arXiv:2611.29898v1 [math-ph] 23 Nov 2026

FROBENIUS2-代数与 R-矩阵

HIBIKI SHIBUYA 与 YUJI TERASHIMA

ABSTRACT. 本文引入了 Frobenius 2-代数这一 Frobenius 代数的范畴化推广，并证明每个 Frobenius 2-代数都确定一个 R-矩阵，该矩阵在其底层对象的自同态幺半范畴中满足杨–巴克斯特方程。此外，我们通过三个例子展示这一构造：带编织幺半范畴中的一对对象、具有可逆反对合的 Hopf 代数，以及有限维 Hopf 代数的海森堡双的表示。特别是在第三个例子中，我们重新得到 Kashaev 的普适 R-矩阵构造。因此，我们的构造为 Kashaev 的构造提供了范畴化推广。

CONTENTS

1. 引言 1
2. Frobenius 2-代数 3
2.1. 半严格幺半 2-范畴 3
2.2. Frobenius 伪幺半群 5
2.3. 定义与相容性公理 7
3. R-矩阵构造 12
4. Hopf 双模 14
4.1. Hopf 双模与 Yetter-Drinfeld 模 15
4.2. Morita 2-范畴中的 Frobenius 2-代数 16
5. 海森堡双 23
5.1. 典范元与五边形关系 23
5.2. Frobenius 2-代数与海森堡双 25
参考文献 27

1. INTRODUCTION

杨–巴克斯特方程是数学物理中的基础方程，在可积系统、量子群和量子拓扑中有重要应用。它的解称为 R-矩阵，编码了相互作用粒子的交换关系，并为低维拓扑中的各种构造提供了底层代数结构。一个核心问题是理解能够产生杨–巴克斯特方程解的代数结构，并阐明不同解构造之间的关系。

日期：2026年11月24日。

在本文中，我们给出一种由 Frobenius 2-代数构造 R-矩阵的方法，其中 Frobenius 2-代数是 Frobenius 代数的高阶范畴版本。更确切地说，我们证明，半严格幺半2-范畴中的每个 Frobenius 2-代数，都在其底层对象的自同态所成的幺半范畴中确定一个 R-矩阵。我们对 Frobenius 2-代数的定义建立在 Street 和 Lauda 发展的 Frobenius 伪幺半群理论 [St04、Laud06]，以及 Kerler 和 Lyubashenko 提出的相容性公理 [KL01]之上。具体而言，我们从 Lauda 对 Frobenius 伪幺半群的刻画 [Laud 05] 出发，并保留 Kerler–Lyubashenko 的八条不涉及单位或余单位的相容性公理。由此得到 Frobenius 伪幺半群的无单位、无余单位版本，我们称之为 Frobenius 2-代数。省略单位和余单位对于容纳源自海森堡双高维表示的例子至关重要。我们对 R-矩阵的构造基于 Frobenius 2-代数的乘法和余乘法，以及满足八条相容性公理的四个相容 2-同构。我们的主定理表明，这八条公理恰好提供了推导杨–巴克斯特方程所需的范畴关系。

考虑 Frobenius 2-代数的动机，源于高阶 Frobenius 代数结构在数学物理中日益重要的作用。特别是，Gaiotto 和 Johnson-Freyd 引入了凝聚单子，将其作为特殊 Frobenius代数的高阶类比；特殊Frobenius代数与拓扑缺陷和完全扩张拓扑场论密切相关 [GJ25]。这些发展表明，Frobenius 代数的高阶版本将在高维拓扑量子场论及相关结构的研究中发挥重要作用。我们的构造为这些高阶代数结构与杨–巴克斯特方程的解之间提供了新的联系。

我们通过几个例子展示了该构造的适用性。首先，带编织幺半范畴中的一对对象产生一个 Frobenius 2-代数，其相应的 R-矩阵是在它们张量积上的编织。其次，具有可逆反极的 Hopf 代数，在由代数、双模和双模同态构成的 Morita 2-范畴中确定一个 Frobenius 2-代数。在此情形下，所得R-矩阵的逆映射通过 Hopf双模结构对应于相关 Yetter-Drinfeld 模上的标准编织。最后，我们将该构造应用于有限维 Hopf 代数的海森堡双。在这一设置中，与海森堡双及其相反代数的表示相关联的四个典范元确定了一个 Frobenius 2-代数。我们证明所得 R-矩阵与 Kashaev 构造的普适 R-矩阵 [Kash97]重合 [Sz18] 。另请参见 [Sz18] ，了解该构造的几何解释。因此，我们的框架不仅复现了 Kashaev 的构造，还提供了其范畴化推广，使其能够在 Frobenius 2-代数和半严格幺半 2-范畴这一更广泛的设置中表述。

将 R-矩阵在 [Kash97] 中解释为 Hopf 代数的海森堡双，这一方法成为 [MST22、MST24] 从 Hopf 代数构造三维流形精细量子不变量的关键工具。将这一量子不变量构造推广到 Frobenius 2-代数，并理解其与 [CM26]，（缺陷）拓扑场论

使用类似的代数结构进行构造，将是未来研究中一个有趣的方向。

本文结构如下。第2节回顾半严格幺半 2-范畴与 Frobenius 伪幺半群，并引入 Frobenius 2-代数。第3 节给出R-矩阵构造与主定理。第4 节描述 Morita 2-范畴例及其与 Hopf 双模和 Yetter–Drinfeld 模的关系。第5 节表明，在海森堡双例中，我们的构造与 Kashaev 构造一致。

致谢。 作者感谢 Serban Matei Mihalache 与 Sakie Suzuki 的有益讨论，并感谢 Keima Akasaka 与 Toshinori Takama 就凝聚单子和高阶范畴结构进行的有益讨论。作者得到 JSPS KAKENHI 资助，项目编号为 22H01117、25K06969 和 26K22256。Hibiki Shibuya 还得到东北大学高级研究生院 LEAP 项目的支持。

在准备本文期间，我们使用了生成式人工智能工具进行语言编辑，并协助核查书目信息。所有数学内容均由作者独立构思并证明，作者对本文内容承担全部责任。

2. Frobenius 2-algebras

在本节中，令 $\mathcal{C}$ 为一个半严格幺半2-范畴 [KV94，BN96], 也称为**Gray**-幺半群 [DS97]。通过平移维数，我们也可以等价地将 $\mathcal{C}$ 视为一个单对象**Gray**-范畴 [GPS95，Kel82], 记作 $\Sigma\mathcal{C}$。

2.1. **半严格幺半2-范畴**。我们回顾半严格幺半2-范畴 [KV94，BN96]的显式描述。它由一个严格2-范畴 $\mathcal{C}$ 以及以下满足相容性公理的数据构成:

- 一个对象 $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$，称为单位对象。
- 对于任意两个对象 A，$B \in \mathcal{C}$ 有一个对象 $A \otimes B \in \mathcal{C}$ （我们将 A^n 简记为n的 A 重张量积）。
- 对于任意对象 $A \in \mathcal{C}$ 和 1-态射 $f : B \to C$，1-态射

$$A.f = A \otimes f : A \otimes B \to A \otimes C, \qquad f.A = f \otimes A : B \otimes A \to C \otimes A.$$

- 对于任意对象 $A \in \mathcal{C}$ 和 2-态射 $\varphi : f \Rightarrow g$，2-态射

$$A.\varphi = A \otimes \varphi : A \otimes f \Rightarrow A \otimes g, \qquad \varphi.A = \varphi \otimes A : f \otimes A \Rightarrow g \otimes A.$$

- 对于一个 任意两个 1-态射 $f : A \to A'$ 和 $g : B \to B'$，一个 2-同构 $\theta = \theta_{f,g}$:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes B & \xrightarrow{A \otimes g} & A \otimes B' \\ {\scriptstyle f \otimes B}\downarrow & \overset{\theta}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle f \otimes B'} \\ A' \otimes B & \xrightarrow[A' \otimes g]{} & A' \otimes B' \end{array}$$

使得以下公理成立。

(1) 对于任意对象 $A \in \mathcal{C}$，我们有严格2-函子 $A \otimes - \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 以及 $- \otimes A \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，满足恒等式

$$\mathbf{1} \otimes - = - \otimes \mathbf{1} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}, \qquad (A \otimes B) \otimes - = A \otimes (B \otimes -),$$
$$- \otimes (A \otimes B) = (- \otimes A) \otimes B, \qquad (A \otimes -) \otimes B = A \otimes (- \otimes B),$$

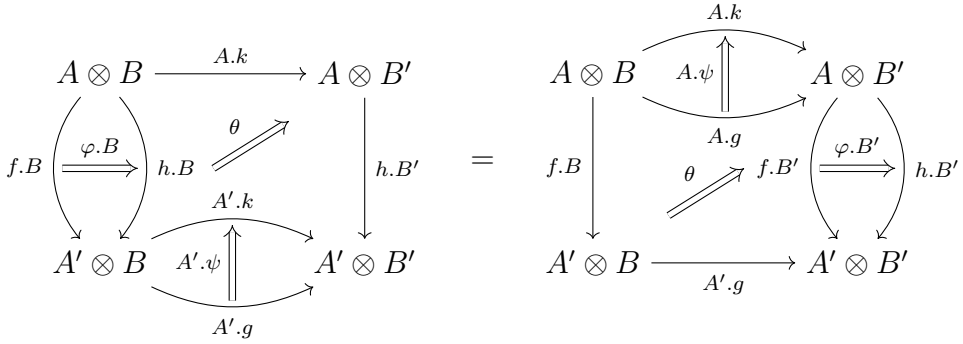
其中 $B \in \mathcal{C}$。

(2) 如果 f 或 g 中任一个是恒等1-态射，那么 $\theta_{f,\ g}$ 是恒等2-态射。

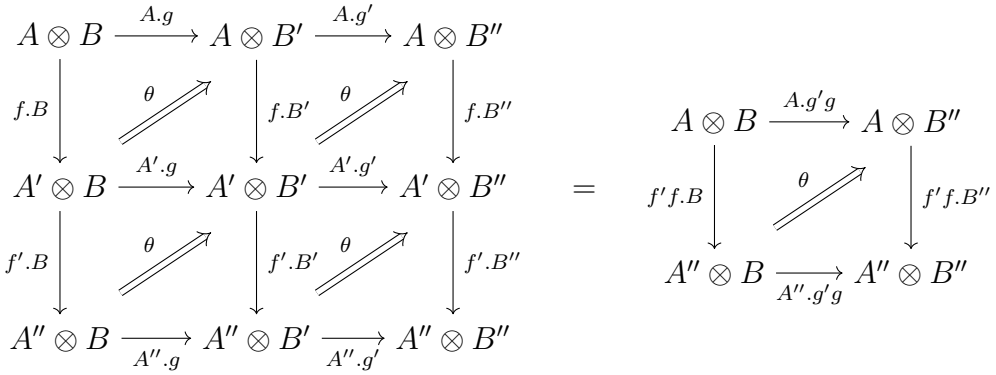
(3) 对于所有1-态射 f 和 g，以及任意对象 $A \in \mathcal{C}$，

$$A \otimes \theta_{f,g} = \theta_{A \otimes f, g}, \quad \theta_{f, A \otimes g} = \theta_{f \otimes A, g}, \quad \theta_{f,g} \otimes A = \theta_{f, g \otimes A}.$$

(4) 对于所有1-态射 f，$h \colon A \to A'$ 和1-态射 g，$k \colon B \to B'$，以及2-态射 $\varphi \colon f \Rightarrow h$、$\psi \colon g \Rightarrow k$，



（5）对于所有 1-态射 $f \colon A \to A'$、$g \colon B \to B'$、$f' \colon A' \to A''$、$g' \colon B' \to B''$，



我们将在全文中使用以下两个例子。

（1）设（C，$\otimes$，I，b）是一个严格带编织单体范畴。其解环 $\mathcal{C} = \Sigma C$ 是具有单对象 $*$ 的 2-范畴，并且

$$\mathrm{Hom}_{\Sigma C}(*, *) = C.$$

我们采用如下约定

$$Y \circ X := X \otimes Y.$$

$*$ 上的恒等1-态射是 I。2-态射的垂直复合是 C中的复合，而水平复合由下式给出

$$g \bullet f := f \otimes g$$

对于 $f\colon\ X \to X'$ 和 $g\colon\ Y \to Y'$。

编织赋予 ΣC 半严格幺半结构。其单位对象为 $*$，因此其幺半积定义为

$$* \otimes * = *, \qquad X \otimes * = * \otimes X = X, \qquad f \otimes * = * \otimes f = f.$$

那么，相于2-同构 $\theta = \theta_{X,\ Y}$ 由编织给出

$$b_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X.$$

(2) 设 $\mathbb{K}$为一个域。我们隐式地转到 **Gray**-幺半群严格化 [GPS95]。Morita 2-范畴 $\mathcal{C} = \mathbf{Mor}(\mathbf{Alg}_{\mathbb{K}})$ 定义如下:

- 其对象是含单位的结合 $\mathbb{K}$-代数,
- 一个1-态射 $M\colon\ A \to B$ 是 $\mathbb{K}$上的含单位（A, B）-双模，并且
- 一个2-态射 $f\colon\ M \Rightarrow M'$ 是（A, B）-双模同态。

