沿线段 s_1 运动，从起点行进距离 vt 。从该实体指向线段 s_2 的射线与 $L(s_1,\ s_2)$的双切线相交，夹角为δ；双切线与上链和下链之间的固定夹角分别为 θ 和γ。距离 d_1 和 d_2 分别从 s_1 和 s_2 的端点量至相应的切点。

观察1。 设 s_1、 $s_2 \subset P$ 是两条线段。假设一个实体以恒定速度 v 沿 s_1移动。构造 $L(s_1, s_2)$ 并考虑其交点。将实体在时刻 t 的位置 $f(t)$ 映射为 s_2 上的一个点，该点到 s_2 某个端点的距离为 $d(t)$ 。于是，随着实体移动，映射 $f(t)$ 在各交点之间转换，并且 $d(t)$ 在 t上的二阶导数符号恒定（严格凸或凹；当 $\theta = \gamma$时为线性）。

证明。 将 $d(t)$ 记为 x。参见图 2 ，并对两个相关三角形应用正弦定理，可得:

$$vt = \frac{d_1 \sin\delta}{\sin(\delta+\theta)} \quad \text{and} \quad x = \frac{d_2 \sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}$$

消去 δ 后，得到闭式:

$$x = \frac{d_2 vt \sin\theta}{d_1 \sin\gamma + vt\sin(\theta-\gamma)}$$

现在令:

$$A = \frac{\sin(\theta-\gamma)}{\sin\theta}, \qquad B = \frac{d_1 \sin\gamma}{v\sin\theta}$$

使得 $x = \frac{d_2 t}{At+B} = d_2 \cdot \frac{t}{B} - d_2 \cdot \frac{At^2}{B\ At+B()_\circ}$ 如果 $\theta = \gamma$，那么 $A = 0$ 和 x 关于 t呈线性关系。否则，直接求导可得 $d''(t) = -2d_2AB/(At+B)^3,$，在整个有效子线段上保持恒定的非零符号（在非退化条件下，即 $At + B > 0$ 和各角均不为零）。

□

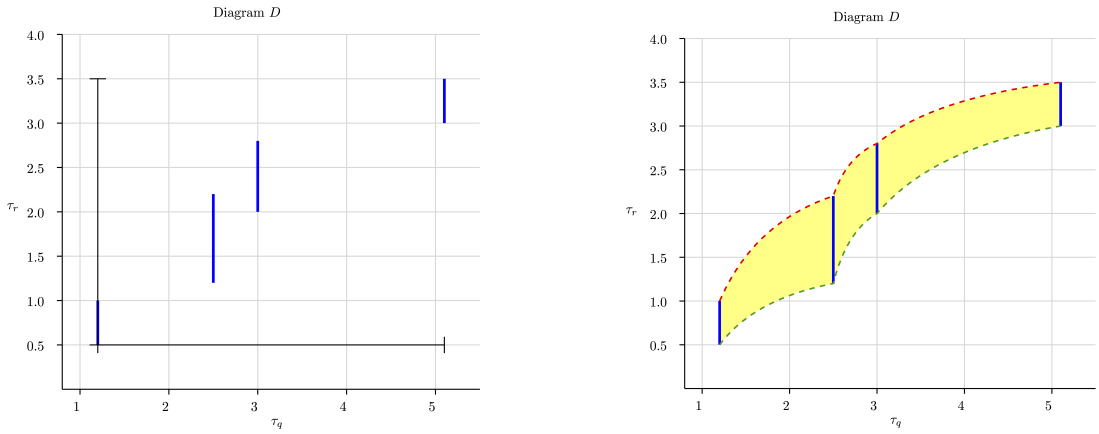


图3：（左）图中的垂直线段 D 由交点 I_q在 τ_q上诱导而成 $x = \varphi_q(x_i)$ 跨越了 φ_r值的区间，在该区间内， τ_r 上的点对x_i可见。（右）通过观察2（第1节2）中讨论的非线性映射得到的曲线边界（样条多边形）。

考虑 τ_q 中位于 I_q 的两个相邻点之间的任意子线段（对 τ_r中位于 I_r的两个相邻点之间的子线段，同样如此）。注意，在这样的子线段上，任一轨迹都不会再与临界约束发生其他交点；因此，在整个区间内，同一对凹顶点决定了另一条轨迹上最先/最后相互可见的点。因此，在该区间内， D 中的互可见区域边界由观察 1中的一种映射描绘。此外，根据观察 1， D 中对应的每一段边界在其两个端点之间都具有恒定的曲率符号（或为直线段）；特别地，它完全位于其弦的一侧，因此由该曲线与连接其端点的线段所围成的区域是凸的。

给定在从（x_0， y_0）开始的匀速阶段内， q 和 r 的查询速度分别为 v_q 和 v_r $\in D$（其中 $[0, t_{\min}]$ 为（0，0）的（x_0， y_0）$=$，且 $[t_{\min}, t_f]$为（x_0， y_0）$\in \partial D$），它们的位置从阶段起点（x_0， y_0）沿方向（v_q， v_r）描绘出射线 $\vec{r}$（允许 $v_q = 0$或 $v_r = 0$）。 ∂V 上的每个弧端点都与轨迹的一个临界约束交点重合，总共有 $\mathcal{O}(n)$ 个这样的交点；因此， ∂V 是由 $\mathcal{O}(n)$ 条分段代数弧组成的闭合链，所以 V是一个样条多边形。沿着 V最左端点和最右端点之间的两条竖直线段 $D \setminus V$进行切割，将 $D \setminus V$划分为至多六个两两内部不相交的简单样条多边形，其总复杂度为 $\mathcal{O}(n)$（即左右两个矩形，加上 V 上方至多两个区域和 V下方至多两个区域；这是因为根据 P 的简单性，区域 V 与 D 的每条水平边至多相交于一个区间）。我们在 $\mathcal{O}$时间和空间内对这些简单样条多边形分别进行预处理，从而支持 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间的样条多边形射线投射 [26, 14]。由于 V 是 x-单调的，因此对 ∂V 顶点的已排序 x坐标进行二分搜索，即可在$\mathcal{O}$（log n）时间内定位 ∂V 在 x_0 处唯一的上弧和下弧，并确定（x_0， y_0）是否 $\in V$（此时在阶段开始时即可判定可见），或者确定包含（x_0， y_0）的 $D \setminus V$简单样条多边形分量。在后一种情况下，沿 $\vec{r}$穿过至多两条竖直切口，直到首次遇到 ∂V（或离开 D），即可在 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间内报告t^* 。因此，以下定理成立：

定理 1. 构建一个结构，可在 D *in* $\mathcal{O}(n)$ 时间内完成预处理，占用 $\mathcal{O}(n)$ 空间，并处理任意查询

(v_q, v_r)，以在 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间内确定使 q 和 r 相互可见的最小 $t^* \geq 0$。

3 一条由查询提供的轨迹

在本节中，实体 r 的轨迹 $\tau_r \subset P$ 预先固定（若固定的是 τ_q，则情况对称），而实体 q 的轨迹 $\tau_q \subset P$ 以及两个速度 v_q, v_r 则在查询时提供。

预处理。我们首先用 $\mathcal{O}(n)$ 时间 [15]计算弱可见多边形 $W(\tau_r)$。由于 τ_q 与 τ_r 之间的任意视线都完全位于 $W(\tau_r)$ 内，我们对 $W(\tau_r)$ 进行预处理，以支持 $\mathcal{O}$ 次、耗时 $\log n$ 的射线射击 [8], ；并对由 $W(\tau_r)$ 与 $P \setminus W(\tau_r)$ 的口袋区域构成的 P 平面细分进行三角剖分和预处理，以支持 $\mathcal{O}$ 次、耗时 $\log n$ 的点定位 [6, 15, 23],，所需时间和空间为 $\mathcal{O}(n)$。

接下来，我们在 $W(\tau_r)$ 内构造最短路径树 $T(p_{\tau_r}^+)$ 和 $T(p_{\tau_r}^-)$，以及它们的三角剖分最短路径图，以支持 $\mathcal{O}$ 次、耗时 $\log n$ 的点定位；所需时间和空间为 $\mathcal{O}(n)$ [6, 17, 23]。对于任一棵树中的每个顶点 v，我们还存储其深度，以及一个指针 $\text{up}_j(v)$，指向其第 2^j 个祖先，其中 $0 \leq j \leq \lfloor \log_2 \text{depth}(v) \rfloor$。这需要 $\mathcal{O}(n \log n)$ 的时间和空间，并使我们能够在 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间内访问根到顶点路径上的任意顶点。

