arXiv:2611.29931v1 [math.AP] 23 Nov 2026

通过局部托普利兹算子的散焦非线性薛定谔层级的时空几乎周期性

张硕[1]

摘要

我们研究具有狄拉克谱 E的无反射初始数据的散焦非线性薛定谔层级。对于满足 m 阶谱隙矩条件且假设 E 为齐次的每个此类初始数据，我们证明了存在一个全局经典解，并证明该解在阶数 m 以内具有时空几乎周期性。更一般地，除谱隙矩条件外，只需 $\mathbb{C}\setminus E$ 是满足直接柯西定理的狄利克雷正则 Widom 域，并且加权格林势的谱隙最大值可求和即可。我们通过对每个谱隙上的修正幂z^r 的上、下边界值求和来获得频率，并利用局部托普利兹算子根据谱隙相位重构势。我们还证明了在空间导数有界的条件下的唯一性。

1 引言

我们研究实直线上的消散型非线性薛定谔层级，其初值为无反射初始数据。在我们的归一化 $t_1 = x$ 下， t_2-方程为

$$i\partial_{t_2} q = -\frac{1}{2}\partial_x^2 q + |q|^2 q.$$

我们给出相关狄拉克算子的谱 E 所满足的条件，在这些条件下，前 m 个正流具有一个共同解

$$q(\mathbf{t}, x) = F_{q_0}\left(x\alpha + \sum_{r=2}^{m} t_r \beta^{(r)}\right), \qquad \mathbf{t} = (t_2, \ldots, t_m).$$

这里 F_{q_0} 在每个间隙对应一个圆的圆乘积上是连续的，而频率仅依赖于 E。特别地， q 在 $\mathbb{R}^m$ 上是一致极限，可表示为关于（x，$\mathbf{t}$）的三角多项式。

对于 KdV，Deift [17, 18] 曾提出疑问：几乎周期初值是否会产生一个整体解，并且该解在时间上具有拟周期性。McKean 和 Trubowitz [29] 的周期理论以及有限带积分 [2]表明，这一结论是可能成立的，因为演化由环面上的线性运动描述。当存在无限多个间隙时，仍需证明势关于相位连续，并且所采用的拓扑能够保证一致拟周期性。

对于非线性薛定谔方程，Fillman、Li、Luki´c 和 Zhou [23] 证明了对于其狄拉克谱纯绝对连续且满足 Craig型条件的一致几乎周期初值，解的存在性、唯一性及时空几乎周期性

[1]中国南京大学数学系，shuozhang@smail.nju.edu.cn

他们通过广义阿贝尔映射将空间流和 NLS流线性化。他们参数化中的一个额外圆记录了复相位的旋转。他们的直接谱分析验证了具有丢番图频率的小解析拟周期初始数据满足这些假设。

在与 Kotani、Wang 和 Xu 的合作工作中 [25], , 作者为包含充分光滑有界初始数据的函数类构造了全局NLS流，且不假设衰减。该工作中的托普利兹重构还给出了空间 Bohr 几乎周期性的保持。这里我们将一个局部托普利兹算子附加到 E 的每个间隙上，并利用所得跳跃矩阵的相位，将空间平移和层级流表示为同一公共环面上的平移。这一表示对每个流给出了时间上的拟周期性。

在齐次谱上，只需假设间隙长度具有有限矩。我们首先用 $\mathbb{C}\setminus E$的格林函数来陈述更一般的判据。

固定指标集 $\mathcal{J}\subset\mathbb{Z}_+$。对 $j\in\mathcal{J}$，令

$$I_j=[l_j,r_j]=[c_j-a_j,c_j+a_j],\qquad a_j>0,\quad c_j\in\mathbb{R},$$

and

$$G=\bigcup_{j\in\mathcal{J}} I_j^\circ,\qquad E=\mathbb{R}\setminus G,\qquad \Omega=\mathbb{C}\setminus E.$$

假设区间 I_j 两两不交。下面的定义域假设涉及情形 $G\neq\varnothing$。若 $G=\varnothing$，则相位环面是一个点，且唯一的无反射势为零 [9, 定理6.7]。对 $G\neq\varnothing$，令 g_Ω 为 Ω的正格林函数，其归一化条件为

$$-\Delta_z g_\Omega(z,\zeta)=2\pi\delta_\zeta,\qquad g_\Omega(z,\zeta)=-\log|z-\zeta|+O(1)\quad(z\to\zeta).$$

我们称 Ω 为狄利克雷正则，如果

$$\lim_{z\to e,z\in\Omega} g_\Omega(z,\zeta)=0$$

对于每个 $\zeta\in\Omega$ 以及黎曼球面上的每个边界点 e。如果 Ω 满足以下条件，我们称其为 *Widom* 域：

$$\sum_j \sup_{s\in I_j^\circ} g_\Omega(s,z)<\infty\quad(z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}).$$

定义在 Ω 上的单值全纯函数 F 属于 Smirnov类$\mathcal{N}_+$(Ω)，如果

$$F\circ\pi=\frac{g}{h},\qquad g,h\in H^\infty(\mathbb{D}),$$

其中， π 是从单位圆盘映到 Ω 上的泛全纯覆盖映射，而 h 是一个外函数。

定义 1 固定 $\xi_*\in\mathbb{R}\setminus E$。我们称 Ω 满足直接柯西定理(DCT) ，如果每个满足条件的 $F\in\mathcal{N}_+$(Ω)

$$\int_E\frac{|F_+(s)|+|F_-(s)|}{|s-\xi_*|^2}ds<\infty$$

满足

$$F(z)-F(\xi_*)=\frac{1}{2\pi i}\int_E \big(F_+(s)-F_-(s)\big)\left(\frac{1}{s-z}-\frac{1}{s-\xi_*}\right)ds\quad (z\in\Omega).$$

此处 $F_\pm(s)=F(s\pm i0)$ 表示非切向边界值。该条件与参考点 $\xi_*\in\mathbb{R}\setminus E$ 的选择无关。

定义格林积分为

$$(\mathcal{K}_\Omega f)(z):=\frac{1}{\pi}\int_G g_\Omega(z,t)f(t)dt,\qquad z\in\Omega.$$

令 $\omega(s)=(1+s^2)^{-1/2}$，$v_\omega=\mathcal{K}_\Omega(\omega|_G)$，并且

$$\mathcal{P}_1(E)=\sum_j \sup_{s\in I_j^\circ} v_\omega(s). \tag{1}$$

记为

$$\lambda_j=1+|c_j|,\quad S_p=\sum_{j\in\mathcal{J}} a_j\lambda_j^p,\quad \Theta=\prod_{j\in\mathcal{J}}\mathbb{T},\quad \mathbb{T}=\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}). \tag{2}$$

赋予 Θ 平移不变度量

$$d_\Theta(\theta,\varphi)=\sum_{j\in\mathcal{J}} 2^{-j}\left|e^{i\theta_j}-e^{i\varphi_j}\right|.$$

它诱导出积拓扑，并且 Θ 是紧的。

对于 $q\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\mathbb{C})$，令 D_q 为 $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^2)$ 中与之对应的自伴狄拉克算子

$$D_q=iJ\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix}0 & q\\ \overline{q} & 0\end{pmatrix},\qquad J=\mathrm{diag}(1,-1),$$

其定义域取最大定义域。在舒尔规范化下，Weyl函数分别为 $m_-^q(z)=f_-(0,z)/f_-(1,0,z)$（当 $z\in\mathbb{C}_+$ 时）以及 $m_+^q(z)=f_+(0,z)/f_+(1,0,z)$（当 $z\in\mathbb{C}_-$时），其中 $f_\pm(\cdot,z)$ 分别是在 $\pm\infty$处平方可积的 $D_qf=zf$ 非零解。在一般基点 x处，我们用 $m_\pm^q(x,z)$ 表示在 x处相应的比值。在 $\mathbb{C}_+$ 中，我们还使用右 Weyl 坐标$m_+^q(x,z)=m_+^q(x,\bar z)=f_+(1,x,z)/f_+(2,x,z)$。定义

$$\mathcal{R}(E)=\big\{q\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\mathbb{C}):\sigma(D_q)=E,\\ m_-^q(\lambda+i0)=m_+^q(\lambda-i0)\text{ for a.e. }\lambda\in E\big\}.$$

我们固定散焦 AKNS 层级的归一化（参见 [23, 附录 B]）。对于光滑的 q，令

$$U=-izJ+P(q),\qquad P(q)=\begin{pmatrix}0 & -i\overline{q}\\ iq & 0\end{pmatrix}.$$

形式级数 $R=J+\sum_{r\ge1}R_rz^{-r}$ 的系数由 $R_x=[R,U]$ 和 $R^2=I_2$依次确定，其中 $[A,B]=AB-BA$。第 r阶流为 $\partial_{t_r}q=\mathcal{X}_r(q)$，其中

$$\mathcal{X}_r(q)=\frac{1}{i}[J,R_{r+1}]_{21},\qquad r\ge0.$$

零阶流为 $q \mapsto e^{-2it_0}q$。每个 $\mathcal{X}_r$ 都是一个阶数为 r的微分多项式。特别地，

$$\mathcal{X}_1(q) = q_x, \quad \mathcal{X}_2(q) = \frac{i}{2}q_{xx} - i|q|^2 q, \quad \mathcal{X}_3(q) = -\frac{1}{4}q_{xxx} + \frac{3}{2}|q|^2 q_x.$$

定理 1 设 $m \geq 2$ 为整数。假设 Ω 是具有 *DCT* 的狄利克雷正则 *Widom* 域，并且

$$S_m < \infty, \qquad \mathcal{P}_1(E) < \infty.$$

存在仅依赖于 E的实数序列 $\beta^{(r)} \in \mathbb{R}^{\mathcal{J}}$、 $1 \leq r \leq m$，使得

$$|\beta_j^{(r)}| \leq C_r \lambda_j^r, \qquad \alpha = \beta^{(1)}, \quad \beta = \beta^{(2)}. \tag{3}$$

对于每个 $q_0 \in \mathcal{R}(E)$ ，存在一个连续函数 $F_{q_0}: \Theta \to \mathbb{C}$，使得$x \mapsto F_{q_0}(x\alpha)$ 是 C^m 的代表元。取此代表元时，

$$q(\mathbf{t}, x) = F_{q_0}\left(x\alpha + \sum_{r=2}^{m} t_r \beta^{(r)}\right)$$

是下列方程的全局经典解

$$\partial_{t_r} q = \mathcal{X}_r(q) \quad (2 \leq r \leq m), \qquad q(\mathbf{0}, x) = q_0(x). \tag{4}$$

相位按模 2π计算。所有导数

$$\partial_x^k \partial_{t_2}^{\ell_2} \cdots \partial_{t_m}^{\ell_m} q, \qquad k + \sum_{r=2}^{m} r\ell_r \leq m,$$

关于(x、$\mathbf{t}$)均为 *Bohr* 几乎周期函数。方程(4) 的解在满足以下条件的经典解 v 中是唯一的

$$\sup_{\substack{|\mathbf{t}| \leq T \\ x \in \mathbb{R}}} \sum_{k=0}^{r} |\partial_x^k v(\mathbf{t}, x)| < \infty \qquad (T > 0), \quad (k = 0, 1 \ \textit{for the cubic flow}).$$

定理 2 设 $G \neq \varnothing$、 $S_0 < \infty$ 和 E 是齐次的，即存在常数 $\eta > 0$ 使得

$$|E \cap (x - r, x + r)| \geq \eta r \quad (\textit{for all } x \in E,\ r > 0).$$

则 Ω 是具有 *DCT* 的狄利克雷正则 *Widom* 域，并且

$$\mathcal{P}_1(E) \leq C_\eta S_0.$$

对于齐次的 E，这两个定理只剩下一个可和性条件 $S_m < \infty$。于是每个 $q_0 \in \mathcal{R}(E)$ 都具有一个 C^m 几乎周期代表元，并且同一个谱隙矩给出所有加权阶数为 $k + \sum_{r=2}^{m} r\ell_r \leq m$ 的混合导数的联合拟周期性。

在选择任何初始势之前，就可以读出频率。对于$1 \leq r \leq m$，Φ_r的两个边界值之和在第 j个保留谱隙I_j° 上是一个常数 $\beta_{j\,N}^{(r)}$。通过用柯西积分校正 z^r 可以得到该常数

rs^{r-1} 在保留谱隙上的 Green 势（引理 3）。由于 $N \to \infty$, ${\beta_j^{(r)}}_N \to \beta_j^{(r)}$ 。q_0 的 Weyl函数决定了跳跃的其余部分。因此，第 r个流在第 j个间隙的相位上增加 $t_r\beta_j^{(r)}$ 。

对于有限个间隙，局部 Toeplitz 方程在其圆周乘积上给出一个重构函数 F_N 。推广到无限多个间隙依赖于具有给定跳跃且经过归一化的矩阵的唯一性。事实上，如果 W_1, W_2 是两个可容许的矩阵，则 $W_2^{-1}W_1$ 可延拓穿过开间隙。其元素属于 Smirnov类，并且在谱上的边界值相等。DCT 以及无穷远点处的归一化给出 $W_1 = W_2$ （引理 8）。 $\mathcal{P}_1(E)$ 上的界保证了有限谱隙分解中 Green 势的紧致性。于是，即使相位随 N变化，唯一性也能确定极限，并且

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\theta\in\Theta} |F_N(\theta) - F_{q_0}(\theta)| = 0.$$

有限谱隙的迹估计给出空间导数，而层级方程给出时间导数。对于每个流，通过比较两个半轴韦尔方向上的时间传递矩阵，可得到有限时间带上的唯一性（引理 12）。

Fillman、Li、Luki´c 和 Zhou 的假设意味着 $q_0 \in \mathcal{R}(E)$， E 是齐次的，并且 $S_2 < \infty$ [23, （1.5）–（1.6）、定理4.8 和引理 7.12]成立。因此，定理 1 和定理 2 将 [23, 定理 1.2] 关于三次非线性薛定谔方程的存在性、唯一性及时空几乎周期性结果推广到了更大的谱类。结合 $S_m < \infty$，对于每个阶数为 $r \le m$ 的流，同样的结论也成立。

对于 KdV 和 Toda，类似结果涉及不同的谱问题。Eichinger、VandenBoom 和 Yuditskii [21]获得了 KdV 层级的全局经典解，这些解在空间和时间上均一致几乎周期。其在 Abelian覆盖上的构造使用了 DCT、关于 Martin函数临界值的可和性条件，以及取决于流的谱隙矩。Vinnikov 和 Yuditskii [39] 在与齐次 Jacobi谱相关的特征群上将 Toda 层级线性化。定理 1 和定理 2 给出了关于在两个方向上均无界的狄拉克谱上的散焦非线性薛定谔层级的相应结果。我们的证明采用了不同的方法。我们在谱隙上使用局部托普利兹算子，并将每个流识别为跳跃矩阵中相位的平移。

我们简要回顾一些早期结果。Sodin 和 Yuditskii [36, 37] 构造了具有齐次谱的无反射 Sturm–Liouville 算子和 Jacobi 算子的等谱环面，并证明了空间几乎周期性；在连续情形下，他们假设总隙长有限。对于 KdV，Egorova [20]证明了一类极限周期初值的时间拟周期性，而 Craig [10] 建立了关于 Dirichlet 数据的迹公式及方程。Damanik 和 Goldstein [12]证明了具有丢番图频率的小解析准周期 KdV 初值的整体存在性与唯一性。Binder、Damanik、Goldstein 和 Luki´c [4] 在谱假设下证明了时间拟周期性。[11, 13, 14] 中的估计给出了它们在小解析准周期初值中的应用。对于 Toda，Binder、Damanik、Luki´c 和 VandenBoom [5] 在 Craig型条件下获得了空间和时间上的拟周期性。Leguil、You、Zhao 和 Zhou [26] 的间隙估计给出了其在亚临界解析单频 Schr¨odinger 初值中的应用。

关于具有不衰减初值的非线性薛定谔方程，早期的逆谱研究包括[6, 7]。Bessonov、Luki´c 和 Yuditskii [3] 研究了具有 DCT 的 Widom 域上无反射典则系统和 Dirac算子的空间几乎周期性。关于散焦修正 KdV 流，参见 Li 和 Luki´c [27]。Oh [30, 31]研究了几乎周期函数空间中的局部适定性，并证明了一类正则极限周期散焦非线性薛定谔方程初值的整体存在性。局部准周期解的研究见 [16, 33]。

