arXiv:2611.29933v1 [econ.TH] 23 Nov 2026

粗粒度价格歧视*

Yaonan Jin† Yingkai Li‡

2026年11月24日

摘要

我们研究在异质买家以独立估值竞争稀缺库存时，将卖方限制为采用 L 标价所带来的收入成本。我们的大市场假设要求，移除任意一位买家对最优收入的影响都很小。我们先在每个固定库存水平下，使买家可以任意程度地相互替代，然后再让库存增长。在此极限下，一个价格可保证获得最优机制收益的一半，两个价格则可保证获得 $e/(e+1)$，约为73.1%。对于 $L \geq 3$，相应的保证比例为 $1-1/(2L-1)$。这些保证适用于买家之间需求存在任意差异的情形，也不要求为每个客户群体分别设定价格。

关键词：价格歧视、粗粒度价格、大型市场、近似。JEL分类代码：D42、D44、D82。

1 引言

需求差异可能使量身定制的价格具有价值。因此，能够区分众多客户群体的卖方可能希望为每个客户群体设定不同的价格。我们研究的是：当异质买方竞购稀缺库存时，短价格表在多大程度上能够接近不受限制的个性化报价所带来的收入。

企业通常比其价格表所透露的信息更了解客户。DellaVigna 和 Gentzkow （2019）记录了美国零售连锁企业内部几乎统一的价格，尽管各门店之间存在显著差异。Sephora 的 Savings Event 提供三种会员等级折扣，尽管该企业收集了详细的购买记录和客户偏好。[1]维持更多价格可能需要额外的管理和沟通，并且

*我们感谢 Yiding Feng、Jiashuo Jiang 和 Wenjia Wang 富有价值的讨论。Yaonan Jin 感谢香港科技大学启动基金提供的资金支持，Yingkai Li 感谢新加坡国立大学启动基金提供的资金支持。本文在 ChatGPT 的协助下完成。

†香港科技大学。电子邮箱： jinyaonan@ust.hk

‡新加坡国立大学。电子邮箱： yk.li@nus.edu.sg

[1]所宣传的会员等级折扣为 10%、15% 和 20%；此外还提供特定产品优惠和推荐优惠。请参阅 Sephora 的 Savings Event常见问题 和 隐私政策 （访问日期：2026年10月31日）。

使待遇差异更难解释。当买家从共享库存中购买时，短价格表所带来的收入成本尤其难以评估：吸引一位客户的折扣可能会占用原本可供另一位客户使用的库存。

我们研究这样一种情形：卖方拥有固定库存的同质商品，每位买家都只需要一单位。买家的价值是私人信息，且从已知分布中独立抽取；不同买家所对应的分布可以任意不同。卖方最多选择 L 个标价，并在观察到买家的价值之前，为每位买家指定一个报价。她先报出较高的价格，库存售罄后即停止。无限制的个性化标价允许为每位买家设定不同价格，同时采用相同的分配规则，从而直接衡量限制价格差异化所带来的成本。我们的保证以更强的基准为参照，即激励相容机制的最优收入；该机制还可以根据买家报告的价值来决定分配和付款。

我们的大市场假设要求，失去任意一位买家对最优收入的影响都很小。该条件允许某位买家单独看来价值很高，只要其他客户能够替代她的贡献即可。举例来说，考虑任意固定的一组客户群体。每个群体中的买家从同一分布中独立抽取价值，而不同群体的分布可以任意不同。随着每个群体中的买家人数增加，每位买家都变得可替代，而各群体之间的需求差异仍然存在。复制说明了这一假设可能如何成立；但该定理并不要求存在这种群体结构。

我们的主要结果对买家需求分布作统一界定，衡量使用 L 价格所造成的收入损失。我们首先在每个固定库存下使买家变得任意可替代，然后令库存增长。对于 $L \geq 3$，最优收入与最佳L-价格收入之比的最坏情况比率介于 $1 + 1/(2L - 1)$ 和 $1 + 1/(2L - 2)$ 之间。因此，要将较小的最坏情况收入缺口减半，所需的价格数量约为原来的两倍。在同一极限比较下的明确保证表明，三种价格至少能达到最优收入的 80%，十种价格则至少能达到 94.7%。在这种渐近比较中，为达到给定收入保证所需的价格数量不必随客户群体数量增长。

这两个基准给出了相同的精确渐近比率（定理 1）。因此，极限损失衡量的是限制价格差异化本身所付出的代价。对于每个固定的有限 L，紧性构造给出了这样的市场：即使采用最佳的 L 价格，在此极限下仍会留下不可忽略的收入损失。因此，大市场假设并不能消除限制价格所带来的经济成本。