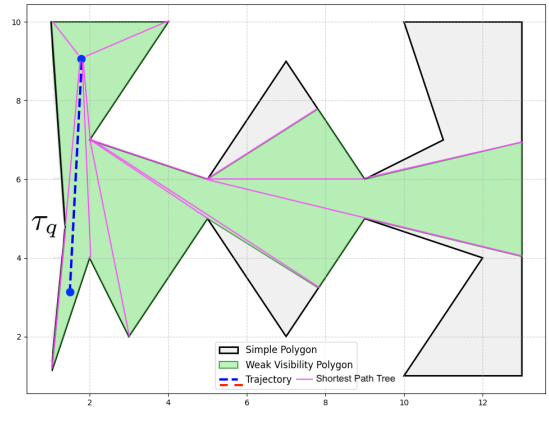
最后，我们将 $T(p_{\tau_r}^+)$ 和 $T(p_{\tau_r}^-)$ 分解为顶点互不相交的实路径，并将它们存储为偏置二叉树 [28]。选择一个坐标系，使 τ_r 的支撑直线为 x 轴，则每条不平行于 τ_r 的树边 $e = w_1 w_2$ 的支撑直线为 $x + s_e y - d_e = 0$，其中

$$s_e = -\frac{x_{w_2} - x_{w_1}}{y_{w_2} - y_{w_1}} \quad \text{and} \quad d_e = x_{w_1} + s_e y_{w_1}.$$

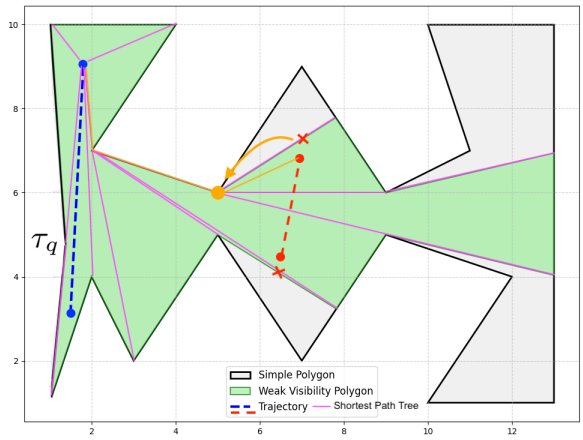
我们将每条这样的边 e 提升为点 $p(e) = (s_e, d_e, s_e d_e) \in \mathbb{R}^3$；省略平行于 τ_r 的边，因为每次查询都会在穿过 τ_r 的支撑直线处将 τ_q 分开（因此，在开子区间上，视线永远不会平行于 τ_r）。对于覆盖 m_ν 条已提升边的每棵偏置二叉树中的每个节点 ν，我们自底向上构造其提升点集的三维凸包，利用线性时间三维凸包合并 [7],，在 $\mathcal{O}(m_\nu)$ 时间内完成，并将凸包存储在大小为 $\mathcal{O}(m_\nu)$ 的 Dobkin–Kirkpatrick 层次结构 [9] 中。由于每条实边在其偏置二叉树 [28] 中的深度为 $\mathcal{O}(\log n)$（而路径外边单独存储），因此有 $\sum_\nu m_\nu = \mathcal{O}(n \log n)$。所以，整体预处理需要 $\mathcal{O}(n \log n)$ 时间和 $\mathcal{O}(n \log n)$ 空间。

求解可见性玻璃。收到 τ_q，v_q，和 v_r 后，我们首先在 $\log n$ 时间内，将 τ_q 限制为与 $W(\tau_r)$ 的交集，并丢弃其余部分。在预计算的 P 平面细分中定位 τ_q 的两个端点需要 $\log n$ 时间。由于 $\tau_q \subset P$ 是一条线段，且不能穿过 ∂P，如果两个端点都位于 $P \setminus W(\tau_r)$ 的同一个口袋区域中，那么 $\tau_q \cap W(\tau_r) = \emptyset$，不会发生可见性。否则，$\tau_q \cap W(\tau_r)$ 是一条单一连续的线段，其端点通过将 τ_q 与各端点所在口袋区域边界上的唯一窗口求交得到（如果该端点位于 $W(\tau_r)$ 之外）。将活动时间区间限制为 $q(t) \in \tau_q \cap W(\tau_r)$ 期间的子区间，并将 $\tau_q \cap W(\tau_r)$ 简记为 τ_q 后，以下每次射线发射测试都在 $W(\tau_r)$ 内进行。

令 L_q 和 L_r 表示 τ_q 和 τ_r 的支撑直线。若 $L_q = L_r$（共线情形），则从 τ_r 的一个端点沿两个方向进行两次位于 W（τ_r）内、耗时 $\mathcal{O}$（对数 n）的射线发射查询



(a) 固定轨迹（蓝色，用τ_q fixed示意）及其在弱可见多边形内的最短路径树（紫色）。



(b) 确定查询轨迹的可见性玻璃。

图 4：当一条轨迹作为查询给定时，求解可见性玻璃（以蓝色的 τ_q fixed对称示意）。（a）在弱可见多边形内预先计算最短路径树（紫色）。（b）预先计算的树确定可见性玻璃的边界链。

沿 L_r 找到包含 τ_r 的最大弦 $I_0 \subseteq W(\tau_r) \cap L_r$；随后，$q(t)\,r(t) \subseteq P$ 当且仅当 $q(t) \in I_0$ 成立，由此可在 $\mathcal{O}(1)$ 时间内得到 t^*。否则（$L_q \neq L_r$），我们在 $q(t) \in L_r$ 或 $r(t) \in L_q$ 的时刻（至多两个）处将活动时间区间分割。这至多产生三个按时间顺序处理的子区间。在每个子区间上，活动子线段 $s_q \subseteq \tau_q$ 和 $s_r \subseteq \tau_r$ 分别位于 L_r 和 L_q 的闭半平面内，因此其端点处于凸位置（或共享一个端点），并且 $y_q(t)$ 在该开子区间上保持恒定的严格符号。

在 $\mathcal{O}$中以 n时间在 $T(p^+_{\tau_r})$和 $T(p^-_{\tau_r})$的最短路径图中定位 $p^+_{s_q}$和$p^-_{s_q}$，即可得到它们在两棵树中的父顶点（图 4）。对于任意端点 $a \in \{p^+_{s_q}, p^-_{s_q}\} \subset W(\tau_r)$和任意端点 $b \in \{p^+_{s_r}, p^-_{s_r}\} \subseteq \tau_r$，由于 $a \in W(\tau_r)$，a能看到 τ_r上的至少一个点，因此 $\pi(a, p^+_{\tau_r})$和 $\pi(a, p^-_{\tau_r})$已经是内凸链，构成顶点为 a 的漏斗 $\mathcal{F}(a, \tau_r)$的边界。因此，$\pi(a, b)$要么是线段ab—(通过 $\mathcal{O}$进行 n时间的射线射击来检查)，要么是 $\pi(a, p^+_{\tau_r})$或 $\pi(a, p^-_{\tau_r})$的一个前缀，延伸至从 b 出发的唯一切线顶点 z（利用up$_j$，通过二分搜索在 $\mathcal{O}$中以^2 n时间定位），然后接上 zb。由此，所有四条端点到端点的路径$\pi(p^+_{s_q}, p^+_{s_r})$、$\pi(p^-_{s_q}, p^-_{s_r})$、$\pi(p^+_{s_r}, p^-_{s_q})$和 $\pi(p^-_{s_r}, p^+_{s_q})$，都可以表示为$T(p^+_{\tau_r})$或 $T(p^-_{\tau_r})$中的连续子路径，再加上至多两条末端边；借助up$_j$，即可支持以 n为底的 $\mathcal{O}$时间顶点访问。

如果 $L(s_q, s_r)$ 非空，则每条交叉路径 $\pi(p^+_{s_r}, p^-_{s_q})$ 和 $\pi(p^-_{s_r}, p^+_{s_q})$ 在顺时针与逆时针之间改变转向的次数至多为一次（ [12] 的观察1）。对于每条交叉路径：如果端点相互可见，则取该单一线段；如果路径上的所有转向方向相同（没有拐点边），则内部双切线是其两条末端边中的一条（分别与两个端点相接），该边向 $W(\tau_r)$ 内延伸并与对面的线段相交（通过射线投射在 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间内验证）；否则，利用其唯一的拐点边，在 $\mathcal{O}(\log^2 n)$ 时间内对路径进行二分搜索，使用 up$_j$ 。延伸这两条

