arXiv:2611.29924v1 [math.OA] 23 Nov 2026

超幂中的正交提升与可和性

MINGHUI MA、WENMING WU 和 YIFENG YE

Abstract. 设 $\mathcal{M}$ 为一个 II 型$_1$ 因子，且设 ω 为 $\mathbb{N}$上的自由超滤子。我们证明，超幂 $\mathcal{M}^\omega$ 中的任意两个正交的可分可约冯诺依曼子代数都存在正交的有限维提升。特别地，$\mathcal{M}^\omega$ 中的两个独立酉算子都存在独立的有限谱表示元。我们还证明，只要其中一个子代数是非可约且 Connes 可嵌入的，正交提升就可能失败。

1. 引言

McDuff 的奠基性论文 [11]和 Connes 的论文 [4] 在 20 世纪 70 年代确立了带迹冯·诺伊曼代数的超积和超幂，将其作为研究冯·诺伊曼代数的重要工具。由于超积和超幂是沿自由超滤子构造的极限，一个自然且富有挑战性的问题是，选择表示序列，使其在每个分量上都精确保持指定的代数关系或独立性；参见 [3, 7, 12]。作者在 [10, 问题 30]中询问：可分 II 型超幂中的任意一对独立酉算子，是否都能提升为在每个分量上彼此独立的酉算子序列。$_1$ 因子都能提升为在每个分量上彼此独立的酉算子序列。

设 $(\mathcal{M},\tau)$ 是一个带迹冯·诺伊曼代数，且 $\mathcal{A},\mathcal{B}\subseteq\mathcal{M}$ 是冯·诺伊曼子代数。若满足

$$\tau(z_1\cdots z_k)=0$$

每当 $1\leqslant k\leqslant 2n$ 和 $z_1,\dots,z_k$ 是分别交替取自 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的迹为零的算子时，便称 3] 和 $\mathcal{A}$ 是 n-独立的。Popa 在 3] 节利用有限阶独立性研究了 Kadison–Singer 问题。若对所有 $n\geqslant 1$，$\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 都是 n-独立的，则称 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 自由独立，简称自由。这与 Voiculescu 的自由独立性概念一致 [16]。若两个冯·诺伊曼子代数 $\mathcal{A},\mathcal{B}\subseteq\mathcal{M}$ 是 1-独立的，则称它们相互独立，或正交，记作 $\mathcal{A}\perp_\tau\mathcal{B}$；等价地，

$$\tau(ab)=\tau(a)\tau(b)\qquad(a\in\mathcal{A},\ b\in\mathcal{B}).$$

两个酉算子 $u,\ v\in\mathcal{M}$ 若满足独立，则 $W^*(u)\ \perp_\tau W^*(v)$。

2020 数学主题分类。主分类 46L10；次分类 46M07。关键词和短语。正交提升、可和性、Connes 可嵌入性、II$_1$ 型因子、超幂。

Chifan、Ioana 和 Kunnawalkam Elayavalli [3, 引理 3。1]证明了，超积中的二维和三维正交交换冯·诺伊曼子代数$_1$ 因子具有正交提升。这一结果是他们构造一个非 Gamma II 型$_1$ 因子的关键要素，该因子不与任何自由群因子初等等价。Houdayer 和 Ioana [7, 定理 5.1 及其后续讨论]随后证明，带迹超积中的任意两个可分交换的 2-独立冯·诺伊曼子代数都具有正交交换提升。他们将这一提升定理与渐近自由性相结合，构造出一个非 Gamma II 型$_1$ 因子，该因子不与任何无原子带迹冯·诺伊曼代数的自由积初等等价。最近，Patchell 和 Shiner [12, 定理 C] 证明了，超积中的任意两个可分交换 $2n$-独立冯·诺伊曼子代数都具有 n-独立的有限维交换提升。这些结果肯定地回答了问题 30 中的特殊情形 [10]。

全文中，ω 表示 $\mathbb{N}$上的一个自由超滤子。若冯·诺伊曼代数具有可分前对偶，则称其为可分。回顾一下，可分带迹冯·诺伊曼代数 $\mathcal{N}$ 可和，当且仅当它包含一个递增的有限维冯·诺伊曼子代数序列，且其并在 $\mathcal{N}$中弱稠密；参见 [4]。我们的第一个定理表明，$\mathcal{M}^\omega$ 中的任意两个正交的可分可和冯·诺伊曼子代数都存在正交的有限维提升。

定理 1.1. 设$(\mathcal{M},\tau)$ 是一个 *II*型$_1$ 因子，$\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是超幂 $\mathcal{M}^\omega$ 和 $\mathcal{A}\perp_{\tau_\omega}\mathcal{B}$中的可分可和冯·诺伊曼子代数。那么存在有限维冯·诺伊曼子代数 $\mathcal{A}_n,\mathcal{B}_n\subseteq\mathcal{M}$，满足

$$\mathcal{A}_n\perp_\tau\mathcal{B}_n\quad(n\geqslant 1),\qquad \mathcal{A}\subseteq\prod_\omega\mathcal{A}_n,\qquad \mathcal{B}\subseteq\prod_\omega\mathcal{B}_n.$$

此外，若 $\mathcal{A}$ (分别地，$\mathcal{B}$) 是交换的，则代数 $\mathcal{A}_n$ (分别地，$\mathcal{B}_n$) 可以取为交换的。

作为定理 1.1 的一个应用，我们对 [10, 问题 30] 给出了肯定的答案；见推论 3.5。

回顾一下，如果一个可分带迹冯·诺伊曼代数（$\mathcal{N}$，$\tau_\mathcal{N}$）可以通过保单位保迹的 *-嵌入嵌入 $\mathcal{R}^\omega$，则称其为 *Connes* 可嵌入；其中 $\mathcal{R}$ 表示超有限 II$_1$ 型因子；参见 [4]。Jung [8] 证明，对于有限生成的 Connes 可嵌入带迹冯·诺伊曼代数，当且仅当任意两个保迹的 *-嵌入都可由 $\mathcal{R}^\omega$中的某个酉算子共轭得到时，该代数才是可和的。Atkinson 和 Kunnawalkam Elayavalli [2, 的定理 4.7]将 Jung 的刻画扩展到了可分的 Connes 可嵌入带迹冯诺依曼代数，证明这类代数 $\mathcal{N}$ 是可和的，当且仅当任意两个保迹的 *-嵌入

$\mathcal{N} \to \mathcal{R}^\omega$ 可通过 $\mathcal{R}$上的一列保迹单位完全正映射共轭得到。以下定理将使用这一刻画，并说明定理 1.1 中的可和性假设是必要的。

定理 1.2. 设（$\mathcal{M}$、τ）是一个 II_1因子，且（$\mathcal{N}$、$\tau_{\mathcal{N}}$）是一个可分、非可和且 *Connes* 可嵌入的带迹冯·诺伊曼代数。对于每个非平凡的可分冯·诺伊曼子代数 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}^\omega$ 和每个非平凡投影 $q \in \mathcal{B}$，存在一个冯·诺伊曼子代数 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}^\omega$，满足

（1）（$\mathcal{A}$、$\tau_\omega|_{\mathcal{A}}$）$\cong$（$\mathcal{N}$、$\tau_{\mathcal{N}}$）作为带迹冯·诺伊曼代数；（2）$\mathcal{A} \perp_{\tau_\omega} \mathcal{B}$；（3）$\mathcal{A}$ 与 $W^*(q)$ 不容许正交提升；也就是说，不存在冯·诺伊曼子代数序列 $\mathcal{A}_n$、$\mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{M}$ 使得

$$\mathcal{A}_n \perp_\tau \mathcal{D}_n \quad (n \geqslant 1), \qquad \mathcal{A} \subseteq \prod_\omega \mathcal{A}_n, \qquad W^*(q) \subseteq \prod_\omega \mathcal{D}_n.$$