核心直觉在于，收取一定金额的支出需要多少库存。我们在一个简单的辅助市场中对此加以分析：买家具有已知单位价值和预算，并且可以购买预算所允许的任意数量。在某个可接受价格下，只要剩余库存充足，买方就会花完预算。降低她的价格可以维持支出，但

会增加收取这笔支出所需的数量。即使在没有不确定性的市场中，将买家归为一组并向其收取相同的较低价格也会产生库存成本。增加一个价格可以为部分原本会被合并定价的买家保留较高价格，从而降低这项成本。

卖方不必保留每一种支出来源。当每位买家都按单位价值付款时，价值最低的买家每美元支出所消耗的库存最多。放弃其中一部分支出，可以释放足够的库存，从而将其余需求合并到少数几个价格上。权衡合并定价的成本与排除部分需求所节省的库存，即可得到收入保证。我们首先在辅助市场中刻画这种权衡。

在极限比较中，这种辅助市场中的权衡也决定了原始市场采用粗粒度价格歧视时最坏情况下的收入损失。这种联系是双向的。实施辅助价格时，竞争会限制收入损失；另一个比较则处理不确定销售。反过来，具有私人价值的市场也能够复现这种辅助市场中的权衡。

有限市场界将库存风险与竞争的影响区分开来（命题2）。库存增加会降低不确定购买造成的相对损失，而个体可替代性增强则会减少实施辅助价格所产生的误差。库存增加时，竞争相对于库存必须变得更强。复制的客户群体提供了一个充分条件：每个群体的增长速度都快于库存。若没有这种控制，即使个体移除损失变小，固定价格表所能获得的收入份额仍可能趋近于零（注1）。

1.1 相关文献

最接近的经济学文献研究了统一定价与三级价格歧视的相对盈利能力。Malueg 和 Snyder (2006) 在需求和成本条件的约束下，根据市场数量或不同歧视性价格的数量，对差别定价带来的收益进行了界定。Bergemann 等 (2022) 得出，在各细分市场具有共同支持集且细分市场利润关于价格呈凹性的条件下，统一定价可保证获得至少一半的利润，且这一保证不受细分市场数量影响。我们的“大市场假设”为稀缺库存市场中的利润保证提供了另一种依据。该假设允许支持集存在异质性；我们的界限则量化了在统一定价与不受限制的价格歧视之间采用中间数量的价格所带来的收入成本。

其他研究探讨了使差别定价成为可能的信息。Bergemann 等（2015）刻画了在总需求保持不变时，通过改变市场细分所能实现的消费者剩余与生产者剩余组合。Xie 等（2025）研究了必须根据样本学习客户特征与估值之间关系时的定价问题，并指出有限数据下的估计成本如何使差别定价的盈利能力低于统一定价。我们的卖方已知需求分布，并选择

如何在买家之间分配有限数量的价格。限制针对的是她实际采用的价格，同时允许她利用所有可获得的需求信息。这样便将粗粒度定价的收入成本与信息的设计或获取区分开来。

拍卖文献清楚地表明，要获得 substantial 保证，仅有大量库存是不够的。对于具有独立估值的单件商品，Alaei 等人 (2019) 将匿名定价与事前松弛进行了比较，而 Jin 等人 (2019) 在其中所考察的分布条件下，确立了其相对于最优拍卖的紧收入差距。对于多单位商品，Jin 等人 (2022) 表明，随着库存增加，差别定价的优势可以无限增长，即使在这样一个分布类别中：不受限制的顺序标价销售会渐近达到最优。我们的结果确定了一种竞争性情形，在该情形下，单一价格造成的损失会随着库存增加而保持有界，并量化了增加价格档位所带来的收益。我们的主要保证采用了由 Myerson(1981) 刻画的最优机制这一更强的基准；该机制与垄断定价的关系由 Bulow 和 Roberts (1989) 加以阐述。

Blumrosen 和 Holenstein (2008) 比较了在极值条件下，针对同分布买家的统一标价和差别标价与最优单件商品拍卖的渐近收入。 Correa 等人 (2025) 研究了大型独立同分布市场中的固定价格福利保证，并在虚拟价值满足适当条件时推导出收入保证。这些论文在市场扩张过程中保持共同需求分布不变。我们的界对满足大市场假设的异质市场一致适用，允许不同市场之间的分布发生变化，并量化了限制价格数量所带来的成本。