若无进一步假设，空间上的 Bohr 几乎周期性在 KdV 流作用下可能丧失，Chapouto、Killip 和 Vi̇san[8] 的有界解便说明了这一点。Damanik、Li 和 Strungaru [15] 在满足绝对连续性、有限总隙长和 Parreau–Widom 条件的 Sodin–Yuditskii 假设下，得到了 Weyl 几乎周期性。

第 2 节利用格林积分构造频率。第 3 节求解有限维 Toeplitz 方程组，并证明极限过程中所用的迹估计。第 4 节中，我们证明可容许矩阵的唯一性，将结果推广到无限多个间隙的情形，并证明定理 1 和 2。

2 格林积分与频率

2.1 格林积分

本节始终假设 Ω 是狄利克雷正则的，且 $S_0 < \infty$。回顾格林积分

$$(\mathcal{K}_\Omega f)(z) = \frac{1}{\pi}\int_G g_\Omega(z,t) f(t)\,dt, \qquad z \in \Omega.$$

对于定义在 G 上的测度 μ，只要积分存在，我们使用相同的记号，并将 $f(t)$ 替换为 $d\mu(t)$。我们将用到格林函数的对称性和关于区域的单调性：

$$g_\Omega(z,w) = g_\Omega(w,z) \geq 0, \qquad \Omega_1 \subset \Omega_2 \implies g_{\Omega_1} \leq g_{\Omega_2}. \tag{5}$$

在全文中，只要较小区域的任一自变量位于该区域之外，就将其核延拓为零。如果 μ 是 G 上的非负拉东测度，且 $P = \mathcal{K}_\Omega \mu \not\equiv +\infty$，则黎斯分解给出

$$h \text{ harmonic in } \Omega, \quad 0 \leq h \leq P \quad \Longrightarrow \quad h \equiv 0. \tag{6}$$

对于 G 上的实函数 f，记

$$v_f(s) = \begin{cases} (\mathcal{K}_\Omega f)(s), & s \in G, \\ 0, & s \in E \end{cases} \tag{7}$$

只要积分存在，就有上述关系。令 $\mathcal{J}_N = \{j \in \mathcal{J}\colon\ j \leq N\}$、$G_N = \bigcup_{j\in\mathcal{J}_N} I_j^o$、$E_N = \mathbb{R}\setminus G_N$ 和 $\Omega_N = \mathbb{C}\setminus E_N$。记 $K_N = G_N$ 和 $\partial K_N = \{l_j, r_j\colon\ j \in \mathcal{J}_N\}$ 为其端点。按照（7）定义 $v_{f,\,N}$，其中用 Ω_N，G_N，E_N 替代 Ω G，E。

引理 1 对于每个实数 $f \in L^\infty(G)$，

$$\sup_{z\in\Omega} |(\mathcal{K}_\Omega f)(z)| \leq M\|f\|_{L^\infty(G)}, \qquad M = \frac{\pi S_0}{2}.$$

此外，$v_f \in C(I_j)$ 和 $v_f(l_j) = v_f(r_j) = 0$ 对每个 j 都成立。特别是，

$$0 \leq v_\omega \leq v_1 \leq M, \qquad v_{1,N} \uparrow v_1, \qquad v_{\omega,N} \uparrow v_\omega.$$

证明。选取包含 G_N 的 $I=(c-a,c+a)$，并令

$$u_I(z)=\Im\big(\sqrt{(z-c)^2-a^2}-(z-c)\big),\qquad z\in\mathbb{C}_+,$$

其中 $\sqrt{(z-c)^2-a^2}\sim z-c$ 在无穷远点处。将 u_I 关于实轴作反射延拓。它在 I 上的边界值为 $\sqrt{a^2-(s-c)^2},$，并且在 $\mathbb{R}\setminus I$ 上及无穷远点处为零。特别地，$0\le u_I\le a$。由于对于 $s\in I$,$-\Delta u_I=2\mathbf{1}_I\,ds\in\Omega_I=\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\setminus I)$，$\partial_y u_I(s+i0)=-1$，其中 ds 表示实轴上的长度测度。在 u_I的黎斯分解中，非负调和部分有上界 u_I，故根据最大值原理，它必为零。因此

$$0\le\mathcal{K}_{\Omega_N}1\le\mathcal{K}_{\Omega_I}1=u_I\le a.$$

令 $0\le f\le A$和 $V_N=\mathcal{K}_{\Omega_N}f$，使得 $0\le V_N\le B_N:=aA$。对于 $e\in E_N$和 $\delta>0$，设 $B=B(e,\ \delta)$，$D_N=B\cap\Omega_N$以及 $\Gamma_N=\partial B\cap\Omega_N$。局部格林表示中，记 $\omega^z_{D_N}$ 为调和测度，则有

$$g_{\Omega_N}(z,t)=g_{D_N}(z,t)+\int_{\Gamma_N}g_{\Omega_N}(\zeta,t)\,d\omega^z_{D_N}(\zeta),\qquad z\in D_N.$$

在 t 中积分，并利用 $g_{D_N}\le g_B$ 可得

$$V_N(z)\le\frac{A}{\pi}\int_{e-\delta}^{e+\delta}g_B(z,t)\,dt+B_N\omega^z_{D_N}(\Gamma_N)\le CA\delta+B_N\omega^z_{D_N}(\Gamma_N).\tag{8}$$

这里 $C=2(1+\log 2)/\pi$，因为 $g_B(z,t)\le\log(2\delta/|z-t|)$。$\Omega_N$的每个有限边界点都是正则的。因此，当 $z\to e$ 时，$\omega^z_{D_N}(\Gamma_N)\to 0$。令 (8) 中的 $\delta\downarrow 0$ 取值为 $V_N(z)$，则在 e 处有 $\to 0$。在内点 $s_0\in G_N$ 处，取 $\chi\in C_c^\infty(G_N)$，使其在 s_0 附近等于 1。在 s_0 周围的一个圆盘中，

$$V_N(z)=-\frac{1}{\pi}\int_{G_N}\chi(t)f(t)\log|z-t|\,dt+h(z)\tag{9}$$

其中 h 调和。对于有界 f，对数积分是连续的。这就证明了所断言的 $v_{f,N}$ 的连续性；对于带符号的 f，取正部和负部也同样成立。

假设 $G_N\neq\varnothing$，并写作 $v_N=v_{1,N}$。其最大值 $m_N>0$ 在点 $s_N\in G_N$ 处取得。有界调和函数的泊松公式 [1, 第 7] 章给出

$$(\mathcal{K}_{\Omega_N}f)(x+iy)=(P_y*v_{f,N})(x),\qquad P_y(x)=\frac{y}{\pi(x^2+y^2)},\quad y>0.\tag{10}$$

在 s_N 附近，$\mathcal{K}_{\Omega_N}1+|y|$ 关于 y 是调和且偶函数。因此 $-\partial_y\mathcal{K}_{\Omega_N}1(s_N+i0)=1$，并且

$$\begin{aligned}1&=\lim_{y\downarrow0}\frac{m_N-(\mathcal{K}_{\Omega_N}1)(s_N+iy)}{y}\\&=\lim_{y\downarrow0}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{m_N-v_N(t)}{(s_N-t)^2+y^2}\,dt\ge\frac{m_N}{\pi}\int_{E_N}\frac{dt}{(s_N-t)^2}\ge\frac{4m_N}{\pi|G_N|}.\end{aligned}$$

在长度为 $|G_N|$的集合的补集中，当被删去的集合是以 s_N 为中心、长度为该值的区间时，最后一个积分取得最小值。由（10）及对称性可得，

$$0\le\mathcal{K}_{\Omega_N}1(z)\le\frac{\pi|G_N|}{4}\le M.$$

由于 $\Omega_N \uparrow \Omega$，格林核递增至 g_Ω [32, 定理 5.2]。单调收敛给出所断言的两个极限以及 $|\mathcal{K}_\Omega f| \le \|f\|_\infty \mathcal{K}_\Omega 1 \le M\|f\|_\infty$。

最后，对于 $e \in E$，令 $D = B \cap \Omega$。我们可以在（8）中取 $B_N = AM$。退出概率的区域单调性给出 $\omega^z_{D_N}(\Gamma_N) \le \omega^z_D(\partial B \cap \Omega)$。当 $0 \le f \le A$ 时，在（8）中取极限可得

$$0 \le (\mathcal{K}_\Omega f)(z) \le CA\delta + AM\omega^z_D(\partial B \cap \Omega).$$

由于 e 是正则的，当 $z \to e$ 时，最后一项趋于零。令 $\delta \downarrow 0$ 可得端点值。局部分解（9）同样适用于 Ω，并证明了在每个开间隙中的连续性。 ∎

2.2 频率

我们使用希尔伯特变换和柯西变换 $\mathcal{M}$

$$Hv(s) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{pv}\int_{\mathbb{R}} \frac{v(t)}{s-t}\,dt, \qquad Cv(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{v(t)}{t-z}\,dt, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}.$$

对于 $v \in L^2(\mathbb{R})$，其边界值满足

$$(Cv)(s \pm i0) = -Hv(s) \pm iv(s) \qquad \text{for a.e. } s \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

记 $\mathcal{D}'(G)$ 为定义在 G 上的分布空间。

引理 2 对每个实数 $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$，

$$\|v_f\|_{L^p(\mathbb{R})} \le M\|f\|_{L^p(G)}, \qquad v_{f,N} \longrightarrow v_f \quad in\ L^p(\mathbb{R}), \quad p = 1, 2, \tag{12}$$

and

$$\partial_s H v_f = f \quad in\ \mathcal{D}'(G). \tag{13}$$

因此，如果 p 在每个 I^o_j 上局部绝对连续，并且 $p' = f$ 在那里成立，那么对于某个实常数 b_j，在 I^o_j 上几乎处处有 $p - Hv_f = b_j$。

证明。由对称性和引理 1，对任一实变量积分的 $g_\Omega(s,t)/\pi$（该变量为 v_1）被 M所界。由托内利定理和柯西–施瓦茨不等式可得

$$\|v_f\|_1 \le M\|f\|_1, \qquad \|v_f\|_2^2 \le M\int_G |f(t)|^2 v_1(t)\,dt \le M^2\|f\|_2^2.$$

由扩展核的单调收敛，对于几乎处处的 $s \in G$，

$$|v_f(s) - v_{f,N}(s)| \le \frac{1}{\pi}\int_G (g_\Omega - g_{\Omega_N})(s,t)|f(t)|\,dt \longrightarrow 0.$$

右端由 $v_{|f|} \in L^1 \cap L^2$控制，因此由控制收敛可证明（12）。

对于有界的 f，引理 1和泊松表示给出

$$(\mathcal{K}_\Omega f)(x+iy) = (P_y * v_f)(x), \qquad y > 0. \tag{14}$$

对于一般的 f，截取其正部和负部并应用单调收敛定理。由于 $\int_{\mathbb{R}}(P_y * v_{|f|})(x)\,dx = \|v_{|f|}\|_1$，势是局部面积可积的。于是，富比尼定理给出 $-\Delta\mathcal{K}_\Omega f = 2f\,ds$ in Ω。

固定 $\varphi \in C_c^\infty(G)$，并令 $\chi \in C_c^\infty(G)$ 在 $\operatorname{supp}\varphi$ 附近取值为 1。局部分解（9）在 $\operatorname{supp}\varphi$ 附近成立，其中 h 调和且在 y 中为偶函数。在那里

$$-\partial_y(\mathcal{K}_\Omega f)(x+iy) = (P_y * (\chi f))(x) - \partial_y h(x+iy).$$

由于 $P_y * (\chi f) \to \chi f$ 属于 L^1，且 $\partial_y h(x+iy) \to 0$ 在 $\operatorname{supp}\varphi$ 上一致成立，

$$\lim_{y\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} (-\partial_y \mathcal{K}_\Omega f)(x+iy)\varphi(x)\,dx = \int_G f(s)\varphi(s)\,ds. \tag{15}$$

H 和 P_{y*} 的傅里叶乘子分别为 $-i\operatorname{sgn}\xi$ 和 $e^{-y|\xi|}$。因此

$$-\partial_y(P_y * v_f) = \partial_x(P_y * Hv_f), \qquad P_y * Hv_f \to Hv_f \quad \text{in } L^2.$$

结合 (14) 和 (15)，我们得到 $\int_G f\varphi = -\int_{\mathbb{R}} (Hv_f)\varphi'$，这就是 (13)。 ∎

引理 3 设 $S_m < \infty$, $m \geq 2$。对于 $1 \leq r \leq m$，令 $p_r(s) = s^r$, $f_r = p_r'$, $v_r = v_{f_r}$ 以及 $v_{r,N} = v_{f_r,N}$。则 $v_{r,N} \to v_r$ 属于 $L^1(\mathbb{R})$。置

$$\Phi_r(z) = p_r(z) + \frac{1}{\pi}\int_G \frac{v_r(s)}{s-z}\,ds, \qquad \Phi_{r,N}(z) = p_r(z) + \frac{1}{\pi}\int_{G_N} \frac{v_{r,N}(s)}{s-z}\,ds.$$

存在实数 $\beta_j^{(r)}$ 使得

$$\Phi_r(s+i0) + \Phi_r(s-i0) = \beta_j^{(r)}, \qquad s \in I_j^o. \tag{16}$$

同一关系定义了 $\beta_{j\,N}^{(r)}$，对于 $j \in \mathcal{J}_N$，其中 $\beta_{j,N}^{(r)} = 0$ 对于 $j \notin \mathcal{J}_N$。记作 $\beta^{(1)} = \alpha$, $\beta^{(2)} = \beta$，截断情形同理。对于每个固定的 j, $\beta_{j\,,N}^{(r)} \to \beta_j^{(r)}$。此外，$\Phi_{r,N} \to \Phi_r$ 在 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 上局部一致成立，且频率满足 (3)。

证明。由于 $|s| \leq (1+S_0)\lambda_j$ 在 I_j 上，

$$\|f_r\|_{L^1(G)} \leq 2r(1+S_0)^{r-1}S_{r-1}.$$

引理 2 的 L^1 估计和证明中的控制收敛只使用了 $f_r \in L^1(G)$，因此 $\|v_{r,\,N} - v_r\|_1 \to 0$。在每个 G_N 上，f_r 有界，而 (13) 给出 $\partial_s(p_r - Hv_{r,\,N}) = 0$ 于 $\mathcal{D}'(G_N)$。对于 $\varphi \in C_c^\infty(G)$,

$$\int_{\mathbb{R}} (Hv_{r,N})\varphi = -\int_{\mathbb{R}} v_{r,N} H\varphi \longrightarrow -\int_{\mathbb{R}} v_r H\varphi = \langle Hv_r, \varphi\rangle,$$

因为 $H\varphi$ 有界。因此 $\partial_s(p_r - Hv_r) = 0$ 于 $\mathcal{D}'(G)$。泊松表示式 (14) 和 $-\Delta\mathcal{K}_\Omega f_r = 2f_r\,ds$ 通过在 L^1 中截断，按照引理 2 的方式得到。在间隙的每个内点附近，

$$(\mathcal{K}_\Omega f_r)(x+iy) + \operatorname{sgn}(y)\Im p_r(x+iy)$$

是调和的，因为第二项的分布拉普拉斯算子为 $2p_r'(x)\,ds$。因此，v_r 在那里是光滑的。在该点附近截断柯西积分可得 $\Phi_r(s \pm$

$i0) = p_r(s) - Hv_r(s) \pm iv_r(s)$ 逐点成立。同样的论证适用于 $\Phi_{r,N}$，从而证明了（16）及其有限形式。

固定 j 并选择满足 $\int \varphi_j = 1$ 的 $\varphi_j \in C_c^\infty(I_j^o)$。对于 $N \geq j$,

$$|\beta_{j,N}^{(r)} - \beta_j^{(r)}| = 2\left|\int_{\mathbb{R}} (v_{r,N} - v_r) H\varphi_j\right| \leq 2\|v_{r,N} - v_r\|_1 \|H\varphi_j\|_\infty \longrightarrow 0.$$

对于紧 $K \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$\sup_{z\in K} |\Phi_{r,N}(z) - \Phi_r(z)| \leq \frac{\|v_{r,N} - v_r\|_1}{\pi \operatorname{dist}(K, \mathbb{R})} \longrightarrow 0.$$

固定 N 并令 $D_R = \Omega_N \cap B(0,\ R)$，其中 $G_N \Subset (-R,\ R)$。对于 $t \in G_N$，格林表示给出

$$g_{D_R}(s,t) = \int_{\partial D_R} \log|s-\zeta|\, d\omega_{D_R}^t(\zeta) - \log|s-t|.$$