固定一个非平凡的可分可和冯·诺伊曼子代数 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}^\omega$。根据定理 1.1 和定理 1.2，可分的 Connes 可嵌入带迹冯·诺伊曼代数 $(\mathcal{N},\ \tau_{\mathcal{N}})$ 是可和的，当且仅当对于每个保迹的 *-嵌入 $\varphi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}^\omega$，只要满足 $\varphi(\mathcal{N}) \perp_{\tau_\omega} \mathcal{B}$，$\varphi(\mathcal{N})$ 与 $\mathcal{B}$就容许正交提升。

本文的组织结构如下。第 2 节回顾超积的构造，并证明一些预备引理。第 3 节首先为有限维子代数对构造正交提升，然后利用超有限逼近证明定理 1.1。由此，我们证明独立酉算子具有有限谱代表元，且这些代表元在每个分量上都是独立的。第 4 节构造了 $\mathcal{M}^\omega$ 的正交子代数，它们不存在正交提升。

2. Preliminaries

$\{(\mathcal{M}_n,\ \tau_n)\}_{n\geqslant 1}$ 是一列带迹冯·诺伊曼代数。积代数 $\prod_{n\geqslant 1} \mathcal{M}_n$ 是有界序列 $x = (x_n)$ 的集合，其中对每个$n \geqslant 1$都有 $x_n \in \mathcal{M}_n$，并赋予范数 $\|x\| = \sup_n \|x_n\|$。(带迹) 超积 $\prod_\omega \mathcal{M}_n$是 $\prod_{n=1}^\infty \mathcal{M}_n$ 关于范数闭双侧理想的商

$$\mathcal{I}_\omega := \left\{ (x_n) \in \prod_{n\geqslant 1} \mathcal{M}_n : \lim_{n\to\omega} \tau_n\left(x_n^* x_n\right) = 0 \right\}.$$

对于 $(x_n) \in \prod_{n\geqslant 1}\mathcal{M}_n$，我们将其在 $\prod_\omega \mathcal{M}_n$ 中的等价类记为 $(x_n)_\omega$。赋予迹

$$\tau_\omega((x_n)_\omega) = \lim_{n\to\omega} \tau_n(x_n)$$

在 $\prod_\omega \mathcal{M}_n$ 上，$(\prod_\omega \mathcal{M}_n,\ \tau_\omega)$ 是一个带迹冯·诺伊曼代数。

当这些 $(\mathcal{M}_n,\ \tau_n)$ 是同一个带迹冯·诺伊曼代数 $(\mathcal{M},\ \tau)$ 时，我们定义 $\mathcal{M}^\omega = \prod_\omega \mathcal{M}$，并称 $(\mathcal{M}^\omega,\ \tau_\omega)$ 为 (带迹) 超幂，即 $(\mathcal{M},\ \tau)$ 沿ω得到的超幂。此外，若 $\mathcal{M}$ 是一个 II 型$_1$ 因子，则 $\mathcal{M}^\omega$ 也同样是一个 II 型$_1$ 因子，见 [15,引理 A.4。2]。关于算子代数超积的一般研究，读者可参阅 [1, 5, 6]。

设 $\mathcal{M}$ 是一个 II 型$_1$ 因子。对于任意两个幺正的 *-嵌入 $\pi_1,\ \pi_2\colon M_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}$，存在一个酉元 $u \in \mathcal{M}$，使得对所有 $x \in M_n(\mathbb{C})$，均有 $\pi_2(x) = u^*\pi_1(x)u$。因此，对于 $\mathcal{M}^\omega$ 的任意有限维冯·诺伊曼子代数 $\mathcal{A}$，存在酉算子$u = (u_n)_\omega \in \mathcal{M}^\omega$，使得相对于 $\mathcal{M}$ 的对角嵌入，有 $u^*\mathcal{A}u \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}^\omega$。在每个分量上用 u_n 共轭 $\mathcal{M}$ 中 $\mathcal{A}$ 的固定副本，即得以下提升引理。

引理 2.1。 设 $(\mathcal{M},\tau)$ 是一个类型 II_1 因子，且令 $\mathcal{F}$为 $\mathcal{M}^\omega$的有限维冯·诺伊曼子代数。那么存在保持迹的 *-嵌入$\theta_n\colon\ \mathcal{F} \to \mathcal{M}$，使得对每个 $x \in \mathcal{F}$都有 $x = (\theta_n(x))_\omega$。

为了提升 $\mathcal{M}^\omega$ 中两个相互独立的可分可约冯诺依曼子代数，我们需要下面的闭性引理。对于冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$，令 $(\mathcal{M})_1$表示其关于算子范数的闭单位球。

引理 2.2。 设 $(\mathcal{M},\tau)$ 是一个带迹冯·诺伊曼代数，且 $m \geqslant 1$。假设对于每个 $n \geqslant 1$，$S_n \subseteq \{(x_1,\dots,x_m)\colon x_j \in (\mathcal{M})_1,\ 1 \leqslant j \leqslant m\}$ 都是非空的。那么集合

$$\prod_\omega S_n = \{(x_n)_\omega\colon x_n \in S_n \text{ for every } n \geqslant 1\} \subseteq (\mathcal{M}^\omega)^m$$

在逐分量 2-范数下是闭的。

证明。 对于 $x = (x_1,\dots,x_m) \in \mathcal{M}^m$，定义

$$d_n(x) := \inf_{(y_1,\dots,y_m)\in S_n} \max_{1\leqslant j\leqslant m} \|x_j - y_j\|_2.$$

三角不等式给出

$$|d_n(\xi) - d_n(\eta)| \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant m} \|\xi_j - \eta_j\|_2 \qquad (\xi,\eta \in \mathcal{M}^m). \tag{2.1}$$

对于 $x=(x_1,\dots,x_m)\in(\mathcal{M}^\omega)^m$，将 x_j 写作 $x_j=(x_{j,n})_\omega$ 并定义

$$d(x):=\lim_{n\to\omega} d_n(x_{1,n},\dots,x_{m,n}).$$

由（2.1）可知，d 与 x 的代表元的选取无关。此外，对于 $x,\ y\in(\mathcal{M}^\omega)^m$，（2.1）给出

$$|d(x)-d(y)|\leqslant\lim_{n\to\omega}\max_{1\leqslant j\leqslant m}\|x_{j,n}-y_{j,n}\|_2=\max_{1\leqslant j\leqslant m}\|x_j-y_j\|_2.$$

因此，d 在由各分量2-范数的最大值所诱导的拓扑中连续。

现在我们证明 $d^{-1}(\{0\})=\prod_\omega S_n$。假设 $d(x)=0$。对于每个 $n\geqslant 1$，选取 $(y_{1,n},\dots,y_{m,n})\in S_n$ 使得

$$\max_{1\leqslant j\leqslant m}\|x_{j,n}-y_{j,n}\|_2\leqslant d_n(x_{1,n},\dots,x_{m,n})+\frac{1}{n}.$$

由于 $S_n\subseteq((\mathcal{M})_1)^m$，每个序列 $(y_{j,n})_n$ 均一致有界。对前述不等式取超极限，得到对于每个 $1\leqslant j\leqslant m$，都有 $x_j=(y_{j,n})_\omega$，因而$x\in\prod_\omega S_n$。因此，$\prod_\omega S_n=d^{-1}(\{0\})$ 在逐分量2-范数拓扑下是闭的。□

下面的引理是 Popa定理 [14, 定理 0.1(b)]的一个应用。

引理 2.3. 设 $\mathcal{M}$ 是一个 II_1 因子，且 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{M}^\omega$ 是一个范数可分的含幺C^*-子代数。那么存在一个迹为零的对称算子 $v\in\mathcal{M}^\omega$，使得 $\mathcal{A}$和 $W^*(v)$ 自由。