我们对大市场的概念，与 Dughmi 等人 (2012) 在拟阵环境中确立的新增买家带来的递减收入回报有关。他们关于收入次模性的结果有助于解释，为什么在客户群体内部进行复制会降低每位买家离场所造成的影响。经典大规模拍卖结果，例如 Swinkels (2001)，研究的是向配置效率的收敛。这里的经济学问题是：当买家变得个体可替代后，有限数量的价格能够在多大程度上逼近最优收入。我们的精确界量化了粗粒度定价造成的剩余损失如何取决于价格数量。

最后，对价格的限制不同于 Hart 和 Nisan (2019) 研究的菜单规模复杂度；在该研究中，拥有多维估值的单个买方会在分配—付款选项中进行选择。在我们的设定中，每位买家都会收到一个指定报价，而简洁性取决于买家之间所使用的价格数量。该分析以 Chawla 等人 (2010) 的顺序标价销售框架及 Alaei (2014) 的方法为基础；Yan(2011) 则研究如何在需求不确定时将预期分配与可行销售联系起来。

2 模型

卖方拥有 $k \geq 1$ 单位相同的不可分割商品库存，并面对 $n \geq 1$ 位买家，每位买家需求一单位。买家 i 私下知道自己的价值 $v_i \geq 0$，该价值取自一个均值有限的分布 F_i。买家均为风险中性，并具有拟线性效用。

卖方观察每位买方的身份，并了解分布概况 $F = (F_1, \ldots\ldots, F_n)$。分布 F_i 概括了她关于买方 i的信息，包括可观察特征或购买历史。在给定这些信息的条件下，各买方的估值相互独立，其分布可以任意不同。具有相同特征的买方可以具有相同的分布，但私人价值不同。

2.1 价格歧视

买方会收到可强制执行的买方专属报价。这描述了卖方能够核实身份或资格，并阻止买方转而享受另一位顾客价格的情形。每位买方都可以接受或拒绝分配给自己的报价；拒绝并不会使其获得其他价格。

不受限制的价格歧视。 卖方在观察到估值之前确定价格向量 $p = (p_1, \ldots\ldots, p_n) \in [0, \infty]^n$，允许对每位买方设定不同的价格。她按照指定价格弱递减的顺序接触买方；价格相同时按索引排序，并跳过 $p_i = \infty$的买方。被接触的买方当且仅当 $v_i \geq p_i$时接受报价；卖方在 k 笔销售后停止。记$\mathrm{LP}_\infty(F)$为所有此类价格向量所能实现的预期收入上确界。

对服务优先级的控制属于环境的一部分。例如，卖方可以在分配库存前收集具有约束力的购买请求，或选择先向哪些客户群体报价。这类安排使较高价格的报价能够获得优先权，即使买家是在不同时间到达的。

粗粒度价格歧视。 卖方选择有限数量的价格档位，并根据完整配置 F 将买家分配到这些档位。因而，需求分布不同的买家可能支付相同的价格；价格类别不必与既有客户群体相吻合。

定义1（L档机制）：对于 $L \geq 1$， L档机制 是上述形式的一种序贯标价机制，其价格向量至多包含 L 个不同的有限值。

我们将 $\mathrm{LP}_L(F)$ 记作在这类价格向量上的预期收入上确界。值$p_i = \infty$ 表示不提供报价，并不计作一个价格档位。在只有一个档位时，所有获得报价的买家

都面对相同的价格；允许最多 n 个档位后，可以为每位买家设定不同的价格，并得到 $\mathrm{LP}_n(F) = \mathrm{LP}_\infty(F)$。

收入基准。 不受限制的个性化标价 $\mathrm{LP}_\infty(F)$ 为限制价格数量提供了直接基准。我们还将粗粒度定价与激励相容机制所产生的最优收入进行比较；这类机制可以根据买家的报告价值决定分配和支付。

根据启示原理（Myerson，1981），我们可以将注意力限制在直接机制 $(X,\ P)$ 上。在每个报告组合 $\hat{v} \in [0,\infty)^n$，$X_i(\hat{v}) \in [0,1]$ 和 $P_i(\hat{v}) \in \mathbb{R}$ 分别是买家的分配概率和期望支付，均对内部随机化取平均。可行性要求在每次实现中至多有 k 名买家获得一个单位。

在其他买家如实报告的情况下，买家 i 的期望效用为

$$u_i(v_i, \hat{v}_i) := \mathbb{E}_{v_{-i}\sim F_{-i}}\left[v_i X_i(\hat{v}_i, v_{-i}) - P_i(\hat{v}_i, v_{-i})\right].$$

若对于每个 i 和所有 $v_i \hat{v}_i \geq 0$，$u_i(v_i, v_i) \geq u_i(v_i, \hat{v}_i)$ 以及 $u_i(v_i, v_i) \geq 0$，则该机制是贝叶斯激励相容的且中间个体理性的。最优收入是

$$R^*(F) := \sup_{(X,P)} \mathbb{E}_{v\sim F}\left[\sum_{i=1}^{n} P_i(v)\right],$$

其中，上确界取遍满足这两个条件的可行直接机制 s.