由于 $\log|s-\cdot|$ 在其极点之外具有调和性，并且在正则边界处具有连续性，该恒等式可延拓至 $g_{D_R}(\cdot,\ t)$ 在实轴上的零延拓。对 s 取希尔伯特变换可得，几乎处处成立,

$$H\left(\frac{g_{D_R}(\cdot,t)}{\pi}\right)(s) = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(s-t) - \frac{1}{\pi}\int_{\partial D_R} \arctan\frac{s-\Re\zeta}{|\Im\zeta|}\, d\omega_{D_R}^t(\zeta).$$

这里，关于 $s = \Re\zeta$ 的 $\log|s-\zeta|$ 的奇共轭为 $-\arctan((s-\Re\zeta)/|\Im\zeta|)$。在 $\Im\zeta = 0$ 处，反正切解释为 $(\pi/2)\operatorname{sgn}(s-\zeta)$。由于两个对数项具有相同的质量，该公式首先在分布意义下成立。特别地,

$$\left|H\left(\frac{g_{D_R}(\cdot,t)}{\pi}\right)(s)\right| \leq 1. \tag{17}$$

对于 $f = f_r$，令 $v_{f,\ R}(s) = \pi^{-1}\int_{G_N} g_{D_R}(s,\ t)f(t)\ dt$。将（17）乘以 $|f(t)|\,dt$ 并积分，得到 $\|Hv_{f,\ R}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1(G_N)}$。由于 $R \to \infty$，由区域单调性以及 $v_{|f|,\ N}$ 给出的界可得 $v_{f,\ R} \to v_{f,\ N}$ 在 L^2 中。于是可以选取一个几乎处处收敛的子序列，取极限得到

$$\|Hv_{f,N}\|_\infty \leq \int_{G_N} |f(t)|\, dt. \tag{18}$$

在 $s = c_j$ 处计算常数间隙平均值，得到

$$|\beta_{j,N}^{(r)} - 2c_j^r| \leq 2\int_{G_N} |f_r(t)|\, dt, \qquad j \in \mathcal{J}_N. \tag{19}$$

令 $N \to \infty$，我们得到

$$|\beta_j^{(r)}| \leq 2|c_j|^r + 4r(1+S_0)^{r-1}S_{r-1} \leq C_r\lambda_j^r. \tag{20}$$

■

沿虚轴,

$$|\Phi_r(iy) - p_r(iy)| \leq \frac{\|v_r\|_1}{\pi|y|}, \qquad y \neq 0.$$

对于固定的 N、 $v_{r,\,N}$ 具有紧支撑集，因此

$$\Phi_{r,N}(z) = p_r(z) - \frac{1}{\pi z}\int_{\mathbb{R}} v_{r,N}(s)\,ds + O(z^{-2}), \qquad |z| \to \infty.$$

此外，由引理 1 和（18）可得

$$\|v_{r,N}\|_\infty \le M\|f_r\|_{L^\infty(G_N)}, \qquad \|Hv_{r,N}\|_\infty \le \|f_r\|_{L^1(G_N)}.$$

由于 $\Phi_{r,\,N}(x+iy) - p_r(x+iy) = -(P_y * Hv_{r,\,N})(x) + i(P_y * v_{r,\,N})(x)$ 对于 $y > 0$ 成立，该差值在 $\mathbb{C}_+$ 上有界，根据对称性在 $\mathbb{C}_-$ 上也有界。特别地，对于每个 $e \in \partial K_N$，

$$\Phi_{r,N}(z) = O(1) \qquad (z \to e). \tag{21}$$

3 有限截断及相关结果

在全文中，对于复函数 f 和 $s \in \mathbb{R}$，我们记

$$f_+(s) = f(s+i0) = \lim_{y\downarrow 0} f(s+iy), \qquad f_-(s) = f(s-i0) = \lim_{y\downarrow 0} f(s-iy).$$

3.1 初始 Weyl 函数

固定 $q_0 \in \mathcal{R}(E)$ 并令

$$m(z) = \begin{cases} m_-^{q_0}(z), & z \in \mathbb{C}_+, \\ m_+^{q_0}(z), & z \in \mathbb{C}_-, \end{cases} \qquad m^\#(z) = \overline{m(\overline{z})}. \tag{22}$$

在此归一化下，Weyl函数满足 $|m(z)| < 1$，且 $m(iy) \to 0$，如$y \to \pm\infty$ 第 [9, 节至第 3] 节所示。无反射恒等式将这些有界全纯函数沿 E°中的每个开区间拼接起来。事实上，它们的边界值几乎处处相等，因此应用于实轴两侧的莫雷拉定理给出了全纯延拓。随后，最大值原理在 $\mathbb{C}\setminus G$ 上得到 $|m| < 1$。

Set

$$p = mm^\#, \qquad \Delta = 1-p, \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m^\# & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{M}_{q_0} = \Delta^{-1/2} M.$$

由于 $|p| < 1$，我们有 $\operatorname{Re}\Delta > 0$，并取实部为正的平方根。因此

$$\det \mathcal{M}_{q_0} = 1, \qquad \mathcal{M}_{q_0}(iy) \to I_2 \quad (y \to \pm\infty), \qquad \frac{(\mathcal{M}_{q_0})_{12}}{(\mathcal{M}_{q_0})_{11}} = m.$$

在一个全线间隙 I_j° 中，半直线韦尔函数是亚纯的。因此，对于任一半直线实现，每个 $\lambda \in I_j^\circ$ 要么是预解点，要么是孤立特征值。在这两种情况下， $D_q f = \lambda f$ 在该端都有一个非零的平方可积解。由于 $f^* J f = 0$，我们可以将两个 Weyl 解归一化为

$$f_L(0,\lambda) = (1, e^{iu_j(\lambda)})^T, \qquad f_R(0,\lambda) = (1, e^{iv_j(\lambda)})^T,$$

其中 $f_L \in L^2(\mathbb{R}_-;\mathbb{C}^2)$ 和 $f_R \in L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^2)$。因此我们有

$$m(\lambda + i0) = e^{iu_j(\lambda)}, \qquad m(\lambda - i0) = e^{iv_j(\lambda)}, \quad \text{on } I_j^\circ. \tag{23}$$

拉格朗日恒等式

$$\partial_x(f^* J \partial_\lambda f) = -i\,\|f\|^2$$

给出

$$u_j'(\lambda) = \int_{-\infty}^{0} \|f_L(x,\lambda)\|^2\, dx > 0, \qquad v_j'(\lambda) = -\int_{0}^{\infty} \|f_R(x,\lambda)\|^2\, dx < 0.$$

在谱隙中，两个韦尔方向不可能重合。因此，我们可以选择它们的连续辐角，使得

$$0 < u_j - v_j < 2\pi \quad \text{on } I_j^\circ.$$

单调函数 u_j 和 v_j 在两个端点处均有有限的单侧极限，因为 $u_j - v_j$ 的总增量至多为 2π。根据这些极限将它们延拓至 I_j。对于 $\phi_j = (u_j + v_j)/2$，我们有

$$\operatorname{Var}_{I_j} \phi_j \le \frac{1}{2}\int_{I_j^\circ} (u_j' - v_j')ds \le \pi. \tag{24}$$

记 $d = u_j - v_j \in (0,\ 2\pi)$，得到

$$\Delta_+ = 1 - e^{id}, \qquad \Delta_- = \overline{\Delta_+}, \qquad \arg\Delta_+ = \frac{d}{2} - \frac{\pi}{2},$$

and

$$M_+ = \begin{pmatrix} 0 & e^{iu_j} \\ e^{-iv_j} & 0 \end{pmatrix} M_-.$$

因此

$$(\mathcal{M}_{q_0})_+ = iQ_{\phi_j}(\mathcal{M}_{q_0})_- \quad \text{on } I_j^\circ, \qquad Q_\phi = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi} \\ e^{-i\phi} & 0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

对于 $h \in C([0,1])$，定义伯恩斯坦多项式

$$B_n h(t) = \sum_{k=0}^{n} h(k/n)\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

它满足 $B_n h(0) = h(0)$ 以及 $B_n h(1) = h(1)$，并且

$$(B_n h)'(t) = n\sum_{k=0}^{n-1}\left(h\left(\frac{k+1}{n}\right) - h\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-1-k}.$$

因此，B_n 保持单调函数的单调性和全变差。

Let

$$U_j(t) = u_j(l_j + 2a_j t), \qquad V_j(t) = v_j(l_j + 2a_j t), \qquad t_j(z) = \frac{z - l_j}{2a_j},$$

and

$$u_{j,N}(z) = B_N U_j(t_j(z)), \qquad v_{j,N}(z) = B_N V_j(t_j(z)),$$
$$\phi_{j,N}(z) = \frac{u_{j,N}(z) + v_{j,N}(z)}{2}.$$

由单调性以及端点值的保持性，

$$\mathrm{Var}_{I_j}\,\phi_{j,N} \le \frac{1}{2}\big(\mathrm{Var}_{I_j}\,u_j + \mathrm{Var}_{I_j}\,v_j\big) \le \pi.$$

由经典的伯恩斯坦逼近定理 [38, 定理 1], 可得

$$\phi_{j,N} \longrightarrow \phi_j \quad \text{in } C(I_j).$$

在 I_j° 的一个紧子区间上，选取一个在该区间邻域内等于 1 的光滑截断函数。导数逼近定理 [38, 定理 2] 适用于这些截断函数，被舍弃的伯恩斯坦权重及其任意固定阶数的导数在该子区间上均呈指数级微小。因此

$$\phi_{j,N} \longrightarrow \phi_j \quad \text{in } C^\infty_{\mathrm{loc}}(I_j^\circ). \tag{26}$$

3.2 局部托普利茨算子

对于 $j \in \mathcal{J}_N$，令 $s_j(z) = \sqrt{(z-l_j)(z-r_j)}$，其中 $s_j(z)$ 在无穷远点处 $\sim z - c_j$，并记

$$\langle f\rangle_j := \frac{1}{\pi}\int_{I_j} \frac{f(s)}{\rho_j(s)}ds, \qquad \rho_j(s) = \sqrt{a_j^2 - (s-c_j)^2}.$$

Set

$$\vartheta_{j,N} = \langle \phi_{j,N}\rangle_j\,, \qquad \psi_{j,N} = \phi_{j,N} - \vartheta_{j,N}, \qquad \langle \psi_{j,N}\rangle_j = 0,$$

and

$$\xi_{j,N}(z) = \frac{s_j(z)}{2}\left\langle \frac{\psi_{j,N}(s)}{z-s}\right\rangle_j.$$

Then

$$\xi_{j,N,+} + \xi_{j,N,-} = \psi_{j,N}, \qquad \xi_{j,N}(z) = O_j(z^{-1}) \quad (z\to\infty).$$

由于 $\langle 1\rangle_j = 1$ 且 $\big\langle (z-s)^{-1}\big\rangle_j = s_j(z)^{-1}$，在 I_j 的一个邻域内，

$$\xi_{j,N}(z) = \frac{\psi_{j,N}(z)}{2} - \frac{s_j(z)}{2\pi}\int_{I_j}\frac{\psi_{j,N}(z)-\psi_{j,N}(\lambda)}{z-\lambda}\frac{d\lambda}{\rho_j(\lambda)}.$$

因此，对于 $e \in \partial I_j$,

$$\xi_{j,N}(e) = \frac{\psi_{j,N}(e)}{2}, \qquad \xi_{j,N}(z) - \xi_{j,N}(e) = O(|z-e|^{1/2}).$$

Set

$$\chi_j(z) = \left(\frac{z-c_j-a_j}{z-c_j+a_j}\right)^{1/4}, \qquad \chi_j(z)\to 1 \quad (z\to\infty),$$

and

$$\widehat{H}_j(\phi, z) = \frac{\chi_j + \chi_j^{-1}}{2} I_2 + \frac{\chi_j - \chi_j^{-1}}{2} Q_\phi.$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$然后 $\det H_j = 1$ 和 $H_{j,\,+} = iQ_\phi H_{j,\,-}$。

定义

$$E_{j,N}(z) = e^{i\xi_{j,N}(z)J}, \qquad H_{j,N}(\theta_j, z) = E_{j,N}(z)\widehat{H}_j(\vartheta_{j,N}+\theta_j, z).$$

利用 $e^{iwJ}Q_\phi = Q_\phi e^{-iwJ}$，我们得到

$$\det H_{j,N} = 1, \qquad (H_{j,N})_+ = iQ_{\phi_{j,N}+\theta_j}(H_{j,N})_-, \qquad H_{j,N}(z) = I_2 + O_j(z^{-1}).$$

此外，$H_{j,\,N}$，$H_{j}^{-1}{}_{,\,N} = O(|z-e|^{-1/4})$。

对于 $j \in \mathcal{J}_N$，选择 $d_j > a_j$，使得圆盘 $D_j = \{z : |z-c_j| < d_j\}$ 的闭包两两不相交。将 $\Gamma_j = \partial D_j$ 取逆时针方向。令 $\mathcal{A}(D_j)$ 表示在 D_j 上连续且在 D_j 内全纯的函数所构成的巴拿赫空间，并赋予上确界范数。令 P_j^+ 和 P_j^- 表示 Γ_j 上的内、外柯西投影，约定为

$$P_j^+ v(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{v(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in D_j,$$
$$P_j^- v(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{v(\zeta)}{z - \zeta}\, d\zeta, \quad z \notin \overline{D}_j.$$

它们的边界值在有定义时满足 $P_j^+ + P_j^- = I$。定义

$$T_j(H_{j,N})f = P_j^+(H_{j,N}f), \qquad \omega_{j,N} = I_2 - H_{j,N}.$$

为说明它在 $\mathcal{A}(D_j)$ 上有界，令 $\Gamma_j' = \{|z-c_j| = (a_j+d_j)/2\}$。通过轮廓变形可得

$$T_j(H_{j,N})f(z) = f(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j'} (H_{j,N}(\zeta) - I_2)\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\, d\zeta.$$

该商在 $z = \zeta$ 处有一个可去奇点。对于 $z \in \Gamma_j$，

$$\|T_j(H_{j,N})f(z)\| \le C\,\|f\|_{\infty, D_j}.$$

最大值原理给出了在整个 D_j 上相同的界。该论证同样适用于 $H_{j\,N}^{-1}{}_{,}$。

对于每个 $\theta \in \Theta$，我们寻求以下方程的解

$$T_i(H_{i,N})f_{i,N} = I_2 - \sum_{j\in\mathcal{J}_N, j\neq i} P_j^-(\omega_{j,N}f_{j,N}), \quad i \in \mathcal{J}_N, \tag{27}$$

在 $X_N := \prod_{j\in\mathcal{J}_N} \mathcal{A}(D_j;\mathbb{C}^{2\times 2})$ 中，其范数为

$$\|f\|_{X_N} = \max_{j\in\mathcal{J}_N}\sup_{z\in\overline{D}_j}\|f_j(z)\|.$$

由于 $H_{i,\,N}$，$H_{i\,N}^{-1}{}_{,}$ 在 I_i 外全纯，并在无穷远点趋于 I_2，外部因子给出托普利兹恒等式

$$T_i(H_{i,N})^{-1} = T_i(H_{i,N}^{-1}), \qquad T_i(H_{i,N}^{-1})I_2 = I_2.$$

对于 $j \neq i$，柯西公式还给出

$$T_i(H_{i,N}^{-1})P_j^-(\omega_{j,N}f_{j,N}) = P_j^-(H_{i,N}^{-1}\omega_{j,N}f_{j,N}) \quad \text{on } D_i.$$

因此，(27) 等价于 $f = \boldsymbol{I}_N + \mathcal{K}_{N,\,\theta}f$，其中

$$(\mathcal{K}_{N,\theta}f)_i(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j\in\mathcal{J}_N, j\neq i}\int_{\Gamma_j} \frac{H_{i,N}(\theta_i,\zeta)^{-1}\omega_{j,N}(\theta_j,\zeta)f_j(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{28}$$

对于 $z \in \mathbb{C}\setminus\bigcup_{j\neq i} D_j$ 和 $i \in \mathcal{J}_N$。

引理 4 对于每个 N 和 $\theta \in \Theta$, $I - \mathcal{K}_{N,\theta}$ 在 X_N 上有界可逆。特别地,

$$f_{N,\theta} = (I - \mathcal{K}_{N,\theta})^{-1} \boldsymbol{I}_N, \qquad \boldsymbol{I}_N = (I_2)_{j \in \mathcal{J}_N}$$