F对于1-态射 $M\colon\ A \to B$ 和 $N\colon\ B \to C$，它们的复合定义为 by

$$N \circ M := M \otimes_B N.$$

A上的恒等1-态射是正则双模 ${}_AA_A$。2-态射的垂直复合是通常复合，而水平复合由相对张量积诱导。

在 $\mathbb{K}$ 上的张量积使这个2-范畴具有半严格幺半结构。其单位对象是 $\mathbb{K}$，张量积定义为

$$A \otimes B = A \otimes_{\mathbb{K}} B, \qquad M \otimes A = M \otimes_{\mathbb{K}} A, \qquad f \otimes A = f \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{id}_A,$$

具有逐分量的双模作用（对于 $A \otimes M$和 $A \otimes f$也类似）。

对于两个双模 $M\colon\ A \to A'$ 和 $N\colon\ B \to B'$，相于2-同构$\theta = \theta_{M,\ N}$ 由双模同构给出

$$(M \otimes B) \otimes_{A' \otimes B} (A' \otimes N) \xrightarrow{\cong} (A \otimes N) \otimes_{A \otimes B'} (M \otimes B'),$$

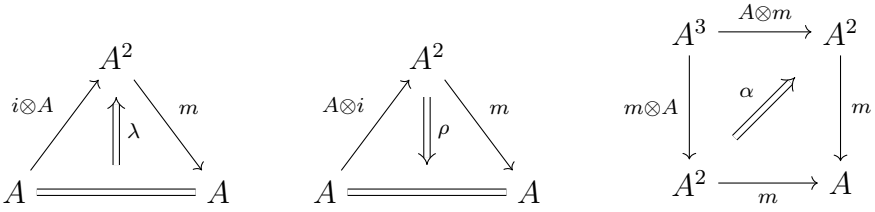
$$(x \otimes b) \otimes (a \otimes y) \longmapsto (1 \otimes by) \otimes (xa \otimes 1).$$

2.2. **Frobenius 伪幺半群。** 我们首先回顾伪幺半群在半严格幺半2-范畴 $\mathcal{C}$ [DS97]中的定义。它也被称为（带单位的） E_1-代数，见[KYZZ25、CM26]。等价地， $\mathcal{C}$ 中的伪幺半群是伪单子，作用在 $\Sigma\mathcal{C}$ [Ma97、Ma99、Lac00]的唯一对象上。

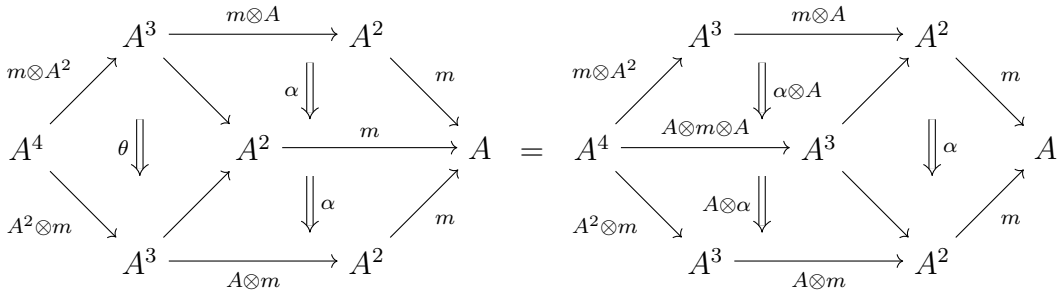
定义 2.1。 半严格幺半2-范畴中的伪幺半群 $A = (A,\ m,\ i,\ \lambda,\ \rho,\ \alpha)$ $(\mathcal{C},\ \otimes,\ \mathbf{1})$ 由一个对象 $A \in \mathcal{C}$ 以及以下数据组成:

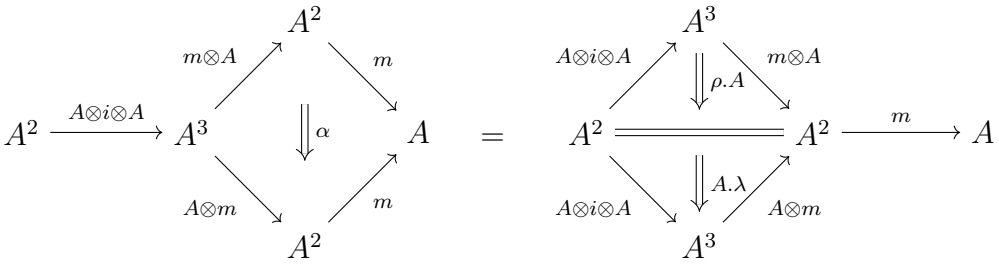
- 乘法 $m\colon\ A^2 \to A$ 和单位 $i\colon\ \mathbf{1} \to A$，以及

- 相干2-同构



满足以下图表公理。

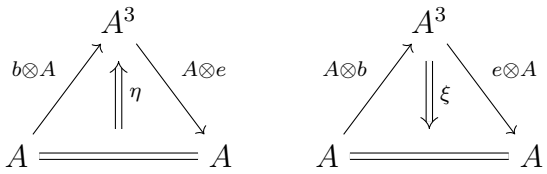




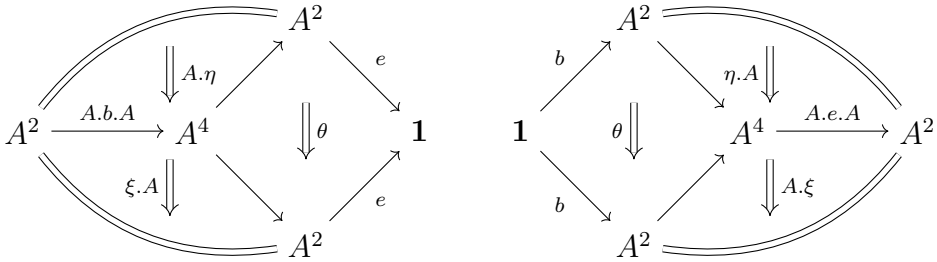
现在，我们回顾 Frobenius 伪幺半群的定义如下 [Laud06, St04]。

定义 2.2。 半严格幺半2-范畴 $(\mathcal{C},\ \otimes,\ \mathbf{1})$ 中的伪幺半群 $A=(A,\ m,\ i,\ \lambda,\ \rho,\ \alpha)$ 若配备了以下结构，则称为 Frobenius 伪幺半群

- 1-态射 $\varepsilon\colon A\to\mathbf{1}$ 和 $b\colon \mathbf{1}\to A^2$，以及
- 相干2-同构



其中 $e:=\varepsilon m\colon A^2\to\mathbf{1}$，使得以下两个图表均为恒等式：



注 2.3。 回忆一下，严格幺半范畴中的 Frobenius 代数 C 可以刻画为一个幺半群 $A \in C$ 配备一个态射 $\varepsilon\colon\ A \to \mathbf{1}$ 使得 Frobenius 配对 $\varepsilon m\colon\ A^2 \to \mathbf{1}$ 是解环2-范畴 $A \dashv A$ 中的一个伴随的余单位 ΣC [St04]。类似地，Frobenius 伪幺半群的定义意味着，1-态射 $b\colon\ \mathbf{1} \to A^2$ 和 $e = \varepsilon m\colon\ A^2 \to \mathbf{1}$ 构成 伪伴随 $A \dashv_p A$ 中的单位与余单位，该伪伴随位于 **Gray**-范畴 $\Sigma\mathcal{C}$ [Laud06]中。

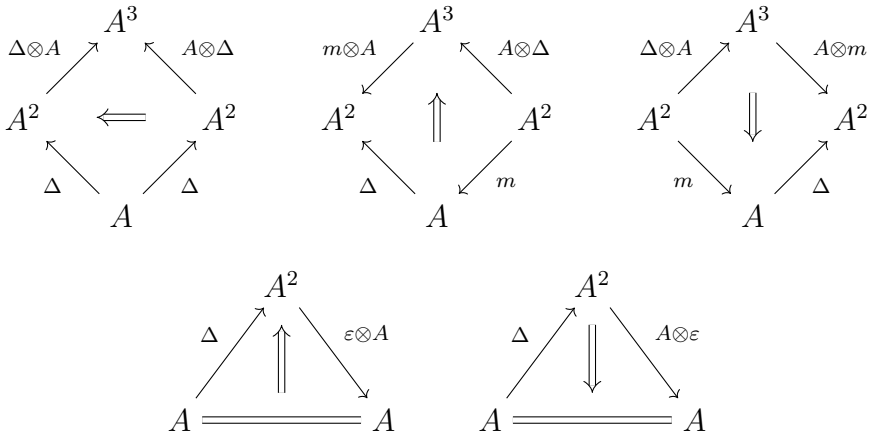
伪伴随也称为局部伴随的双伴随对 [Ver11]。详情请参阅关于游走伪伴随 (也称为自由生成的伪伴随）的讨论，该伪伴随定义于 [Lac00]。

2.3。 **定义与相容性公理**。 我们考虑一个半严格幺半2-范畴（$\mathcal{C}$, $\otimes$, $\mathbf{1}$）。根据 Lauda [Laud05] 和 Kerler–Lyubashenko [KL01], , 如果 A 是 $\mathcal{C}$中的 Frobenius 伪幺半群，其 Frobenius 结构为 A 的底层伪幺半群配备以下附加数据:

- 余乘法

$$\Delta\colon\ A \xrightarrow{b\otimes A} A^3 \xrightarrow{A\otimes m} A^2$$

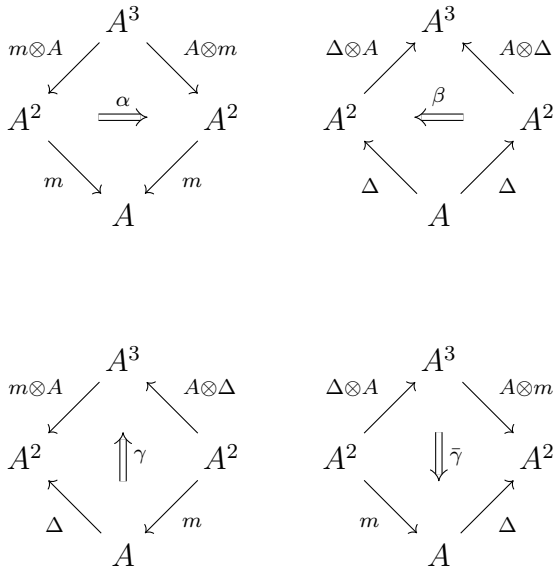
  以及余单位 $\varepsilon\colon\ A \to \mathbf{1}$, 以及
- 相容的2-同构（列于 [Laud05, 引理 32]）



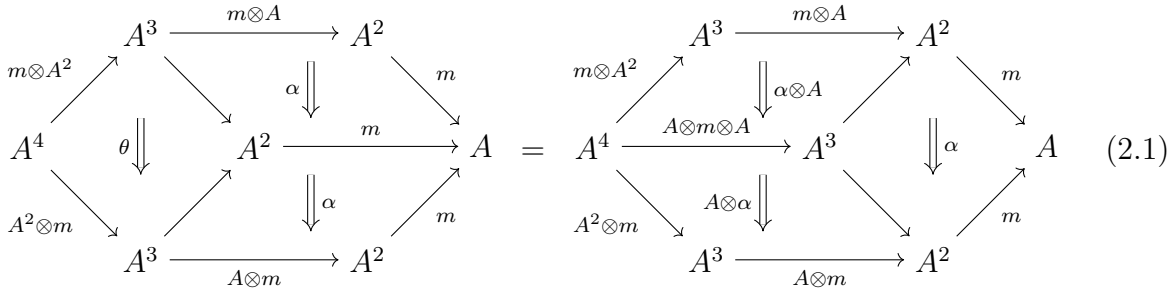
它们满足 [KL01中定义的二十条图表公理 C.1。4]在这二十条公理中，有八条既不涉及单位，也不涉及余单位。这八条公理启发我们将 Frobenius 伪幺半群推广到无单位且无余单位情形。我们将这种结构简单地称为 *Frobenius* 2-代数。

定义 2.4。 半严格幺半2-范畴中的 Frobenius 2-代数 $A = (A,\ m,\ \Delta,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \bar{\gamma})$ $\mathcal{C}$ 由一个对象 $A \in \mathcal{C}$ 以及以下数据组成：

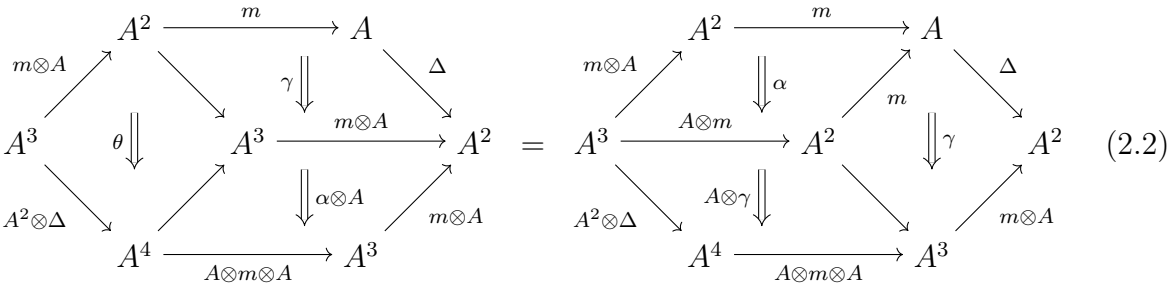
- 乘法 $m\colon A^2 \to A$ 和余乘法 $\Delta\colon A \to A^2$，以及
- 相容的2-同构