内部双切线，使其相交于 s_q 和 s_r （通过 $\mathcal{O}(\log n)$ 射线投射验证；如果任一条无法在 $W(\tau_r)$ 内切割s_q和 s_r，则 $L(s_q, s_r) = \emptyset$，我们跳过此子区间），得到由 $q' \subseteq s_q$ 和 $r' \subseteq s_r$ 界定可见性玻璃 $L(s_q, s_r)$ 的子线段（如果两条双切线重合，$L(s_q, s_r)$ 是单一线段，并在 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间内检查可见性）。由于 $L(s_q, s_r)$ 由这些内部双切线界定，且 s_q, s_r 位于凸位置，其上链和下链 $\gamma^+ = \pi(p^+_{q'}, p^+_{r'})$ 和 $\gamma^- = \pi(p^-_{q'}, p^-_{r'})$ 均为内凸的（至多沿单一线段相交）；γ^+ 的内部顶点和边在包含 $\pi(p^+_{s_q}, p^+_{s_r})$ 的 $T(p^+_{\tau_r})$ 或 $T(p^-_{\tau_r})$ 中构成 $\pi(p^+_{s_q}, p^+_{s_r})$ 的连续子路径；而 γ^- 的内部顶点和边则在包含 $\pi(p^-_{s_q}, p^-_{s_r})$ 的两个树之一中构成 $\pi(p^-_{s_q}, p^-_{s_r})$ 的连续子路径。将当前时间子区间限制为 $[t'_0, t'_1]$，其中 $q(t) \in q'$ 且 $r(t) \in r'$ （若为空则终止），我们通过$\mathcal{O}(\log n)$ 射线投射查询测试 t'_0；如果 t'_0 可见，则返回 $t^* = t'_0$。

可见性条件。对于任意点 $v = (x_v, y_v)$，定义

$$f_v(t) := (x_q(t) - x_v)(y_r(t) - y_v) - (y_q(t) - y_v)(x_r(t) - x_v), \tag{1}$$

其等于 $(x_r(t) - x_q(t))(y_v - y_q(t)) - (y_r(t) - y_q(t))(x_v - x_q(t))$。因此，当且仅当 v 位于有向直线 $g(t) = \overrightarrow{q\ t\ r\ t}$ ( ) ( ) 上或其左侧时，$f_v(t) \geq 0$；当且仅当v 位于 $g(t)$ 的右侧或其上时，$f_v(t) \leq 0$。将 γ^+ 标记为 $L(s_q, s_r)$ 左侧的链（从 q' 朝向 r'观察），将 γ^- 标记为右侧的链，并定义

$$G^+(t) := \min_{u \in \gamma^+} f_u(t) \quad \text{and} \quad G^-(t) := \max_{w \in \gamma^-} f_w(t),$$

对于每个 $t \in [t'_0, t'_1]$，我们都有:

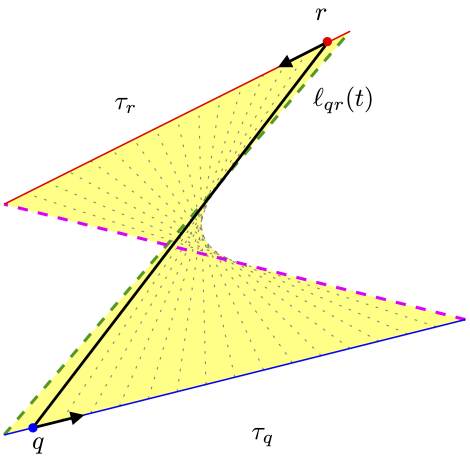
$$\overline{q(t)r(t)} \subseteq P \iff G^+(t) \geq 0 \text{ and } G^-(t) \leq 0. \tag{2}$$

观察 2。对于每个顶点 $v = (x_v, y_v)$，$f_v(t) = At^2 + B_v t + C_v$ 是一个二次多项式，其首项系数 $A = v_{qx}v_{ry} - v_{qy}v_{rx}$ 与 v无关。因此，在 $(t'_0, t'_1]$ 上进入相互可见性的任何转换，都发生在某个顶点 $v \in \gamma^+ \cup \gamma^-$ 所对应的~~$f_v(t) = 0$~~的非负实根处，使得 $q(t)r(t) \subseteq P$。

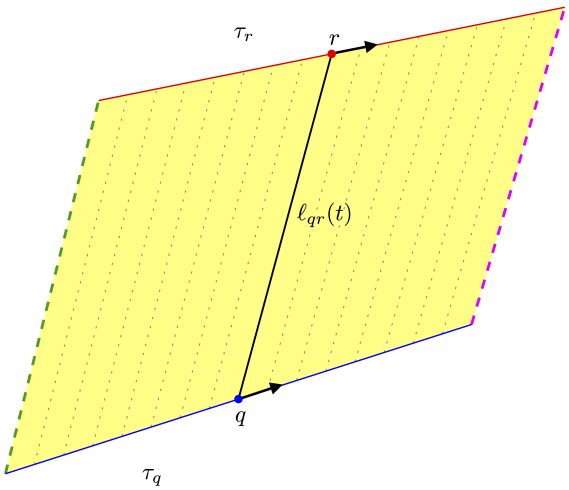
证明。令 $\Delta x_{q0} = x_{q,\,0} - x_v$，$\Delta y_{q0} = y_{q,\,0} - y_v$，$\Delta x_{r0} = x_{r,\,0} - x_v$，以及 $\Delta y_{r0} = y_{r,\,0} - y_v$，展开（1）可得 $f_v(t) = At^2 + B_v t + C_v$ 其中

$$\begin{aligned} A &= v_{qx}v_{ry} - v_{qy}v_{rx}, \\ B_v &= \Delta x_{q0}v_{ry} - \Delta y_{q0}v_{rx} + \Delta y_{r0}v_{qx} - \Delta x_{r0}v_{qy}, \\ C_v &= \Delta x_{q0}\Delta y_{r0} - \Delta y_{q0}\Delta x_{r0}. \end{aligned}$$

特别地，A 仅取决于 q 和 r的速度向量。若 $A \neq 0$，方程 $f_v(t) = 0$至多有两个实根；若 $A = 0$ 且 $B_v \neq 0$，则有唯一根 $t = -C_v/B_v$；若$A = B_v = 0$，则 v 要么对所有 t ($C_v = 0$)都与 $q(t)$和 $r(t)$共线，要么对没有任何 t ($C_v \neq 0$)共线。由于在 t'_0处不可见，结合 G^+ 和 G^- 的连续性可知，在满足（2）的最早$t^* \in (t'_0, t'_1]$)处，$G^+(t^*) = 0$ 或 $G^-(t^*) = 0$，这意味着对于某个$v \in \gamma^+ \cup \gamma^-$，$f_v(t^*) = 0$。 □



(a) 相反方向（带有二次包络）。



(b) 相同方向。

图5：系带 $\ell_{qr}(t)$ 在 q （τ_q，蓝色）和 r （τ_r，红色）之间扫过的面积 S （黄色）。在速度向量非平行的相反方向运动（a）中，移动直线 $g(t)$ 环绕二次包络，这使视线能够多次避开并重新接触 $L(\tau_q, \tau_r)$ 的其中一条链。

考虑移动牵引线 $\ell_{qr}(t) = q(t)r(t)$及其扫过的面积 $S = \bigcup_{t\in[0,t_f]} \ell_{qr}(t)$（图5）。将 $g(1)$ 视为关于 $(q\ t\ r\ t \quad At^2 + B\ x\ y\ t + C\ x\ y = 0 \quad B\ x\ y \quad C\ x\ y \quad x\ y \quad ,)$ （，）的方程，可将移动直线（t）（）（）写成（，）（，），其中（，）和（，）关于（，）均为线性函数。当$A \neq 0$时，消去这个二次函数与其 t导数之间的 t，可知直线 $\{g(t)\}$围绕二次包络 $B(x,y)^2 - 4AC(x,y) = 0$。因此，当 $A < 0$时，每个 $f_u(t)$都是开口向下的二次函数（$f_u''(t) = 2A < 0$），所以 $G^+(t) = \min_{u\in\gamma^+} f_u(t)$为凹函数（因为它是凹二次函数的逐点最小值），使得 $\{t \in [t_0', t_1'] \mid G^+(t) \geq 0\}$ 是一个单一区间。相较之下，$G^-(t) = \max_{w\in\gamma^-} f_w(t)$是开口向下二次函数的逐点最大值：当 $g(t)$沿着这个二次包络运动时，$G^-(t)$会在相邻的边平行时刻之间向下拱起，并且可以在任意多个不连通区间上低于0（图5a）。