2.2 大市场假设

我们用买方中任意一人离开后卖方损失的收入来衡量竞争。该买方离开后，卖方可以重新设计销售机制，同时保持库存不变，并保留关于其余买方的相同信息。我们的大市场假设要求，其余买方的需求能够支撑几乎相同的最优收入。

定义2（大市场假设）：对于 $\varepsilon \geq 0$，若市场 F 是 ε-大，则

$$R^*(F_{-i}) \ \geq\ (1-\varepsilon)\, R^*(F) \qquad \text{for every buyer } i.$$

等价地，移除损失 $\Delta_i(F) := R^*(F) - R^*(F_{-i})$ 至多为 $\varepsilon R^*(F)$。更小的ε 意味着每位买方的贡献更容易被替代。这使得单独服务某一买方时仍可获得可观收入。例如，假设 $k+1$ 位买家具有确定性价值 $a > 0$。任何买方离开之前与之后，最优收入均为 ka，尽管每位买方单独可产生收入 a。该市场是 0-large。

复制提供了该假设出现的另一种途径。考虑一组固定的客户群体，每个群体内的买家独立地从共同分布中抽取估值。扩大每个群体会为卖方提供更多针对每位客户的替代品，从而使个人离开相对于固定库存下的最优收入而言不那么重要。各群体之间的需求分布仍可任意不同，因此促使个性化定价的那些差异依然存在。第4.2节给出了正式计算。该假设本身既不要求群体结构，也不要求群体内部具有相同分布。

3 粗粒度定价的库存成本

为了单独考察以统一价格对买家进行合并定价所产生的库存成本，我们引入一个具有已知估值和支出预算的辅助市场。降低可接受价格不会改变买家愿意支出的预算，但会增加收取该预算所需的库存。卖方可以通过放弃从低价值买家那里获取的部分支出来满足这部分额外需求。回到原始市场时，辅助预算将代表收入机会。原始买家仍具有私人价值和单位需求，且没有预算约束。

3.1 辅助环境

一个实例 $I = ((w_i,\ \beta_i)_{i=1}^n,\ K)$由一个分配容量 $K > 0$ 和有限个买家构成。分配可以是分数形式，总数量至多为 K。买家 i 具有确定性的单位价值 $w_i > 0$ 和确定性预算 $\beta_i > 0$，二者均为卖方所知。她对数量 $q \geq 0$ 的价值为 $w_i q$，除预算外没有数量限制。在指定价格 $p > 0$ 下，若 $p \leq w_i$，她的期望数量为 β_i / p ；否则为零。

因此，只要价格可接受且仍有足够库存，买方就会用完其全部预算。我们采用等价时购买 $p = w_i$。如果库存不足，她会购买剩余数量，并按每单位的指定价格付款。

卖方为每位买方指定一个价格，其中 $p_i = \infty$ 表示不提供报价，并按照指定价格从高到低的顺序为买方提供服务，同价时按索引打破平局。最多只能使用 L 个不同的有限价格。用 $\mathrm{LP}_L^X(I)$ 表示这些政策的上确界收入，用 $\mathrm{LP}_\infty^X(I)$ 表示不受限价格基准，其中上标 X 表示辅助市场。辅助市场中的收入是确定性的。

库存限制至关重要：若没有这一限制，只需设定一个低于每位买家价值的正价格，即可收取所有预算。在库存稀缺时，采用不受限辅助价格的最优策略是向每位买家收取其价值，并按价值递减顺序为买家供货，直到库存耗尽，以此收取预算。引理A.1将这一观察形式化。容量

当买家以其价值购买时，容量足以收取每位买家的全部预算

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{w_i} \le K, \tag{1}$$

因此，无限制收益即为可用的总支出， $B := \sum_{i=1}^{n} \beta_i$。这种情况使合并定价的库存成本尤为透明；下面的保证适用于每一个辅助实例，包括库存较少的那些。

以价格 p 收取的每一美元使用 $1/p$ 单位。下面的例子说明，这种库存成本如何使价格的个数与位置都至关重要。

例1（额外价格买到了什么）：有三名买家，估值分别为6,4, 2，预算分别为6, 8, 6。按每位买方的价值收费所用数量为1,2, 3，因此无限制收益总额为 $B = 20$。设库存为 $K = 7$。