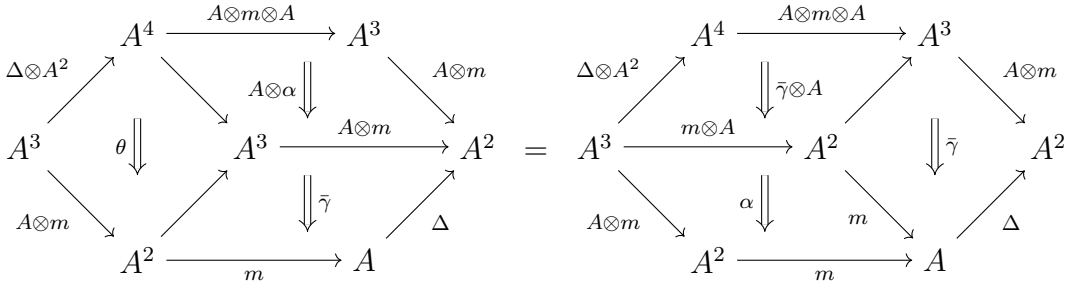
使得以下八条相容性公理成立。



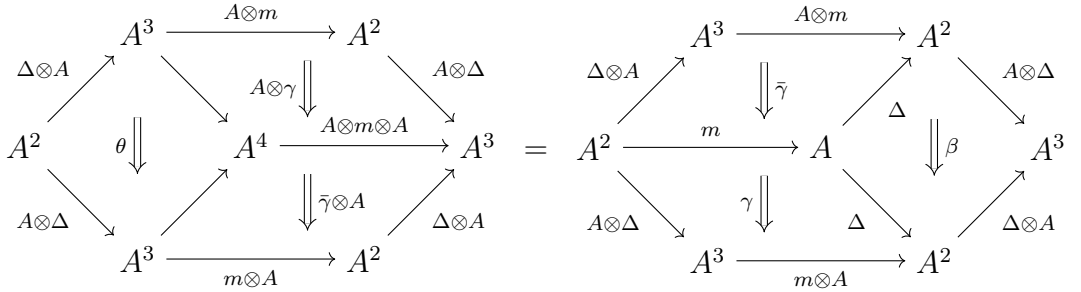
(2.1)



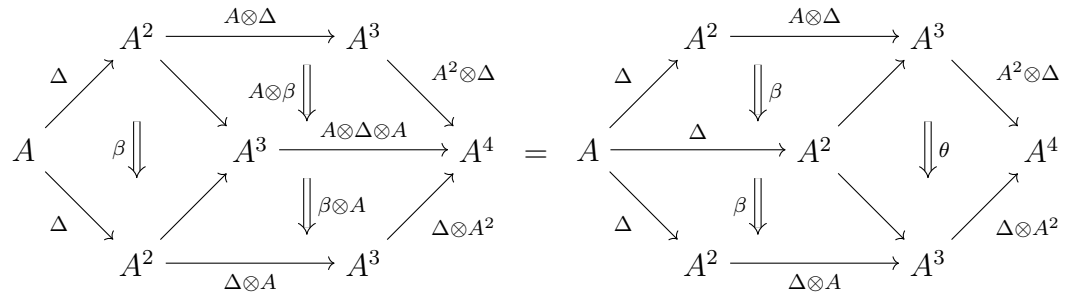
(2.2)


A^4 $A\otimes m\otimes A$ A^3
$\Delta\otimes A^2$ $A\otimes\alpha$ $A\otimes m$
A^3 θ A^3 $A\otimes m$ A^2
$A\otimes m$ $\bar\gamma$ Δ
A^2 m A
=
A^4 $A\otimes m\otimes A$ A^3
$\Delta\otimes A^2$ $\bar\gamma\otimes A$ $A\otimes m$
A^3 $m\otimes A$ A^2 $\bar\gamma$ A^2
$A\otimes m$ α m Δ
A^2 m A

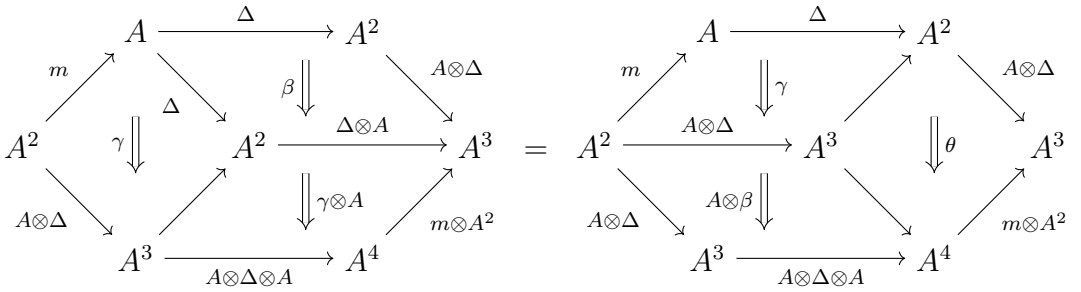
(2.3)


A^3 $A\otimes m$ A^2
$\Delta\otimes A$ $A\otimes\gamma$ $A\otimes\Delta$
A^2 θ A^4 $A\otimes m\otimes A$ A^3
$A\otimes\Delta$ $\bar\gamma\otimes A$ $\Delta\otimes A$
A^3 $m\otimes A$ A^2
=
A^3 $A\otimes m$ A^2
$\Delta\otimes A$ $\bar\gamma$ $A\otimes\Delta$
A^2 m A Δ β A^3
$A\otimes\Delta$ γ Δ $\Delta\otimes A$
A^3 $m\otimes A$ A^2

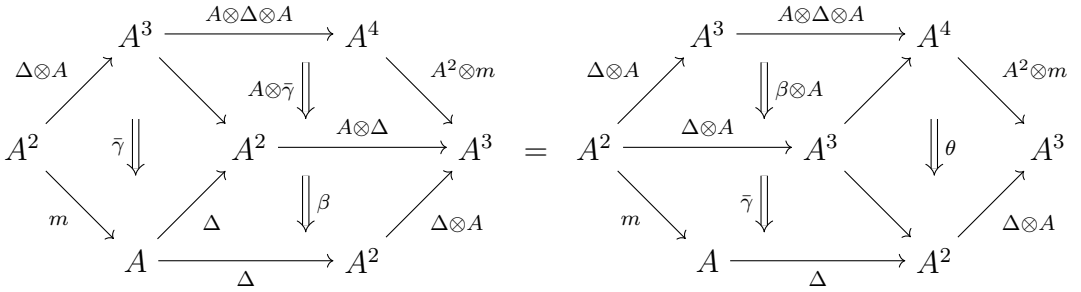
(2.4)


A^2 $A\otimes\Delta$ A^3
Δ $A\otimes\beta$ $A^2\otimes\Delta$
A β A^3 $A\otimes\Delta\otimes A$ A^4
Δ $\beta\otimes A$ $\Delta\otimes A^2$
A^2 $\Delta\otimes A$ A^3
=
A^2 $A\otimes\Delta$ A^3
Δ β $A^2\otimes\Delta$
A Δ A^2 θ A^4
Δ β $\Delta\otimes A^2$
A^2 $\Delta\otimes A$ A^3

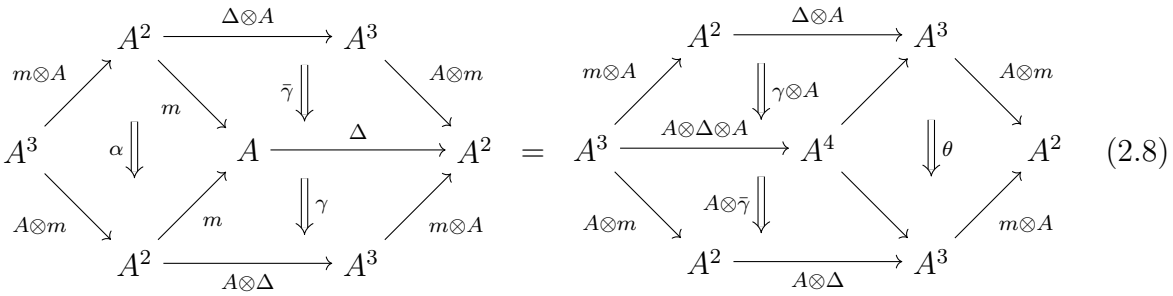
(2.5)


A Δ A^2
m β $A\otimes\Delta$
A^2 Δ γ A^2 $\Delta\otimes A$ A^3
$A\otimes\Delta$ $\gamma\otimes A$ $m\otimes A^2$
A^3 $A\otimes\Delta\otimes A$ A^4
=
A Δ A^2
m γ $A\otimes\Delta$
A^2 $A\otimes\Delta$ A^3 θ A^3
$A\otimes\Delta$ $A\otimes\beta$ $m\otimes A^2$
A^3 $A\otimes\Delta\otimes A$ A^4

(2.6)


A^3 $A\otimes\Delta\otimes A$ A^4
$\Delta\otimes A$ $A\otimes\bar\gamma$ $A^2\otimes m$
A^2 $\bar\gamma$ A^2 $A\otimes\Delta$ A^3
m Δ β $\Delta\otimes A$
A Δ A^2
=
A^3 $A\otimes\Delta\otimes A$ A^4
$\Delta\otimes A$ $\beta\otimes A$ $A^2\otimes m$
A^2 $\Delta\otimes A$ A^3 θ A^3
m $\bar\gamma$ $\Delta\otimes A$
A Δ A^2

(2.7)



(2.8)

省略单位和余单位的动机来自下面的例子。有限维 $\mathbb{K}$-向量空间范畴的解环中，由向量空间 U 表示的乘法，其单位将由向量空间 J 表示，且满足 $U\otimes J\cong\mathbb{K}$。因此，单位约束将迫使 $\dim_{\mathbb{K}} U=1$。对偶地，余单位约束将迫使表示余乘法的向量空间是一维的。因此，无单位、无余单位情形使我们能够纳入第5节中的例子，这些例子源自海森堡双的高维表示，例如 Fock表示。

注 2.5。 我们从几何角度，借助*o*-图和*MP*-变换[BP97、MST22、MSK25]来说明一种几何直观。相关的图示解释也见于 [CM26]。

正规 o-图表示（三维流形的）分支脊，它们与分支理想三角剖分互为对偶。在这种对偶关系下，MP-变换对应于理想三角剖分上的（2，3）-Pachner 变换。

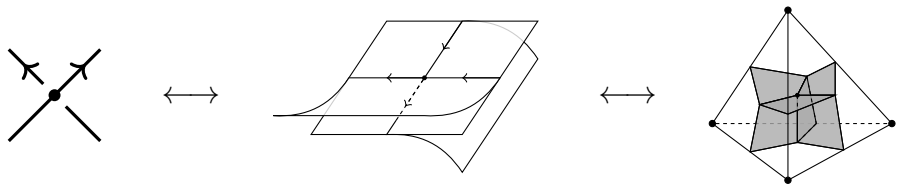
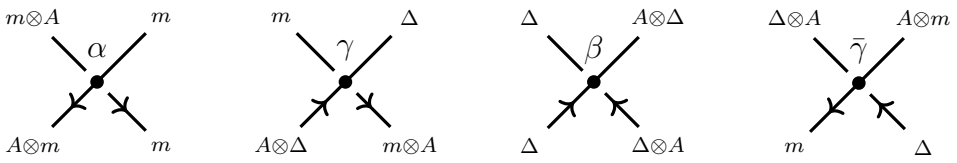
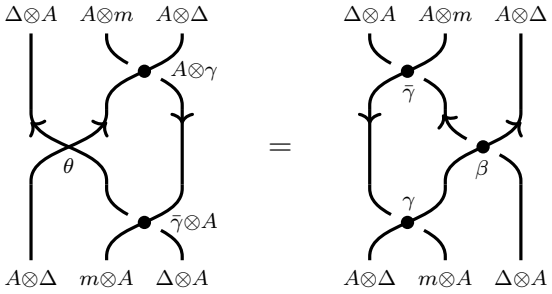


FIGURE 1. o-图、分支脊与四面体之间的对应关系。

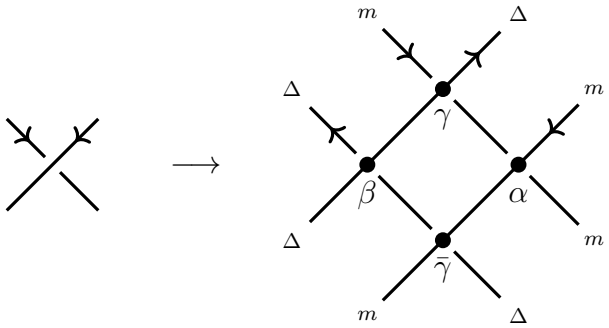
上同调 Frobenius 2-代数的参考 2-同构可以表示如下 s:



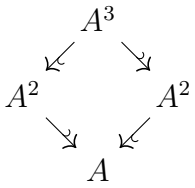
从这个角度来看，公理（2.1）–（2.8）可解释为基本 *MP*-变换，其定义见 [MSK 25]。例如，公理（2.4）可表示为



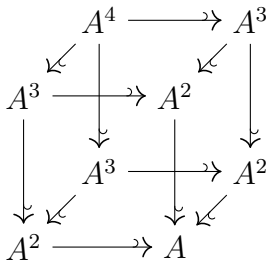
此外，我们的 Yang-Baxter 算子（3.1）可以通过将一个交叉加倍来表示：