是 X_N 中 (27) 的唯一解。

证明。固定 N, θ。证明中的所有指标均属于 $\mathcal{J}_N$，并且我们省略局部因子和相位上的下标 N。

由于这些 D_j 彼此分离，(28) 的右端在 D_i 的一个邻域 U_i 内对每个 i都是全纯的，并且

$$\sup_{z \in U_i} \|(\mathcal{K}_\theta f)_i(z)\| \le C_\theta \|f\|_{X_N}.$$

柯西估计和 Arzel`à–Ascoli 定理推出了 $\mathcal{K}_\theta$的紧致性。因此，根据弗雷德霍姆择一定理，只需证明 $\ker(I - \mathcal{K}_\theta) = \{0\}$。

设 $f \in \ker(I - \mathcal{K}_\theta)$。则

$$T_i(H_i) f_i = -\sum_{j \neq i} P_j^-(\omega_j f_j), \tag{29}$$

并令

$$Z(z) = \begin{cases} -\sum_j P_j^-(\omega_j f_j)(z), & z \notin \bigcup_j \overline{D}_j, \\ H_i(z) f_i(z), & z \in D_i \setminus I_i. \end{cases}$$

根据（29），$P_j^+ + P_j^- = I$、Z在所有 Γ_j上全纯延拓，在$\mathbb{C} \setminus \bigcup_j I_j$上全纯，并且满足

$$Z_+ = V Z_- \quad a.e.\ \text{on } \mathbb{R}, \qquad V(s) = \begin{cases} iQ_{\phi_j(s)+\theta_j}, & s \in I_j^\circ, \\ I_2, & s \in E_N. \end{cases}$$

此外,

$$Z(z) = O(z^{-1}) \quad (z \to \infty), \qquad Z(z) = O(|z - e|^{-1/4}) \quad (z \to e \in \bigcup_j \partial I_j).$$

函数 $B(z) = Z(\bar{z})^* Z(z)$ 在 $\mathbb{C}_+$中全纯。对于较大的 R 和较小的 $\tau > 0$, 在以下区域上应用柯西定理

$$U_{\tau,R} = \{z : \Im z > 0, |z| < R, |z - e| > \tau \text{ for every } e \in \partial K_N\}.$$

由于 $B(z)$ 在每个端点处 $= O(|z - e|^{-1/2})$，且 $B(z)$ 在无穷远点处 $= O(z^{-2})$，因此，小半圆和大半圆上的积分分别为 $O(\sqrt{\tau})$ 和$O(R^{-1})$。令 $\tau \downarrow 0$ 和 $R \to \overline{\infty}$，可得

$$\int_{\mathbb{R}} Z_-^* Z_+ ds = 0.$$

取厄米部分并利用 $V + V^* = 2\mathbf{1}_{E_N} I_2$，得到

$$\int_{E_N} Z_-^* Z_- ds = \int_{\mathbb{R}} Z_-^* \frac{V + V^*}{2} Z_- ds = 0.$$

因此，Z在 E_N上几乎处处为零。由于它在 E_N°上全纯，恒等定理给出 $Z \equiv 0$ 在 $\mathbb{C} \setminus K_N$上成立。每个 H_i 的可逆性给出$f = 0$。

■

3.3 重构与非线性薛定谔层级

将方程 (27) 的唯一解记为$f_{N,\,\theta}=(f_{j,\,N,\,\theta})_{j\in\mathcal{J}_N}$。定义

$$W_N(\theta,z)=\begin{cases}H_{i,N}(\theta_i,z)f_{i,N,\theta}(z), & z\in D_i\setminus I_i,\\ I_2-\displaystyle\sum_j P_j^-(\omega_{j,N}f_{j,N,\theta})(z), & z\notin\bigcup_j \overline{D}_j.\end{cases}$$

于是，W_N 在 $\mathbb{C}\setminus\bigcup_{j\in\mathcal{J}_N} I_j$ 上是全纯的，并且

$$W_{N,+}(\theta,\lambda)=iQ_{\phi_{j,N}(\lambda)+\theta_j}W_{N,-}(\theta,\lambda)\quad(\lambda\in I_j^\circ). \tag{30}$$

由于 $\det(iQ_\phi)=1$，$\det W_N$ 在 I_j° 上没有跳跃，在每个端点处是 $O(|z-e|^{-1/2})$，并且在无穷远点趋于 1。其端点奇点都是可去的，因此由 Liouville 定理和伴随矩阵公式可得

$$\begin{gathered}\det W_N\equiv 1,\qquad W_N(\theta,z)=I_2+\frac{A_N(\theta)}{z}+O(z^{-2}),\\ W_N,W_N^{-1}=O(|z-e|^{-1/4})\quad(e\in\partial K_N).\end{gathered} \tag{31}$$

展开外部柯西积分可得 A_N。令

$$A_N(\theta)=-\frac{1}{2\pi i}\sum_j\int_{\Gamma_j}\omega_{j,N}(\zeta)f_{j,N,\theta}(\zeta)d\zeta,\qquad F_N(\theta)=2(A_N(\theta))_{21}. \tag{32}$$

在 $\mathbb{C}\setminus G_N$ 上全纯且可从两个半平面连续延拓到每个开间隙的矩阵中，(30) 和 (31) 唯一确定了 W_N。事实上，对于任意其他此类解 $\widetilde{W}_N$，商 $W_N^{-1}\widetilde{W}_N$ 在 I_j° 上没有跳跃，并且在端点处具有 $O(|z-e|^{-1/2})$ 的增长。它是整函数，并在无穷远点趋于 I_2。对 $Q_0W_N(\theta,\ \bar{z})$ 应用唯一性可得

$$W_N(\theta,z)=Q_0\overline{W_N(\theta,\bar{z})}Q_0,\qquad (A_N)_{12}=\overline{(A_N)_{21}},\quad (A_N)_{22}=\overline{(A_N)_{11}}. \tag{33}$$

映射 $\theta\mapsto\mathcal{K}_{N,\,\theta}$ 在算子范数下是连续的。由求逆的连续性以及有限环面的紧致性，

$$\sup_{\theta\in\mathbb{T}^{\mathcal{J}_N}}\left\|(I-\mathcal{K}_{N,\theta})^{-1}\right\|_{X_N\to X_N}<\infty. \tag{34}$$

备注 1 (28) 中的因子光滑地依赖于保留相位。恒等式

$$\partial_\theta(I-\mathcal{K})^{-1}=(I-\mathcal{K})^{-1}(\partial_\theta\mathcal{K})(I-\mathcal{K})^{-1}$$

表明，$f_{N,\,\theta}$、$A_N(\theta)$ 和 $F_N(\theta)$ 是 $(\theta_j)_{j\in\mathcal{J}_N}$ 的光滑函数，并且在每个坐标上都是 2π-周期的。

引理5 对于 $\mathbf{t}=(t_2,\dots,t_m)$，令

$$h_N=x\alpha_N+\sum_{r=2}^m t_r\beta_N^{(r)},\qquad q_{N,\theta}(\mathbf{t},x)=F_N(\theta+h_N).$$

那么 $\partial_{t_r}q_{N,\,\theta}=\mathcal{X}_r\,(q_{N,\,\theta})$ 对于 $2\le r\le m$。特别地，

$$i\partial_{t_2}q=-\frac{1}{2}\partial_x^2q+|q|^2q.$$

证明。 记为 $W = W_N(\theta + h_N,\ z)$，并设

$$\Phi = x\Phi_{1,N}(z) + \sum_{r=2}^{m} t_r \Phi_{r,N}(z), \qquad \Psi = e^{-i\Phi J} W.$$

将 N 限制在下面的频率和相位上。在 I_j°上，(16)和(30)给出$\Phi_+ + \Phi_- = h_j$ 和

$$\Psi_+ = e^{-i\Phi_+ J} e^{ih_j J} i Q_{\phi_j+\theta_j} W_- = e^{i\Phi_- J} i Q_{\phi_j+\theta_j} W_- = i Q_{\phi_j+\theta_j} \Psi_-. \tag{35}$$

因此， Ψ 的跳跃与 x，$\mathbf{t}$无关。令 $R = W^{-1} J W$并定义

$$\begin{aligned} U &= \Psi^{-1}\partial_x \Psi = W^{-1}\partial_x W - i\Phi_1 R, \\ V_r &= \Psi^{-1}\partial_{t_r}\Psi = W^{-1}\partial_{t_r} W - i\Phi_r R, \qquad 2 \le r \le m. \end{aligned} \tag{36}$$

由(35)， U 和 V_r 可延拓穿过开隙 I_j°。在 D_j中，因式分解 $W = H_j f_j$ 以及对相位的光滑依赖给出 W_x， $W_{t_r} = O(|z-e|^{-1/4})$，这与 W， W^{-1}的情形相同。由于每个 Φ_r 在端点处都有界，所以 U， $V_r = O(|z-e|^{-1/2})$在这些端点处也有界。因此， U 和 V_r 都是整函数。

写成 $W = I_2 + A/z + B/z^2 + O(z^{-3})$和 $R = \sum_{n\ge 0} R_n z^{-n}$， $R_0 = J$。由于 $\Phi_r = z^r + O(z^{-1})$，比较(36)中的多项式部分可得

$$\begin{aligned} U &= -izJ + P, \qquad P = -i[J, A] = \begin{pmatrix} 0 & -i\bar{q} \\ iq & 0 \end{pmatrix}, \\ V_r &= -i(z^r R)_{\ge 0} = -i\sum_{n=0}^{r} z^{r-n} R_n. \end{aligned} \tag{37}$$

由 $R_x = [R, U]$ 和 $R^2 = I_2$ 可得，对于 $n \ge 0$,

$$i[J, R_{n+1}] = (R_n)_x - [R_n, P], \qquad J R_{n+1} + R_{n+1} J = -\sum_{a=1}^{n} R_a R_{n+1-a}.$$

第一个恒等式确定了 R_{n+1} 的非对角部分，第二个恒等式确定了其对角部分。因此，这些就是规范化层级系数，而 R_{r+1} 是关于 q， $\bar{q}$ 的阶数至多为 r 的微分多项式。$\partial_{t_r} U - \partial_x V_r + [V_r, U] = 0$ 的常数项给出

$$P_{t_r} = -i\big((R_r)_x - [R_r, P]\big) = [J, R_{r+1}], \qquad \partial_{t_r} q = \mathcal{X}_r(q).$$

对于 $r = 2$， (37) 给出 $V_2 = zU - iR_2$。利用 $R_1 = [J, A]$、 $R_2 = [J, B] - A[J, A]$ 以及 $W_x = WU + i\Phi_1 JW$ 中 z^{-1} 的系数，我们得到

$$-iR_2 = -i[J, B] - AP = -A_x + i\kappa_1 J, \qquad \Phi_1 = z + \kappa_1/z + O(z^{-2}).$$

AP 的对角元为 $i|q|^2/2$ 和 $-i|q|^2/2$。$-iR_2$ 的非对角元由 $A_{21} = q/2$ 和 $A_{12} = \bar{q}/2$ 确定。因此

$$V_2 = zU + \begin{pmatrix} -i|q|^2/2 & -\partial_x \bar{q}/2 \\ -\partial_x q/2 & i|q|^2/2 \end{pmatrix}.$$

零曲率方程的 (2,1) 项为

$$iq_{t_2} - \big(izq_x - \tfrac{1}{2} q_{xx}\big) + \big(izq_x - |q|^2 q\big) = 0,$$

这就是所述的非线性薛定谔方程。 ■

固定 N, θ，并记 $W_{N,\theta}(x,z) = W_N(\theta + x\alpha_N, z)$ 和 $q_{N,\theta}(x) = F_N(\theta + x\alpha_N)$。在 $\mathbf{t} = 0$,

$$\partial_x \Psi_{N,\theta}(x,z) = \Psi_{N,\theta}(x,z) U_{N,\theta}(x,z), \qquad U_{N,\theta}^T = \begin{pmatrix} -iz & iq \\ -i\overline{q} & iz \end{pmatrix}.$$

因此，如果

$$Y_{N,\theta}(x,z) = (\boldsymbol{\psi}_{L,N,\theta}(x,z), \boldsymbol{\psi}_{R,N,\theta}(x,z)) = \Psi_{N,\theta}(x,z)^T,$$

那么其列向量满足 $D_{q_{N,\theta}} \boldsymbol{\psi} = z\boldsymbol{\psi}$ 并且可表示为

$$\boldsymbol{\psi}_{L,N,\theta}(x,z) = e^{-ix\Phi_{1,N}(z)} \begin{pmatrix} W_{N,\theta,11}(x,z) \\ W_{N,\theta,12}(x,z) \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{\psi}_{R,N,\theta}(x,z) = e^{ix\Phi_{1,N}(z)} \begin{pmatrix} W_{N,\theta,21}(x,z) \\ W_{N,\theta,22}(x,z) \end{pmatrix}.$$

对于每个 $z \in \mathbb{C}_+$，有限环面的紧致性给出

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\|W_{N,\theta}(x,z)\| + \left\|W_{N,\theta}(x,z)^{-1}\right\| \right) < \infty.$$

因此,

$$\left\|\boldsymbol{\psi}_{L,N,\theta}(x,z)\right\| \le Ce^{\gamma x} \quad (x \le 0), \qquad \left\|\boldsymbol{\psi}_{R,N,\theta}(x,z)\right\| \le Ce^{-\gamma x} \quad (x \ge 0),$$

其中 $\gamma = \Im \Phi_{1,N}(z) = \Im z + (\mathcal{K}_{\Omega_N} 1)(z) > 0$。因此,

$$\boldsymbol{\psi}_{L,N,\theta} \in L^2(\mathbb{R}_-), \qquad \boldsymbol{\psi}_{R,N,\theta} \in L^2(\mathbb{R}_+).$$

因此

$$m_-^{q_{N,\theta}}(z) = \frac{W_{N,\theta,12}(0,z)}{W_{N,\theta,11}(0,z)}, \qquad m_+^{q_{N,\theta}}(z) = \frac{W_{N,\theta,21}(0,z)}{W_{N,\theta,22}(0,z)}.$$

在第二个公式中，我们使用 $\mathbb{C}_+$ 中的右 Weyl 坐标，即其下半平面坐标的共轭反射。由（33）可得,

$$m_-^{q_{N,\theta}}(\lambda + i0) = \overline{m_+^{q_{N,\theta}}(\lambda + i0)}, \quad a.e.\ \lambda \in E_N.$$

令 $q = q_{N,\theta}(\mathbf{0}, \cdot)$ 和 $W(z) = W_{N,\theta}(\mathbf{0}, z)$。令 g_q 表示整线 Weyl 矩阵的迹的一半。其表示测度的支撑集为 $\sigma(D_q)$; 参见 [23,(3.19)]。在 $\mathbb{C}_+$ 中，代入 $m_-^q = W_{12}/W_{11}$ 和 $m_+^q = W_{21}/W_{22}$ 并利用 $\det W = 1$，可得

$$g_q = \frac{i}{2} \frac{1 + m_-^q m_+^q}{1 - m_-^q m_+^q} = \frac{i}{2} S, \qquad S = W_{11}W_{22} + W_{12}W_{21}.$$

在 E_N° 上，(33) 给出 $|W_{11}|^2 - |W_{12}|^2 = 1$，因此 $|m_-^q| < 1$。根据无反射恒等式,

$$\Im g_q(s + i0) = \frac{1 + |m_-^q(s+i0)|^2}{2(1 - |m_-^q(s+i0)|^2)} > 0 \qquad (s \in E_N^\circ).$$

因此 $E_N = \overline{E_N^\circ} \subset \sigma(D_q)$。

在每个 I_j° 上，跳跃关系 (30) 给出 $S_+ = -S_-$。由于根据 (33) 和施瓦茨对称性，$g_q = -iS/2$ 属于 $\mathbb{C}_-$，g_q 的两个边界值在此处相等。因此，g_q 可全纯延拓穿过 G_N，且在 G_N 上取实值。因此，其表示测度在 G_N 上为零，由此得到 $G_N \subset \rho(D_q)$。我们得出结论：$\sigma(D_q) = E_N$。将 θ 替换为 $\theta + \sum_{r=2}^m t_r \beta_N^{(r)}$，得到

$$q_{N,\theta}(\mathbf{t}, \cdot) \in \mathcal{R}(E_N) \qquad (\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{m-1}). \tag{38}$$

3.4 典范分解与一致估计

设 $d\mu(s) = \rho(s)ds$，其中 $\rho \in L^p(G_N, \mathbb{R})$，$1 < p < \infty$。若 $U \in C(\mathbb{C}; \mathbb{R})$ 满足

$$-\Delta U = 2\mu \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega_N), \qquad U|_{E_N} = 0, \qquad \lim_{z\to\infty} U(z) = 0,$$

then

$$U(z) = (\mathcal{K}_{\Omega_N}\mu)(z) = \frac{1}{\pi}\int_{G_N} g_{\Omega_N}(z,t)d\mu(t), \quad z \in \Omega_N. \tag{39}$$