该表为每位买方分配她所接受的最高标价。库存需求是收取所有符合条件的预算所需的数量；当其超过 K时，服务会在库存耗尽后停止。

价格数量	价格表	库存需求	收入
三	$6, 4, 2$	$1 + 2 + 3 = 6$	20
two	$4, 2$	$14/4 + 6/2 = 6.5$	20
two	$6, 2$	$6/6 + 14/2 = 8$	18
one	4	$14/4 = 3.5$	14
one	2	$20/2 = 10$	14

第一位买家在这些价格下都会花费 6 美元，但价格越低，购买的单位越多。以 4 的价格将她与中间那位买家合并定价，库存便足以收齐所有预算。若保持她的价格为 6，同时以 2 的价格将另外两位买家合并定价，则库存会耗尽，收入为 18。因此，即使最低价格不变，价格的安排仍然很重要。

单一价格的收入至多为 14：价格高于 4 时只能收取第一位买家的预算，价格处于 $(2, 4]$ 时至多收取前两位买家的预算，而价格不超过 2 时收入至多为 $2K = 14$。定价为 4 时排除价值最低的买家，定价为 2 时售出全部库存，二者都能达到这一上限。精心选择两个价格即可收齐 20。增加第三个价格不会改变收入，却能将库存需求从 6.5 降至 6。

3.2 收入保证与紧确常数

下一条命题刻画了限制价格表所带来的最坏情况下的收益损失。其界限不取决于买家的数量，也不取决于他们的估值和预算有何不同。

命题 1（粗粒度定价的精确代价）： 对于每个 $L \geq 1$，定义最坏情况收入比

$$C_L^\star := \sup_I \frac{\mathrm{LP}_\infty^X(I)}{\mathrm{LP}_L^X(I)},$$

其中，上确界取遍库存、估值和预算均为正的非空有限辅助实例。于是

$$C_1^\star = 2, \qquad C_2^\star = 1 + \frac{1}{e}.$$

对于 $L \geq 3$,

$$1 + \frac{1}{2L-1} \leq C_L^\star \leq 1 + \frac{1}{2L-2}.$$

因此，一个价格可以保证获得无限制收益的一半，而两个价格可以保证获得以下比例 $e/(e+1)$。这两个保证是紧的。对于 $L \geq 3$，精确常数仍未解决；所述下界也不一定是精确的，正如命题 A.1所示。这些界表明，要将较小的最坏情况下的收入缺口减半，大约需要两倍数量的价格。

3.3 合并定价、排除与库存

对于满足（1）的任意有限辅助实例，记 $B := \sum_{i=1}^n \beta_i$ 为其总预算。按照价值递减顺序排列买方，价值相同时按索引打破平局，并将其预算依次排列在 $(0,\ B]$ 上。买方 i 占据长度为 β_i的区间。在预算排名 R处，令$w(R)$ 为相应买方的价值。以该价值向她收取一美元需要使用$1/w(R)$单位的库存，从而得到单位成本曲线

$$u(R) := \frac{1}{w(R)}, \qquad 0 < R \leq B, \qquad u(0) := u(0^+).$$

每个预算区间的形式为 $(z, y]$，因此向上的跳跃会立即在其右侧生效。该函数单调不减且左连续。它的面积就是按个体价值收取所有预算所需的数量：

$$\int_0^B u(R)\, dR = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{w_i} \leq K.$$

图 1 展示了一种方案：按两种价格收取前 b 美元预算，并在 R_1处设置边界。按每个区块中买方最低的价值收费，会产生橙色库存成本。放弃最后 $B-b$ 美元的预算，则会释放绿色库存。按个体价值使用的数量加上合并定价成本，必须不超过库存 K。