注 2.6。“凝聚单子” [GJ25]中也出现了类似的结构。Frobenius 2-代数的相干 2-同构呈现出一种令人联想到交换凝聚方形的模式：



从这一视角来看，八条公理（2.1）–（2.8）的立方模式提示我们可以与三维凝聚立方体作类似比较：



为了得到一个物理图像，考虑从有能隙拓扑相凝聚到 S 相 T （$2+1$）维 [GJ25，例 2.4。7] 在一个空间切片上，界面f： $S \to T$和 g： $T \to S$是弦缺陷。它们的复合 fg凝聚到平凡

界面:

$$\varphi : fg \Rightarrow \mathrm{id}_T, \qquad \psi : \mathrm{id}_T \Rightarrow fg.$$

给定的凝聚诱导出一个凝聚单子 $A = gf$ 在 S 上，其相干数据包括凝聚方形和立方体。从 A^2 到 A 的凝聚具有接合点

$$m = g.\varphi.f : A^2 \Rightarrow A, \qquad \Delta = g.\psi.f : A \Rightarrow A^2.$$

在 $X = m\Delta$的图示中，一条 A线分成两条，随后重新汇合，形成一个气泡。在 $(1+1)$ 维中，这样的气泡可以严格消去为 $m\Delta = \mathrm{id}_A$。然而，在 $(2+1)$ 维中，这个等式被进一步的凝聚所取代

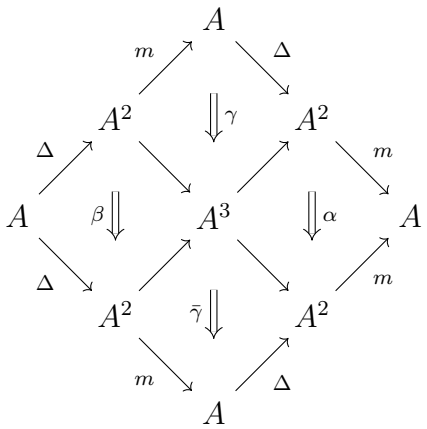
$$\xi : m\Delta \Rrightarrow \mathrm{id}_A, \qquad \eta : \mathrm{id}_A \Rrightarrow m\Delta, \qquad \xi\eta = \mathrm{id}_{\mathrm{id}_A}.$$

因此，如果 $d \geq 2$，气泡在 $(d+1)$ 维中不必严格平凡。按照这种解释，我们的构造 (3.1) 将在这些气泡上给出一个 Yang-Baxter 算子，这表明气泡可能与可积模型存在联系。

3. The R-matrix construction

设 $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ 为一个半严格幺半2-范畴。对每个对象 $B \in \mathcal{C}$，范畴 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, B)$ 在自同态的复合下构成幺半范畴。本节中，只要上下文不会引起混淆，我们也用 $\otimes$ 表示这个幺半积。

令 $A = (A, m, \Delta, \alpha, \beta, \gamma, \bar{\gamma})$ 为 $\mathcal{C}$ 中的 Frobenius 2-代数，并设 $X := m\Delta : A \to A$。通过以下复合定义 2-同构 $R : X^2 \Rightarrow X^2$，称为 A的 R-矩阵:

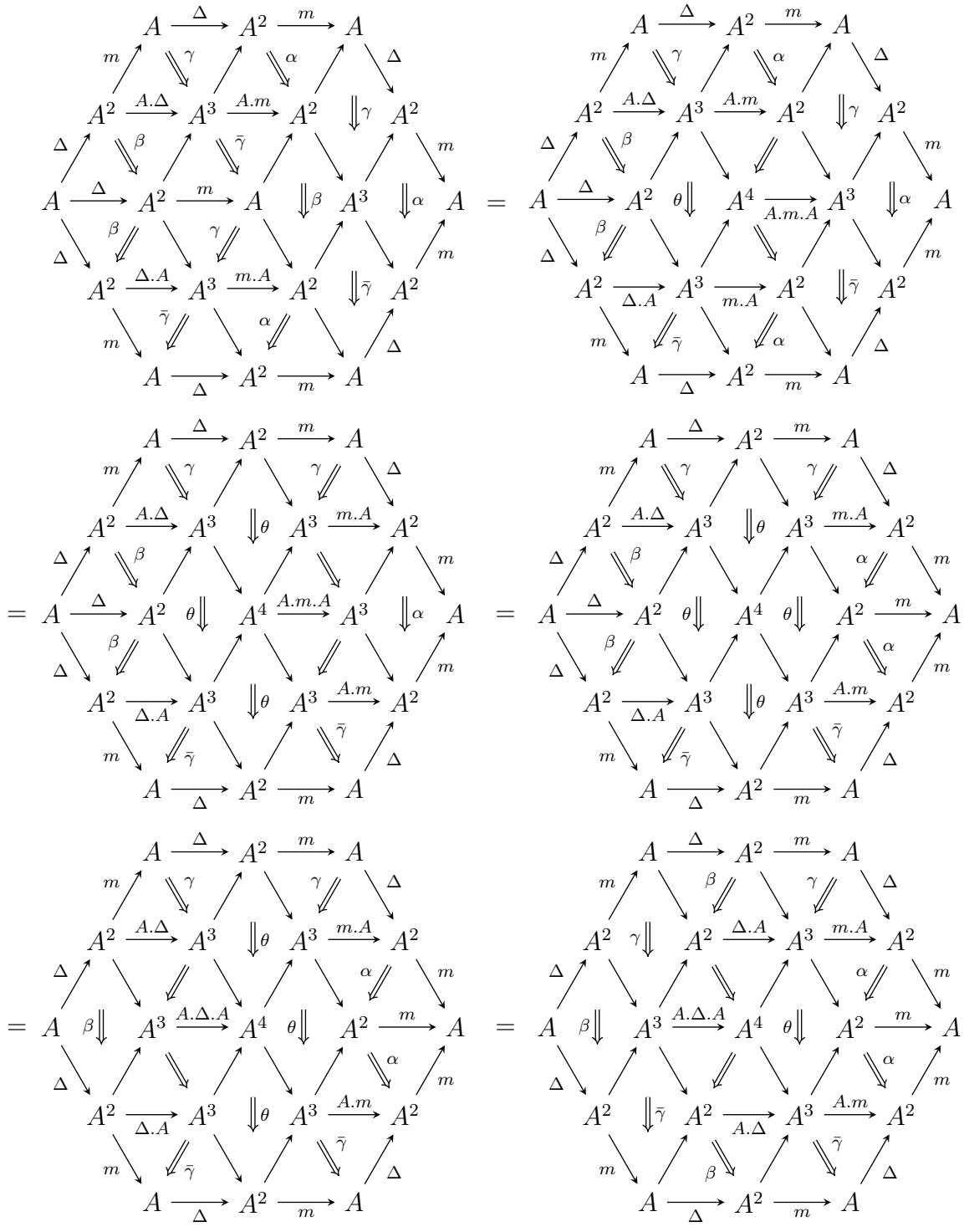


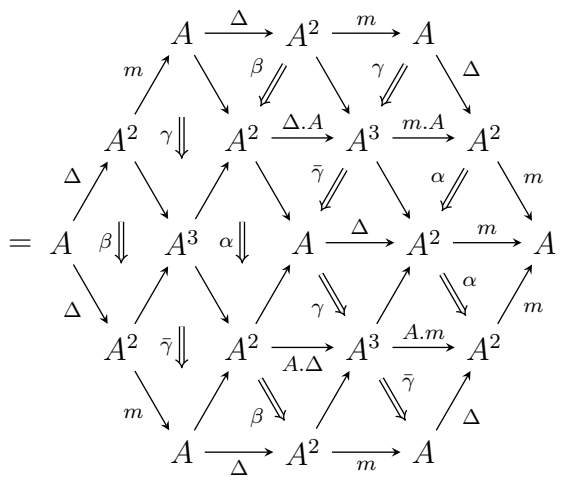
(3.1)

定理 3.1。 在幺半范畴 $Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$中， R-矩阵 R： $X \otimes X \to X \otimes X$满足杨-巴克斯特方程:

$$(R \otimes id_X)(id_X \otimes R)(R \otimes id_X) = (id_X \otimes R)(R \otimes id_X)(id_X \otimes R). \tag{3.2}$$

证明。该结果可由运用八条公理（2.1）–（2.8）进行如下图示计算得到。





■

例 3.2。 设 C 为一个严格带编织单体范畴，并将其编织记为$b_{X,\,Y}$： $X \otimes Y \to Y \otimes X$ 对于 X， $Y \in C$。

我们考虑半严格幺半2-范畴 $\mathcal{C} = \Sigma C$，它由 C的解环定义，且只有一个对象 $* \in \mathcal{C}$ （见小节 2.1）。注意， C 的编织给出了相干2-同构 θ。

给定任意对象 X， $Y \in C$，我们得到一个 Frobenius 2-代数

$$(*, X, Y, \alpha = b_{X,X}, \beta = b_{Y,Y}, \gamma = b_{X,Y}, \bar{\gamma} = b_{Y,X})$$

位于 $\mathcal{C}$中。事实上，八条公理（2.1）–（2.8）恰好就是带色 Yang-Baxter 方程

$$(\mathrm{id}_S \otimes b_{P,Q})(b_{P,S} \otimes \mathrm{id}_Q)(\mathrm{id}_P \otimes b_{Q,S}) = (b_{Q,S} \otimes \mathrm{id}_P)(id_Q \otimes b_{P,S})(b_{P,Q} \otimes \mathrm{id}_S)$$

对于 P， Q， $S \in \{X, Y\}$。

在这种情况下，由（3.1）给出的 R-矩阵是 $b_{Z,\,Z}$ 在 $Z := Y \otimes X$ 上的编织，如下所示。

$$\begin{aligned} R &= (\mathrm{id}_Y \otimes \bar{\gamma} \otimes \mathrm{id}_X)(\beta \otimes \alpha)(\mathrm{id}_Y \otimes \gamma \otimes \mathrm{id}_X) \\ &= (\mathrm{id}_Y \otimes b_{Y,X} \otimes \mathrm{id}_X)(\mathrm{id}_Y \otimes \mathrm{id}_Y \otimes b_{X,X})(b_{Y,Y} \otimes \mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_X)(\mathrm{id}_Y \otimes b_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_X) \\ &= (\mathrm{id}_Y \otimes b_{Z,X})(b_{Z,Y} \otimes \mathrm{id}_X) \\ &= b_{Z,Z}. \end{aligned}$$

4. Hopf bimodules

设 $H = (H, m, \Delta, 1, \varepsilon, S)$ 是域 $\mathbb{K}$ 上的一个反对合可逆的 Hopf 代数。在本文中，我们采用 Sweedler 记号

$$\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$$

对于 $x \in H$，其中省略求和符号。

若 (V, λ) 是左 H-余模（相应地，若 (V, ρ) 是右 H-余模），我们使用

$$\lambda(v) = v_{(-1)} \otimes v_{(0)} \in H \otimes V, \quad \big(\text{resp. } \rho(v) = v_{(0)} \otimes v_{(1)} \in V \otimes H\big).$$

对于 H-模 V和 W，张量积 $V\otimes W$带有由余乘法 Δ诱导的 H-作用。对偶地，对于左 H-余模 (V,λ) 和 (W,λ')，张量积$V\otimes W$带有如下定义的左 H-余作用 $\lambda\star\lambda'$

$$(\lambda\star\lambda')(v\otimes w)=v_{(-1)}w_{(-1)}\otimes v_{(0)}\otimes w_{(0)}\in H\otimes V\otimes W,$$

右 H-余模的情形也类似。

4.1. **Hopf 双模与 Yetter-Drinfeld 模。** 本小节中，我们介绍H-Hopf 双模以及 H上的 Yetter-Drinfeld 模。我们的主要参考文献是 [AS02、FJ15、Ros98]。

定义 4.1。 H-Hopf 双模是一个向量空间 V，同时配备H-双模结构和 H-双余模结构，使得左余作用 $\lambda:V\to H\otimes V$以及右余作用 $\rho:V\to V\otimes H$ 都是 H-双模同态。

记 $\mathcal{M}(H)$ 为 H-Hopf 双模范畴（其态射为 H-双模同态和 H-双余模同态）。该范畴在 H 上关于相对张量积构成幺半范畴；左右作用由外部作用诱导，余作用由余作用的张量积 $\star$诱导。Woronowicz 在 [Wor89]中证明幺半范畴 $\mathcal{M}(H)$ 是辫状的。

接下来，我们回顾 H 上 Yetter-Drinfeld 模的定义。

定义 4.2. H 上的左 Yetter-Drinfeld 模是一个左 H-模 V，并带有左H-余模结构，使得当 $x\in H$ 且 $v\in V$ 时，

$$x_{(1)}v_{(-1)}\otimes x_{(2)}v_{(0)}=\left(x_{(1)}v\right)_{(-1)}x_{(2)}\otimes\left(x_{(1)}v\right)_{(0)}.$$

令 $\mathcal{YD}(H)$ 为 H 上 Yetter-Drinfeld 模所成的范畴（其态射为左 H-模同态和余模同态）。配备左 H-模和余模的通常张量积后，范畴 $\mathcal{YD}(H)$ 成为幺半范畴。此外，它还是一个带编织的范畴，其编织为

$$\mathcal{R}_{V,W}:V\otimes W\to W\otimes V,\quad \mathcal{R}_{V,W}(v\otimes w)=v_{(-1)}w\otimes v_{(0)}.$$