事实上，令 $P = \mathcal{K}_{\Omega_N}\mu$ 和 $h = U - P$。与单个更大间隙 $I \supset G_N$ 的格林函数比较，可得 $P(z)$ 在无穷远点处为 $\to 0$；而由 (8) 中对数奇点附近的 H¨older 不等式可知，在 E_N 的每一点也成立。因此

$$-\Delta P = 2\mu, \qquad \Delta h = 0, \qquad h|_{E_N} = 0, \qquad h(\infty) = 0.$$

由最大值原理可得 $h = 0$，从而得到（39）。

记 $q_{N,\theta} = q_{N,\theta}(\mathbf{0}, \cdot)$，以及 $W_{N,\theta}(z) = W_N(\theta, z)$。由（38），$q_{N,\theta} \in \mathcal{R}(E_N)$。对于 $z \in \mathbb{C}_+$，令

$$\Delta_{N,\theta}(z) = 1 - m_-^{q_{N,\theta}}(z)m_+^{q_{N,\theta}}(z), \qquad \mathcal{M}_{q_{N,\theta}} = \Delta_{N,\theta}^{-1/2}\begin{pmatrix} 1 & m_-^{q_{N,\theta}} \\ m_+^{q_{N,\theta}} & 1 \end{pmatrix}.$$

取正实部平方根，并通过 $\mathcal{M}_{q_{N,\theta}}(z) = Q_0\mathcal{M}_{q_{N,\theta}}(\bar{z})Q_0$ 将 $\mathcal{M}_{q_{N,\theta}}$ 延拓至 $\mathbb{C}_-$。令 $\overline{\phi_{j,N,\theta}}$ 为由（25）针对该势给出的连续相位，则

$$\mathcal{M}_{q_{N,\theta},+} = iQ_{\phi_{j,N,\theta}}\mathcal{M}_{q_{N,\theta},-} \quad \text{on } I_j^\circ. \tag{40}$$

如（24）中所示，$\mathrm{Var}_{I_j}\phi_{j,N,\theta} \le \pi$。

引理6 存在一个实对称函数 $\eta_{N,\theta}$，其在 $\mathbb{C}\setminus G_N$ 上全纯，并由 $\eta_{N,\theta}(\infty) = 0$ 归一化，使得

$$W_{N,\theta} = e^{i\eta_{N,\theta}J}\mathcal{M}_{q_{N,\theta}}.$$

令 $u_{N,\theta} = \Im(\eta_{N,\theta})_+$ 在 G_N 上，且令 $u_{N,\theta} = 0$ 在 E_N上。存在一个实符号测度$\mu_{N,\theta}$ 定义在 G_N 上，使得

$$\mu_{N,\theta}|_{I_j^\circ} = -\frac{1}{2}d(\phi_{j,N} - \phi_{j,N,\theta}), \qquad |\mu_{N,\theta}|(I_j) \le \pi, \tag{41}$$

and

$$u_{N,\theta} = (\mathcal{K}_{\Omega_N}\mu_{N,\theta})|_{\mathbb{R}}, \qquad \eta_{N,\theta}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{G_N}\frac{u_{N,\theta}(s)}{s-z}ds.$$

证明。在本证明中，记 $W = W_{N,\theta}$、$q = q_{N,\theta}$、$\mathcal{M} = \mathcal{M}_q$ 和 $\Delta = \Delta_{N,\theta}$。由于 $\det W = 1$,

$$W = \operatorname{diag}(d, d^{-1})\mathcal{M}, \qquad d = W_{11}\sqrt{\Delta}, \quad d^{-1} = W_{22}\sqrt{\Delta},$$

因此 d 和 d^{-1} 在 $\mathbb{C}_+$ 上是全纯的，并且在无穷远点趋于 1。取 $\eta = -i \log d$ 使其满足 $\eta(\infty) = 0$。在 E_N°上，$W, \mathcal{M}$ 的反射对称性给出$d = d^{-1}$。因此 η 在那里为实数，而施瓦茨反射给出了延拓到 $\mathbb{C} \setminus K_N$的单值实对称延拓。

赫尔格洛茨函数

$$g_q(z) = \frac{i}{2}\frac{1 + m_-^q m_+^q}{1 - m_-^q m_+^q}$$

在 G_N 上是实解析的，并且在 E_N°上是纯虚的。g_q 的指数表示给出

$$g_q(z) = \frac{i}{2}\prod_{j \in \mathcal{J}_N} \frac{z - \nu_j}{\sqrt{(z - l_j)(z - r_j)}}, \qquad \nu_j \in I_j, \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

其中平方根按 $s_j(z) \sim z - c_j$进行归一化。事实上，在开带上 $\arg g_q = \pi/2$，并且根据赫格洛茨性质，在每个开间隙上至多从 π 变为 0 一次。交点为 ν_j；如果符号保持不变，则使用一个端点。因 $g_q(iy) \to i/2$，得到因子 $i/2$。在 E_N°上，无反射性给出

$$\Im g_q = \frac{1}{2}\frac{1 + |m_-^q|^2}{1 - |m_-^q|^2} \geq \frac{1}{2}.$$

如果 $\nu_j = e \in \partial I_j$、$g_q$ 沿着 E趋于零，就会与此界矛盾。因此

$$\nu_j \in I_j^\circ, \qquad \Delta^{-1} = \frac{1}{2} - i g_q, \qquad \sqrt{\Delta} = c_e(z - e)^{1/4}(1 + O(|z - e|^{1/2})),$$

其中 $c_e \neq 0$。更准确地说，在 e的割线邻域内，该乘积表明 $(z - e)^{-1/4}\sqrt{\Delta}$ 在 $\sqrt{z - e}$ 中解析，并且在 e处不为零。由局部因子$W = H_j f_j$可知，$(z - e)^{1/4} W$ 在 $\sqrt{z - e}$中也解析。因此，d和 d^{-1} 关于该参数在 e处解析，且在那里都不为零。对于 $\log d$的一个局部分支，同样成立，并且

$$\eta(z) = \eta(e) + O(|z - e|^{1/2}), \qquad \eta(e) \in \mathbb{R}. \tag{42}$$

由（40）和 $W_+ = iQ_{\phi_{j,N} + \theta_j} W_-$,

$$2\Re\eta_+ = \eta_+ + \eta_- = \phi_{j,N} + \theta_j - \phi_{j,N,\theta} \pmod{2\pi} \quad \text{on } I_j^\circ.$$

令 $\rho(s) = -\partial_s \Re\eta_+$ 且 $d\mu(s) = \rho(s) ds$。则

$$|\mu|(I_j) \leq \frac{1}{2}\left(\operatorname{Var}_{I_j} \phi_{j,N} + \operatorname{Var}_{I_j} \phi_{j,N,\theta}\right) \leq \pi.$$

这就得到了（41）。$\sqrt{z - e}$ 中的展开还给出

$$u(s) = O(|s - e|^{1/2}), \qquad \rho(s) = O(|s - e|^{-1/2}), \qquad \rho \in L^{3/2}(G_N).$$

令 $U(x+iy) = \Im\eta(x+i|y|)$，其中 $y \neq 0$；并令 $U(x) = u(x)$。根据柯西–黎曼方程和偶反射，

$$-\partial_y U(x,0+) = -\partial_x \Re\eta_+(x) = \rho(x), \qquad -\Delta U = 2\rho(s)ds \quad \text{on } \Omega_N.$$

由 (42)，$U \in C(\mathbb{C})$、$U|_{E_N} = 0$和 $U(\infty) = 0$。因此，(39) 给出 $u = (\mathcal{K}_{\Omega_N}\mu)|_{\mathbb{R}}$，其中势在 E_N 上延拓为零。最后，由于 $\eta_+ - \eta_- = 2iu$ 和$\eta(z) = O(z^{-1})$ 在无穷远点处，利用柯西公式和 (42) 可得

$$\eta(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{G_N} \frac{\eta_+(s) - \eta_-(s)}{s-z} ds = \frac{1}{\pi}\int_{G_N} \frac{u(s)}{s-z} ds.$$

■

引理 7 设 $S_2 < \infty$ 并固定 N。对于 $q \in \mathcal{R}(E_N)$，$x \in \mathbb{R}$ 和 $z \in \mathbb{C}_+$，令

$$R_q(x,z) = i\frac{(1-m_+^q(x,z))(1-m_-^q(x,z))}{1-m_+^q(x,z)m_-^q(x,z)} = i\prod_{j\in\mathcal{J}_N} \frac{z-\nu_j(q;x)}{\sqrt{(z-l_j)(z-r_j)}}. \quad (43)$$

这里，$\nu_j(q;\ x)$ 是 I_j° 中唯一的零点（如果存在），并且当 R_q 在整个 I_j° 上为正或为负时，分别等于 l_j 或 r_j。令

$$Q_n(q;x) = Q_{n,N}(q;x) = \sum_{j\in\mathcal{J}_N} \left(l_j^n + r_j^n - 2\nu_j(q;x)^n\right), \quad n \geq 1.$$

记其光滑代表元为 $q = u + iv$，则有

$$Q_1 = -2u, \qquad Q_2 = 2(v_x + v^2), \qquad Q_3 = \frac{3}{2}u_{xx} + 3vu_x - 2u^3. \quad (44)$$

记

$$R_j = \max(|l_j|, |r_j|), \qquad M_n = 2n\sum_{j\in\mathcal{J}_N} a_j R_j^{n-1} \leq 2n(1+S_0)^{n-1}S_{n-1}.$$

对于所有 $x \in \mathbb{R}$,

$$|q| \leq S_0, \qquad |q_x| \leq \frac{M_2}{2} + |q|^2, \qquad |q_{xx}| \leq \frac{2M_3}{3} + 2|q||q_x| + \frac{4}{3}|q|^3. \quad (45)$$

特别地,

$$\sup_{N,\theta,x,\mathbf{t}} \left(|q_{N,\theta}(\mathbf{t},x)| + |\partial_x q_{N,\theta}(\mathbf{t},x)| + |\partial_x^2 q_{N,\theta}(\mathbf{t},x)|\right) \leq C(S_0,S_1,S_2). \quad (46)$$

此外，对于 $n = 1$、2、3,

$$\sup_{N\geq L,\,\theta,x,\mathbf{t},\gamma} \sum_{j\in\mathcal{J}_N\setminus\mathcal{J}_L} \left|l_j^n + r_j^n - 2\nu_j(e^{i\gamma}q_{N,\theta}(\mathbf{t},\cdot);x)^n\right| \leq 2n\sum_{j\in\mathcal{J}\setminus\mathcal{J}_L} a_j R_j^{n-1} \xrightarrow[L\to\infty]{} 0. \quad (47)$$

证明。令 $h_\pm(x,\ z) = i(1+m_\pm^q(x,\ z))/(1-m_\pm^q(x,\ z))$. 则

$$\Im h_\pm > 0, \qquad R_q = -\frac{2}{h_+ + h_-},$$

因此 R_q 是赫尔格洛茨函数。无反射性根据 [23, (4.12)]给出了式 (43) 中的乘积。由于 G_N 有界， [34, 定理 4.1]给出：经过重新缩放后， q 存在一个各阶导数均有界的光滑代表元。在我们的归一化下，空间 Riccati 方程为

$$2zm_+^q = q + i\partial_x m_+^q + \overline{q}(m_+^q)^2, \qquad 2zm_-^q = \overline{q} - i\partial_x m_-^q + q(m_-^q)^2.$$

利用高能 Weyl 展开 [9, 第 4] 节，并比较这些恒等式中的系数，可得当 $z = iy$ 趋于 $i\infty$时，

$$\begin{aligned} m_+^q &= \frac{q}{2z} + \frac{iq_x}{4z^2} + \frac{-q_{xx} + |q|^2 q}{8z^3} + O(z^{-4}), \\ m_-^q &= \frac{\overline{q}}{2z} - \frac{i\overline{q}_x}{4z^2} + \frac{-\overline{q}_{xx} + |q|^2\overline{q}}{8z^3} + O(z^{-4}). \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \log(R_q/i) &= \log(1 - m_+^q) + \log(1 - m_-^q) - \log(1 - m_-^q m_+^q) \\ &= -\frac{u}{z} + \frac{v_x + v^2}{2z^2} + \frac{3u_{xx} + 6vu_x - 4u^3}{12z^3} + O(z^{-4}). \end{aligned}$$

另一方面，(43) 给出 $\log(R_q/i) = \sum_{n=1}^{3} Q_n/(2nz^n) + O(z^{-4})$。比较可得 (44)。

F对于任意 $\nu \in [l_j, r_j]$，中值定理给出 ds

$$\left|l_j^n + r_j^n - 2\nu^n\right| \le nR_j^{n-1}(|l_j - \nu| + |r_j - \nu|) = 2na_j R_j^{n-1},$$

因此 $|Q_n| \le M_n$。对省略的间隙求和可得 (47)。

最后，令 $q_\gamma = e^{i\gamma}q$，其中 $\gamma \in \mathbb{R}$。由于

$$C_\gamma D_q C_\gamma^{-1} = D_{q_\gamma}, \qquad C_\gamma = \mathrm{diag}(e^{i\gamma/2}, e^{-i\gamma/2}),$$

$q_\gamma \in \mathcal{R}(E_N)$。因此，对于 $q_\gamma = u_\gamma + iv_\gamma$， $|Q_n| \le M_n$ 蕴含

$$\begin{aligned} |u_\gamma| &\le M_1/2 \le S_0, \\ |\partial_x v_\gamma| &\le M_2/2 + |q|^2, \\ |\partial_x^2 u_\gamma| &\le 2M_3/3 + 2|q||q_x| + 4|q|^3/3. \end{aligned}$$

对每个不等式中的 γ 取上确界，得到（45）。将其应用于（38）中的时间切片，得到（46）。 ∎

4 无穷多个间隙的重构

4.1 可容许矩阵的唯一性

定义 2 固定 $q_0 \in \mathcal{R}$（E） 和 $\theta \in \Theta$。矩阵函数 2×2 W，在 2×2 上全纯，- 对于 （q_0, θ） 是可容许的，如果它满足以下条件。

1. 在每个开间隙 I_j° 上， W 具有连续的单侧延拓，满足

$$W_+(s) = iQ_{\phi_j^{q_0}(s)+\theta_j} W_-(s).$$

2. 存在 $q \in \mathcal{R}(E)$ 以及定义在 G 上的实符号拉东测度 μ，使得对所有 j，均有 $|\mu|(I_j^\circ) \le \pi$；此外，迹 $u = (\mathcal{K}_\Omega \mu)|_G$ 属于 $L^1(G, \omega(s)\,ds)$，并且

$$W(z) = e^{i\eta(z)J}\mathcal{M}_q(z), \qquad \eta(z) = \frac{1}{\pi}\int_G \frac{u(s)}{s-z}\,ds, \qquad z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}.$$

这里将 u 在 E 上延拓为零。

注 2 设 $z = x+iy$ 满足 $y > 0$，且 $(\mathcal{K}_\Omega|\mu|)(z) < \infty$。由 $g_\Omega(\cdot, t)$ 的泊松表示，以及托内利定理应用于 μ 的正部和负部，

$$\begin{aligned}\Im\eta(z) &= \int_G P_y(x-s)u(s)\,ds \\ &= \frac{1}{\pi}\int_G \left(\int_G P_y(x-s)g_\Omega(s,t)\,ds\right)d\mu(t) = (\mathcal{K}_\Omega\mu)(z).\end{aligned}$$

Ω 上的非负调和函数 h 若为 Ω 上有界非负调和函数递增极限，则称为拟有界。对于 Ω 上的全纯函数 f，第 1] 节中的调和主函数判据 [35, 给出

$$f \in \mathcal{N}_+(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \log^+|f| \le h \text{ for some quasibounded harmonic function } h, \tag{48}$$

其中 $\log^+(t) = \max\{\log t,\ 0\}$。

引理 8 设 Ω 是具有 *DCT* 的狄利克雷正则 *Widom* 域。则对于每个 (q_0, θ)，至多存在一个可容许矩阵。

证明。设 $W_k = e^{i\eta_k J}\mathcal{M}_k$ 是 $(q_0,\ \theta)$ 的可容许矩阵，其中 $\mathcal{M}_k = \mathcal{M}_{q_k}$, $k = 1, 2$。令

$$V = W_2^{-1}W_1 = \mathcal{M}_2^{-1}e^{i(\eta_1-\eta_2)J}\mathcal{M}_1.$$

由于 $\det \mathcal{M}_k = 1$ 且这两个矩阵在每个开间隙 I_j° 上具有相同的左跳跃，因此 $V_+ = V_-$。由莫雷拉定理，V 全纯延拓到 Ω。