定义 3（价格方案）：一个方案将选定支出划分为至多 L 组，每组

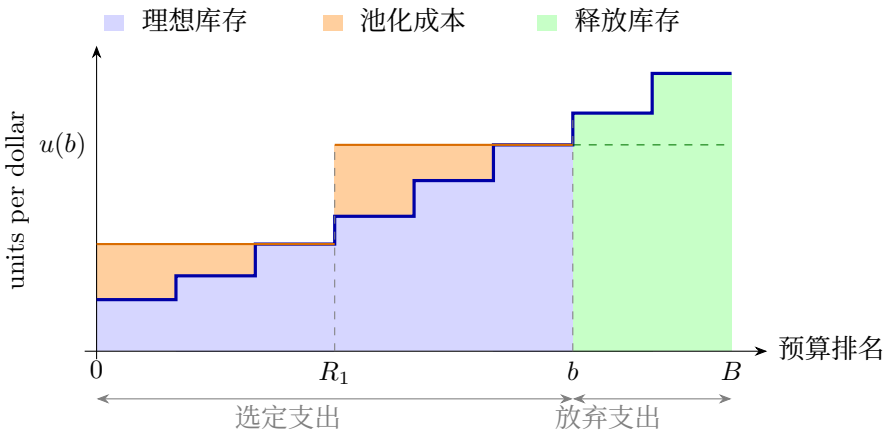


图 1：上升阶梯表示个体价值对应的单位美元库存。选定支出 $(0,\ b]$ 被合并定价为区块 $(0,\ R_1]$ 和 $(R_1,\ b]$，每个区块均按其端点价格收费。橙色区域表示合并定价所需的额外库存。绿色区域表示因放弃 $(b,\ B]$而释放的库存；其至少为 $(B-b)u(b)$，即虚线绿色线下方的矩形区域。

收取统一价格。它选择 L 个边界位置

$$0 = R_0 \le R_1 \le \cdots \le R_L = b \le B.$$

每个非空区块 $(R_{\ell-1},\ R_\ell]$ 均使用价格 $p_\ell = 1/u(R_\ell)$。其中的买家之所以接受该价格，是因为他们的估值至少等于该区块端点处的价值。该方案的收入为 b，其库存需求为

$$N := \sum_{\ell=1}^{L} u(R_\ell)(R_\ell - R_{\ell-1}).$$

当 $N \le K$ 时，它是可行的。重复的边界表示空区块，因此 L 个位置至多允许 L 种不同价格。在至多使用 L 种价格且容量为 K 时，可收取的最大支出为

$$V_L = V_L(u, K) := \max\{b : N \le K\}.$$

一个边界可以将买方的预算分割为多个部分。空区块的贡献为零，因此无需进行价格评估。

根据备注，最大值存在A.1。下一个引理将方案价值与辅助收入对应起来，并通过为每位买方指定一个价格来实现预算份额。

引理 1（规范价格方案）： 对于满足 （1） 的有限辅助实例，

$$\mathrm{LP}_L^X(I) = V_L(u, K).$$

每个收入为 b 的可行方案都可以通过一种策略来实施，该策略为每位买方指定一个价格，且不同价格最多为 L 个，并可获得至少 b 的收入。

证明见附录 A。

图 1 中的库存比较指引我们应放弃多少支出，以便释放的库存足以弥补合并定价的成本。我们先证明 $L \geq 3$的上界，再通过一个简单的下界构造说明合并定价造成的损失。附录 A给出了精确的单价和双价计算，以及命题 L 中的更精确有限 1下界。

$L \geq 3$的上界证明。 为证明上界，将每个预算限制为不受限制的辅助定价所收取的付款，并令 B 为这些付款之和。由此得到的预算在个体价值下是可负担的。之后恢复原始预算，不会降低固定价格分配方案的收入。因此，我们可以考虑满足 $\int_0^B u(R)\,dR \leq K$ 的非递减单位成本曲线 u。

对于 $L \geq 3$，我们放弃最低价值买家的部分支出，以释放合并定价其余买家所需的库存，如图 1所示。记 b 为选定支出，记 d 为内部价格边界之间的间距。令

$$b := \frac{2L-2}{2L-1}B, \qquad d := \frac{b}{L-1}.$$

将 $L-1$ 内部价格边界设置为 ξ，$\xi + d$、……、$\xi + (L-2)d$，其中 ξ 在 $(0,\ d)$ 上服从均匀分布，并加入端点 0 和 b。按每个区块最后一个预算美元对应的价值向其收费。单位成本的向上跳跃会增加库存，其数量等于跳跃高度乘以前一个边界到该处的距离。对网格进行统一平移后，该距离的平均值至多为网格间距的一半，即 $d/2$。这就是系数 $1/2$的来源。由于跳跃高度之和至多为 $u(b)$，因此额外库存的期望值至多为 $du(b)/2$。选择 b 可使放弃的支出释放至少这么多库存：

$$\int_b^B u(R)\,dR \geq (B-b)u(b) = \frac{d}{2}u(b).$$

因此，某个固定分区能够容纳在库存之内 K 并收取 b，从而证明 $C_L^\star \leq B/b = 1 + 1/(2L-2)$。引理 1 通过为每个买方设定一个价格来实现该分区，即使边界将某个预算一分为二时也是如此。