例 4.3. 众所周知， H 本身是一个 Yetter-Drinfeld 模，其结构由下式给出：

$$x\triangleright a:=x_{(1)}aS(x_{(2)}),\quad \lambda(a):=\Delta(a),$$

对任意 $x,a\in H$。于是，标准编织由下式给出：

$$\mathcal{R}=\mathcal{R}_{H,H}:H\otimes H\to H\otimes H,\quad \mathcal{R}(x\otimes y)=x_{(1)}yS(x_{(2)})\otimes x_{(3)}. \tag{4.1}$$

最后，我们回顾 H-Hopf 双模范畴与 H 上 Yetter-Drinfeld 模范畴之间的等价关系，如下所示。

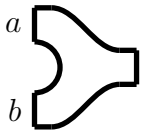
定理 4.4 ([Sch94，Ros98])。给定一个 ***Hopf*** 代数 H，存在编织~幺半群范畴 $\mathcal{M}(H)\xrightarrow{\exists}\mathcal{YD}(H)$，将一个 H-***Hopf*** 双模 $V\in\mathcal{M}(H)$ 映射为 ***Yetter-Drinfeld*** 模

$$V^{coH}:=\{v\in V:\ \rho(v)=v\otimes 1\}\in\mathcal{YD}(H),$$

H 对 $V^{余H}$ 的左作用是伴随作用 $a\triangleright v=a_{(1)}vS\left(a_{(2)}\right)$，其左余作用则是 V 的限制。

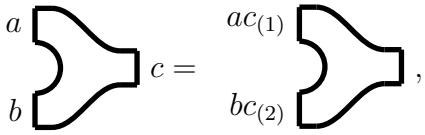
4.2. Morita 2-范畴中的 Frobenius 2-代数。设 $H = (H, m, \Delta, 1, \varepsilon, S)$ 是域 $\mathbb{K}$ 上具有可逆反极的 Hopf 代数。我们在第 2.1 小节定义的 Morita 2-范畴 $\mathcal{C} = \mathbf{Mor}(\mathbf{Alg}_{\mathbb{K}})$ 中工作。以下数据定义了 $\mathcal{C}$ 中的一个 Frobenius 2-代数 $(A, M, L, \alpha, \beta, \gamma, \bar{\gamma})$:

- 底层代数 $A = (H, m, 1) \in \mathcal{C}$.
- 带有右 A-作用（由余乘积 $\Delta : A \to A^2$ 给出）以及左正则 A^2-作用的 (A^2, A)-双模 $M = (A \otimes A)_\Delta$。我们用图示表示 M 的元素:



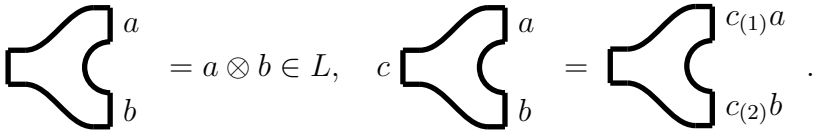
$= a \otimes b \in M,$

于是右作用可表示为



,

其中 $c \in A$。类似地，我们得到 (A, A^2)-双模 $L = {}_\Delta(A \otimes A)$ an d

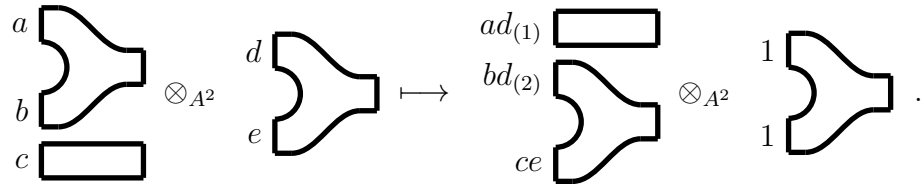


.

- 我们有如下双模同构（参见引理4.6）。
  (1) (A^3, A)-双模同构

$$\alpha : (M \otimes A) \otimes_{A^2} M \to (A \otimes M) \otimes_{A^2} M$$

定义为

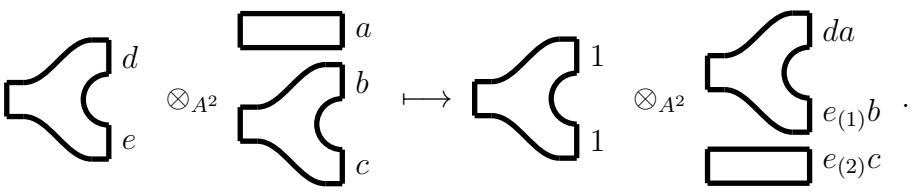


.

(2) (A, A^3)-双模同构

$$\beta : L \otimes_{A^2} (A \otimes L) \to L \otimes_{A^2} (L \otimes A)$$

定义为

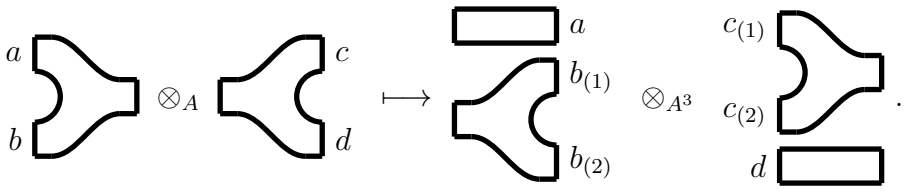


.

(3) (A^2, A^2)-双模同构

$$\gamma : M \otimes_A L \to (A \otimes L) \otimes_{A^3} (M \otimes A)$$

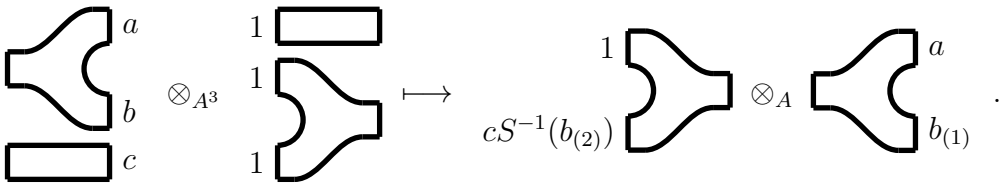
定义为



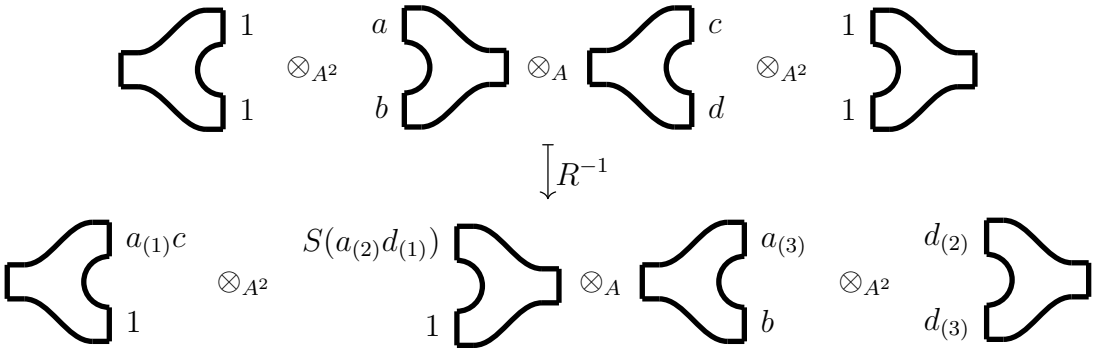
(4) $(A^2,\ A^2)$-双模同构

$$\bar{\gamma} : (L \otimes A) \otimes_{A^3} (A \otimes M) \to M \otimes_A L$$

定义为



事实上，这些同构满足引理2.1–2.8中所示的八条公理4.9。因此，定理 3.1 给出了定义在 R上的 $X = L \otimes_{A^2} M$ -矩阵，其定义为（3.1）。其逆映射由下图给出，其中使用了引理4.6证明中的逆同构。



现在，$(A,\ A)$-双模 X 带有一个规范的 H-Hopf 双模结构，其左余作用和右余作用为

$$\lambda = \Delta \otimes 1 : X \longrightarrow H \otimes X, \qquad \rho = 1 \otimes \Delta : X \longrightarrow X \otimes H,$$

r分别地。根据引理4.7，R^{-1} 是 H-Hopf 双模的一个同构 .

在定理4.4给出的等价下，H-Hopf 双模 X 对应于其右余不变量构成的 Yetter-Drinfeld 模

$$X^{\mathrm{co}H} := \{x \in X : \rho(x) = x \otimes 1\}.$$

根据引理 4.8，映射

$$\varphi : H \longrightarrow X^{\mathrm{co}H}, \qquad \varphi(a) = a \otimes 1,$$

是 Yetter-Drinfeld 模之间的一个同构，其中 H 赋予例 4.3中的结构。

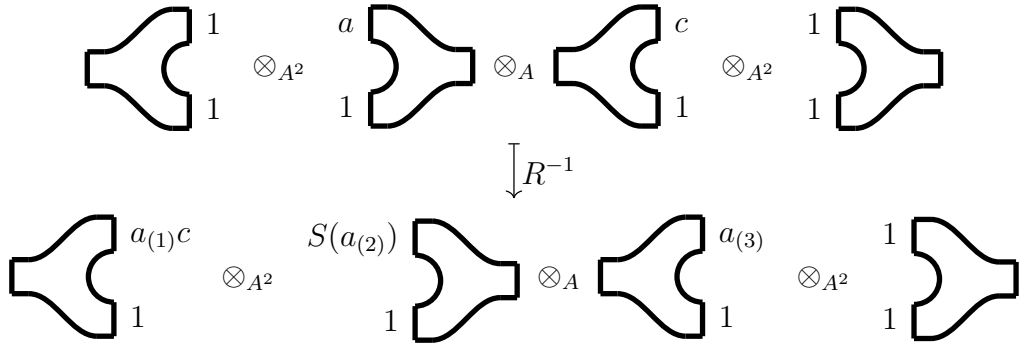
因此，以下断言表明，在此对应关系下， R^{-1} 对应于 H 上的标准编织。

命题 4.5. 以下图表交换。

$$\begin{array}{ccc} (X \otimes_H X)^{coH} & \xrightarrow{R^{-1}} & (X \otimes_H X)^{coH} \\ \cong\uparrow{\scriptstyle \varphi\otimes\varphi} & & \cong\uparrow{\scriptstyle \varphi\otimes\varphi} \\ H \otimes H & \xrightarrow[\mathcal{R}]{} & H \otimes H \end{array}$$

其中标准编织 $\mathcal{R}(x \otimes y) = x_{(1)} y S(x_{(2)}) \otimes x_{(3)}$ 由下式给出 (4.1)。

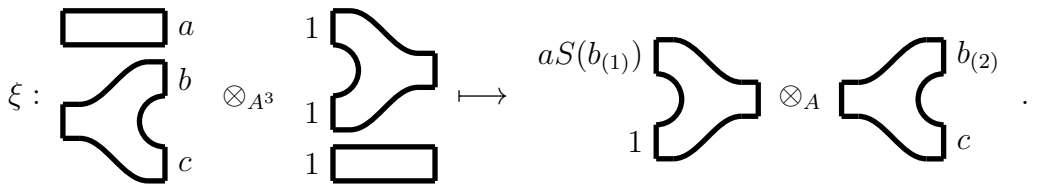
证明。 若 $b = d = 1$ 对于 R^{-1}，则我们有



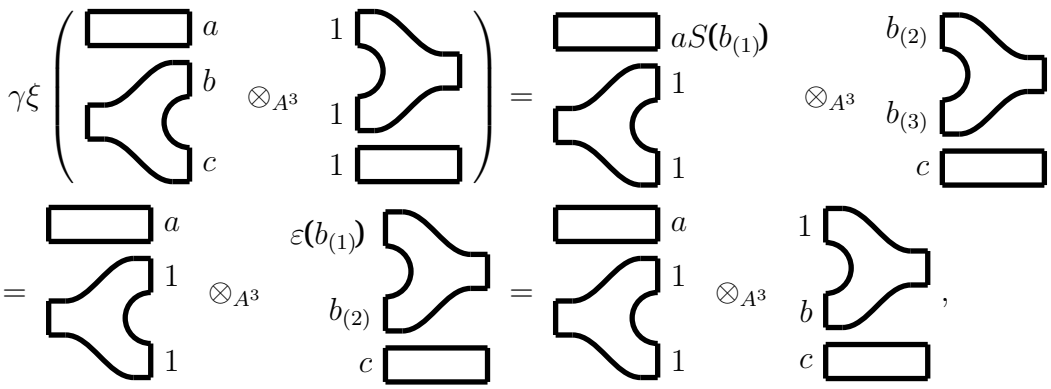
这就得出了所要证明的结论。 ■

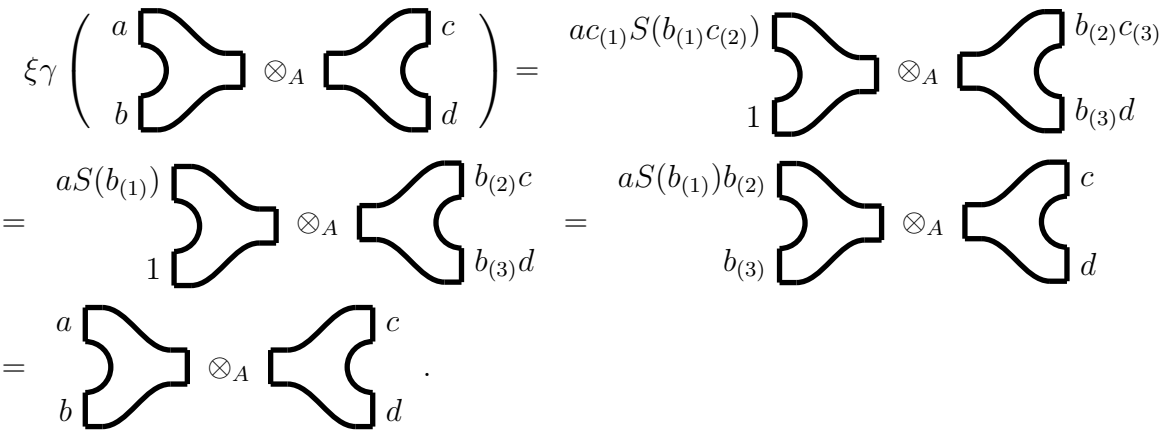
引理 4.6。 相干映射 α、 β、 γ 和 $\bar{\gamma}$ 是双模同构。