对于用 q_k 代替 q_0 定义的 m_k，令 $p_k = m_k m_k^\#$，并且

$$g_k(z) = \frac{i}{2}\frac{1+p_k(z)}{1-p_k(z)} \quad (z \in \mathbb{C}_+), \qquad g_k(\bar z) = \overline{g_k(z)}.$$

根据 (23)，对于每个 $\lambda \in I_j^\circ$，边界值 $m_k(\lambda+i0)$ 和 $m_k(\lambda-i0)$ 是单位圆上的不同点。因此

$$p_k(\lambda+i0) = m_k(\lambda+i0)\overline{m_k(\lambda-i0)} \in \{|z|=1\}\setminus\{1\}.$$

因此，g_k 是一个赫尔格洛茨函数，并且可全纯、实对称地延拓到 Ω。根据 [3, 定理 2，1], 在圆盘上的提升具有有界特征，且没有奇异内因子。由于 g_k 没有极点，$g_k \in \mathcal{N}_+(\Omega)$。由于 $\det \mathcal{M}_k = 1$，且 $(1-p_k)^{-1} = 1/2 - ig_k$ 在 $\mathbb{C}_+$ 中，(48) 和对称性给出一个拟有界调和函数 H_k，使得

$$\log\left\|\mathcal{M}_k^{-1}\right\| = \log\|\mathcal{M}_k\| \le \tfrac{1}{2}\log(2+4|g_k|) \le H_k \qquad (z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}). \tag{49}$$

记 $H = H_1 + H_2$、$\nu = |\mu_1| + |\mu_2|$ 和 $P = \mathcal{K}_\Omega \nu$。由于 ν 为正，P 在 Ω 中是超调和的。Widom 条件给出

$$P(i) \le 2 \sum_j \sup_{t \in I_j^\circ} g_\Omega(i,t) < \infty.$$

注 2 和 (49) 给出

$$|\Im(\eta_1 - \eta_2)| \le P, \qquad \log^+ \|V\| \le H + P \qquad (z \notin \mathbb{R}).$$

非负次调和函数 $v = (\log^+ \|V\| - H)_+$ 在整个 Ω 中满足 $v \le P$，这是由以 G 为圆心的圆上 v 和 P 的平均值不等式得到的。取递增的光滑区域 $D_n \Subset \Omega$ 穷尽 Ω，其中包含 i，并令 h_n 在 D_n 上为边界值为 v的调和函数。比较可得

$$0 \le v \le h_n \le P, \qquad h_n \le h_{n+1} \quad \text{on } D_n.$$

由 Harnack 收敛定理，极限是 Green 势 P 的一个非负调和下障函数。根据 (6)，它为零。因此 $v = 0$，并且 V的每个元素都属于 $\mathcal{N}_+(\Omega)$，由 (48) 得到。

由边界唯一性，$1 - p_k \ne 0$ 在 E 上几乎处处成立，因此反射无关恒等式给出 $\mathcal{M}_{k,+} = \mathcal{M}_{k,-}$ 在那里成立。Cauchy 边界公式给出 $\eta_{k,+} - \eta_{k,-} = 2iu_k = 0$ 在 E 上几乎处处成立。特别地，$V_+ = V_-$在那里成立，并且由 (49) 得

$$\|V_\pm\| \le \sqrt{(2 + 4|g_{1,+}|)(2 + 4|g_{2,+}|)} \le 2 + 2|g_{1,+}| + 2|g_{2,+}|.$$

这里 $g_{k,+} \in i[0,\infty)$ 在 E 上几乎处处成立，因此 Herglotz 表示给出

$$\int_E \frac{|g_{k,+}(s)|}{1+s^2}\, ds \le \pi \Im g_k(i).$$

对于 $\xi_* \in G$, $|s - \xi_*|^{-2} \le C_{\xi_*}(1+s^2)^{-1}$ 在 E 上成立。因此，我们可以对 V 的每个元素应用 DCT:

$$V(z) - V(\xi_*) = \frac{1}{2\pi i} \int_E (V_+(s) - V_-(s)) \left(\frac{1}{s-z} - \frac{1}{s-\xi_*} \right) ds = 0.$$

最后，$|s - iy|^{-1} \le \omega(s)$ 对于 $y \ge 1$ 成立。控制收敛给出 $\eta_k(iy) \to 0$，而 Weyl 归一化给出 $\mathcal{M}_k(iy) \to I_2$。因此 $V \equiv I_2$，即 $W_1 = W_2$。

■

4.2 可容许矩阵的存在性

令 $X = L^1(G,\ \omega(s)\, ds)$，并且

$$\mathcal{U} = \bigcup_N \mathcal{U}_N = \bigcup_N \left\{ \mathcal{K}_{\Omega_N} \mu : \begin{array}{l} \mu \text{ is a real signed measure on } G_N, \\ |\mu|(I_j^\circ) \le \pi, \quad j \in \mathcal{J}_N \end{array} \right\},$$

其中 $\mathcal{K}_{\Omega_N}\mu$ 在 $G \setminus G_N$上延拓为零。

引理 9 设Ω 是狄利克雷正则的， $S_0 < \infty$，且 $\mathcal{P}_1(E) < \infty$。则$\mathcal{U}$在 X中相对紧。若 $N_k \to \infty$且 $u_k = \mathcal{K}_{\Omega_{N_k}}\mu_k \in \mathcal{U}_{N_k}$，则经过取子序列，

$$u_k \longrightarrow u = \mathcal{K}_\Omega \mu \quad in\ X$$

对于满足 $|\mu|(I_j^\circ) \le \pi$ 的某个实符号拉东测度 μ （其中 G），对每个 j均成立。此外，

$$\lim_{y\to\infty} \sup_{u\in\mathcal{U}} \left| \frac{1}{\pi} \int_G \frac{u(s)}{s - iy}\, ds \right| = 0.$$

证明。 令 $v_{\omega,N} = \mathcal{K}_{\Omega_N}(\omega|_{G_N})$。由格林核的对称性、(5) 以及托内利定理，

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{G_N \setminus G_L} g_{\Omega_N}(\cdot, t)\, d\mu(t) \right\|_X &\le \int_{G_N \setminus G_L} v_{\omega,N}(t)\, d|\mu|(t) \\ &\le \pi \sum_{j \notin \mathcal{J}_L} \sup_{I_j} v_\omega \xrightarrow[L\to\infty]{} 0 \end{aligned} \tag{50}$$

关于 N 和 μ一致。对于 g_Ω，同样的估计也成立。

固定 j，并将格林核在 I_j的端点处延拓为零。根据引理 1， $v_{\omega,N}, v_\omega \in C(I_j)$以及 $v_{\omega,N} \uparrow v_\omega$。因此，由迪尼定理可得

$$\sup_{t\in I_j} \|g_\Omega(\cdot, t) - g_{\Omega_N}(\cdot, t)\|_X = \pi \sup_{t\in I_j} \big(v_\omega(t) - v_{\omega,N}(t)\big) \longrightarrow 0. \tag{51}$$

假设 $N_k \to \infty$。令 μ_k^+ 和 μ_k^- 分别表示 μ_k的正部和负部。将 $\mu_{k,j}^\pm := \mu_k^\pm|_{I_j^\circ}$ 视为 I_j 上端点质量为零的测度。取一个对角子列，我们有

$$\mu_{k,j}^\pm \overset{*}{\rightharpoonup} \nu_j^\pm \quad \text{on } I_j, \qquad \nu_j^+(I_j) + \nu_j^-(I_j) = \lim_{k\to\infty} |\mu_k|(I_j^\circ) \le \pi.$$

在 G 上定义 μ： $\mu|_{I_j^\circ} = (\nu_j^+ - \nu_j^-)|_{I_j^\circ}$。则 $|\mu|(I_j^\circ) \le \pi$。

固定任一符号，并记 $\sigma_k = \mu_{k,j}^\pm$, $\sigma = \nu_j^\pm$。令

$$w_k(s) = \frac{1}{\pi} \int_{I_j} g_\Omega(s, t)\, d\sigma_k(t), \qquad w(s) = \frac{1}{\pi} \int_{I_j} g_\Omega(s, t)\, d\sigma(t).$$

由于 $v_\omega \in C(I_j)$，

$$\|w_k\|_X = \int_{I_j} v_\omega\, d\sigma_k \longrightarrow \int_{I_j} v_\omega\, d\sigma = \|w\|_X.$$

对于每个 $s \in G$ 和 $M > 0$， $\min\{g_\Omega(s, \cdot),\ M\} \in C(I_j)$。因此

$$\liminf_{k\to\infty} w_k(s) \ge \frac{1}{\pi} \int_{I_j} \min\{g_\Omega(s, t), M\}\, d\sigma(t) \xrightarrow[M\to\infty]{} w(s).$$

因此，$(w - w_k)_+ \to 0$ 几乎处处成立，且 $0 \le (w - w_k)_+ \le w \in X$。由控制收敛定理，

$$\|w_k - w\|_X = \|w_k\|_X - \|w\|_X + 2\|(w - w_k)_+\|_X \longrightarrow 0.$$

由于 $g_\Omega(\cdot,\ l_j) = g_\Omega(\cdot,\ r_j) = 0$，两极限相减并结合（51），对每个固定的 j，可得：

$$\frac{1}{\pi}\int_{I_j^\circ} g_{\Omega_{N_k}}(\cdot,t)\,d\mu_k(t) \xrightarrow[k\to\infty]{X} \frac{1}{\pi}\int_{I_j} g_\Omega(\cdot,t)\,d(\nu_j^+ - \nu_j^-)(t) = \frac{1}{\pi}\int_{I_j^\circ} g_\Omega(\cdot,t)\,d\mu(t).$$

对 $j \in \mathcal{J}_L$ 求和，并对两端应用 (50)，得到

$$\limsup_{k\to\infty} \|u_k - \mathcal{K}_\Omega\mu\|_X \le 2\pi \sum_{j\notin\mathcal{J}_L} \sup_{I_j} v_\omega \xrightarrow[L\to\infty]{} 0.$$

如果指标 N_k 有界，则取一个常值子序列 $N_k = N$，并在 G_N 的有限多个间隙上用 g_Ω 替代 g_{Ω_N}，应用相同的论证。这证明了相对紧致性。

最后，令 $T_y u = \pi^{-1}\int_G u(s)/(s-iy)\,ds$。由于当 $y \ge 1$ 时，$|s-iy|^{-1} \le \omega(s)$，由控制收敛定理可得

$$\sup_{y\ge1}\|T_y\|_{X^*} \le \frac{1}{\pi}, \qquad T_y u \longrightarrow 0 \quad (u \in X).$$

该收敛在 $\mathcal{U}$ 的紧致闭包上一致成立。 ∎

引理 10 设 Ω 是具有 *DCT* 的狄利克雷正则 *Widom* 域，并假设 $S_2 < \infty$ 和 $\mathcal{P}_1(E) < \infty$。固定 $q_0 \in \mathcal{R}(E)$，记 $W_{N,\theta}(z) = W_N(\theta, z)$，并令 $q_{N,\theta}(x) = F_N(\theta + x\alpha_N)$。对于每个 $\theta \in \Theta$，存在唯一的可容许矩阵 W_θ，对应于 (q_0, θ)，且

$$W_{N_n,\theta^{(n)}} \longrightarrow W_\theta \qquad whenever\ N_n \to \infty, \quad \theta^{(n)} \to \theta,$$

在 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上局部一致收敛。映射 $\theta \mapsto W_\theta$ 在此拓扑下连续。此外，

$$F(\theta) := \lim_{y\to\infty} 2iy(W_\theta(iy))_{21}, \qquad \|F_N - F\|_{C(\Theta)} \longrightarrow 0, \qquad W_0 = \mathcal{M}_{q_0}.$$

证明。固定 $N_n \to \infty$ 和 $\theta^{(n)} \to \theta$，并将这对指标简记为 n。由 (38) 以及引理 6 和引理 7，

$$q_n \in \mathcal{R}(E_{N_n}), \qquad \sup_n(\|q_n\|_\infty + \|q_n'\|_\infty + \|q_n''\|_\infty) < \infty, \qquad W_n = e^{i\eta_n J}\mathcal{M}_{q_n},$$

而 $u_n = \mathcal{K}_{\Omega_{N_n}}\mu_n$ 在 G 上，η_n 是其柯西变换。由 Arzel`a–Ascoli 定理和引理 9，取一个子序列后，

$$q_n \to q \text{ in } C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}), \qquad u_n \to u = \mathcal{K}_\Omega\mu \text{ in } X, \qquad |\mu|(I_j^\circ) \le \pi.$$

于是，半直线韦尔函数在实直线外局部一致收敛[19,命题 2.3 和第 3 节.4]。因此，

$$\mathcal{M}_{q_n} \to \mathcal{M}_q, \qquad \eta_n \to \eta = \frac{1}{\pi}\int_G \frac{u(s)}{s-z}\,ds, \qquad W_n \to W = e^{i\eta J}\mathcal{M}_q \tag{52}$$

在 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上局部一致地。

在 $\mathbb{C}_+$ 上，记 $a_n = m_-^{q_n}$ 和 $b_n(z) = \overline{m_+^{q_n}(\bar{z})}$，其相应的极限为 a，b。因此

$$\mathcal{M}_q = (1-ab)^{-1/2}\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix},$$

其中平方根的实部为正。有界舒尔函数的局部一致收敛蕴含其边界值在 $L^\infty(\mathbb{R})$ 中的弱 * 收敛，这是由泊松表示得到的。由于 $a_n = \overline{b_n}$ 几乎处处成立于 $E \subset E_{N_n}$上，因此对于 a，b同样成立。对于 $\lambda \in I_j^\circ$和 $d = \operatorname{dist}(\lambda, \partial I_j)$，谱定理给出：对所有充分大的 n，

$$\|(D_{q_n} - \lambda)f\|_2 \geq d\,\|f\|_2 \qquad \big(f \in H^1(\mathbb{R};\mathbb{C}^2)\big).$$

由控制收敛定理取极限可得对 D_q同样的界，因此 $\sigma(D_q) \subset E$。反之，设 $g_q = \frac{i}{2}(1+ab)/(1-ab)$。与有限带情形一样，无反射恒等式给出

$$\Im g_q(s+i0) \geq \frac{1}{2} \qquad \text{for a.e. } s \in E.$$

由狄利克雷正则性以及 [3, 第 2 节1], $\operatorname{supp}(\mathbf{1}_E\,ds) = E$。因此，结合前述下界和斯蒂尔切斯反演可得

$$E = \operatorname{supp}(\mathbf{1}_E\,ds) \subset \operatorname{supp}\mu_{g_q} = \sigma(D_q),$$

其中 μ_{g_q} 是 g_q的表示测度。因此 $q \in \mathcal{R}(E)$。

固定一个紧区间 $A \subset I_j^\circ$。在 $x = 0$ 处的整线格林矩阵为

$$\mathcal{G}_n(z) = \frac{i}{2(1-a_nb_n)}\begin{pmatrix} 1+a_nb_n & 2b_n \\ 2a_n & 1+a_nb_n \end{pmatrix}, \qquad h_n = \frac{1}{2} - i(\mathcal{G}_n)_{11}.$$

其矩阵值赫尔格洛茨测度支撑于 E_{N_n}，且 $\sup_n \|\mathcal{G}_n(i)\| < \infty$。在 A 的一个固定邻域上，赫尔格洛茨核 $(s-z)^{-1} - s/(1+s^2)$ 对于 $s \in E_{N_n}$ 和所有充分大的 n 一致地为 $O((1+s^2)^{-1})$。赫尔格洛茨表示给出了该处的局部有界性，而恒等定理将唯一极限确定为 $\mathcal{G}_q$。由于 $(\mathcal{G}_n)_{11}$ 在 A 上为实数，因此在那里有 $|h_n| \geq 1/2$ 。在一个更小的邻域上，解析延拓

$$a_n = \frac{(\mathcal{G}_n)_{21}}{ih_n}, \qquad b_n = \frac{(\mathcal{G}_n)_{12}}{ih_n}$$

因此连同所有阶导数一起局部一致收敛。当 $h_n = (1-a_nb_n)^{-1}$ 时，

$$(\mathcal{M}_{q_n})_\pm \to (\mathcal{M}_q)_\pm \quad \text{on } A.$$

在 I_j° 上写作 $d\mu_n(s) = \rho_n(s)\,ds$。由（41）以及（25）中相位的选取，

$$\rho_n = -\frac{1}{2}\big(\phi'_{j,N_n} - \phi'_{j,N_n,\theta^{(n)}}\big), \qquad \phi'_{j,N_n,\theta^{(n)}} = \frac{1}{2i}\left(\frac{a_n'}{a_n} - \frac{b_n'}{b_n}\right).$$