在坐标系中表示所有坐标，其中 τ_r 位于 x-轴上（$y_{r,\,0} = v_{ry} = 0$），并且不失一般性地假设 $y_q(t) > 0$ 位于（t_0'，t_1'）上（$y_q(t) < 0$ 的情况具有对称性）。令

$$N_0 := (v_{rx} - v_{qx})y_{q,0} - (x_{r,0} - x_{q,0})v_{qy}.$$

$\theta(t)$ 从 $q(t)$ 到 $r(t)$ 的 $g(t)$ 的方向角 $\in (-\pi, 0)$ 的导数为

$$\theta'(t) = \frac{\big(x_r(t) - x_q(t)\big)(-v_{qy}) - \big(-y_q(t)\big)(v_{rx} - v_{qx})}{\|r(t) - q(t)\|^2} = \frac{N_0}{\|r(t) - q(t)\|^2}.$$

方向恒定情形（$N_0 = 0$）。当 $N_0 = 0$ 时，对于所有 $t \in (t_0', t_1')$，我们有 $\theta'(t) = 0$，因此有向直线 $g(t)$ 在整个（t_0'，t_1'）过程中保持方向恒定（因为 $y_q(t) > 0$ 防止$r(t) - q(t)$ 消失或反向）。沿着 γ^+ （以及沿着 γ^-）使用向上j 指针进行一次二分搜索，即可在 $\mathcal{O}(\log^2 n)$ 时间内找到达到 $G^+(t) =$的极值顶点 $u^* \in \gamma^+$

$f_{u^*}(t)$，并且对于所有 $t \in [t'_0, t'_1]$，存在达到 $G^-(t) = f_{w^*}(t)$ 的极值顶点 $w^* \in \gamma^-$。在 $[t'_0, t'_1]$ 上求解两个常数次数不等式 $f_{u^*}(t) \geq 0$ 和 $f_{w^*}(t) \leq 0$ 需要 $\mathcal{O}(1)$ 时间，并得到 t^*。

γ^+ ($A \leq 0, N_0 \neq 0$) 的可见区间。当 $N_0 \neq 0$ 时，$g(t)$ 的方向角 $\theta(t)$ 在 (t'_0, t'_1) 上单调旋转。由于 $\gamma^+ = (u_0, u_1, \ldots, u_k, u_{k+1})$（其中 $u_0 = p^+_{q'}$ 和 $u_{k+1} = p^+_{r'}$）是内凸的，其边也会单调转动，因此，使 γ^+ 上的 $G^+(t) = \min_{u \in \gamma^+} f_u(t)$ 取得最小值的顶点会沿着 γ^+ 的连续子链 $u_a, \ldots, u_b$ 单调移动。具体而言，当 $g(t)$ 与 $u_j u_{j+1}$ 平行时，该顶点会从 u_j 切换到 u_{j+1}；这个唯一时刻为 $t_j \in (t'_0, t'_1)$，可在 $\mathcal{O}(1)$ 时间内计算得到。我们沿着 γ^+（使用 $\mathbf{up}_j$ 指针）进行两次二分搜索，在 $\mathcal{O}(\log^2 n)$ 时间内找到 u_a 和 u_b，使其方向分别与 $\theta(t'_0)$ 和 $\theta(t'_1)$ 匹配。按照时间递增的顺序为该子链编索引（必要时将其反转），并设置 $t_{a-1} = t'_0$ 和 $t_b = t'_1$，即可得到 $t_{a-1} \leq t_a < \cdots < t_{b-1} \leq t_b$，使得在每个区间 $[t_{j-1}, t_j]$ $(a \leq j \leq b)$ 上，$G^+(t) = f_{u_j}(t)$。

每当 $A \leq 0$, $G^+(t)$ 在 $[t'_0, t'_1]$ 上具有非递增的单侧导数时，$\{t \in [t'_0, t'_1] \mid G^+(t) \geq 0\}$ 就是一个单一的（可能为空的）闭区间 $[t_{\mathrm{lo}}, t_{\mathrm{hi}}]$。我们按如下方式在$\mathcal{O}(\log^2 n)$时间内求出 $[t_{\mathrm{lo}}, t_{\mathrm{hi}}]$：

1. 求峰值 t_{peak}：使用 $\mathbf{up}_j$ 指针对 $j \in \{a, \ldots, b\}$ 进行二分搜索（每步耗时 $\mathcal{O}(\log n)$）。在索引 j 处，用 $\mathcal{O}(1)$ 时间计算 $f'_{u_j}(t_{j-1})$ 和 $f'_{u_j}(t_j)$。由于 G^+ 的斜率非递增，若 $f'_{u_j}(t_{j-1}) \leq 0$，则 $t_{\mathrm{peak}} \leq t_{j-1}$（递归搜索左侧）；若 $f'_{u_j}(t_j) \geq 0$，则 $t_{\mathrm{peak}} \geq t_j$（递归搜索右侧）；否则，$t_{\mathrm{peak}}$ 位于 (t_{j-1}, t_j) 内，即处于 $f'_{u_j}(t)$ 的唯一零点处 $= 0$（其中 $p = j$）。在边界处，若 $f'_{u_a}(t'_0) \leq 0$，则 $t_{\mathrm{peak}} = t'_0 (p = a)$；若 $f'_{u_b}(t'_1) \geq 0$，则 $t_{\mathrm{peak}} = t'_1 (p = b)$；若搜索收敛于相邻索引 j 和 $j+1$之间，则 $t_{\mathrm{peak}} = t_j$ $(p = j+1)$。若 $G^+(t_{\mathrm{peak}}) < 0$，则清除区间为空，搜索终止。

2. 求解 t_{lo} 和 t_{hi}：由于 G^+ 在 $[t'_0, t_{\mathrm{peak}}]$上是非递减的，如果 $G^+(t'_0) \geq 0$ 则$t_{\mathrm{lo}} = t'_0$；否则，如果 $G^+(t_{p-1}) \leq 0$，则 t_{lo} 是 $f_{u_p}(t) = 0$ 在 $[t_{p-1}, t_{\mathrm{peak}}]$上的零点。否则（$G^+(t_{p-1}) > 0$），根据 $G^+(t_j) = f_{u_j}(t_j)$ 的符号对 $j \in \{a, \ldots, p-1\}$ 进行二分查找，该过程耗时 $\mathcal{O}(\log^2 n)$（每个这样的 t_j 都位于 $[t'_0, t_{\mathrm{peak}}]$中），从而定位出唯一的活动顶点$u_l$，$G^+$ 在该顶点处穿过 0；然后在 $[t_{l-1}, t_l]$ 上求解 $f_{u_l}(t) = 0$，耗时 $\mathcal{O}(1)$，即可得到 t_{lo}。对称地，在 $[t_{\mathrm{peak}}, t'_1]$ 上（检查 $G^+(t'_1) \geq 0$ 和 $G^+(t_p) \leq 0$，否则根据 $G^+(t_{j-1}) = f_{u_j}(t_{j-1})$ 的符号对 $j \in \{p+1, \ldots, b\}$ 进行二分查找），我们得到 t_{hi}。

平行速度向量（$A = 0$, $N_0 \neq 0$）。当 $A = 0$ 时，每个 $f_v(t)$ 关于 t 都是线性的，因此 $G^+(t)$ 和 $-G^-(t)$ 在 $[t'_0, t'_1]$ 上都具有非递增的单侧导数。在 γ^+ 和 γ^- 上分别运行上述耗时为$\mathcal{O}(\log^2 n)$的二分搜索，可得到两个清除区间 $[t^+_{\mathrm{lo}} t^+_{\mathrm{hi}}]$ 和 $[t^-_{\mathrm{lo}} t^-_{\mathrm{hi}}]$；如果它们的交集非空，则其左端点为 t^*。

非平行速度向量（$A \neq 0$, $N_0 \neq 0$）。假设 $A < 0$（$A > 0$ 的情况是对称的，只需交换 γ^+ 和 γ^- 的作用并对符号取反）。我们首先按照上述方法，在 $\mathcal{O}$ 中用时 $^2 n(\log^2 n)$ 计算 γ^+ 的单个清除区间 $[t_{\mathrm{lo}}, t_{\mathrm{hi}}] \subseteq [t'_0, t'_1]$（若为空则终止）。接下来需要找到满足 $G^-(t) \leq 0$ 的最小 $t \in [t_{\mathrm{lo}}, t_{\mathrm{hi}}]$。

首先，通过一次 t_{lo} $\mathcal{O}$（$\log n$）射线投射查询进行测试；如果 $q(t_{\mathrm{lo}})r(t_{\mathrm{lo}}) \subseteq P$，则返回 $t^* = t_{\mathrm{lo}}$。否则，$G^-(t_{\mathrm{lo}}) > 0$。如果 γ^- 没有内部反射顶点，那么 $G^-(t) \leq 0$ 在 $[t_{\mathrm{lo}}, t_{\mathrm{hi}}]$上恒成立，此时已经会返回 t_{lo}。否则，令 $e = w_j w_{j+1}$ 为任意一条边