证明。 对于 α 和 β，这是显然的。映射 γ 显然是一个（A^2， A^2）-双模同态。其逆映射为

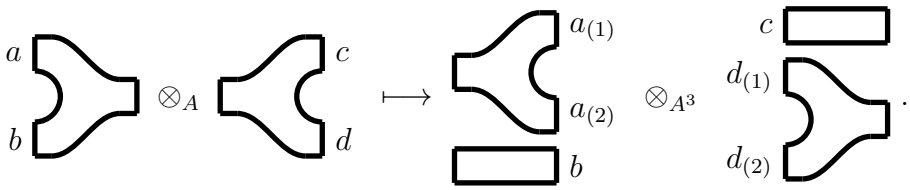


事实上，以下计算表明 $\gamma^{-1} = \xi$:





类似地， $\bar{\gamma}$ 是可逆的，其逆映射为



事实上，其余恒等式可通过类似计算得出，计算中使用

$$x_{(1)} \otimes S^{-1}\left(x_{(3)}\right) x_{(2)} = x_{(1)} \otimes x_{(3)} S^{-1}\left(x_{(2)}\right) = x \otimes 1$$

对于 $x \in H$。这个逆映射显然是一个 $(A^2,\ A^2)$-双模同态， $\bar{\gamma}$也同样如此。 ■

引理 4.7. 映射 $R^{-1}\colon X \otimes_A X \to X \otimes_A X$ 与左、右 H-余作用 $\lambda \star \lambda$ 和 $\rho \star \rho$均相容。

证明。 回忆一下， R^{-1} 由下式给出

$$R^{-1} : X \otimes_A X \to X \otimes_A X, \quad R^{-1}(a \otimes b \otimes c \otimes d) = a_{(1)} c S(a_{(2)} d_{(1)}) \otimes 1 \otimes a_{(3)} d_{(2)} \otimes b d_{(3)}.$$

根据定义，左、右 H-余作用由下式给出

$$(\lambda \star \lambda)(a \otimes b \otimes c \otimes d) = a_{(1)} c_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes b \otimes c_{(2)} \otimes d,$$

$$(\rho \star \rho)(a \otimes b \otimes c \otimes d) = a \otimes b_{(1)} \otimes c \otimes d_{(1)} \otimes b_{(2)} d_{(2)}.$$

我们首先通过以下直接计算证明， R^{-1} 与右 H-余作用 $\rho \star \rho$ 相容。

$$\begin{aligned}(\rho \star \rho) R^{-1}(a \otimes b \otimes c \otimes d) &= a_{(1)} c S(a_{(2)} d_{(1)}) \otimes 1 \otimes a_{(3)} d_{(2)} \otimes b_{(1)} d_{(3)} \otimes b_{(2)} d_{(4)} \\ &= (R^{-1} \otimes \mathrm{id}_H)(\rho \star \rho)(a \otimes b \otimes c \otimes d).\end{aligned}$$

接下来我们验证其与左 H-余作用 $\lambda \star \lambda$的相容性。利用 $\Delta S = (S \otimes S)\Delta^{op}$ 以及

$(\Delta \otimes \Delta \otimes \Delta)(a_{(1)} c \otimes a_{(2)} d_{(1)} \otimes a_{(3)} d_{(2)}) = a_{(1)} c_{(1)} \otimes a_{(2)} c_{(2)} \otimes a_{(3)} d_{(1)} \otimes a_{(4)} d_{(2)} \otimes a_{(5)} d_{(3)} \otimes a_{(6)} d_{(4)}$,
我们得到

$$\begin{aligned}&(\lambda \star \lambda) R^{-1}(a \otimes b \otimes c \otimes d) \\ &= \left(a_{(1)} c\right)_{(1)} \left(S\left(a_{(2)} d_{(1)}\right)\right)_{(1)} \left(a_{(3)} d_{(2)}\right)_{(1)} \otimes \left(a_{(1)} c\right)_{(2)} \left(S\left(a_{(2)} d_{(1)}\right)\right)_{(2)} \otimes 1 \otimes \left(a_{(3)} d_{(2)}\right)_{(2)} \otimes b d_{(3)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{(1)}c_{(1)}S\left(a_{(4)}d_{(2)}\right)a_{(5)}d_{(3)} \otimes a_{(2)}c_{(2)}S\left(a_{(3)}d_{(1)}\right) \otimes 1 \otimes a_{(6)}d_{(4)} \otimes bd_{(5)} \\
&= a_{(1)}c_{(1)}\varepsilon\left(a_{(4)}d_{(2)}\right) \otimes a_{(2)}c_{(2)}S\left(a_{(3)}d_{(1)}\right) \otimes 1 \otimes a_{(5)}d_{(3)} \otimes bd_{(4)} \\
&= a_{(1)}c_{(1)} \otimes a_{(2)}c_{(2)}S\left(a_{(3)}d_{(1)}\right) \otimes 1 \otimes a_{(4)}d_{(2)} \otimes bd_{(3)} \\
&= (\mathrm{id}_H \otimes R^{-1})(\lambda \star \lambda)(a \otimes b \otimes c \otimes d).
\end{aligned}
$$

■

引理 4.8. *Yetter-Drinfeld* 模 X^{coH} 同构于标准模 H由例*4.3*给出。

证明。 定义一个线性映射

$$\varphi : H \to X^{coH}, \quad \varphi(a) := a \otimes 1.$$

显然，它保持左 H-余作用。此外，它是一个左 H-模同态，因为由 $\Delta S = (S \otimes S)\Delta^{op}$ 可得

$$
\begin{aligned}
b \triangleright \varphi(a) &= \Delta(b_{(1)})(a \otimes 1)\Delta(S(b_{(2)})) = b_{(1)}aS(b_{(4)}) \otimes b_{(2)}S(b_{(3)}) \\
&= b_{(1)}aS(b_{(3)}) \otimes \varepsilon(b_{(2)}) = b_{(1)}aS(b_{(2)}) \otimes 1 = \varphi(b \triangleright a).
\end{aligned}
$$

剩下需要证明 φ 是可逆的。定义

$$\psi : X^{coH} \to H, \quad \psi(a \otimes b) := \varepsilon(b)a.$$

显然， $\psi\varphi = \mathrm{id}_H$。对于任意 $z = \sum_i a_i \otimes b_i \in X^{\mathrm{co}H}$，余不变条件给出

$$\sum_i a_i \otimes \Delta(b_i) = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes 1.$$

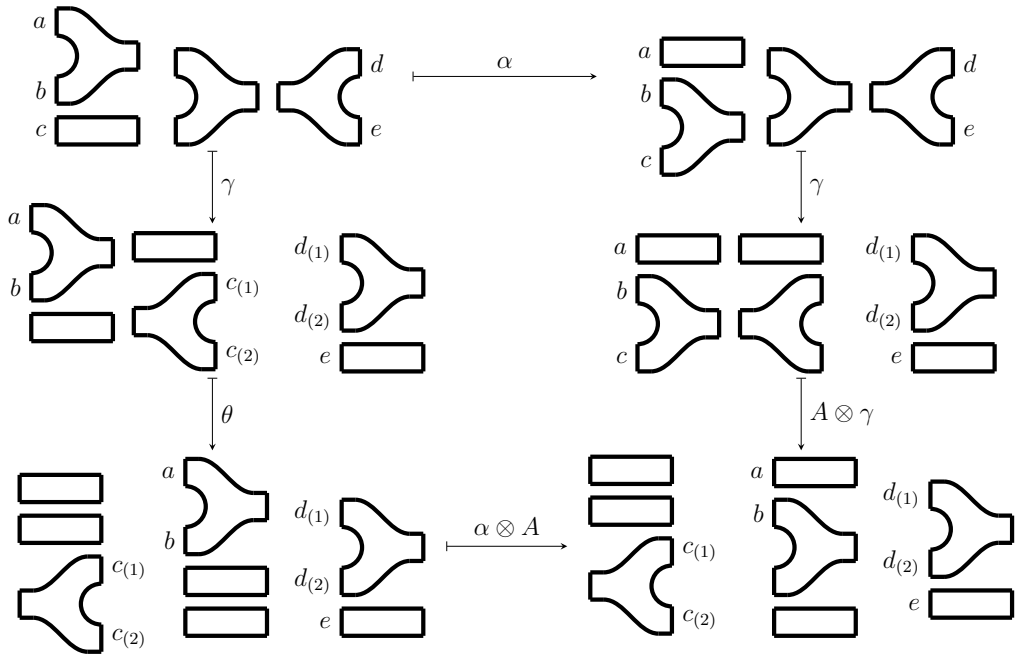
对等式两边应用 $\mathrm{id}_H \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id}_H$，可得

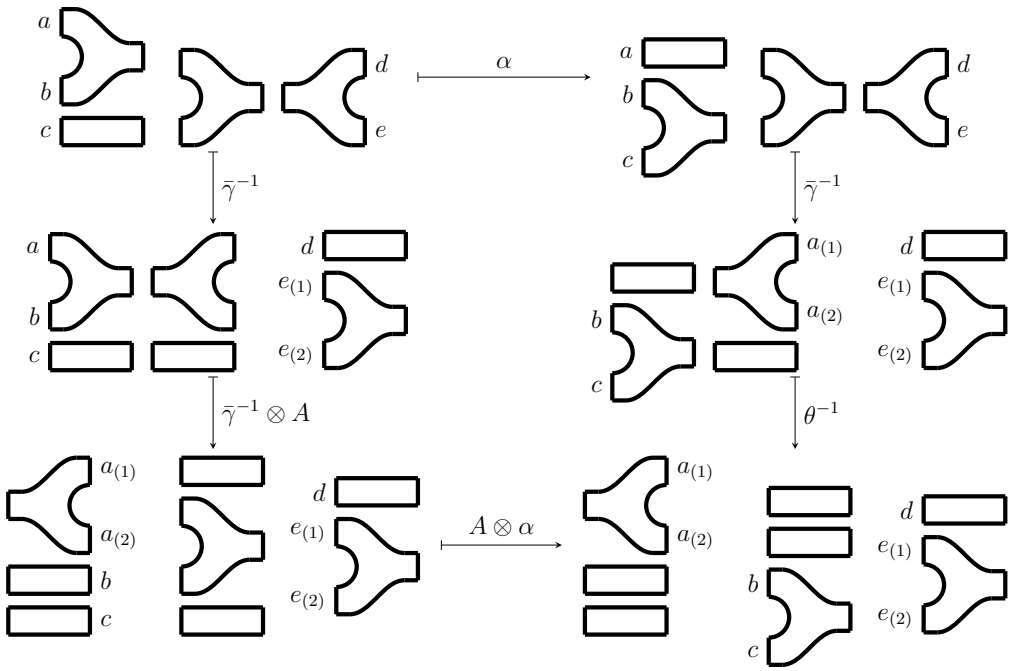
$$z = \sum_i a_i\varepsilon(b_i) \otimes 1 = \varphi\psi(z).$$