由于 $|a_n| = |b_n| = 1$ 在间隙上，(26) 以及刚刚证明的收敛性意味着 ρ_n 在 I_j° 上的局部一致收敛。取 $\chi \in C_c^\infty(I_j^\circ)$ 在 A的某个邻域上等于 1，并令

$$L_n(z) = -\frac{i}{\pi}\int_{I_j} \chi(s)\rho_n(s)\log(z-s)\,ds \quad (z \in \mathbb{C}_+), \qquad 0 < \arg(z-s) < \pi.$$

对数的局部可积性给出了 L_n 在紧子集上直至 A上侧的一致收敛。令 $U_n(x, y) = \Im\eta_n(x + i|y|)$，并将 $\Im L_n$ 关于 A偶延拓。在以 A为中心的任意充分小的圆盘 B 上，当 $\chi = 1$ 在 $B \cap \mathbb{R}$上时，

$$-\Delta U_n = -\Delta \Im L_n = 2\rho_n(s)\, ds, \qquad \|U_n - U_m\|_{L^1(B)} \le C_B \|u_n - u_m\|_X .$$

泊松核的积分在有界区间内对 B 有界，并且在无穷远点处为 $O(|s|^{-2})$，从而得到该不等式。因此， $h_n = U_n - \Im L_n$ 是 $L^1(B)$ 中调和函数的柯西序列，并且对于每个圆盘 $B' \Subset B$，我们有

$$\sup_{B'} |h_n - h_m| + \sup_{B'} |\nabla h_n - \nabla h_m| \le C_{B',B} \int_B |h_n - h_m|\, dA \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

根据柯西-黎曼方程和（52），对于每个紧区间 $A \subset I_j^\circ$,

$$\lim_{n,m\to\infty} \sup_{s\in A} |(\eta_n - L_n)_+(s) - (\eta_m - L_m)_+(s)| = 0.$$

Adding L_n ，并利用下侧的对称性 得到

$$(\eta_n)_\pm \to \eta_\pm, \qquad (W_n)_\pm \to W_\pm \quad \text{locally uniformly on } I_j^\circ.$$

将（30）取极限并利用（26），我们在 I_j° 上得到 $W_+ = iQ_{\phi_j^{q_0}+\theta_j} W_-$ 。这证明了 W 的可容许性。

根据引理 8， $W = W_\theta$，因此每个子序列都有相同的极限点，进而 $W_n \to W_\theta$ 在 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 上局部一致收敛。如果 $\theta^{(n)} \to \theta$，则取 $N_n \ge n$ 使得

$$\left|W_{\theta^{(n)}} - W_{N_n,\theta^{(n)}}\right| \le \frac{1}{n}$$

在 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 递增穷竭中的第 n 个紧集上。同样的收敛性给出

$$|W_{\theta^{(n)}} - W_\theta| \le |W_{\theta^{(n)}} - W_{N_n,\theta^{(n)}}| + |W_{N_n,\theta^{(n)}} - W_\theta| \to 0.$$

即，$W_{\theta^{(n)}} \to W_\theta$ 局部一致地成立。

最后，对于 $y > 0$， m_-^q 的黎卡提方程给出

$$m_-^q(x, iy) = -i \int_{-\infty}^{x} e^{-2y(x-s)} \left(\overline{q(s)} + q(s) m_-^q(s, iy)^2\right) ds.$$

由于 $|m_-^q| \le 1$，我们有 $|m_-^q(x, iy)| \le \|q\|_\infty / y$。因此，由 q 在零点处的连续性，

$$2iy\, m_-^q(0, iy) = \int_{-\infty}^{0} 2ye^{2ys} \overline{q(s)}\, ds + O(y^{-2}) \longrightarrow \overline{q(0)}.$$

类似地，对于 $\mathbb{C}_+$ 中的右 Weyl 坐标，

$$2iy\, m_+^q(0, iy) = \int_{0}^{\infty} 2ye^{-2ys} q(s)\, ds + O(y^{-2}) \longrightarrow q(0).$$

由于 $(\mathcal{M}_q)_{21} = m_+^q$ $(\mathcal{M}_q)_{22}$ 属于 $\mathbb{C}_+$， $\mathcal{M}_q(iy) \to I_2$，且 $\eta(iy) \to 0$，我们得到

$$F(\theta) := \lim_{y\to\infty} 2iy\big(W_\theta(iy)\big)_{21} = \lim_{y\to\infty} 2iy\big(\mathcal{M}_q(iy)\big)_{21} = q(0).$$

设 $N_k \to \infty$ 和 $\theta^{(k)} \to \theta$。从每个子序列中，我们都可以进一步提取出一个子序列，使得沿着该子序列

$$q_{N_k,\theta^{(k)}} \longrightarrow q \quad \text{in } C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}).$$

对于每个这样的极限，前面的恒等式给出 $q(0) = F(\theta)$。因此沿原序列有，

$$F_{N_k}(\theta^{(k)}) = q_{N_k,\theta^{(k)}}(0) \longrightarrow F(\theta). \tag{53}$$

Set

$$d_L = \sup_{N,M \geq L} \sup_{\theta \in \Theta} |F_N(\theta) - F_M(\theta)|, \qquad L \geq 1.$$

对于每个 L，选取 N_L，$M_L \geq L$ 以及 $\theta_L \in \Theta$，使得

$$0 \leq d_L \leq |F_{N_L}(\theta_L) - F_{M_L}(\theta_L)| + \frac{1}{L}.$$

由 Θ的紧致性，存在一个子序列 $\theta_{L_j} \to \theta$。将（53）应用两次可得

$$F_{N_{L_j}}(\theta_{L_j}) \longrightarrow F(\theta), \qquad F_{M_{L_j}}(\theta_{L_j}) \longrightarrow F(\theta).$$

因此 $d_{L_j} \to 0$，由单调性可得 $d_L \downarrow 0$。对于每个 $M \geq N$，

$$\sup_{\theta \in \Theta} |F_N(\theta) - F_M(\theta)| \leq d_N.$$

在每个 θ 处令 $M \to \infty$，然后取上确界，得到

$$\|F_N - F\|_{C(\Theta)} \leq d_N \longrightarrow 0.$$

特别地，$F \in C(\Theta)$。

最后，在可容许性的定义中取 $q = q_0$ 和 $\mu = 0$，由(25)可知，$\mathcal{M}_{q_0}$ 对于(q_0,0)是可容许的。由引理 8，$W_0 = \mathcal{M}_{q_0}$。 ∎

4.3 定理 1的证明

设定理 1的假设成立。我们使用引理 10的重构函数 F。

引理 11 设 $q_0 \in \mathcal{R}(E)$ 与

$$q(\mathbf{t}, x) = F(\vartheta), \qquad \vartheta = x\alpha + \sum_{r=2}^{m} t_r \beta^{(r)}.$$

存在 $F_0, \ldots, F_m, F_{t_2}, \ldots, F_{t_m} \in C(\Theta)$，且 $F_0 = F$，使得

$$\partial_x^j q(\mathbf{t}, x) = F_j(\vartheta) \quad (0 \leq j \leq m), \qquad \partial_{t_r} q(\mathbf{t}, x) = F_{t_r}(\vartheta) \quad (2 \leq r \leq m). \tag{54}$$

每个 $x \mapsto F(\theta + x\alpha)$ 属于 $C^m(\mathbb{R})$，且

$$\partial_{t_r} q = \mathcal{X}_r(q) \quad (2 \leq r \leq m), \qquad q(\mathbf{0}, x) = q_0(x) \quad \textit{for a.e. } x \in \mathbb{R}. \tag{55}$$

此外，对于 $k \in \mathbb{N}_0$ 和 $\boldsymbol{\ell} = (\ell_2, \ldots, \ell_m) \in \mathbb{N}_0^{m-1}$，其中 $k + \sum_{r=2}^m r\ell_r \leq m$，存在 $F_{k,\boldsymbol{\ell}} \in C(\Theta)$，使得

$$\partial_x^k \partial_{\mathbf{t}}^{\boldsymbol{\ell}} q(\mathbf{t}, x) = F_{k,\boldsymbol{\ell}}(\vartheta).$$

证明。令 $F_{r,\,N}(\theta)=\partial_x^r q_{N,\,\theta}(\mathbf{0},\;0)$，其中 $0\le r\le m$，从而 $F_{0,\,N}=F_N$。固定 $\theta\in\Theta$ 并令 $N_n\to\infty,\theta_n\to\theta$。对于 $p_n(x)=q_{N_n,\,\theta_n}(\mathbf{0},\;x)$ 以及 $p_\theta(x)=F(\theta+x\alpha)$，根据引理 10 和频率的逐坐标收敛，

$$p_n(x)=F_{N_n}(\theta_n+x\alpha_{N_n})\longrightarrow p_\theta(x)$$

在 x 中局部一致。根据 (46)，该序列在 $C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 中相对紧。每个极限在每个 x 处的值为 $p_\theta(x)$，因此

$$p_n\longrightarrow p_\theta\quad\text{in } C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}).\tag{56}$$

特别地，$F_{1,\,N_n}(\theta_n)\to F_1(\theta):=p'_\theta(0)$。

记 $p_n=u_n+iv_n$。在 $x=0$ 处，(44) 中的第三个迹恒等式为

$$Q_{3,N_n}(p_n)=\sum_{j\in\mathcal{J}_{N_n}}(l_j^3+r_j^3-2\nu_j(p_n;0)^3)=\tfrac{3}{2}u_n''+3v_nu_n'-2u_n^3.\tag{57}$$

Weyl函数以及 $R_{p_n}(\mathbf{0},\;\cdot)$ 根据 (56) 在 $\mathbb{C}_+$ 中局部一致收敛。R_{p_n} 的赫尔格洛茨测度支撑在 E_{N_n} 上。因此，根据赫尔格洛茨表示以及 $R_{p_n}(\mathbf{0},\;i)$ 的有界性，可在 I_j° 的该紧子区间上局部一致收敛。由于 $R_p(\mathbf{0},\;\cdot)$ 在每个间隙 I_j° 上严格递增，

$$\nu_j(p;0)=l_j+\int_{l_j}^{r_j}\mathbf{1}_{\{R_p(0,s)<0\}}\,ds.$$

因此，对于每个 j，都有 $\nu_j(p_n;0)\to\nu_j(p_\theta;0)$，包括极限为端点的情形。同样的论证也适用于 ip_n。对于 $1\le d\le m+1$ 和 $\nu\in I_j$，

$$|l_j^d+r_j^d-2\nu^d|\le 2da_jR_j^{d-1},\qquad\sum_j a_jR_j^{d-1}\le(1+S_0)^{d-1}S_{d-1}<\infty.$$

因此，$Q_{d,\,N_n}(p_n)$ 和 $Q_{d,\,N_n}(ip_n)$ 收敛到由 p_θ 确定的极限。将（57）应用于 p_n 和 ip_n 并使用（56），得到

$$F_{2,N_n}(\theta_n)=p_n''(0)\longrightarrow F_2(\theta).$$

对于 $2<r\le m$，同样的论证适用于 $Q_{d,\,N_n}$ 阶的情形。事实上，在引理 7 中使用的两个 Riccati展开中，z^{-d} 的系数分别具有主导导数项 $2^{-d}i^{d-1}p^{(d-1)}$ 和 $2^{-d}(-i)^{d-1}p^{(d-1)}$。这是由归纳法得到的，因为只有线性导数项会提高阶数。将 $\log(R_p/i)$ 中 z^{-d} 的系数与有限乘积（43）进行比较，得到

$$Q_{d,N}(p)=-d\,2^{2-d}\Re\Big(i^{d-1}p^{(d-1)}\Big)+P_d\big(p,\bar p,\dots,p^{(d-2)},\bar p^{(d-2)}\big),$$

其中 P_d 是一个通用多项式。将此恒等式应用于 p_n 和 ip_n，即可恢复 $p_n^{(r)}(\mathbf{0})$ 的两个分量。现在由归纳法得到

$$F_{r,N_n}(\theta_n)\longrightarrow F_r(\theta),\qquad 0\le r\le m,\quad F_0=F.$$

这对上述每个序列都成立。引理 10 的紧性论证给出 $F_r\in C(\Theta)$ 和 $\|F_{r,\,N}-F_r\|_{C(\Theta)}\to 0$。对于 $2\le r\le m$，引理5 给出

$$F_{t_r,N}(\theta):=\partial_{t_r}q_{N,\theta}(\mathbf{0},0)=\mathcal{X}_r\big(q_{N,\theta}(\mathbf{0},\cdot)\big)\big|_{x=0}.\tag{58}$$

右侧是关于 $F_{j,\,N}$，$F_{j,\,N}$的多项式，适用于 $0 \le j \le r$。代入F_j，F_j 后，在 Θ 上一致地得到 $F_{t_r} \in C(\Theta)$ 和 $F_{t_r,\,N} \to F_{t_r}$。

对于由引理 3 在乘积度量下一致有界的 s、$s\beta_N^{(r)} \to s\beta^{(r)}$，$1 \le r \le m$。对有限隙相位恒等式积分并取极限，得到

$$F(\theta + h\beta^{(r)}) - F(\theta) = \int_0^h F_{t_r}(\theta + s\beta^{(r)})\, ds \quad (2 \le r \le m),$$

$$F_j(\theta + h\alpha) - F_j(\theta) = \int_0^h F_{j+1}(\theta + s\alpha)\, ds \quad (0 \le j < m).$$

在 $h = 0$ 处求导，得到每个 $\theta \in \Theta$ 处的方向导数。取 $\theta = \vartheta$ 即得 (54)。由于 $\mathcal{X}_r$ 是阶为 r 的微分多项式，在 (58) 中取极限并利用 (54)，得到

$$\partial_{t_r} q(\mathbf{t}, x) = F_{t_r}(\vartheta) = \mathcal{X}_r\big(q(\mathbf{t}, \cdot)\big)(x), \qquad 2 \le r \le m.$$

用 $q_j = \partial_x^j q = F_j(\vartheta)$ 表示 $0 \le j \le m$。对于 $j + r \le m$，对 t_r 中的第 r 个方程积分，并在积分号下对 x 求导 j 次。被积函数连续，因此

$$\partial_{t_r} q_j = \partial_x^j \mathcal{X}_r(q), \qquad \partial_{t_r} \overline{q_j} = \overline{\partial_x^j \mathcal{X}_r(q)}.$$

因此，每个 t_r 导数至多使微分多项式中最大的空间指标增加 r。对 $\sum_r \ell_r$ 使用归纳法，得到 $\partial_x^k \partial_{\mathbf{t}}^{\boldsymbol{\ell}} q$ 是关于 $q_j, \overline{q_j}$ 的多项式，且 $j \le k + \sum_r r\ell_r \le m$。代入 $F_j, \overline{F_j}$，得到 $F_{k,\boldsymbol{\ell}} \in C(\Theta)$。

最后，$\mathcal{M}_{q_0}$ 在 $\theta = 0$ 处带有 $\mu = 0$是可容许的。根据唯一性和极限因式分解（52），

$$\mathcal{M}_{q_0} = W_0 = e^{i\eta J} \mathcal{M}_{p_0}, \qquad p_0(x) = F(x\alpha).$$

因此，p_0 的两个半直线韦尔函数与 q_0的相应函数一致。狄拉克算子的逆唯一性给出：在 $\mathbb{R}$ [9, 上几乎处处有 $p_0 = q_0$，见第 5]节。 ∎

引理 12 设 $r \ge 2$，并令 u、v 为 $q_t = \mathcal{X}_r(q)$ 在$[-T, T] \times \mathbb{R}$上的经典解。假设 $\partial_x^k u$、$\partial_x^k v$ 在此处连续且有界，且对于 $0 \le k \le r$。如果 $u(0, \cdot) = v(0, \cdot)$，则 $u = v$。

证明。对于 $q = u$，v，令 M_q 为由（22）在（t，x）处定义的 Weyl 矩阵，并记 $M_0 = M_u(0,\ x,\ z) = M_v(0,\ x,\ z)$。令

$$\partial_t T_q = T_q V_r(q), \qquad T_q(0, x, z) = I_2.$$

根据零曲率，

$$\partial_x T_q = T_q U_q(t) - U_q(0) T_q.$$

对于固定的非实 z，$V_r(q)$在带状区域上有界，因此时间方程给出 T_q 关于 x的一致界；于是，右乘 T_q 会保持两端的平方可积性。接着，对于 $z \in \mathbb{C}_+$，$M_0 T_q$ 的第一行和第二行分别与时刻 t、沿 $\mathbb{R}_-$和 $\mathbb{R}_+$的 Weyl 行解在 x 处的取值成比例。