证明。由于 $\mathcal{A}$ 是范数可分的，而 $\mathcal{M}^\omega$ 不可分，因此存在一个投影 $p\in\mathcal{M}^\omega\setminus\mathcal{A}$，满足 $\tau_\omega(p)=\frac{1}{2}$。根据 [14, 定理 0.1(b)]，，存在一个酉元 $u\in\mathcal{M}^\omega$，使得 $\mathcal{A}''\vee u^*W^*(p)u\cong\mathcal{A}''*W^*(u^*pu)$。令 $v=2u^*pu-1$。那么 v 就是所需的对称算子。□

3. Orthogonal lifting for amenable subalgebras

本节中，我们证明定理 1.1。我们首先介绍有限维情形所需的记号。

设 $(\mathcal{M},\tau)$ 是一个 II_1 型因子，$\mathcal{A}_0$ 和 $\mathcal{B}_0$ 是 $\mathcal{M}^\omega$ 中非平凡的有限维冯·诺伊曼子代数，且满足 $\mathcal{A}_0\perp_{\tau_\omega}\mathcal{B}_0$。假设 $p=(p_i)_{i=1}^r$ 和$q=(q_j)_{j=1}^s$是投影元组，使得 $\{1,p_1,\dots,p_r\}$ 和 $\{1,q_1,\dots,q_s\}$ 构成

分别为 $\mathcal{A}_0$ 和 $\mathcal{B}_0$ 的线性基。记 $C^*(p,q)$为由这些投影生成的含幺 C^*代数。定义一个实线性映射$h_{p,q}$: $\mathbb{R}^{r\times s}\to\mathcal{M}^\omega$ 如下:

$$h_{p,q}(\xi)=\mathbf{i}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\xi_{ij}[p_i,q_j]\qquad \big(\xi=(\xi_{ij})\in\mathbb{R}^{r\times s}\big). \tag{3.1}$$

这里 $\mathbf{i}=\sqrt{-1}$。定义映射 $p_i(\cdot)$: $\mathbb{R}^{r\times s}\to\mathcal{M}^\omega$和 $\Phi_{p,q}$: $\mathbb{R}^{r\times s}\to\mathbb{R}^{r\times s}$b y

$$\begin{aligned} p_i(\xi)&=e^{\mathbf{i}h_{p,q}(\xi)}p_ie^{-\mathbf{i}h_{p,q}(\xi)}\qquad (1\leqslant i\leqslant r),\\ \Phi_{p,q}(\xi)&=\big(\tau_\omega(p_i(\xi)q_j)-\tau_\omega(p_i)\tau_\omega(q_j)\big)_{1\leqslant i\leqslant r,\,1\leqslant j\leqslant s}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

那么$\Phi_{p,q}(\xi)=0$ 等价于 $e^{\mathbf{i}h_{p,q}(\xi)}\mathcal{A}_0e^{-\mathbf{i}h_{p,q}(\xi)}\perp_{\tau_\omega}\mathcal{B}_0$。由于 $h_{p,q}(\xi)$ 是自伴的，每个 $p_i(\xi)$ 都是一个投影，且 $\tau_\omega(p_i(\xi))=\tau_\omega(p_i)$。定义 Gram 算子 $G_{p,q}$: $\mathbb{R}^{r\times s}\to\mathbb{R}^{r\times s}$，其中 p 和 q 为

$$\langle G_{p,q}\xi,\eta\rangle=\tau_\omega\big(h_{p,q}(\xi)h_{p,q}(\eta)\big)\qquad(\xi,\eta\in\mathbb{R}^{r\times s}). \tag{3.3}$$

赋予 $\mathbb{R}^{r\times s}$ 欧几里得内积和范数 $|\xi|$，我们有

$$\langle G_{p,q}\xi,\xi\rangle=\|h_{p,q}(\xi)\|_2^2\geqslant 0,\qquad \|h_{p,q}(\xi)\|\leqslant 2\sum_{i,j}|\xi_{ij}|\leqslant 2\sqrt{rs}|\xi|.$$

根据引理 2.1，我们可以选取保单位且保迹的 *-嵌入 φ_n^0: $\mathcal{A}_0\to\mathcal{M}$和 ψ_n^0: $\mathcal{B}_0\to\mathcal{M}$，使得

$$a=(\varphi_n^0(a))_\omega\quad(a\in\mathcal{A}_0),\qquad b=(\psi_n^0(b))_\omega\quad(b\in\mathcal{B}_0).$$

记 $p_{i,n}=\varphi_n^0(p_i)$ 和 $q_{j,n}=\psi_n^0(q_j)$。它们是满足以下条件的投影

$$p_i=(p_{i,n})_\omega,\qquad q_j=(q_{j,n})_\omega,\qquad \tau(p_{i,n})=\tau_\omega(p_i),\qquad \tau(q_{j,n})=\tau_\omega(q_j)\quad(n\geqslant 1).$$

对每个 $n\geqslant 1$，定义

$$h_{p,q}^{(n)}(\xi)=\mathbf{i}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\xi_{ij}[p_{i,n},q_{j,n}],\qquad p_{i,n}(\xi)=e^{\mathbf{i}h_{p,q}^{(n)}(\xi)}p_{i,n}e^{-\mathbf{i}h_{p,q}^{(n)}(\xi)},$$

$$\Phi_{p,q}^{(n)}(\xi)=\big(\tau(p_{i,n}(\xi)q_{j,n})-\tau_\omega(p_i)\tau_\omega(q_j)\big)_{i,j},\quad\langle G_{p,q}^{(n)}\xi,\eta\rangle=\tau\big(h_{p,q}^{(n)}(\xi)h_{p,q}^{(n)}(\eta)\big).$$

根据此定义，$\Phi_{p,q}^{(n)}(\xi)=0$ 等价于 $\mathrm{Ad}(e^{\mathbf{i}h_{p,q}^{(n)}(\xi)})\circ\varphi_n^0$ 与 ψ_n^0 的像正交。将 $D\Phi_{p,q}^{(n)}(\xi)$ 记为 $\Phi_{p,q}^{(n)}$ 在 ξ 处的导数。下面的引理为有限维提升论证提供了一个一致的导数估计。

引理 3.1。使用上述记号，对于每个 $n\geqslant 1$，我们有 $D\Phi_{p,q}^{(n)}(0)=G_{p,q}^{(n)}$，并且

$$\|D\Phi_{p,q}^{(n)}(\xi)-G_{p,q}^{(n)}\|\leqslant C|\xi|\qquad(\xi\in\mathbb{R}^{r\times s}), \tag{3.4}$$

其中 $C=16(rs)^{\frac{3}{2}}$。

Proof. 对于每个 $\xi \in \mathbb{R}^{r\times s}$，定义 $\mathcal{M}$ b 上的有界线性映射 $\delta_n(\xi)$、 $\mathcal{E}_n(\xi)$ y

$$\delta_n(\xi)x = \mathbf{i}[h_{p,q}^{(n)}(\xi), x], \qquad \mathcal{E}_n(\xi) = e^{\delta_n(\xi)}.$$

Then

$$\mathcal{E}_n(\xi)x = e^{\mathbf{i}h_{p,q}^{(n)}(\xi)} x e^{-\mathbf{i}h_{p,q}^{(n)}(\xi)}, \qquad \|\delta_n(\xi)\| \leqslant 2\|h_{p,q}^{(n)}(\xi)\| \leqslant 4\sqrt{rs}|\xi|.$$

指数导数公式

$$\frac{d}{d\theta} e^{A+\theta B}\bigg|_{\theta=0} = \int_0^1 e^{(1-t)A} B e^{tA}\, dt$$