□

一个下界示例。对于 $L \geq 3$，以下构造给出 $C_L^\star \geq 1 + 1/(2L)$，这是一个比命题1中的界更弱的下界。令单位成本在支出的第一个美元区间内线性上升。合并定价一个宽度为 h 的区间，会产生三角形额外库存成本

$h^2/2$。相等区块宽度使这些成本之和最小，从而得到价格为 L 的 $1/(2L)$。我们再追加 $1/(2L)$美元的支出，单位成本为一：收取这部分最终支出，恰好需要与合并定价第一个美元区间所消耗的额外库存相同的库存。形式化地，考虑以下极限单位成本曲线

$$u(R) = \min\{R, 1\} \quad (0 < R \le B), \qquad B := 1 + \frac{1}{2L}, \qquad K := \frac{1}{2} + \frac{1}{2L}.$$

该分布的总支出为 B，面积为 K。对该分布应用相同的价格方案公式，将 $(0, 1]$ 划分为 L 个等宽块，恰好使用 K 个单位，并收取一美元。

附录 A.4 证明了该方案对于此分布是最优的，因此 $V_L(u, K) = 1$。有限的正阶梯近似可得到收入比趋近于 B；命题 A.2 为这一推导提供了依据。因此 $C_L^\star \ge 1 + 1/(2L)$。

4 大市场中的收入保证

我们回到具有私人价值和单位需求的买家。此时，降低价格可能会减少预期收入。大市场假设限制了实施辅助价格所造成的收入损失，使我们能够为原始市场中的粗粒度价格歧视推导收入保证。第 4.2 节从有限市场收益界和相应的紧致性陈述推导出定理。第 5节和 6 节证明这两个要件。

令 $D_i(p) := \mathbb{P}_{v_i \sim F_i}(v_i \ge p)$ 表示买家 i 在价格 $p \ge 0$ 下的需求，以应用库存约束前的接受概率衡量。她的分位数价格 $v_i(q)$ 是指她以至少 q的概率接受的最高价格。将该价格乘以服务概率 q，即可得到她的收入曲线：

$$v_i(q) := \sup\{p \ge 0 : D_i(p) \ge q\}, \qquad R_i(q) := q\, v_i(q), \qquad q \in (0, 1],$$

其中 $R_i(0) := 0$。

Def定义 4（正则性）： F_i 是正则的，当且仅当其收入曲线 R_i 在 $[0, 1]$上是凹函数。 .

正则性是最优拍卖理论中的一项标准假设（Myerson，1981）。从经济学角度看，它要求随着成交概率增加，边际收入递减，从而将最优拍卖设计与垄断定价联系起来（Bulow 和 Roberts，1989）。[2]

对于固定库存 k 和 $\varepsilon \ge 0$，用 $\mathcal{F}_k(\varepsilon)$ 表示由相互独立的正则 ε-大型市场组成、具有有限均值且满足 $R^*(F) > 0$ 的类别。正收入限制使得

[2]正则性在技术上有助于简化论证，而且可以大幅放宽。附录 D 证明，对于更广泛的准正则分布类别，同样成立的收入界限和尖锐的极限比率；这一类别包括独立正则抽样的次序统计量。

下面的收入比率定义明确；零收入市场则显然满足相应的收入保证。

4.1 限制价格的尖锐成本

在每个固定库存下，竞争首先变得任意激烈，从而控制实施辅助价格所造成的损失。随后库存增加，消除剩余的库存风险。

定理 1（粗粒度价格歧视的成本）：对于每个固定的 $L \geq 1$,

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sup_{F\in\mathcal{F}_k(\varepsilon)} \frac{R^*(F)}{\mathrm{LP}_L(F)} = \lim_{k\to\infty} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sup_{F\in\mathcal{F}_k(\varepsilon)} \frac{\mathrm{LP}_\infty(F)}{\mathrm{LP}_L(F)} = C_L^\star.$$

两个基准得出的保证收入份额都同样尖锐，为 $1/C_L^\star$，因此极限损失衡量的是限制价格差异化本身的成本。向原始买家提供辅助价格时，竞争会限制收入损失；库存增加则会减少不确定购买造成的损失。剩余损失是合并需求所产生的辅助库存成本。由于 $C_L^\star > 1$ 对每个有限的 L都成立，即使买家变得任意可替代，这项成本仍可能持续存在。第6 节构造了趋近于该成本的市场，其中卖方可以同时优化两种价格及其分配方案。