固定一条非实射线。空间 Riccati 展开在带状区域上一致成立：

$$M_q = I_2 + O(|z|^{-1}), \qquad M_q^{-1} J M_q = \sum_{k=0}^{r} R_k(q) z^{-k} + O(|z|^{-r-1}).$$

确实，在阶数为 r 处截断会在 Riccati 方程中留下残差 $O(|z|^{-r})$，并且 $\|(\partial_x \pm 2iz)^{-1}\|_{\infty\to\infty} = (2|\Im z|)^{-1}$。系数由 $R_x = [R, U_q]$、$R^2 = I_2$ 和 $R_0 = J$ 确定。因此，由 (37) 得到

$$M_q V_r(q) = -i z^r J M_q + O(|z|^{-1}).$$

令 $Y_q = e^{itz^r J} M_0 T_q$。根据半直线 Weyl 解的唯一性，我们有

$$Y_q = \begin{pmatrix} (Y_q)_{11} & 0 \\ 0 & (Y_q)_{22} \end{pmatrix} M_q,$$

and

$$\partial_t (Y_q)_{jj} = \big(i z^r J_{jj} + (M_q V_r(q))_{jj} \big) (Y_q)_{jj} = O(|z|^{-1}) (Y_q)_{jj}.$$

由于在 $t = 0$ 处 $(Y_q)_{jj} = 1$，积分得到 $(Y_q)_{jj} = 1 + O(|z|^{-1})$。现在由行关系得到

$$Y_q = I_2 + O(|z|^{-1}), \qquad T_u^{-1} T_v = Y_u^{-1} Y_v = I_2 + O(|z|^{-1}).$$

对于固定的 t，x，$T_u^{-1} T_v$ 关于 z 是整函数，并且根据时间方程，其增长至多为 $\exp(C_T(1+|z|)^r)$。在角间隔小于 π/r 的相邻非实射线之间应用 Phragm´en–Lindel¨of 原理，再应用 Liouville 定理，可得 $T_u^{-1} T_v = I_2$。写作 $T = T_u = T_v$。减去两个空间方程，并利用 $U_u(0) = U_v(0)$，我们得到

$$0 = \partial_x T_u - \partial_x T_v = T\big(U_u(t) - U_v(t)\big) - \big(U_u(0) - U_v(0)\big) T = T\big(U_u(t) - U_v(t)\big).$$

由于 T 可逆，$U_u(t) = U_v(t)$。比较（2，1）项可得 $iu(t,\ x) = iv(t,\ x)$，因此 $u = v$。 ∎

定理 1 的证明。 对于 $G = \varnothing$具有谱 $\mathbb{R}$ 的无反射 Dirac 算子，根据 [9, 定理 6，其势为零。7], 因此我们取 $F = 0$。对于$G \neq \varnothing$，式（16）中的频率由（20）满足（3）。取 $F_{q_0} = F$ 如引理 10 中所述，并使用 q_0的 C^m 代表元 $x \mapsto F(x\alpha)$。引理 11 给出了（4）。

映射 $(x,\ \mathbf{t}) \mapsto x\alpha + \sum_{r=2}^{m} t_r \beta^{(r)}$ 是从 $\mathbb{R}^m$到 Θ这一紧致阿贝尔群的连续同态。特征的有限线性组合

$$\theta \longmapsto \exp\left(i \sum_{j \in J_0} n_j \theta_j \right), \qquad J_0 \subset \mathcal{J} \text{ finite}, \quad n_j \in \mathbb{Z},$$

根据 Stone–Weierstrass 定理，它们在 $C(\Theta)$ 中一致稠密。它们的拉回是 $(x,\ \mathbf{t})$ 中的三角多项式。将此应用于引理 11 中的每个 $F_{k,\ \boldsymbol{\ell}}$，可得 $\partial_x^k \partial_{\mathbf{t}}^{\boldsymbol{\ell}} q$ 对于 $k + \sum_{r=2}^{m} r\ell_r \le m$[28, 第八章]具有联合 Bohr 几乎周期性。特别地，$\partial_x^k q$ 对于 $0 \le k \le m$有界。引理 12 给出了每个 r次流的唯一性；依次应用于 t_2，……，t_m，则给出了方程 (4) 的共同解。对于三次流，根据 [25,引理 38]，v，v_x 的界已足够。

∎

4.4 定理 2 的证明

定理 2 的证明。 齐次性保证了 E 的每个有限点处都具有正的下线性密度。在无穷远点处，

$$|E \cap ([-2R,-R] \cup [R,2R])| \geq 2R - 2S_0 \geq R$$

对所有充分大的 R 均成立。因此，由维纳判据可知，每个边界点（包括 ∞）都是狄利克雷正则的。 E 的齐次性意味着 Ω 是 Widom 域 [22, Section 7]，并满足 DCT [37]。为得到定义 1 中的归一化，在 ξ_* 处将单点公式 [40, (5.1)–(5.2)] 应用于 $(F(w) - F(z))/(w - z)$。根据 (48)，差商属于 $\mathcal{N}_+(\Omega)$，因为它在 z 附近有界，在其他地方则由 $C_z(1+|F|)$ 控制。此外，定义中的加权可积性保证了该商对权重 $|s - \xi_*|^{-1}$ 可积。

对每个 j 选择 $x_j \in I_j^\circ$。对于 $t \in I_k^\circ$，应用 [24, 引理 3.2 和 (2.6)]，其中 t 是选在第 k 个间隙中的点。由此得到

$$\sum_{j \neq k} g_\Omega(x_j, t) \leq A_\eta,$$

其中 A_η 仅取决于齐次常数 η。

设 $\Omega_k = \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \setminus I_k^\circ)$ 且 $g_k = g_{\Omega_k}$。固定 $t \in I_k^\circ$，函数

$$h(z) = g_\Omega(z,t) - g_k(z,t)$$

由区域单调性可知，其在 Ω_k 中非负，并且在 t 处的奇点是可去的。在 $\partial\Omega_k$ 上，根据对该间隙中任意点应用前述估计，其边界值在 E 上为零，而在其他每个间隙上至多为 A_η。在无穷远点 $0 \leq h \leq g_\Omega(\cdot,t) \to 0$。由最大值原理得到 $h \leq A_\eta$。因此，对于 $t \in I_k^\circ \setminus \{x_k\}$，

$$\sum_j g_\Omega(x_j,t) \leq g_k(x_k,t) + 2A_\eta.$$

引理 1 的证明中的单间隙恒等式给出

$$\frac{1}{\pi}\int_{I_k} g_k(x_k,t)\,dt = \sqrt{a_k^2 - (x_k - c_k)^2} \leq a_k.$$

现在由托内利定理得到

$$\begin{aligned}\sum_j (\mathcal{K}_\Omega 1)(x_j) &= \frac{1}{\pi}\sum_k \int_{I_k^\circ} \sum_j g_\Omega(x_j,t)\,dt \\ &\leq \sum_k a_k + \frac{2A_\eta}{\pi}|G| = \left(1 + \frac{4A_\eta}{\pi}\right) S_0.\end{aligned}$$

由 $0 < \omega \leq 1$可知，对于 $\sum_j v_\omega(x_j)$同样成立相同的上界。对每个有限间隙集中的 x_j 分别取上确界，然后扩展该有限集，即得(1)，其中 $\mathcal{P}_1(E) \leq 1 + 4A_\eta/\pi S_0$。 ∎

参考文献

[1] S. Axler、P. Bourdon 和 W. Ramey，《调和函数理论》，第2版，数学研究生教材，第137卷，Springer-Verlag，纽约，2001年。https://doi.org/10.1007/978-1-4757-8137-3.[2]E. D. Belokolos、A. I. Bobenko、V. Z. Enol'skii、A. R. Its 和 V. B. Matveev，《非线性可积方程的代数几何方法》，Springer非线性动力学丛书，Springer-Verlag，柏林，1994年。[3]R. Bessonov、M. Luki´c 和 P. Yuditskii，《无反射规范系统，II. 拟周期性与特征自守傅里叶变换》，《Adv. Math.》444 (2024年)，文章109636。https://doi.org/10.1016/j. aim.2024.109636.[4] I. Binder、D. Damanik、M. Goldstein 和 M. Luki´c，《KdV 方程解的时间拟周期性》，《Duke Math. J.》167 (2018年)，第14期，2633–2678。https://doi.org/10.1215/00127094-2018-0015.[5] I. Binder、D. Damanik、M. Luki´c 和 T. VandenBoom，《Toda晶格解的时间拟周期性》，《C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada》40 (2018年)，第1期，1–28.[6] A. Boutet de Monvel 和 I. Egorova，《具有Cantor型谱的非线性Schr¨odinger方程的解》，《数学分析杂志》72 (1997年)，1–20。https://doi.org/10.1007/BF02843151.[7] A. Boutet de Monvel 和 V. Marchenko，《具有有界初始数据的非线性Schr¨odinger方程的柯西问题》，《Mat. Fiz. Anal. Geom.》4 (1997年)，第1–2期，3–45。[8] A. Chapouto、R. Killip 和 M. Vi‚san，《KdV的有界解：唯一性与拟周期性的丧失》，《Duke Math. J.》173 (2024年)，第7期，1227–1267。https://doi.org/10.1215/00127094-2023-0035.[9] S. Clark 和 F. Gesztesy，《Dirac算子的Weyl–Titchmarsh M-函数渐近性、局部唯一性结果、迹公式与Borg型定理》，《美国数学会会刊》354 (2002年)，第9期，3475–3534。https: //doi.org/10.1090/S0002-9947-02-03025-8.[10] W. Craig，《直线上Schr¨odinger算子的迹公式》，《Comm. Math. Phys.》126 (1989年)，第2期，379–407。https://doi.org/10.1007/ BF02125131.[11] D. Damanik 和 M. Goldstein，《关于˝拟周期Schr¨odinger方程的逆谱问题》，《Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.》119 (2014年)，217–401。https://doi.org/10.1007/s10240-013-0058-x.[12] D. Damanik 和 M. Goldstein，《具有拟周期初始数据的KdV 方程整体解的存在性与唯一性》，《J. Amer. Math. Soc.》29 (2016年)，第3期，825–856。https://doi.org/10.1090/jams/ 837.

[13] D. Damanik、M. Goldstein 和 M. Luki´c，小拟周期势下薛定谔算子的谱是齐次的，《谱理论杂志》**6** （2016年），第2期，415–427。https://doi.org/10.4171/JST/128。[14]D. Damanik、M. Goldstein 和 M. Luki´c，通过周期近似研究拟周期薛定谔算子的等谱环面，《发明数学》**207**（2017年），第2期，895–980。https://doi.org/10.1007/s00222-016-0679-z。[15] D. Damanik、L. Li 和 N. Strungaru，Sodin–Yuditskii 理论产生的拟周期性性质，arXiv:2610.36403（2026年）。https://doi. org/10.48550/arXiv.2610.36403。[16] D. Damanik、Y. Li 和 F. Xu，具有拟周期初始数据的非线性薛定谔方程的存在性、唯一性与渐近动力学。I. 标准非线性薛定谔方程，《数学分析杂志》，2026年10月25日在线发表。https://doi.org/10.1007/s11854-026-0462-z。[17] P. Deift，随机矩阵理论与可积系统理论中的一些公开问题，载于《可积系统与随机矩阵：纪念 *Percy Deift*》，《当代数学》，第458卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，2008年，419–430。https://doi.org/10.1090/conm/458/08951。[18] P. Deift，随机矩阵理论与可积系统理论中的一些公开问题。II，《*SIGMA*：对称性、可积性与几何方法及其应用》**13** （2017年），文章016，23页。https://doi.org/10.3842/SIGMA. 2017.016。[19] J. Eckhardt、A. Kostenko 和 G. Teschl，典则系统的谱渐近性，《纯粹与应用数学杂志》**736**（2018年），285–315。https://doi. org/10.1515/crelle-2015-0034。[20] I. E. Egorova，具有谱处处稠密的拟周期初值的 KdV 方程的柯西问题，载于《谱算子理论及相关主题》，《苏联数学进展》，第19卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，1994年，181–208。https://doi.org/10.1090/advsov/019/ 07。[21] B. Eichinger、T. VandenBoom 和 P. Yuditskii，通过 Abelian覆盖和算子恒等式研究 KdV 层级，《美国数学会会刊 *B*辑》**6** （2019年），1–44。https://doi.org/10.1090/btran/30。[22] A. Eremenko 和 P. Yuditskii，梳状函数，载于《正交多项式、特殊函数及其应用的新进展》，《当代数学》，第578卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，2012年，99–118。https://doi.org/10.1090/conm/578/11472。[23] J. Fillman、L. Li、M. Luki´c 和 Q. Zhou，三次散焦非线性薛定谔方程的拟周期解，arXiv:2508.01132v2（2025年，2026年修订）。https://doi.org/10.48550/arXiv.2508.01132。[24] P. W. Jones 和 D. E. Marshall，格林函数的临界点、调和测度与冠问题，《阿克数学》**23** （1985年），281–314。https://doi.org/10.1007/BF02384430。

[25] S. Kotani、Y. Wang、J. Xu 和 S. Zhang，无衰减假设下三次非线性薛定谔方程的整体流，arXiv:2609.23324（2026年）。
https://doi.org/10.48550/arXiv.2609.23324。[26] M. Leguil、J. You、Z. Zhao 和 Q. Zhou，拟周期薛定谔算子谱隙的渐近性，《剑桥数学杂志》12（2024年），第4期，753–830。
https://doi.org/10.4310/CJM.241128001445。[27] L. Li 和 M. Luki´c，散焦修正 KdV 方程的拟周期解，arXiv:2608.25283（2026年）。
https://doi.org/10.48550/arXiv。2608.25283。[28] L. H. Loomis，《抽象调和分析导论》，D. Van Nostrand Company, Inc.，纽约，1953年。[29] H. P. McKean 和 E. Trubowitz，在存在无穷多个分支点的情况下 Hill 算子与超椭圆函数理论，《纯粹与应用数学通讯》29（1976年），第2期，143–226。
https://doi.org/10.1002/cpa。3160290203。[30] T. Oh，具有拟周期初值的非线性薛定谔方程，《工业与应用数学学会数学分析杂志》47（2015年），第2期，1253–1270。https://doi。org/10.1137/140973384。[31] T. Oh，具有极限周期初值的散焦非线性薛定谔方程的整体存在性，《纯粹与应用分析通讯》14（2015年），第4期，1563–1580。
https://doi.org/10.3934/cpaa.2015.14.1563。[32] M. Papadimitrakis，《经典位势理论笔记》，数学系，克里特大学，2004年1月。
https://fourier.math.uoc.gr/~papadim/potential_theory.pdf。[33] H. Papenburg，具有拟周期初值的色散方程的局部适定性，《美国数学会会刊》153（2025年），第9期，3765–3780。https://doi.org/10.1090/proc/17110。[34] C. Remling 和 J. Zeng，无反射 Dirac 算子与典则系统，《谱理论杂志》15（2025年），第3期，1305–1336。https://doi.org/ 10.4171/JST/577。[35] J. L. Schiff，关于 Smirnov 的一类解析函数，《加拿大数学杂志》31（1979年），第1期，181–183。https://doi.org/10.4153/CJM-1979-018-3。[36] M. Sodin 和 P. Yuditskii，具有 Cantor 齐次谱的几乎周期 Sturm–Liouville 算子，《海尔维蒂数学评论》70（1995年），639–658。
https://doi.org/10.1007/BF02566026。[37] M. Sodin 和 P. Yuditskii，具有齐次谱的几乎周期 Jacobi 矩阵、无限维 Jacobi 反演与特征自守函数的 Hardy 空间，《几何分析杂志》7（1997年），第3期，387–435。
https://doi.org/10.1007/BF02921627。[38] A. Yu. Veretennikov 和 E. V. Veretennikova，关于多元 Bernstein 多项式的偏导数，《西伯利亚高等数学》26（2016年），第4期，294–305。
https://doi.org/10.3103/S1055134416040039。

[39] V. Vinnikov 和 P. Yuditskii, 《几乎周期 Jacobi 矩阵与 Toda 层级的函数模型》, *Mat. Fiz. Anal. Geom.* **9**（2002年）, 第 2 期, 206–219。[40] P. Yuditskii, 《整函数的 L^1 极值问题》, *J. Approx.Theory* **179**（2014年）, 63–93。https://doi.org/10.1016/j.jat.2013.11. 011。