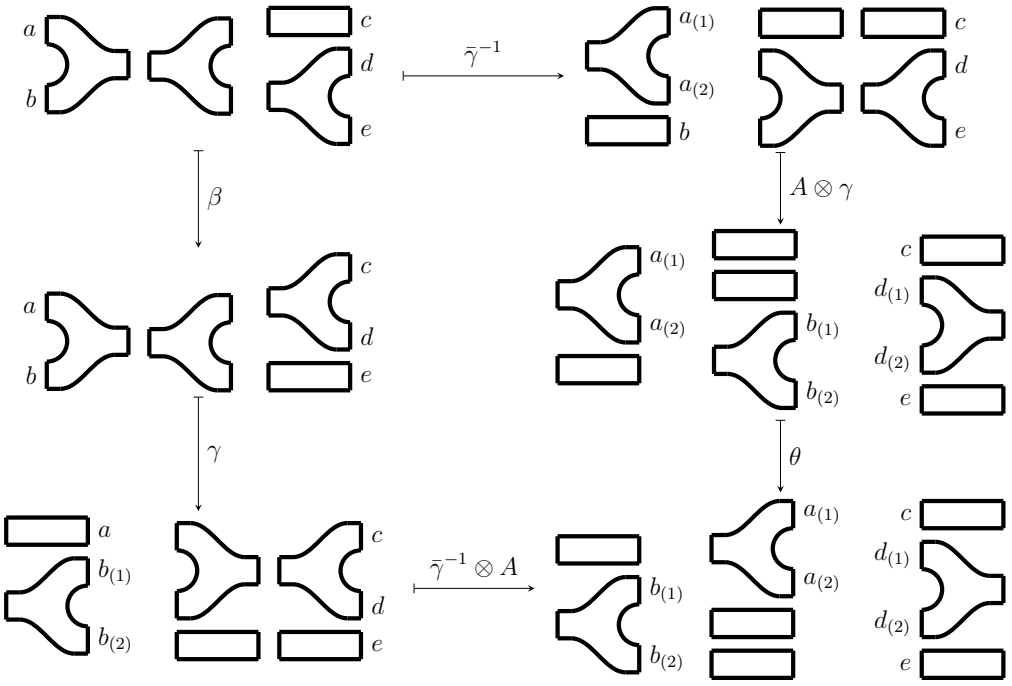
■

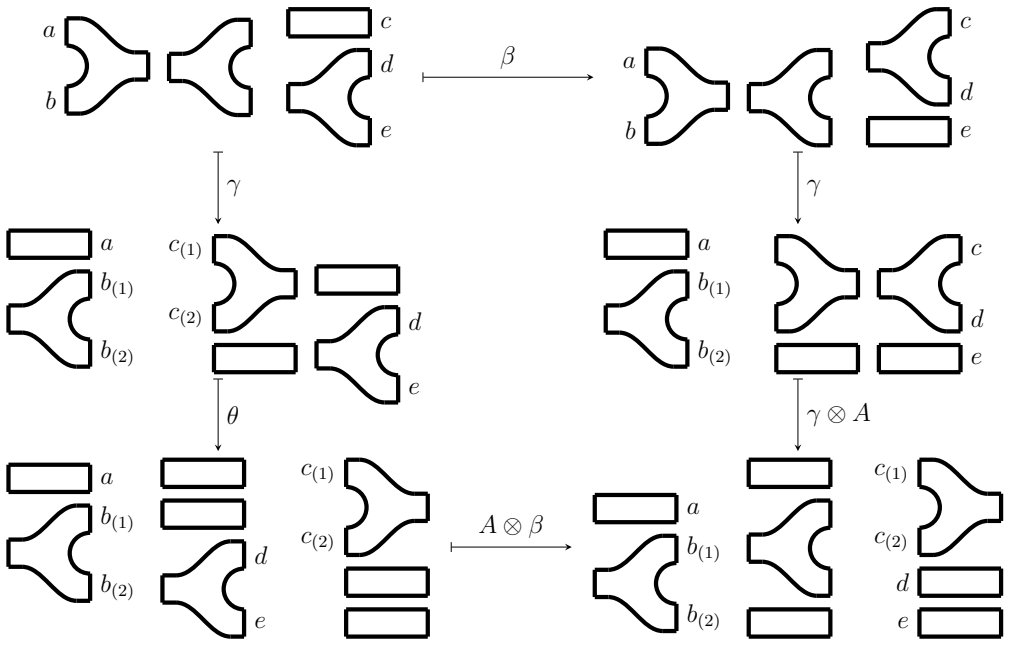
引理 4.9。 双模同构 α、 β、 γ 和 $\bar{\gamma}$ 满足八条公理 （2.1）–（2.8）。

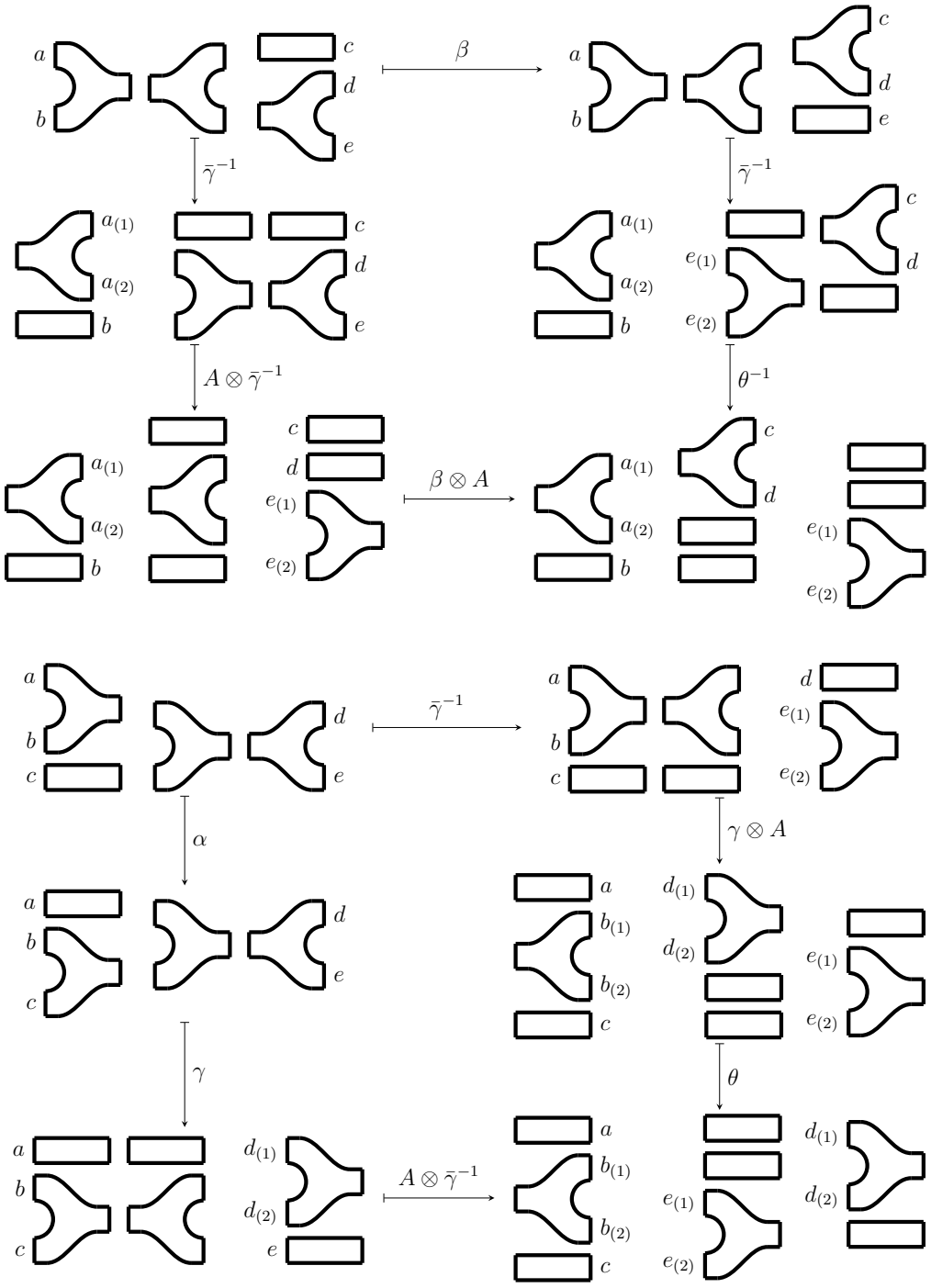
证明。 公理（2.1）和（2.5）是显然的。其余公理如下所示，其中我们省略相对张量积符号 $\otimes_{A^n}$ 和 $1 \in A$。






a
b
c
d
e
$\bar{\gamma}^{-1}$
$a_{(1)}$
$a_{(2)}$
β
$A \otimes \gamma$
$b_{(1)}$
$b_{(2)}$
$d_{(1)}$
$d_{(2)}$
γ
θ
$\bar{\gamma}^{-1} \otimes A$


a
b
c
d
e
β
γ
$c_{(1)}$
$c_{(2)}$
$b_{(1)}$
$b_{(2)}$
θ
$\gamma \otimes A$
$A \otimes \beta$



■

5. Heisenberg doubles

5.1. **典范元与五边形关系。** 本小节主要沿用 [Kash97、 Sz18]。设 $H = (H,\ m,\ \Delta,\ 1,\ \varepsilon,\ S)$ 是域 $\mathbb{K}$ 上的有限维 Hopf 代数，且具有可逆反极。

我们使用 H 在 H^* 上的左作用，其定义为 $(a \rightharpoonup f)(x) = f(xa)$，其中 $a,\ x \in H$ 和 $f \in H^*$。海森堡双

$$\mathcal{H}(H) = H^* \otimes H$$

H 是一个带单位 $\varepsilon \otimes 1$ 、乘法由下式给出的 $\mathbb{K}$-代数

$$(f \otimes a)(g \otimes b) = f(a_{(1)} \rightharpoonup g) \otimes a_{(2)}b,$$

对于 $f \otimes a,\ g \otimes b \in \mathcal{H}(H)$。

设 $\{e_i\}$ 是 H 的一组基，$\{e^i\}$ 是其对偶基。令 $\tilde{e}_i = S(e_i)$ 和 $\tilde{e}^i = (S^{-1})^*(e^i)$。典范元由下式给出

$$T = \sum_i (\varepsilon \otimes e_i) \otimes (e^i \otimes 1) \in \mathcal{H}(H) \otimes \mathcal{H}(H), \tag{5.1}$$

$$\tilde{T} = \sum_i (\varepsilon \otimes \tilde{e}_i) \otimes (\tilde{e}^i \otimes 1) \in \mathcal{H}(H)^{op} \otimes \mathcal{H}(H)^{op}, \tag{5.2}$$

$$T' = \sum_i (\varepsilon \otimes \tilde{e}_i) \otimes (e^i \otimes 1) \in \mathcal{H}(H)^{op} \otimes \mathcal{H}(H), \tag{5.3}$$

$$T'' = \sum_i (\varepsilon \otimes e_i) \otimes (\tilde{e}^i \otimes 1) \in \mathcal{H}(H) \otimes \mathcal{H}(H)^{op}. \tag{5.4}$$

它们的逆映射由下式给出

$$T^{-1} = \sum_i (\varepsilon \otimes S(e_i)) \otimes (e^i \otimes 1) \in \mathcal{H}(H) \otimes \mathcal{H}(H),$$

$$\tilde{T}^{-1} = \sum_i (\varepsilon \otimes S(\tilde{e}_i)) \otimes (\tilde{e}^i \otimes 1) \in \mathcal{H}(H)^{op} \otimes \mathcal{H}(H)^{op},$$

$$(T')^{-1} = \sum_i (\varepsilon \otimes S(\tilde{e}_i)) \otimes (e^i \otimes 1) \in \mathcal{H}(H)^{op} \otimes \mathcal{H}(H),$$

$$(T'')^{-1} = \sum_i (\varepsilon \otimes S(e_i)) \otimes (\tilde{e}^i \otimes 1) \in \mathcal{H}(H) \otimes \mathcal{H}(H)^{op}.$$

考虑 Drinfeld双代数 $D(H)$ 的 H [Dri87]。于是存在一个代数同态 [Kash97，Sz18]

$$\phi : D(H) \to \mathcal{H}(H) \otimes \mathcal{H}(H)^{op}$$

定义为

$$\phi(f \otimes x) = f_{(1)}(x_{(3)})f_{(3)} \otimes x_{(1)} \otimes (S^{-1})^*(f_{(2)}) \otimes S(x_{(2)}).$$

设 $\mathcal{R} \in D(H) \otimes D(H)$ 为普适 R-矩阵，且令 $\mathcal{R} = (\phi \otimes \phi)\mathcal{R}$。$\hat{}$由于 $\phi \otimes \phi$ 也是代数同态，因此元素 $\mathcal{R}$ 满足杨-巴克斯特方程：

$$\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{13}\hat{\mathcal{R}}_{23} = \hat{\mathcal{R}}_{23}\hat{\mathcal{R}}_{13}\hat{\mathcal{R}}_{12} \tag{5.5}$$

Kashaev 在 [Kash97] 指出

$$\hat{\mathcal{R}} = T''_{14}T_{13}\tilde{T}_{24}T'_{23}. \tag{5.6}$$

事实上，这个因子分解（5.6）意味着，杨-巴克斯特方程（5.5）是以下八个混合五边形关系的推论：

$$T_{12}T_{13}T_{23} = T_{23}T_{12}, \qquad \tilde{T}_{12}\tilde{T}_{23} = \tilde{T}_{23}\tilde{T}_{13}\tilde{T}_{12}, \tag{5.7}$$

$$T'_{12}T'_{13}T_{23} = T_{23}T'_{12}, \qquad \tilde{T}_{12}T'_{23} = T'_{23}T'_{13}\tilde{T}_{12}, \tag{5.8}$$
$$T_{12}T''_{13}T''_{23} = T''_{23}T_{12}, \qquad T''_{12}\tilde{T}_{23} = \tilde{T}_{23}T''_{13}T''_{12}, \tag{5.9}$$
$$T'_{12}\tilde{T}_{13}T''_{23} = T''_{23}T'_{12}, \qquad T''_{12}T'_{23} = T'_{23}T_{13}T''_{12}. \tag{5.10}$$

现在我们回顾*Fock*表示 $\mathcal{H}(H) \to \mathrm{End}(H^*)$ 的定义，该定义见于[MST24]，如下：

$$(f \otimes a)g = f(a \rightharpoonup g)$$

对于 $(f \otimes a) \in \mathcal{H}(H)$ 和 $g \in H^*$。此外，我们有 反*Fock*表示$\mathcal{H}(H)^{op} \to \mathrm{End}(H)$，其定义如下：

$$(f \otimes a)x = f(x_{(1)})x_{(2)}a$$

对于 $(f \otimes a) \in \mathcal{H}(H)^{op}$ 和 $x \in H$.