γ^- 上的一条边，其平行时刻 t_e 位于 $(t_{\mathrm{lo}},\ t_{\mathrm{hi}})$ 内。在 $\{t_{\mathrm{lo}}, t_{\mathrm{hi}}\} \cup \{t_e \in (t_{\mathrm{lo}},\ t_{\mathrm{hi}})\}$ 中任意两个相邻时刻之间，只有一个顶点 $w \in \gamma^-$ 处于活动状态，因此 $G^-(t) = f_w(t)$ 是一个开口向下的二次函数，在该子区间上的最小值出现在端点处。因此，当且仅当以下任一条件成立时，$[t_{\mathrm{lo}}, t_{\mathrm{hi}}]$ 上存在相互可见性：对于某条边 $e = w_j w_{j+1} \in \gamma^-$，$f_{w_j}(t_e) \le 0$ 且 $t_e \in (t_{\mathrm{lo}},\ t_{\mathrm{hi}})$；或者 $G^-(t_{\mathrm{hi}}) \le 0$。

由于在 $(t_{\mathrm{lo}}, t_{\mathrm{hi}})$ 上，$y_q(t) > 0$，因此直线 $g(t)$ 在 $(t_{\mathrm{lo}}, t_{\mathrm{hi}})$ 上始终不是水平的。考虑 γ^- 上任意一条非水平边 $e = w_j w_{j+1}$，其支撑直线为 $x + s_e y - d_e = 0$。在时刻 t_e，当 $g(t_e)$ 与 e 平行时，它的两个点 $q(t_e) = (x_q(t_e),\ y_q(t_e))$ 和 $r(t_e) = (x_r(t_e),\ 0)$ 具有相同的 $x + s_e y$ 值，因此 $x_q(t_e) + s_e y_q(t_e) = x_r(t_e)$。解出 t_e 可得

$$t_e = -\frac{(x_{q,0} - x_{r,0}) + s_e y_{q,0}}{D(s_e)}, \qquad D(s_e) := (v_{qx} - v_{rx}) + s_e v_{qy},$$

因此 $y_q(t_e) = y_{q,0} + v_{qy} t_e = -N_0 / D(s_e)$。将 t_e 代入，得到 $f_{w_j}(t_e) = y_q(t_e)\,(d_e - x_r(t_e))$。将 $x_r(t_e) = 1/D(s_e) = y_q(t_e) / (-N_0)$ 代入，得到 $f_{w_j}(t_e) = y_q(t_e)^2 / (-N_0)$，再通过 $y_q(t_e) = y_{q,0} + v_{qy} t_e$ 展开为

$$f_{w_j}(t_e) = \frac{y_q(t_e)^2}{-N_0}\Big(v_{qy}(s_e d_e) + (v_{qx} - v_{rx}) d_e + (v_{rx} y_{q,0} - x_{r,0} v_{qy}) s_e + (v_{rx} x_{q,0} - x_{r,0} v_{qx})\Big).$$

由于 $y_q(t_e)^2 > 0$ 且 $-N_0$ 具有固定符号，测试 $f_{w_j}(t_e) \le 0$ 是否成立，等价于测试固定点 $p(e) = (s_e,\ d_e,\ s_e d_e) \in \mathbb{R}^3$ 是否位于一个完全由查询决定的单一半空间内。

为了找出 γ^- 中满足 $t_{e^*} \in (t_{\mathrm{lo}}, t_{\mathrm{hi}})$ 且 $f_{w_{j^*}}(t_{e^*}) \le 0$ 的最早边 e^*，我们首先通过两次基于边斜率的二分搜索，利用 up$_j$ 指针，在 $\mathcal{O}(\log^2 n)$ 时间内，定位出 γ^- 中其边在 $(t_{\mathrm{lo}}, t_{\mathrm{hi}})$ 期间变得与 $g(t)$ 平行的连续子链。沿着该子链，时间 t_e 按路径顺序严格单调变化。其树中的内部树边（位于树 $T(p^+_{\tau_r})$ 或 $T(p^-_{\tau_r})$ 中）可分解为偏置二叉树 [28] 的 $\mathcal{O}(\log n)$ 个典范节点，以及 $\mathcal{O}(\log n)$ 条路径外边，另外至多有两条分别与 $p^-_{q'}$ 和 $p^-_{r'}$ 相 incident 的末端边。我们按 t_e 的递增顺序扫描这 $\mathcal{O}(\log n)$ 个部分：如果 t_e 沿链递增，则沿 γ^- 正向扫描，否则反向扫描。每条路径外边或末端边均可在 $\mathcal{O}(1)$ 时间内直接测试，而每个典范节点则通过其 Dobkin–Kirkpatrick 半空间空性结构，在 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间内进行查询。该扫描耗时 $\mathcal{O}(\log^2 n)$，并在找到第一个包含满足 $f_{w_j}(t_e) \le 0$ 的边的部分时停止。如果该部分是典范节点 ν^*，我们便在 $\mathcal{O}(\log^2 n)$ 时间内沿其偏置二叉树（高度为 $\mathcal{O}(\log n)$）向下搜索：在每一步中，我们在 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间内查询对应于较早时间的子节点；如果该子节点包含有效边，则进入该子节点，否则进入另一个子节点，直到到达最早的此类边 $e^* = w_{j^*} w_{j^*+1}$。

找到 e^* 后，令 w^* 为在 t_{e^*} 紧前方取得 $G^-(t) = f_{w^*}(t)$ 的 e^* 的端点（也就是说，若 t_e 沿着 γ^- 增大，则 w_{j^*}；否则为 w_{j^*+1}）。根据 e^* 的选择，我们有 $G^-(t) > 0$，且该关系在 t_{lo} 处以及所有更早的断点处均成立；由于 $G^-(t)$ 在连续断点之间的每个子区间上都是开口向下的，因此从 t_{lo} 到 w^* 区间起点的整个区间内，$G^-(t) > 0$。于是，$f_{w^*}(t)$ 在 w^* 区间起点处严格为正，并满足 $f_{w^*}(t_{e^*}) \le 0$。因为 $f_{w^*}(t)$ 是一个开口向下的二次函数（$A < 0$），它在两个实根之间严格为正，所以 $G^-(t)$ 首次达到 0 时，对应的是 $f_{w^*}(t) = 0$ 的较大实根，从而 t^* 能在 $\mathcal{O}(1)$ 时间内得到。最后，如果不存在满足 $f_{w_j}(t_e) \le 0$ 的边 $t_e \in (t_{\mathrm{lo}}, t_{\mathrm{hi}})$，那么在 $[t_{\mathrm{lo}}, t_{\mathrm{hi}}]$ 内直到以 t_{hi} 为终点的最后一个子区间起点，$G^-(t)$ 始终 > 0；我们通过一次 $\mathcal{O}(\log n)$ 射线投射查询来测试 t_{hi}。如果 $q(t_{\mathrm{hi}}) r(t_{\mathrm{hi}}) \subseteq P$，则进行二分

沿着与 $g(t)$ 的左极限方向相匹配的 γ^- 进行搜索， $t \to t^-_{\text{hi}}$ 可在 $\mathcal{O}(\log^2 n)$ 时间内定位到在 t_{hi} 紧前方取得 $G^-(t) = f_w(t)$ 的顶点 $w \in \gamma^-$ ；根据同样的论证， $f_w(t) = 0$ 的较大实根给出 $t^* \le t_{\text{hi}}$。因此：

定理 2. 给定一条固定轨迹 $\tau_r \subset P$，可以在 $\mathcal{O}(n \log n)$预处理时间内构建一个数据结构，并占用 $\mathcal{O}(n\log n)$ 空间，使得对于任意查询轨迹 $\tau_q \subset P$以及查询速度 v_q 和 v_r，都能在 $\mathcal{O}(\log^2 n)$ 时间内计算出最早可见时间 t^* 。

4 查询轨迹

在本节中，我们去除前面各节中的所有放宽条件，也就是说， q和 r的轨迹都不再预先已知，同时 v_q 和 v_r也不例外。与第 3节不同，在该节中， τ_r是预先已知的，因此可以在预处理时与 x轴对齐；而在这里，两条轨迹都不是预先固定的。相反，我们通过斜率和 e 截距（ y-m_e, c_e） $\in \mathbb{R}^2$对每条候选边进行参数化，将边平行可见性测试表示为 $\mathbb{R}^2$上的常数复杂度半代数范围查询，并将 Agarwal 等人的划分树 [1] 与线性空间压缩范围 OR 结构结合起来。