对于有界算子 A, B，将其应用于 $A = \delta_n(\xi)$ 和 $B = \delta_n(\eta)$，得到

$$D\mathcal{E}_n(\xi)\eta = \frac{d}{d\theta}\mathcal{E}_n(\xi+\theta\eta)\bigg|_{\theta=0} = \int_0^1 \mathcal{E}_n((1-t)\xi)\delta_n(\eta)\mathcal{E}_n(t\xi)\, dt.$$

在 $\xi = 0$ 处，我们有 $\mathcal{E}_n(0) = I$ 和 $D\mathcal{E}_n(0)\eta = \delta_n(\eta)$。由于 $p_{i,n}(\xi) = \mathcal{E}_n(\xi)p_{i,n}$，我们有

$$\langle D\Phi_{p,q}^{(n)}(0)\eta, \zeta\rangle = \tau\big(h_{p,q}^{(n)}(\eta)h_{p,q}^{(n)}(\zeta)\big) = \langle G_{p,q}^{(n)}\eta, \zeta\rangle.$$

因此 $D\Phi_{p\,q,}^{(n)}(0) = G_{p\,q,}^{(n)}$。

F或固定的 ξ， δ_n 的线性性意味着 $\mathcal{E}_n(\theta\xi) = e^{\theta\delta_{n(\xi)}}$。求导得到 s

$$\frac{d}{d\theta}\mathcal{E}_n(\theta\xi) = \mathcal{E}_n(\theta\xi)\delta_n(\xi),$$

从而

$$\mathcal{E}_n(t\xi) - I = \int_0^t \mathcal{E}_n(\theta\xi)\delta_n(\xi)\, d\theta.$$

由于 $\mathcal{E}_n(\theta\xi)$ 是等距映射，我们有

$$\|\mathcal{E}_n(t\xi) - I\| \leqslant t\|\delta_n(\xi)\| \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Thus

$$D\mathcal{E}_n(\xi)\eta - \delta_n(\eta) = \int_0^1 (\mathcal{E}_n((1-t)\xi) - I)\delta_n(\eta)\mathcal{E}_n(t\xi)\, dt + \int_0^1 \delta_n(\eta)(\mathcal{E}_n(t\xi) - I)\, dt.$$

因此,

$$\|D\mathcal{E}_n(\xi)\eta - \delta_n(\eta)\| \leqslant \int_0^1 ((1-t)+t)\|\delta_n(\xi)\|\,\|\delta_n(\eta)\|\, dt = \|\delta_n(\xi)\|\,\|\delta_n(\eta)\|.$$

由于 $\|p_{i,\ n}\| \leqslant 1$ 且 $\|q_{j,\ n}\| \leqslant 1$，我们得到

$$|(D\Phi_{p,q}^{(n)}(\xi) - G_{p,q}^{(n)})\eta| \leqslant \sqrt{rs}\,\|D\mathcal{E}_n(\xi)\eta - \delta_n(\eta)\| \leqslant 16(rs)^{\frac{3}{2}}|\xi|\,|\eta|.$$

这证明了（3.4）。 □

现在我们证明，Gram算子的正定性确保存在正交且保迹的提升。

引理 3.2。设 $\mathcal{A}_0$ 和 $\mathcal{B}_0$ 是 $\mathcal{M}^\omega$ 的非平凡有限维 *von Neumann* 子代数，且满足 $\mathcal{A}_0 \perp_{\tau_\omega} \mathcal{B}_0$。假设 $p=(p_i)_{i=1}^r$ 和 $q=(q_j)_{j=1}^s$ 是投影元组，使得 $\{1,p_1,\ldots,p_r\}$ 和 $\{1,q_1,\ldots,q_s\}$ 分别构成 $\mathcal{A}_0$ 和 $\mathcal{B}_0$ 的线性基，并且 $G_{p,q}$ 是正定的。那么存在幺正保迹 *-嵌入 $\varphi_n\colon \mathcal{A}_0 \to \mathcal{M}$ 和 $\psi_n\colon \mathcal{B}_0 \to \mathcal{M}$ 满足

$$a=(\varphi_n(a))_\omega\ (a\in\mathcal{A}_0),\quad b=(\psi_n(b))_\omega\ (b\in\mathcal{B}_0),\quad \varphi_n(\mathcal{A}_0)\perp_\tau \psi_n(\mathcal{B}_0)\ (n\geqslant 1).$$

证明。由于 $\Phi_{p,q}^{(n)}(0)\xrightarrow{\omega}0$ 且 $h_{p,q}(\xi)=(h_{p,q}^{(n)}(\xi))_\omega$ 对每个 ξ，我们有

$$\lim_{n\to\omega}\langle G_{p,q}^{(n)}\xi,\eta\rangle=\langle G_{p,q}\xi,\eta\rangle\qquad(\xi,\eta\in\mathbb{R}^{r\times s}).$$

由于 $\mathbb{R}^{r\times s}$ 是有限维的，$\|G_{p,q}^{(n)}-G_{p,q}\|\xrightarrow{\omega}0$。令 C 为引理 3.1 中的常数，且 $\lambda=\lambda_{\min}(G_{p,q})>0$。在集合

$$E_0=\{n\in\mathbb{N}:\|G_{p,q}^{(n)}-G_{p,q}\|<\frac{\lambda}{2}\}\in\omega,$$

我们有

$$\langle G_{p,q}^{(n)}\xi,\xi\rangle\geqslant\frac{\lambda}{2}|\xi|^2,\qquad\|(G_{p,q}^{(n)})^{-1}\|\leqslant\frac{2}{\lambda}:=L.$$

令 $\rho_n=2L|\Phi_{p,q}^{(n)}(0)|$，其中 $n\in E_0$ 且 $\rho_n=0$ 对于 $n\notin E_0$。对于 $n\in E_0$，定义 e

$$T_n(\xi)=\xi-(G_{p,q}^{(n)})^{-1}\Phi_{p,q}^{(n)}(\xi).$$

由于 $\rho_n\xrightarrow{\omega}0$，我们有

$$E:=\big\{n\in E_0:LC\rho_n\leqslant\frac{1}{2}\big\}\in\omega.$$

对于 $n\in E$ 和 $|\xi|\leqslant\rho_n$，

$$\|DT_n(\xi)\|=\|(G_{p,q}^{(n)})^{-1}(G_{p,q}^{(n)}-D\Phi_{p,q}^{(n)}(\xi))\|\leqslant LC|\xi|\leqslant\frac{1}{2}.$$

对于 ξ，$\overline{\eta}\in B(0,\ \rho_n):=\{\xi\in\mathbb{R}^{r\times s}\colon\ |\xi|\leqslant\rho_n\}$，沿线段积分

$$\gamma(t)=\eta+t(\xi-\eta)\qquad(0\leqslant t\leqslant 1),$$

我们得到

$$\begin{aligned}|T_n(\xi)-T_n(\eta)|&\leqslant\int_0^1|DT_n(\gamma(t))\cdot(\xi-\eta)|dt\\&\leqslant\int_0^1\|DT_n(\gamma(t))\|\cdot|\xi-\eta|dt\leqslant\frac{1}{2}|\xi-\eta|.\end{aligned}$$

因此，当 $n\in E$ 时，T_n 是 $B(0,\ \rho_n)$ 上的 $\frac{1}{2}$-利普希茨映射。由于

$$|T_n(0)|\leqslant L|\Phi_{p,q}^{(n)}(0)|=\frac{\rho_n}{2},$$

我们还有

$$|T_n(\xi)| \leqslant |T_n(\xi) - T_n(0)| + |T_n(0)| \leqslant \tfrac{1}{2}|\xi| + \tfrac{1}{2}\rho_n \leqslant \rho_n.$$