将这些表示作用于四个典范元，可得以下算子

$$T : H^* \otimes H^* \to H^* \otimes H^*, \qquad \tilde{T} : H \otimes H \to H \otimes H,$$
$$T' : H \otimes H^* \to H \otimes H^* \cong \mathrm{End}(H), \qquad T'' : H^* \otimes H \to H^* \otimes H \cong \mathrm{End}(H)$$

其具体描述如下

$$T(f \otimes g) = f_{(1)} \otimes f_{(2)}g, \qquad \tilde{T}(x \otimes y) = xy_{(1)} \otimes y_{(2)},$$
$$T'(x \otimes f) : y \mapsto f(y_{(2)})xS(y_{(1)}), \qquad T''(f \otimes x) : y \mapsto f(yS^{-1}(x_{(1)}))x_{(2)}$$

对于 $x, y \in H$和 $f, g \in H^*$。

˜特别地，算子 $T(x \otimes y) = xy_{(1)} \otimes y_{(2)}$ 与 H-Hopf-伽罗瓦扩张 $\mathbb{K} \subset H$ [DT89]的伽罗瓦映射（也称为典范映射）重合。

5.2. Frobenius 2-代数与海森堡双。 令 $H = (H, m, \Delta, 1, \varepsilon, S)$ 为一个反对合可逆的有限维 Hopf 代数。

我们考虑 H 的海森堡双 $\mathcal{H}(H)$。令 V 和 U 分别为$\mathcal{H}(H)$ 和 $\mathcal{H}(H)$ 的表示^{op}。

在这种情况下，由 (5.1)–(5.4) 定义的四个典范元给出以下算子

$$\alpha = \tau\tilde{T} : U \otimes U \to U \otimes U, \quad \beta = \tau T : V \otimes V \to V \otimes V,$$
$$\gamma = \tau T' : U \otimes V \to V \otimes U, \quad \bar{\gamma} = \tau T'' : V \otimes U \to U \otimes V,$$

其中 τ 表示张量积的翻转映射。于是，在半严格幺半2-范畴 $\mathcal{C} = \Sigma\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ 中，我们得到一个 Frobenius 2-代数 $(*, U, V, \alpha, \beta, \gamma, \bar{\gamma})$（其中 $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ 表示 $\mathbb{K}$ 上的有限维向量空间范畴）。

事实上，本情形中的八条公理（2.1）–（2.8等价于八个混合五边形关系（5.7）–（5.10）（见引理 5.2）。此外，由（ R3.1）给出的矩阵与嵌入的 R-矩阵 $\hat{} \mathcal{R} \in （\mathcal{H}（H） \otimes \mathcal{H}（H）^{op}）$ [2] 的关系如下。

命题 5.1。 若 R 是 *Frobenius* 2-代数 $（*, U, V, \alpha, \beta, \gamma, \bar{\gamma}）$ 在$\Sigma\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$中的 R-矩阵，则有

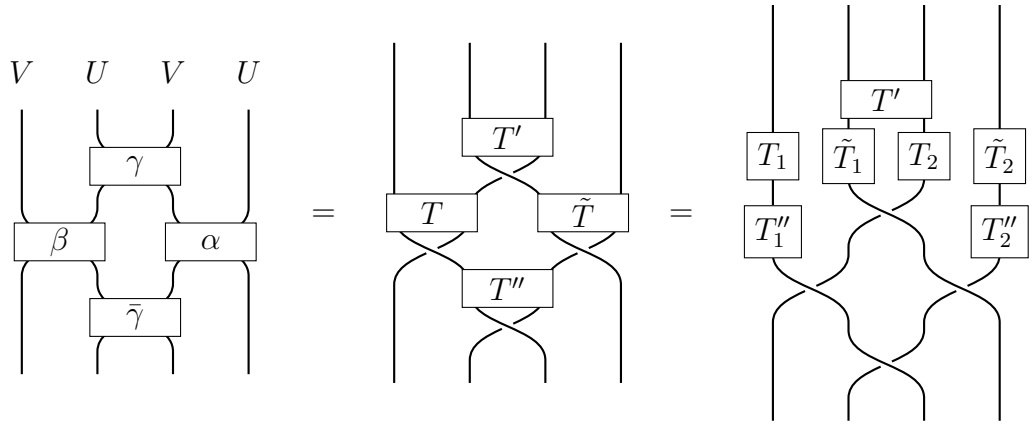
$$R = \tau_{X,X}\hat{\mathcal{R}} \tag{5.11}$$

作为作用于 $X \otimes X$ 上的算子，其中 $X = V \otimes U$。

证明。 由（5.6）可得

$$R = \tau_{X,X} T''_{14} T_{13} \tilde{T}_{24} T'_{23} = \tau_{X,X} \hat{\mathcal{R}},$$

其中第一个等式由以下计算得出。



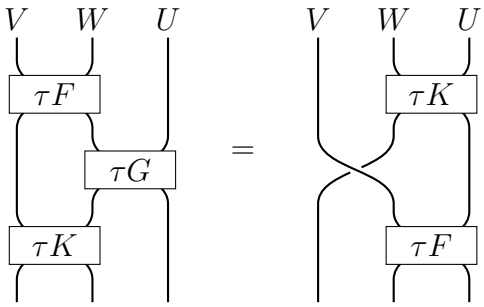
■

引理 5.2。 设 V、W 和 U 为有限维向量空间。设给定线性映射 $F\colon\ V \otimes W \to V \otimes W$、$G\colon\ V \otimes U \to V \otimes U$ 以及 $K\colon\ W \otimes U \to W \otimes U$。

(1) 关系

$$K_{23} G_{13} F_{12} = F_{12} K_{23}$$

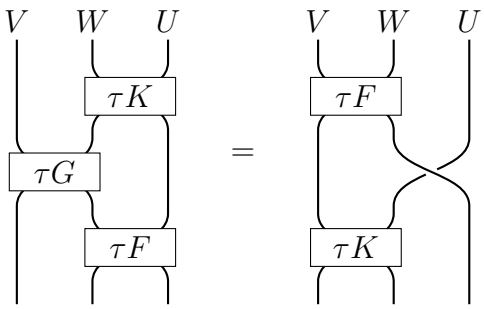
当且仅当



(2) 关系

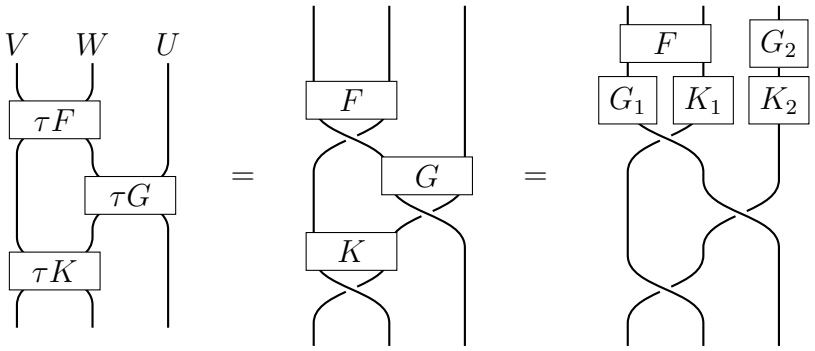
$$F_{12} G_{13} K_{23} = K_{23} F_{12}$$

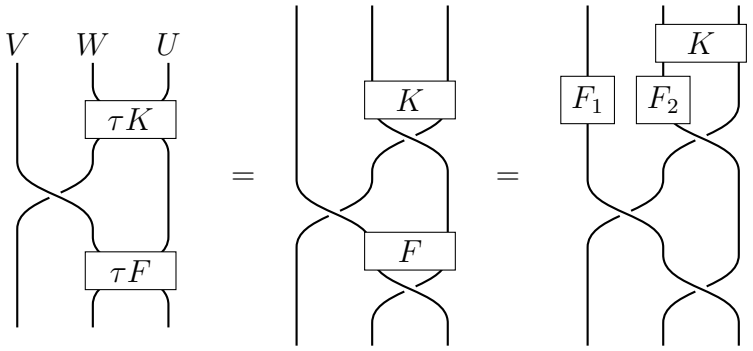
当且仅当成立



证明。 在图表中，我们记作 $F = F_1 \otimes F_2$，对于 G 和 K也类似，并默认对其求和。

（1）下面的图示计算证明了第一个断言。





（2）同样地，我们得到第二个断言。

■

References

[AS02] N. Andruskiewitsch 和 H.-J. Schneider，《尖点 Hopf 代数》，《Hopf 代数新方向》，第 1–68 页，数学科学研究所出版物，第 43 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2002。15[BN96] J. C. Baez 和 M. Neuchl，《高维代数 I：编织幺半 2-范畴》，《数学进展》121 (1996)，第 2 期，196–244。3[BP97] R. Benedetti 和 C. Petronio，《三维流形的分支标准脊》，《数学讲义》，第 1653 卷。施普林格出版社，柏林，1997。10[CM26] N. Carqueville 和 L. M¨uller，《3-范畴的轨形完备化》，《数学物理通讯》407 (2026)，第 1 期，论文第 8 号，共 68 页。2, 5, 10[Dri87] V. G. Drinfel'd，《量子群》，《国际数学家大会论文集》，第 1、2 卷（加利福尼亚州伯克利，1986），798–820，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1987。24[DS97] B. Day 和 R. Street，《幺半双范畴与 Hopf 代双群胚》，《数学进展》129 (1997)，第 1 期，99–157。3, 5[DT89] Y. Doi 和 M. Takeuchi，《代数的 Hopf-Galois 扩张、Miyashita-Ulbrich 作用与 Azumaya 代数》，《代数杂志》121 (1989)，第 2 期，488–516。25[FJ15] X. Fang 和 R.-Q. Jian，《Hopf 双模代数上的余自由 Hopf 代数》，《纯粹与应用代数杂志》219 (2015)，第 9 期，3913–3930。15[GJ25]D. Gaiotto 和 T. Johnson-Freyd，《高阶范畴中的凝聚》，预印本，arXiv:1905.09566v3（2025）。2, 11

[GPS95] R. Gordon、A. J. Power 和 R. Street，《三范畴的相干性》，《美国数学会回忆录》117 (1995)，第 558 期。3, 5[Kash97] R. M. Kashaev，《海森堡双与五边形关系》，《圣彼得堡数学杂志》8 (1997)，第 4 期，585–592。2, 23, 24[Kel82] G. M. Kelly，《丰范畴理论基本概念》，《伦敦数学会讲义丛书》，第 64 卷。剑桥大学出版社，剑桥—纽约，1982年。245 页。3[KL01]T. Kerler 和 V. V. Lyubashenko，《带角三维流形的非半单拓扑量子场论》，《数学讲义》，第 1765 卷。施普林格出版社，柏林，2001。2, 7[KV94] M. Kapranov 和 V. Voevodsky，《编织幺半 2-范畴与 Manin–Schechtman高阶辫群》，《纯粹与应用代数杂志》92 (1994)，第 3 期，241–267。3[KYZZ25] L. Kong、W. Yuan、Z.-H. Zhang 和 H. Zheng，《丰幺半范畴 I：中心》，《量子拓扑》16 (2025)，第 2 期，343–417。5[Lac00] S. Lack，《伪单子的相干方法》，《数学进展》152 (2000)，第 2 期，179–202。5, 7[Laud05] A. D. Lauda，《Frobenius 代数与平面开弦拓扑量子场论》，预印本，arXiv:math/0508349（2005）。2, 7[Laud06] A. D. Lauda，《Frobenius 代数与双侧伴随》，《范畴论及其应用》16 (2006)，第 4 号，84–122。2, 6, 7[Ma97] F. Marmolejo，《结构构成全忠实伴随串的学说》，《范畴论及其应用》3 (1997)，第 2 号，24–44。5[Ma99] F. Marmolejo，《伪单子的分配律》，《范畴论及其应用》5 (1999)，第 5 号，91–147。5[MSK25] K. Muramatsu、S. Suzuki 和 K. Taguchi，《关于分支脊的 Matveev-Piergallini变换》，预印本，arXiv:2405.18743v3（2025）。10, 11[MST22] S.M.Mihalache、S.Suzuki 和Y.Terashima，《基于理想三角剖分的闭有框三维流形量子不变量》，预印本，arXiv:2209.07378（2022）。2, 10[MST24] S. M. Mihalache、S. Suzuki 和 Y. Terashima，《对合 Hopf 代数的海森堡双与闭三维流形的不变量》，《代数、几何与拓扑》24 (2024)，第 7 期，3669–3691。2, 25[Ros98] M. Rosso，《量子群与量子洗牌》，《数学发明》133 (1998)，第 2 期，399–416。15[Sch94] P. Schauenburg，《霍普夫模与Yetter-Drinfel'd模》，《代数杂志》169 (1994)，第 3 期，874–890。15[St04] R. Street，《弗罗贝尼乌斯单子与伪幺半群》，《数学物理杂志》45 (2004)，第 10 期，3930–3948。2, 6, 7[Sz18] S. Suzuki，《普适量子不变量与着色理想三角剖分》，《代数、几何与拓扑》18 (2018)，第 6 期，3363—3402。2, 23, 24[Ver11] D. Verity，《丰范畴、内范畴与基变换》，《表征理论及范畴论应用》第 20 号（2011），1–266。7[Wor89]S. L. Woronowicz，《紧矩阵伪群（量子群）上的微分演算》，《数学物理通讯》122 (1989)，第 1 期，125–170。15Hibiki Shibuya, Mathematical Institute, Tohoku University, 6-3 Aoba, Aramaki, Aoba-ku, Sendai, Miyagi 980-8578, Japan.电子邮箱：shibuya.hibiki.q1@dc.tohoku.ac.jpYuji Terashima, Mathematical Institute, Tohoku University, 6-3 Aoba, Aramaki, Aoba-ku, Sendai, Miyagi 980-8578, Japan.电子邮箱：yujiterashima@tohoku.ac.jp