设 $\Delta x_0 := x_{r,0} - x_{q,0}$, $\Delta y_0 := y_{r,0} - y_{q,0}$, $\Delta v_x := v_{rx} - v_{qx}$，以及 $\Delta v_y := v_{ry} - v_{qy}$，使得 $\Delta x(t) := x_r(t) - x_q(t) = \Delta x_0 + \Delta v_x t$ 和 $\Delta y(t) := y_r(t) - y_q(t) = \Delta y_0 + \Delta v_y t$，并令 $M_0 := \Delta v_y \Delta x_0 - \Delta v_x \Delta y_0$。 $g(t)$ 的方向角 $\theta(t) = \overrightarrow{q\,t\,r\,t}()()$ 满足$\theta'(t) = M_0/\|r(t) - q(t)\|^2$。每当 $\Delta x(t) \neq 0$ 时，直线 $g(t)$ 的斜率为 $m(t) = \Delta y(t)/\Delta x(t)$（其中 $m'(t) = M_0/\Delta x(t)^2$），且 y-截距为 $c(t) = y_q(t) - m(t)x_q(t)$。用其支撑直线 $y = m_e x + c_e$ 的参数点 $p(e) := (m_e, c_e) \in \mathbb{R}^2$ 表示每条非垂直边 e。

观察 3. 在任意开区间 (t_1, t_2) 上，若 $M_0 \neq 0$ 且 $\Delta x(t) \neq 0$，则满足 $t_e \in (t_1, t_2)$ 且 $f_{w_j}(t_e) \le 0$（分别为 ≥ 0）的非垂直边 $e = w_j w_{j+1}$ 的平行时刻t_e对应的参数点集合 $R_q \subset \mathbb{R}^2$ $p(e) = (m_e, c_e)$ 是 $\mathbb{R}^2$中的常复杂度半代数范围。

证明。由于 $m(t)$ 在 (t_1, t_2) 上严格单调，因此 $t_e \in (t_1, t_2)$ 当且仅当 $m_{\min} < m_e < m_{\max}$，其中 $m_{\min} = \min(m(t_1^+), m(t_2^-))$，且 $m_{\max} = \max(m(t_1^+), m(t_2^-))$（在 $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$中取单侧极限，因此若 Δx 在 t_1 或 t_2处为零，则斜率范围为半无限）。求解 $m(t_e) = m_e$ 可得 $t_e = (\Delta y_0 - m_e \Delta x_0)/D_x(m_e)$，其中 $D_x(m_e) := m_e \Delta v_x - \Delta v_y$，直接检验可得 $\Delta x(t_e) D_x(m_e) = -M_0 \neq 0$。由于 w_j 位于 $y = m_e x + c_e$ 上，且$r(t_e) - q(t_e) = \Delta x(t_e)(1, m_e)$，代入（1）可得 $f_{w_j}(t_e) = \Delta x(t_e)(c_e - c(t_e))$。代入$c(t_e) = (y_{q,0} - m_e x_{q,0}) + (v_{qy} - m_e v_{qx}) t_e$ 以及 $\Delta x(t_e) = -M_0/D_x(m_e)$，得到

$$f_{w_j}(t_e) = \frac{-M_0}{D_x(m_e)^2}\Big[c_e D_x(m_e) - (y_{q,0} - m_e x_{q,0}) D_x(m_e) - (v_{qy} - m_e v_{qx})(\Delta y_0 - m_e \Delta x_0)\Big].$$

由于 $D_x(m_e)^2 > 0$和 $-M_0$在 (t_1, t_2) 上符号恒定，条件 $f_{w_j}(t_e) \le 0$（分别为≥ 0）可归结为 (m_e, c_e) 上的一个二次多项式不等式，以及 $m_{\min} < m_e < m_{\max}$。

□

请注意，为什么单独使用 Guibas 和 Hershberger [18]，或第 3 节的三维凸包方法，都无法在这里以 $\mathcal{O}(n)$ 的空间达到 $\mathcal{O}(\text{polylog}\, n)$ 的查询时。当一条链的清空集构成单个区间时（在 $M_0 = 0$ 或 $A = 0$ 时，γ^+ 和 γ^- 均如此；而在 $A < 0$和 $M_0 \neq 0$时，γ^+ 亦如此），只需对 [18] 中的一条边 e_v 进行局部测试，就足以舍弃链的一侧。然而，当 $A < 0$和 $M_0 \neq 0$时，γ^-的 $G^-(t)$ 可能在多个不连通区间内降至 0 以下，因此在 t_{e_v} 处受阻的边 e_v 无法提供清空边可能所在位置的任何方向信息。此外，第 3 节的三维归约依赖于将固定的 τ_r 与 x轴对齐，以消去一个变量；当两条轨迹都是查询对象时，观察 3 中的不等式涉及全部四个非恒定单项式 m_e、c_e、m_e^2 和 $m_e c_e$（这是一个四维半空间查询，而非三维查询；凸包的最坏情况规模为二次）。即使在 $\mathbb{R}^2$ 中，沿 $\mathcal{O}$ 的 n 个层级为 [1] 分别构建划分树，也会占用 $\mathcal{O}(n\log\, n)$ 的空间；而像 [18] 那样重用共享子树，会使隐藏的凹袋边留在子树中，因此，除非同时记录每条边所处的 $\mathcal{D}$ 中的祖先节点，否则单棵全局划分树无法仅筛选子多边形的活动边。

预处理。我们在 $\mathcal{O}(n)$ 时间内对 P 进行三角剖分，构建占用 $\mathcal{O}(n)$ 空间的射线发射结构 [8],，并在 Guibas 和 Hershberger 的平衡子多边形层次结构 $\mathcal{D}$ 上构建占用 $\mathcal{O}(n)$ 空间的双点最短路径结构。该层次结构的最大度为 3，高度为 $h \in \mathcal{O}(\log n)$ [18, 8]。

对于每个 P_u ($u \in \mathcal{D}$)的每对边界对角线，我们通过 [18]在总计 $\mathcal{O}(n)$ 空间内自底向上持久维护它们的基本沙漏（开放或闭合）。开放沙漏包含两条内凸链（每条链的转角均小于 2π）；闭合沙漏包含四条内凸漏斗链（每条链的转角均小于 π）以及一条中央茎，但仅当中央茎为凸且总转角小于 2π 时才予以保留（因为开放查询沙漏 $H(q', r')$的任何链都无法穿过非凸或螺旋状的茎）。将 P_u 中保留的每条凸链按其至多两个垂直转折进行拆分后，每个节点 u至多得到 $\mathcal{O}(1)$ 种固定斜率单调链类型 s。从 $\mathcal{D}$ 每个叶节点 Δ 的 $\mathcal{O}(1)$ 条边界边开始（创建节点为 $u_0(e) = \Delta$），在内部节点 u 进行的每次自底向上拼接只会引入至多 $\mathcal{O}(1)$ 条新的公切线边（每条边都分配一个独立条目，创建节点为 $u_0(e) = u$，因此隐藏的凹袋边不会导致误报）。于是，$\mathcal{D}$ 中所有互不相同的非垂直边构成的集合 $\mathcal{E}$ 大小为 $N = \mathcal{O}(n)$。对于每个 $e \in \mathcal{E}$ 和每种链类型 s，我们存储一个 $(h+1)$ 位字 $W_s(e)$（即 $\mathcal{O}(1)$ 个机器字）；其第 ℓ 位为 1，当且仅当 e 在 s 子链类型上仍然存在于 $\mathcal{D}$中 $u_0(e)$的唯一深度为 ℓ 的祖先节点处。为了计算所有 $W_s(e)$，我们访问每个 $u \in \mathcal{D}$（其深度为 $\ell = \text{depth}(u)$），利用 [18] 的边检索列表（引理 6），以每条边 $\mathcal{O}(1)$ 的时间提取 P_u 每条保留的沙漏链中的边，设置 $W_s(e)$的第 ℓ 位，然后丢弃临时列表。由于每个固定深度上的子多边形内部互不相交，该过程需要 $\mathcal{O}(n\log\, n)$ 时间和总计 $\mathcal{O}(n)$ 空间。