由巴拿赫不动点定理，T_n 有唯一的不动点 $\xi_n \in B(0,\ \rho_n)$，因此 $\Phi^{(n)}_{p\,q,}(\xi_n) = 0$。

对于 $n \in E$，定义保持单位元和迹的 *-嵌入

$$\varphi_n = \mathrm{Ad}(e^{\mathbf{i}h^{(n)}_{p,q}(\xi_n)}) \circ \varphi^0_n, \qquad \psi_n = \psi^0_n.$$

由 $\Phi^{(n)}_{p\,q,}(\xi_n) = 0$ 可知，$\varphi_n(\mathcal{A}_0) \perp_\tau \psi_n(\mathcal{B}_0)$。此外，对于每个 $n \in E$ 和$a \in \mathcal{A}_0$,

$$\begin{aligned}\|\varphi_n(a) - \varphi^0_n(a)\|_2 &= \|e^{\mathbf{i}h^{(n)}_{p,q}(\xi_n)}\varphi^0_n(a)e^{-\mathbf{i}h^{(n)}_{p,q}(\xi_n)} - \varphi^0_n(a)\|_2 \leqslant 2\|a\|\,\|e^{\mathbf{i}h^{(n)}_{p,q}(\xi_n)} - 1\| \\ &\leqslant 2\|a\|\,\|h^{(n)}_{p,q}(\xi_n)\| \leqslant 4\|a\|\sqrt{rs}\,\rho_n.\end{aligned}$$

此外，对于每个 $n \in E$ 和 $b \in \mathcal{B}_0$，$\psi_n(b) = \psi^0_n(b)$。

对于 $n \notin E$，固定一个保持单位元和迹的 *-嵌入

$$\theta\colon \big(\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{B}_0,\ \tau_\omega|_{\mathcal{A}_0} \otimes \tau_\omega|_{\mathcal{B}_0}\big) \longrightarrow (\mathcal{M}, \tau),$$

并定义保单位且保迹的 *-嵌入

$$\varphi_n(a) = \theta(a \otimes 1), \qquad \psi_n(b) = \theta(1 \otimes b) \qquad (a \in \mathcal{A}_0,\ b \in \mathcal{B}_0).$$

Then

$$\tau\big(\varphi_n(a)\psi_n(b)\big) = \tau\big(\theta(a \otimes b)\big) = \tau_\omega(a)\tau_\omega(b) = \tau(\varphi_n(a))\tau(\psi_n(b)).$$

由于 $E \in \omega$ 和 $\rho_n \xrightarrow{\omega} 0$，我们有

$$a = (\varphi_n(a))_\omega, \qquad b = (\psi_n(b))_\omega \qquad (a \in \mathcal{A}_0,\ b \in \mathcal{B}_0).$$

因此，φ_n 和 ψ_n 具有所有所需的性质。 □

我们对每个 $x \in \mathcal{M}$记 $\mathring{x} = x - \tau(x)1$，并对每个单位元记 $\mathcal{P} = \mathcal{P} \cap \ker\tau$ *-子代数 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$。下一个引理使我们能够通过任意小的酉共轭使 Gram算子变为正定，同时保持正交性。

引理 3.3。设 $(\mathcal{M},\tau)$ 是一个 II_1 型因子，设 $p=(p_i)_{i=1}^r$ 和 $q=(q_j)_{j=1}^s$ 是 $\mathcal{M}$ 中的投影元组，使得 $\{1,p_1,\dots,p_r\}$ 和 $\{1,q_1,\dots,q_s\}$ 线性无关；设 $v \in \mathcal{M}$ 是一个迹为零的对称元，使得 $W^*(v)$ 与 $\mathcal{P} = C^*(p,q)$ 自由。对于 $t \in (0,\frac{\pi}{2})$，令 $w_t = e^{\mathbf{i}tv}$、$q_j^t = w_t q_j w_t^*$，以及 $q^t = (q_j^t)_{j=1}^s$。

(1) 按照公式 (3.2)定义 $\Phi_{p,q}$，将 $(\mathcal{M}^\omega,\tau_\omega)$ 替换为 $(\mathcal{M},\tau)$。于是

$$\Phi_{p,q^t}(0) = \cos^2 t\,\Phi_{p,q}(0).$$

（2）$G_{p,\ q^t}$ 是正定的。

证明。（1）由于 v 与 $\mathcal{P}$自由独立，我们得到

$$\tau(avb) = \tau(abv) = 0, \quad \tau(avbv) = \tau(a)\tau(b), \quad a, b \in \mathcal{P}.$$

容易验证，对每个 $t \in (0, \frac{\pi}{2})$，$\Phi_{p,q^t}(0) = \cos^2 t\, \Phi_{p,q}(0)$。

(2) 令 $\mathcal{H}$ 为 $\{xvyv\colon x, y \in \mathring{\mathcal{P}}\}$ 在 $L^2(\mathcal{M},\tau)$ 中的闭线性张成，并令 $e_{\mathcal{H}}$ 为从 $L^2(\mathcal{M},\tau)$ 到 $\mathcal{H}$ 的正交投影。容易验证

$$\langle x'vy'v, xvyv\rangle_2 = \tau(x'x^*)\tau(y'y^*) \qquad (x, y, x', y' \in \mathring{\mathcal{P}}).$$

因此，$x \otimes y \mapsto xvyv$ 是从 $\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}$ 到 $\mathcal{H}$ 的保范映射。由 $W^*(v)$ 和 $\mathcal{P}$ 的自由性，我们可以证明

$$\mathcal{H} \perp \mathcal{P}, \qquad \mathcal{H} \perp \{avb : a, b \in \mathcal{P}\}, \qquad \mathcal{H} \perp \{vxvy : x, y \in \mathring{\mathcal{P}}\}.$$

注意

$$\mathbf{i}[p_i, q_j^t] = \mathbf{i}\cos^2 t[\mathring{p}_i, \mathring{q}_j] + \mathbf{i}\sin^2 t(\mathring{p}_i v\mathring{q}_j v - v\mathring{q}_j v\mathring{p}_i) - \sin t\cos t[\mathring{p}_i, v\mathring{q}_j - \mathring{q}_j v],$$

因此 $e_{\mathcal{H}}(\mathbf{i}[p_i, q_j^t]) = \mathbf{i}\sin^2 t\, \mathring{p}_i v\mathring{q}_j v$。由于族 $\{\mathring{p}_i\}_{i=1}^r$ 和 $\{\mathring{q}_j\}_{j=1}^s$ 都是线性无关的，我们可以推知，对每个非零的 $\xi \in \mathbb{R}^{r\times s}$，

$$\langle G_{p,q^t}\xi, \xi\rangle \geqslant \|e_{\mathcal{H}} h_{p,q^t}(\xi)\|_2^2 = \sin^4 t \left\| \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \xi_{ij}\mathring{p}_i \otimes \mathring{q}_j \right\|_2^2 > 0.$$

因此 $G_{p,\ q^t}$ 是正定的。 □

现在我们证明有限维提升结果。

命题 3.4. 设 $(\mathcal{M},\tau)$ 是一个 II_1 型因子。假设 $\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{M}^\omega$ 是有限维冯·诺伊曼子代数，并且 $\mathcal{A}_0 \perp_{\tau_\omega} \mathcal{B}_0$。那么存在保持单位元和迹的 *-嵌入 $\varphi_n : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{M}$ 以及 $\psi_n : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{M}$，满足

$$a = (\varphi_n(a))_\omega \ (a \in \mathcal{A}_0), \quad b = (\psi_n(b))_\omega \ (b \in \mathcal{B}_0), \quad \varphi_n(\mathcal{A}_0) \perp_\tau \psi_n(\mathcal{B}_0) \ (n \geqslant 1).$$