我们在 $\mathcal{O}(n^{1+\varepsilon})$ 预期时间内对 $\{p(e) \mid e \in \mathcal{E}\} \subset \mathbb{R}^2$ 进行预处理，将其构建为 Agarwal 等人提出的 $d = 2$ 划分树 $\mathcal{T}_\mathcal{E}$ [1]，所需空间为 $\mathcal{O}(n)$。根据第1.1节，对 $\mathcal{T}_\mathcal{E}$ 进行中序叶节点遍历可得到 $\mathcal{E}$的一个排列 $A_\mathcal{E}[1 \dots N]$，使得查询返回的每个规范子集或一维区间都是一个连续子数组 $A_\mathcal{E}[L_j \dots R_j]$; 预期在 $\mathcal{O}(n^{1/2}\log^{B_0} n)$ 时间内返回 $M' = \mathcal{O}(n^{1/2}\log^{B_0} n)$ 个区间。将 $\mathcal{D}$ 同一节点创建的边按先序遍历顺序连续排列，可为每条 $e \in \mathcal{E}$边赋予先序索引 $\text{id}(e) \in \{1, \dots, N\}$，从而任意 $u \in \mathcal{D}$ 节点的后代节点构成一个连续索引区间 $[\text{id}_L(u), \text{id}_R(u)]$; 对于任意满足 $\text{id}(e) \in [\text{id}_L(u), \text{id}_R(u)]$, 的 e 节点，u 是 $u_0(e)$ 的唯一深度为 ℓ 的祖先节点（$\ell =$

depth(u))，因此 $W_s(e)$ 的第 ℓ 位可用于测试在 u 处是否存活。对于点集 $\{(k, \mathrm{id}(A_{\mathcal{E}}[k])) : 1 \le k \le N\}$，我们构建一棵压缩二叉范围树，按 id(·) [5] 进行划分：每个节点 ν （大小为 m_ν）存储其 m_ν 位分割向量，支持 $\mathcal{O}(1)$ 时间的前缀计数查询；还存储一个由 W_s 组成的一维按位或线段树，其分块大小为 $b = \lceil \log_2 n \rceil$ ，每种类型各建一棵（对于满足 $m_\nu < b$ 的节点，不构建分块树，而是直接追踪所有 m_ν 个元素）；而值 $W_s(e)$ 本身存储在叶节点中。在所有 $\lceil \log_2 N \rceil$ 层中，分割向量、分块树和叶节点共占用 $\mathcal{O}(n)$ 个字，预处理时间为 $\mathcal{O}(n \log n)$。给定任意查询矩形 $[L_j, R_j] \times [\mathrm{id}_L(u), \mathrm{id}_R(u)],$，将 $[\mathrm{id}_L(u), \mathrm{id}_R(u)]$ 分解为 $\mathcal{O}(\log n)$ 个树节点；利用线段树在每个节点上以 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间查询完整分块，并将至多 $2b = \mathcal{O}(\log n)$ 个边界元素逐一追踪至其叶节点，每个耗时 $\mathcal{O}(\log n)$，即可在 $\mathcal{O}(\log^3 n)$ 时间内返回该矩形中 $W_s(e)$ 的按位或结果。

查询算法。给定 τ_q、τ_r、v_q 和 v_r，我们在 τ_q 与 τ_r 的支撑直线至多两次相交处，以及 τ_r 与 τ_q 的支撑直线至多两次相交处，将活动时间区间分割（共线子情况按第 3 节的方法处理）。在每个由此得到的子区间上，活动子线段 $s_q \subseteq \tau_q$ 和 $s_r \subseteq \tau_r$ 的端点处于凸位置（或共享一个端点）。按照 [12], 的引理 8 使用 [18]，我们在 $\mathcal{O}$ 时间内判定 $L(s_q, s_r)$ 是空集还是单条线段，或者得到 $q' \subseteq s_q$ 和 $r' \subseteq s_r$，使得 $L(s_q, s_r) = H(q', r')$。将范围限制在满足 $q(t) \in q'$ 且 $r(t) \in r'$ 的 $[t_0', t_1']$ 上（若为空则终止），我们通过 $\mathcal{O}$ 次 n 射线射击检查 t_0'（若可见则返回 $t^* = t_0'$ ）。沿着 $\mathcal{D}$ 中从$p_{q'}^+$ 到 $p_{r'}^+$ 的三角形路径（对 γ^- 对称处理），将沿途子多边形的预计算基本沙漏串接起来，在 $\mathcal{O}$ 时间内遍历 $\mathcal{O}$（$\log n$），即可按路径顺序将 γ^+ 和 γ^- 分解为 $\mathcal{O}$（$\log n$）个活动斜率单调子多边形子链（u_i、s_i）（每个子链都有其活动的 ∂P 索引区间 $[a_i, b_i]$ 和斜率范围 $[m_{i,\mathrm{lo}}, m_{i,\mathrm{hi}}]$），以及 $\mathcal{O}$（$\log n$）条动态公切线和终端线段。

沿着 [18] 的子多边形链树进行的任何标准二分搜索，都可以通过维护活动的 ∂P-索引区间 $[a_{\mathrm{cur}}, b_{\mathrm{cur}}]$（活动区间下降规则），在 $\mathcal{O}(\log n)$ 时间内确定性地向下遍历：在具有公切线边 e_v 的节点 v 处，如果 e_v 隐藏在 $[a_{\mathrm{cur}}, b_{\mathrm{cur}}]$ 之外（由第1.1节在 $\mathcal{O}(1)$ 时间内测试），则当 e_v 位于 a_{cur} 左侧时向右分支，位于 b_{cur} 右侧时向左分支；如果出现零长度的 e_v，则通过 v 的左侧或右侧边检索列表中的相邻边，在 $\mathcal{O}(1)$ 时间内解决；否则测试 e_v 并据此分支。当 $M_0 = 0$ 或 $A = 0$ 时，检查 $\mathcal{O}$ 中的 $\mathcal{O}(\log n)$ 个动态切线和子多边形边界顶点，可在 $^2 n$ $(\log n)$ 时间内定位包含极值顶点或零点的子链；随后下降每个已定位的、高度为 n 的 $\mathcal{O}$ 链树，即可在 $\mathcal{O}(\log^2 n)$ 时间内得到 t^*。类似地，当 $A < 0$ 和 $M_0 \neq 0$ 时（ $A > 0$ 的情形是对称的，只需交换 γ^+ 和 γ^-），沿着 γ^+ 进行同样的 $\mathcal{O}(\log^2 n)$ 时间检查和链树下降，可定位 t_{peak}、t_{lo} 和 t_{hi}，从而得到 γ^+ 的单个清除区间 $[t_{\mathrm{lo}}, t_{\mathrm{hi}}] \subseteq [t_0', t_1']$。

要搜索 γ^- 当 $A < 0$ 且 $M_0 \neq 0$ （具有 $A > 0$ 对称性）时，我们在至多一个垂直线时刻 t_{vert} 处将 $[t_{\mathrm{lo}}, t_{\mathrm{hi}}]$ 分割，其中 $\Delta x(t_{\mathrm{vert}}) = 0$，从而得到至多两个闭子区间 $[t_1, t_2]$，并按时间递增顺序进行检查。对于每个 $[t_1, t_2]$，我们通过 $\mathcal{O}$（$\log n$）射线射击来测试 t_1（若可见则返回 $t^* = t_1$ ）；否则，在 [18]中进行两次 $\mathcal{O}$（$\log^2 n$）时间的斜率查询，将 γ^- 限制为连续部分，其有向边角度位于 $\theta(t_1)$ 与 $\theta(t_2)$ 之间。由于 $\theta(t)$ 在 $[t_1, t_2]$上严格单调旋转，旋转幅度小于 π，因此该部分中的每条边都有唯一的平行时刻 $t_e \in (t_1, t_2)$，并沿 γ^-严格单调变化。我们扫描其各个片段，即其 $\mathcal{O}$（$\log n$）个动态公切线、终端线段和子多边形

子链 $(u_i, s_i, [m_{i,\mathrm{lo}}, m_{i,\mathrm{hi}}])$，按照 t_e 递增的顺序进行（如果沿 γ^- 向前扫描时 t_e 递增，则沿路径正向扫描；如果 t_e 递减，则反向扫描）。动态切线和终端线段分别在 $\mathcal{O}(1)$ 时间内完成测试。对于每个子多边形子链 (u_i, s_i)（深度为 $\ell_i = \mathsf{depth}(u_i)$），其活动边恰好是满足以下条件的那些 $e \in \mathcal{E}$：其 $\mathrm{id}(e) \in [\mathrm{id}_L(u_i), \mathrm{id}_R(u_i)]$, 位的第 ℓ_i 位在 $W_{s_i}(e)$ 中等于 1，且 $m_e \in [m_{i,\mathrm{lo}}, m_{i,\mathrm{hi}}]$。使用 $R_q \cap \{m_e \in [m_{i,\mathrm{lo}}, m_{i,\mathrm{hi}}]\}$（观察 3）查询 $\mathcal{T}_\mathcal{E}$ 会返回$M' = \mathcal{O}(n^{1/2}\log^{B_0} n)$个典范区间 $[L_j, R_j]$；在 $[L_j, R_j] \times$ [上查询范围 OR 结构，即查询 $\mathrm{id}_L(u_i)$、$\mathrm{id}_R(u_i)$] 所对应的范围，以测试 $j = 1$、.....、M' 中的位 ℓ_i，预期时间为 $\mathcal{O}(n^{1/2}\log^{B_0+3} n)$。

扫描至多 $\mathcal{O}(\log n)$ 个子多边形子链需要 $\mathcal{O}(n^{1/2}\log^{B_0+4} n)$ 的期望时间，并在最早的清空片段处停止。如果该片段是子多边形子链 i^*，我们便使用活动区间下降规则，在每个未隐藏的节点 v 处（其活动斜率区间为 $[m_a, m_b]$，切线边为 e_v），沿 u_{i^*} 的高度为 $\mathcal{O}(\log n)$ 的链树向下遍历：

- 如果 e_v 长度非零，我们会查询 $\mathcal{T}_\mathcal{E}$ 以及范围 OR 结构：若 t_e 随斜率增大，则查询严格早于斜率 t_e 的半区间（不包括 $m_{e_v}([m_a, m_{e_v})$）；否则查询 $(m_{e_v}, m_b]$。若比特 ℓ_{i^*} 为 1，则向较早的 t_e 子节点继续遍历；否则直接测试 e_v（若其清空则在此停止），然后向较晚的 t_e 子节点继续遍历。

- 如果 e_v 长度为零，我们便从 v 的检索列表中确定较早的 t_e 子节点的边界边 e_L，并查询截至 m_{e_L} 的闭合较早 t_e 半区；若比特 ℓ_{i^*} 为 1，则转向较早的 t_e 子节点，否则转向较晚的 t_e 子节点。

这将最早的清空边隔离出来，其期望时间为 $e^* = w_{j^*}w_{j^*+1}$ in $\mathcal{O}(n^{1/2}\log^{B_0+4} n)$。在前一个区间内求解 $f_{w^*}(t) = 0$，以确定 $[t_1, t_2]$ 中活动端点 w^* 的位置（如第 3 节所述），可得到 t^*。最后，如果没有内部 $t_e \in (t_1, t_2)$ 被清空，我们通过 $\mathcal{O}(\log n)$ 射线射击测试 t_2：如果 $q(t_2)r(t_2) \subseteq P$，则按照 $g(t)$ 的左极限方向对 γ^- 进行二分查找；在 $t \to t_2^-$ 中经过 $\mathcal{O}(\log^2 n)$ 时间即可定位 t_2 处的活动顶点 w，而 $f_w(t)$ 的较大根 $= 0$（如第 3 节所述）给出 $t^* \le t_2$。令 $B = B_0 + 4$，即可证明定理 3：

定理 3。 给定一个具有 n 个顶点的简单多边形 P 以及任意固定的 $\varepsilon > 0$，可以在 $\mathcal{O}(n^{1+\varepsilon})$ 的预期预处理时间内，构建一个大小为 $\mathcal{O}(n)$ 的数据结构，使得对于任意查询轨迹 τ_q、$\tau_r \subset P$ 以及查询速度 v_q 和 v_r，都能在 $\mathcal{O}(n^{1/2}\log^B n)$ 的预期时间内计算出最早可见时间 t^*，其中 B 是一个取决于 ε的常数。

5 结论与开放问题

我们介绍了用于计算两个沿线段轨迹在简单多边形内运动的实体的首次可见时间 t^* 的数据结构。仍有若干自然的开放问题。首先，将我们的结果扩展到带有 $h > 0$ 孔洞的多边形区域：目前尚不清楚是否仍能实现线性空间、次线性时间的查询。其次，允许一条或两条轨迹为包含 m 线段的折线；在这种情况下，如何确定 m 与 n 在预处理和查询时之间的紧确权衡仍是一个开放问题。其他研究方向包括多实体可见性，以及允许轨迹相互交叉 ∂P。

参考文献

[1] P. K. Agarwal、J. Matousek 和 M. Sharir。关于半代数集的范围搜索。II。*SIAM*计算杂志，42(6):2039–2062，2013。[2] Aronov、Guibas、Teichmann 和 Zhang。简单多边形中的可见性查询与维护。离散与计算几何，27:461–483，2002。[3] K. Bozek、L. Hebert、Y. Portugal、A. S. Mikheyev 和 G. J. Stephens。对整个蜜蜂群落进行无标记追踪。《自然-通讯》，12(1):1733，2021。[4] C. Calenge、S. Dray 和 M. Royer-Carenzi。从数据分析视角看动物轨迹的概念。《生态信息学》，4(1):34–41，2009。[5] B. Chazelle。数据结构的函数方法及其在多维搜索中的应用。*SIAM*计算杂志，17(3):427–462，1988。[6] B. Chazelle。在线性时间内对简单多边形进行三角剖分。离散与计算几何，6(3):485–524，1991。[7] B. Chazelle。求交三个三维凸多面体的最优算法。*SIAM*计算杂志，21(4):671–696，1992。[8]B. Chazelle、H. Edelsbrunner、M. Grigni、L. Guibas、J. Hershberger、M. Sharir 和 J. Snoeyink。使用测地三角剖分进行多边形中的射线射击。*Algorithmica*，12(1):54–68，1994。[9] D. P. Dobkin 和 D. G. Kirkpatrick。确定预处理多面体的分离性——一种统一方法。载于第*17*届自动机、语言与编程国际研讨会（*ICALP*）论文集，第443卷《计算机科学讲义》，第400–413页。施普林格，1990。[10] D. P. Dobkin 和 D. L. Souvaine。曲面世界中的计算几何。*Algorithmica*，5(1):421–457，1990。[11] S. Dodge、R. Weibel 和 E. Forootan。揭示运动的物理规律：比较不同类型运动对象的运动特征相似性。《计算机、环境与城市系统》，33(6):419–434，2009。[12] P. Eades、I. van der Hoog、M. L¨offler 和 F. Staals。轨迹可见性。载于第*17*届斯堪的纳维亚算法理论研讨会及专题会议（*SWAT 2020*）。Schloss-Dagstuhl-Leibniz 信息学中心，2020。[13] P. F. Eades。计算几何中的不确定性模型。博士论文，悉尼大学，2020。[14] M. Ghodsi、A. Maheshwari、M. Nouri-Baygi、J.-R. Sack 和 H. Zarrabi-Zadeh。alpha-可见性。《计算几何》，47(3，第A部分):435–446，2014。[15] S. K. Ghosh。平面中的可见性算法。剑桥大学出版社，2007。[16] J. Gudmundsson、P. Laube 和 T. Wolle。时空数据中的运动模式，第1362–1370页。施普林格，Cham，2017。第2版。

[17] L. Guibas、J. Hershberger、D. Leven、M. Sharir 和 R. E. Tarjan。三角剖分简单多边形内部可见性与最短路径问题的线性时间算法。*Algorithmica*，2(1):209–233，1987。[18] L. J. Guibas 和 J. Hershberger。简单多边形中的最优最短路径查询。计算机与系统科学杂志，39(2):126–152，1989。[19] E. Gurarie、R. D. Andrews 和 K. L. Laidre。一种识别动物运动数据中行为变化的新方法。《生态学快报》，12(5):395–408，2009。[20] C. Jamroen、C. Fongkerd、W. Krongpha、P. Komkum、A. Pirayawaraporn 和 N. Chin- dakham。一种基于紫外线传感器的双轴太阳跟踪系统：实现与性能分析。《应用能源》，299:117295，2021。[21] B. Joe 和 R. B. Simpson。对 Lee 可视多边形算法的修正。*BIT* 数值数学，27(4):458–473，1987。[22] S. M. H. Kazemi、A. Vaezi、M. A. Abam 和 M. Ghodsi。轨迹范围可视性。*arXiv* 预印本 *arXiv:2209.04013*，2022。[23] D. Kirkpatrick。平面细分中的最优搜索。*SIAM*计算杂志，12(1):28– 35，1983。[24] D.-T. Lee。简单多边形的可见性。《计算机视觉、图形学与图像处理》，22(2):207–221，1983。[25] X. Li、X. Li、D. Tang 和 X. Xu。根据车辆轨迹推导交点周围交通流的特征。载于*2010*年第*18*届国际地理信息学会议，第1–5页。IEEE，2010。[26] E. A. Melissaratos 和 D. L. Souvaine。最短路径有助于解决平面区域中的几何优化问题。*SIAM*计算杂志，21(4):601–638，1992。[27] S. Pane、V. Iacovacci、E. Sinibaldi 和 A. Menciassi。利用超声相位分析对组织中的微型机器人进行实时成像与跟踪。《应用物理快报》，118(1):014102，2021。[28] D. D. Sleator 和 R. E. Tarjan。动态树的数据结构。计算机与系统科学杂志，26(3):362–391，1983。[29] A. Stohl。轨迹的计算、精度和应用——综述与参考文献。《大气环境》，32(6):947–966，1998。