证明。根据引理 2.1，只需证明 $\mathcal{A}_0$ 和 $\mathcal{B}_0$ 均非平凡的情形。设 $p = (p_i)_{i=1}^r$ 和 $q = (q_j)_{j=1}^s$ 是投影元组，使得 $\{1, p_1, \ldots, p_r\}$和 $\{1, q_1, \ldots, q_s\}$ 分别构成 $\mathcal{A}_0$ 和 $\mathcal{B}_0$ 的线性基。根据引理 2.3，我们可以选取一个迹为零的对称元 v，使其与 $C^*(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0)$ 自由独立。对于 $0 < t < \frac{\pi}{2}$，令 $w_t = e^{\mathbf{i}tv}$, $q_j^t = w_t q_j w_t^*$, $q^t = (q_j^t)_{j=1}^s$ 以及 $\mathcal{B}_0^t = w_t\mathcal{B}_0 w_t^*$。根据引理 3.3，我们有$\mathcal{A}_0 \perp_{\tau_\omega} \mathcal{B}_0^t$，且 $G_{p,\ q^t}$ 是正定的。

令 $S \subseteq (\mathcal{M}^{r+s})_1$ 为所有元组的集合

$$(\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_r), \psi(q_1), \ldots, \psi(q_s)),$$

其中 $\varphi\colon \mathcal{A}_0 \to \mathcal{M}$和 $\psi\colon \mathcal{B}_0 \to \mathcal{M}$ 遍历所有满足 $\varphi(\mathcal{A}_0) \perp_\tau \psi(\mathcal{B}_0)$的保单位迹保持 *-嵌入。由一个从 $\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{B}_0$ 到 $\mathcal{M}$的保单位迹保持 *-嵌入可知，该集合非空。对每个 $n \geqslant 1$，令 $S_n = S$。固定 $0 < t < \frac{\pi}{2}$。由引理 3.2，存在保单位迹保持 *-嵌入

$$\varphi_n^t : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{M}, \qquad \widetilde{\psi}_n^t : \mathcal{B}_0^t \to \mathcal{M}$$

使得

$$a = (\varphi_n^t(a))_\omega \ (a \in \mathcal{A}_0), \quad b = (\widetilde{\psi}_n^t(b))_\omega \ (b \in \mathcal{B}_0^t), \quad \varphi_n^t(\mathcal{A}_0) \perp_\tau \widetilde{\psi}_n^t(\mathcal{B}_0^t) \ (n \geqslant 1).$$

定义

$$\psi_n^t(b) = \widetilde{\psi}_n^t(w_t b w_t^*) \qquad (b \in \mathcal{B}_0).$$

$\widetilde{}$于是 $\psi_n^t\colon \mathcal{B}_0 \to \mathcal{M}$ 是一个保持单位元和迹的 *-嵌入，且 $\psi_n^t(\mathcal{B}_0) = \psi_n^t(\mathcal{B}_0^t)$。因此，根据 S_n的定义，

$$\big(\varphi_n^t(p_1), \ldots, \varphi_n^t(p_r), \psi_n^t(q_1), \ldots, \psi_n^t(q_s)\big) \in S_n \qquad (n \geqslant 1).$$

由于 $p_i = (\varphi_n^t(p_i))_\omega$，$w_t q_j w_t^* = (\psi_n^t(q_j))_\omega$，我们得到

$$(p_1, \ldots, p_r, w_t q_1 w_t^*, \ldots, w_t q_s w_t^*) \in \prod_\omega S_n.$$

由于 $\lim_{t\to 0} \|w_t q_j w_t^* - q_j\|_2 = 0$，由引理 2.2可知

$$(p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_s) \in \prod_\omega S_n.$$

因此，存在保持单位元和迹的 *-嵌入 $\varphi_n\colon \mathcal{A}_0 \to \mathcal{M}$ 和$\psi_n : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{M}$，使得

$$\varphi_n(\mathcal{A}_0) \perp_\tau \psi_n(\mathcal{B}_0) \qquad (n \geqslant 1),$$

并且 $p_i = (\varphi_n(p_i))_\omega$，$q_j = (\psi_n(q_j))_\omega$ 对每个 $1 \leqslant i \leqslant r$ 和 $1 \leqslant j \leqslant s$ 都成立。由于$\{1, p_1, \ldots, p_r\}$ 和 $\{1, q_1, \ldots, q_s\}$ 是线性基，φ_n 和 ψ_n 满足所有所需性质。□

现在我们可以利用有限维提升结果证明定理 1.1。

定理 *1.1* 的证明。由于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是可和且可分的，因此存在有限维子代数 $\mathcal{A}^{(k)} \subseteq \mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}^{(k)} \subseteq \mathcal{B}$ 的递增序列，其并弱稠密。当 $\mathcal{A}$（分别为 $\mathcal{B}$）是交换的时，$\mathcal{A}^{(k)}$（分别为 $\mathcal{B}^{(k)}$）也是交换的。由于 $\mathcal{A}^{(k)} \perp_{\tau_\omega} \mathcal{B}^{(k)}$，由命题 3.4 可知，存在保持迹的

*-嵌入

$$\varphi_{k,n}\colon \mathcal{A}^{(k)} \to \mathcal{M}, \qquad \psi_{k,n}\colon \mathcal{B}^{(k)} \to \mathcal{M}$$

使得

$$a=(\varphi_{k,n}(a))_{n\to\omega}\quad (a\in\mathcal{A}^{(k)}),\qquad b=(\psi_{k,n}(b))_{n\to\omega}\quad (b\in\mathcal{B}^{(k)}),$$
$$\varphi_{k,n}(\mathcal{A}^{(k)})\perp_\tau\psi_{k,n}(\mathcal{B}^{(k)})\quad (n,k\geqslant 1).$$

由于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 都是可分的，根据卡普兰斯基稠密性定理，我们可以选取序列

$$\{a_j\}_{j\geqslant 1}\subseteq\Big(\bigcup_k\mathcal{A}^{(k)}\Big)_1,\qquad \{b_j\}_{j\geqslant 1}\subseteq\Big(\bigcup_k\mathcal{B}^{(k)}\Big)_1$$

它们分别在 $(\mathcal{A})_1$ 和 $(\mathcal{B})_1$ 中关于 2-范数稠密。取逼近代数的一个公共子序列，并重新标记相应的 *-嵌入后，我们不妨假设

$$a_1,\dots,a_k\in\mathcal{A}^{(k)},\quad b_1,\dots,b_k\in\mathcal{B}^{(k)}\qquad (k\geqslant 1).$$

记 $a_j=(a_{j,n})_{n\to\omega}$ 和 $b_j=(b_{j,n})_{n\to\omega}$，其中每个 $a_{j,n},b_{j,n}$ 都是 $\mathcal{M}$中的压缩算子。对于 $k\geqslant 1$，定义

$$F_k=\left\{n\in\mathbb{N}\colon\ \max_{1\leqslant j\leqslant k}\|\varphi_{k,n}(a_j)-a_{j,n}\|_2<\frac{1}{k},\quad \max_{1\leqslant j\leqslant k}\|\psi_{k,n}(b_j)-b_{j,n}\|_2<\frac{1}{k}\right\}.$$

于是 $F_k\in\omega_\circ$ 令 $E_k=\{n\colon\ n\geqslant k\}\cap\bigcap_{\ell=1}^k F_\ell$, 于是 $E_k\in\omega_\circ$ 定义

$$k_n=\max(\{1\}\cup\{k:n\in E_k\}).$$

于是 $k_n\xrightarrow{\omega}\infty_\circ$ 定义

$$\mathcal{A}_n=\varphi_{k_n,n}(\mathcal{A}^{(k_n)}),\qquad \mathcal{B}_n=\psi_{k_n,n}(\mathcal{B}^{(k_n)}).$$

这些是带有 $\mathcal{A}_n\perp_\tau\mathcal{B}_n$ 的有限维冯·诺伊曼子代数。

现在我们证明，对于每个 $j\geqslant 1$，都有 $a_j\in\prod_\omega\mathcal{A}_n$, $b_j\in\prod_\omega\mathcal{B}_n$。定义 $a'_{j,n}\in(\mathcal{A}_n)_1$ 为

$$a'_{j,n}=\begin{cases}\varphi_{k_n,n}(a_j), & k_n\geqslant j,\\ 0, & k_n<j.\end{cases}$$

于是，对于每个 $n\geqslant 1$，都有 $a'_{j,n}\in\mathcal{A}_n$。当 $n\in E_j$ 时，我们有 $k_n\geqslant j$ 和 $n\in E_{k_n}\subseteq F_{k_n}$, 因此

$$\|a'_{j,n}-a_{j,n}\|_2<\frac{1}{k}\xrightarrow{\omega}0,$$

这意味着 $a_j=(a'_{j,n})_{n\to\omega}\in\prod_\omega\mathcal{A}_n$。类似地，对于每个 $j\geqslant 1$，都有 $b_j\in\prod_\omega\mathcal{B}_n$。

由于 $\prod_\omega\mathcal{A}_n$ 和 $\prod_\omega\mathcal{B}_n$ 是 $\mathcal{M}^\omega$的冯·诺依曼子代数，它们的单位球在 2-范数下是闭的。注意，

$$(\mathcal{A})_1=\overline{\{a_j:j\geqslant 1\}}^{\|\cdot\|_2}\subseteq\Big(\prod_\omega\mathcal{A}_n\Big)_1,\qquad (\mathcal{B})_1=\overline{\{b_j:j\geqslant 1\}}^{\|\cdot\|_2}\subseteq\Big(\prod_\omega\mathcal{B}_n\Big)_1.$$

因此 $\mathcal{A} \subseteq \prod_\omega \mathcal{A}_n$, $\mathcal{B} \subseteq \prod_\omega \mathcal{B}_n$。

如果 $\mathcal{A}$ （分别地， $\mathcal{B}$）是交换的，那么根据 $\mathcal{A}^{(k)}$， $\mathcal{B}^{(k)}$ 的选取，每个 $\mathcal{A}_n$ （分别地， $\mathcal{B}_n$）都是交换的。□

定理 1.1 的以下推论肯定地回答了 [10] 中的问题 30。

推论 3.5。 设 $(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个 II_1 因子， u、 v 是 $\mathcal{M}^\omega$ 中的独立酉算子。那么存在有限谱酉算子 u_n、 $v_n \in \mathcal{M}$ ，使得

$$u = (u_n)_\omega, \qquad v = (v_n)_\omega, \qquad W^*(u_n) \perp_\tau W^*(v_n) \quad (n \geqslant 1).$$

证明。 将定理 1.1 应用于 $\mathcal{A} = W^*(u)$ 和 $\mathcal{B} = W^*(v)$，存在交换有限维代数 $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{M}$，满足 $\mathcal{A}_n \perp_\tau \mathcal{B}_n$，使得 $\mathcal{A} \subseteq \prod_\omega \mathcal{A}_n$ 和 $\mathcal{B} \subseteq \prod_\omega \mathcal{B}_n$。 记 $u = (a_n)_\omega$ ，其中 $a_n \in \mathcal{A}_n$。 由于 $\mathcal{A}_n$ 是有限维的， a_n 的极分解中的偏等距可延拓为酉元 $u_n \in \mathcal{A}_n$，从而 $a_n = u_n|a_n|$。 由于 u 是酉元，我们有

$$\|u_n - a_n\|_2 = \||1 - |a_n|\|_2 \leqslant \|1 - a_n^* a_n\|_2 \xrightarrow{\omega} 0,$$

因此 $u = (u_n)_\omega$。 类似地，存在酉算子 $v_n \in \mathcal{B}_n$ 使得 $v = (v_n)_\omega$。 由于 $\mathcal{A}_n$ 和 $\mathcal{B}_n$ 是有限维的， u_n 和 v_n 具有有限谱。由 $\mathcal{A}_n \perp_\tau \mathcal{B}_n$ 可知，对于每个 $n \geqslant 1$， u_n 和 v_n 彼此独立。□

注 3.6。 定理 1.1 的证明采用同样的论证，表明对于一列 $\{(\mathcal{M}_n, \tau_n)\}_{n\geqslant 1}$ 型 II_1因子的超积，其结论仍然成立，其中对每个 $n \geqslant 1$都有 $\mathcal{A}_n$， $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{M}_n$ 和 $\mathcal{A}_n \perp_{\tau_n} \mathcal{B}_n$。

4. 非可和子代数的反例

本节证明定理 1.2，说明定理 1.1 中的可和性假设是必要的。我们构造出不存在正交提升的 $\mathcal{M}^\omega$ 的正交子代数。

定理 1.2 的证明。由于 $\mathcal{M}^\omega$ 中的每个投影都与 $\mathcal{M}$的对角副本中的某个投影酉共轭，而且同时进行酉共轭会保留正交性及正交提升的存在性，因此不妨设 $q \in \mathcal{M}$。令$\mathcal{D} = W^*(q)$。我们先构造一个保迹的 *-嵌入 $\alpha : \mathcal{N} \to \mathcal{M}^\omega$ ，使得 $\alpha(\mathcal{N})$ 与 $\mathcal{D}$ 相对于 τ_ω 正交，但不存在正交提升。

设 $(\mathcal{R}, \tau_\mathcal{R})$ 为超有限 II_1 型因子。根据 [2, 定理 4.7], ，我们可以选取保迹的 *-嵌入 $\pi, \rho\colon \mathcal{N} \to \mathcal{R}^\omega$，使得 $\rho \neq (T_n)_\omega \circ \pi$，对于

每个保迹单位完全正映射序列 $T_n\colon \mathcal{R}\to\mathcal{R}$。令$p=1-q$, $s=\tau_\omega(p)$ 和 $t=\tau_\omega(q)$。选取保迹的 *-嵌入

$$\iota_p:(\mathcal{R},\tau_{\mathcal{R}})\longrightarrow\big(p\mathcal{M}p,s^{-1}\tau\big),\qquad \iota_q:(\mathcal{R},\tau_{\mathcal{R}})\longrightarrow\big(q\mathcal{M}q,t^{-1}\tau\big),$$

并定义

$$\alpha=\iota_p^\omega\circ\pi+\iota_q^\omega\circ\rho,\qquad \mathcal{A}_0=\alpha(\mathcal{N}).$$

则 α 是保持迹的 *-嵌入，并且

$$\tau_\omega(q\alpha(x))=t\tau_\omega(\alpha(x))\qquad(x\in\mathcal{N}).$$

因此 $\mathcal{A}_0\perp_{\tau_\omega}\mathcal{D}$。

A反设冯·诺伊曼子代数 $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{D}_n\subseteq\mathcal{M}$ 满足 y

$$\mathcal{A}_0\subseteq\prod_\omega\mathcal{A}_n,\qquad\mathcal{D}\subseteq\prod_\omega\mathcal{D}_n,\qquad\mathcal{A}_n\perp_\tau\mathcal{D}_n\quad(n\geqslant1).$$

选取投影 $q_n\in\mathcal{D}_n$ 使得 $q=(q_n)_\omega$。令 $p_n=1-q_n$, $s_n=\tau(p_n)$ 和$t_n=\tau(q_n)$。设 E_n 表示从 $\mathcal{M}$ 到$\mathcal{A}_n$的保迹条件期望。则 $E_n(p_n)=s_n1$ 并且 $E_n(q_n)=t_n1$。令 $K=\iota_q^{-1}\circ\overline{E_{\iota_q(\mathcal{R})}}\colon q\mathcal{M}q\to\mathcal{R}$,$\lambda_n=$取最大值$\{s_n,s_t^{t_n}\}$，并且

$$S_n(z)=\frac{1}{\lambda_n}K\big(qq_nE_n(p_n\iota_p(z)p_n)q_nq\big)\qquad(z\in\mathcal{R}).$$

由于 $p_n\iota_p(1)p_n\leqslant p_n$ 且 $s_n\leqslant\lambda_n$，我们可以推得 S_n 是完全正的，并且$S_n(1)\leqslant1$。对于 $z\geqslant0$,

$$\tau_{\mathcal{R}}(S_n(z))\leqslant\frac{\tau(q_nE_n(p_n\iota_p(z)p_n))}{t\lambda_n}=\frac{t_n\,\tau(p_n\iota_p(z)p_n)}{t\lambda_n}\leqslant\tau_{\mathcal{R}}(z).$$

根据 Kadison-Schwarz 不等式 [9]，$\|S_n(z)\|_2\leqslant\|z\|_2$ 对每个 $z\in\mathcal{R}$。

令 $E=(E_n)_\omega\colon\ \mathcal{M}^\omega\to\prod_\omega\mathcal{A}_n$ 为保迹条件期望。由于 $\mathcal{A}_0\subseteq\prod_\omega\mathcal{A}_n$ 且 $E(p)=s1$, E 的双模性质推出

$$E(p\alpha(x))=s\alpha(x)\qquad(x\in\mathcal{N}).$$

利用

$$\iota_p^\omega(\pi(x))=p\alpha(x),\qquad\iota_q^\omega(\rho(x))=q\alpha(x)q,$$

以及 $\lambda_n\xrightarrow{\omega}s$，我们得到

$$(S_n)_\omega(\pi(x))=\frac{1}{s}K^\omega(qE(p\alpha(x))q)=\rho(x)\qquad(x\in\mathcal{N}).$$

设 $d_n = 1 - S_n(1)$ 且 $\omega_n = \tau_{\mathcal{R}} - \tau_{\mathcal{R}} \circ S_n$。于是 $\|d_n\|_2 \xrightarrow{\omega} 0$，并且 ω_n 为正，满足 $\omega_n(1) = \tau_{\mathcal{R}}(d_n)$。定义

$$T_n(z) = \begin{cases} S_n(z) + \dfrac{\omega_n(z)}{\omega_n(1)} d_n, & d_n \neq 0, \\ S_n(z), & d_n = 0. \end{cases}$$

于是， T_n 是 $\mathcal{R}$上的保单位保迹完全正映射。对于 $\|z\| \leqslant 1$，我们有

$$\|T_n(z) - S_n(z)\|_2 \leqslant \|d_n\|_2 \xrightarrow{\omega} 0,$$

因此 $\rho = (T_n)_\omega \circ \pi$，矛盾。故 $\alpha(\mathcal{N})$和 $\mathcal{D}$ 不存在正交提升。

由 [14, 推论 0。2], ，存在一个酉元 u 满足 $u\mathcal{D}u^* = \mathcal{D}$，使得$uW^*(\mathcal{A}_0, \mathcal{D})$ u^*与 $\mathcal{B}$在 $\mathcal{D}$上合并自由，因此

$$E_{\mathcal{D}}(ab) = E_{\mathcal{D}}(a)E_{\mathcal{D}}(b) \qquad (a \in u\mathcal{A}_0u^*,\, b \in \mathcal{B}).$$

设 $\mathcal{A} = u\mathcal{A}_0u^*$。由于对每个 $a \in \mathcal{A}$都有 $E_{\mathcal{D}}(a) = \tau_\omega(a)1$，因此我们有

$$\tau_\omega(ab) = \tau_\omega(E_{\mathcal{D}}(a)E_{\mathcal{D}}(b)) = \tau_\omega(a)\tau_\omega(b) \qquad (a \in \mathcal{A},\ b \in \mathcal{B}),$$

这意味着 $\mathcal{A} \perp_{\tau_\omega} \mathcal{B}$。由于 $u\mathcal{D}u^* = \mathcal{D}$、 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{D}$ 不存在正交提升。 □

AI 使用声明：在准备本手稿期间，作者使用 GPT 6 搜索必要的参考文献、探索证明策略、检查数学论证并润色语言。作者对本手稿承担全部责任。

References

[1] H. Ando 和 U. Haagerup, 《冯·诺依曼代数的超积》, J. Funct. Anal. **266** (2014), 第 12 期, 6842–6913; MR3198856[2] S. Atkinson 和 S. Kunnawalkam Elayavalli, 《带迹冯·诺伊曼代数的超积嵌入与可和性》, 国际数学研究通讯**2021**, 第 4 期, 2882–2918; MR4218341[3] I. Chifan、A. Ioana 和 S. Kunnawalkam Elayavalli, 《一个不具有性质gamma的奇异 II_1 因子》, 几何与泛函分析**33** (2023), 第 5 期, 1243–1265; MR4646408[4] A. Connes, 《内射因子的分类。II_1, 、II_∞、III_λ 情形, $\lambda \neq 1$》, Ann. of Math. (2) **104** (1976), 第 1 期, 73–115; MR0454659[5] J. Fang、L. Ge 和 W. Li, 《冯·诺依曼代数的中心序列代数》, 台湾数学期刊**10** (2006), 第 1 期, 187–200; MR2186173

[6] L. Ge 和 D. Hadwin，《 C^*代数的超积》，载于《算子理论及相关主题的最新进展》（塞格德，1999），305–326，Oper. Theory Adv. Appl.，127，Birkh¨auser，巴塞尔，2001；MR1902808[7] C. Houdayer 和 A. Ioana，《带迹超积中的渐近自由性》，Forum Math. Sig ma 12 (2024)，论文编号 e88，共 22 页；MR4814543[8] K. Jung，《可和性、管状性及嵌入 $\mathcal{R}^\omega$》，Math. Ann. 338 (2007)，第 1 期，241–248；MR2295511[9]R. Kadison，《算子代数的广义施瓦茨不等式与代数不变量》，Ann. of Math. (2) 56 (1952)，494–503；MR0051442[10]S. Kunnawalkam Elayavalli，《50 个公开问题：超积 II_1 因子》，arXiv:2511.20377v3，2026 [11] D. McDuff，《中心序列与超有限因子》，Proc. London Math. Soc. (3) 21 (1970)，443–461；MR0281018[12] G. Patchell 和 A. Shiner，《II_1 因子中 N独立集的提升》，arXiv:2609.10087v1，2026[13] S. Popa，《II_1 因子视角下的 Kadison-Singer 问题》，Comm. Math. Phys. 332 (2014)，第 1 期，379–414；MR3253706[14] S. Popa，《超积 II_1 因子子代数中的独立性》，J. Funct. Anal. 266 (2014)，第 9 期，5818–5846；MR3182961[15]A. Sinclair 和 R. Smith，《有限 von Neumann 代数与极大阿贝尔子代数》，伦敦数学会讲义丛书，351，剑桥大学出版社，剑桥，2008；MR2433341[16] D. Voiculescu、K. Dykema 和 A. Nica，《自由随机变量》，CRM 专著丛书，1，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1992；MR1217253

Minghui Ma, School of Mathematical Sciences,
Dalian University of Technol-ogy, Dalian, 116024, China电子邮箱:
minghuima@dlut.edu.cnWenming Wu, School of Mathematical Sciences,
Chongqing Normal University,Chongqing, 401331, China电子邮箱:
wuwm@amss.ac.cnYifeng Ye, School of Mathematical Sciences,
Chongqing Normal University,Chongqing, 401331, China电子邮箱：yyf@amss.ac.cn