表 1 将命题 1 转化为收入份额。对于一种和两种价格，这些保证是尖锐的；对于更多种 L，则构成尖锐份额的下界。

L	嵌套极限中的比率界	保证收入份额
1	2	50.0%
2	$1+\frac{1}{e}$	73。1%
3	$\frac{5}{4}$	80。0%
4	$\frac{7}{6}$	85。7%
5	$\frac{9}{8}$	88.9%
10	$\frac{19}{18}$	94.7%

表1：先取大市场极限、再取大库存极限后的明确收入保证。所显示的份额对于 $L = 1$,2 等于 $1/C_L^\star$，并且是 $L \geq 3$对应锐利份额的下界。

这些保证针对基准总收入，并且对所有允许的需求分布都一视同仁。买方分配仍可利用所有可用的需求信息。

4.2 库存风险与竞争

在有限库存下，保证既反映了不确定购买的影响，也反映了卖方对个体买方的依赖。接下来的界将这些影响与短价格表的辅助成本区分开来。

命题 2（有限市场收益界）：对于整数 k，$L \geq 1$，令

$$c_k := 1 - \frac{k^k}{e^k k!}, \qquad \varepsilon_0(k) := \{k[2(2+\sqrt{2})]^3\}^{-1}.$$

对于每个 $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0(k)$ 以及 $F \in \mathcal{F}_k(\varepsilon)$，

$$\frac{R^*(F)}{\mathrm{LP}_L(F)} \leq \frac{C_L^\star}{c_k} + 8\left(2+\sqrt{2}\right)(k\varepsilon)^{1/3}.$$

系数 c_k 反映了库存风险。即使预期需求不超过可用库存，实际购买量仍可能超出库存，使卖方无法收取所有潜在付款。库存越多，此上界所允许的损失就越小：$c_k \to 1$，因此收入损失 $1 - c_k$ 和比率惩罚 $1/c_k - 1$ 都会趋于零。引理 B.4 给出了不确定购买下的收入比较。

额外项反映了个体可替代性。在库存固定时，更激烈的竞争会为每位买方提供替代品，从而降低 ε 以及实施辅助价格所造成的收入缺口。若库存也增加，竞争就必须足够增强，才能使 $k\varepsilon$ 保持较小。特别是，$k \to \infty$ 和 $k\varepsilon \to 0$ 使两项修正都趋于零，从而得到相同的渐近上界 $C_L^\star$。立方根速率源于我们在证明中对误差项的权衡；我们并不声称其指数或系数是最优的。该上界也适用于不受限制的个性化标价，因为 $\mathrm{LP}_\infty(F) \leq R^*(F)$。

有限市场界为定理 1 提供了上界。反向不等式要求市场因限制价格而产生的损失趋近于辅助损失。下面的命题给出了这样的市场；其构造见第6 节。

命题 3（大型市场中的紧性）：对于任意整数 $L \geq 1$ 和 $\eta > 0$，存在一个整数 $k_0 \geq 1$，使得对于任意整数 $k \geq k_0$ 和任意 $\varepsilon > 0$，存在某个 $F \in \mathcal{F}_k(\varepsilon)$ 满足

$$\frac{\mathrm{LP}_\infty(F)}{\mathrm{LP}_L(F)} > C_L^\star - \eta.$$

定理的证明 *1*。由于类 $\mathcal{F}_k(\varepsilon)$ 随着 ε 减小而收缩，因此两个内极限均存在。在命题 2 中取上确界，然后在固定 k 时取 $\varepsilon \downarrow 0$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{F \in \mathcal{F}_k(\varepsilon)} \frac{R^*(F)}{\mathrm{LP}_L(F)} \leq \frac{C_L^\star}{c_k}.$$

命题 3 给出了下界 $C_L^\star - \eta$，作为 $\mathrm{LP}_\infty(F)/\mathrm{LP}_L(F)$ 在每个充分大的 k下的内极限。由于 $\mathrm{LP}_\infty(F) \le R^*(F)$，两个比值的内极限都介于这些界之间。令 $k \to \infty$，然后令 $\eta \downarrow 0$，利用 $c_k \to 1$。 □

第 2.2 节中的客户群体说明了竞争如何降低 ε。假设群体 g 有 n_g 位买家，其估值独立地取自共同分布 H_g，不同群体的分布可以任意不同。对于群体 i 中的买家 g，

$$\Delta_i(F) \le \frac{R^*(F)}{n_g}.$$

事实上，对称性使同一群体内的移除损失相等，而根据收入次模性（ $\sum_{j=1}^{n} \Delta_j(F) \le R^*(F)$（Dughmi 等人，2012）。因此 $\varepsilon = 1/\min_g n_g$ 已足够；扩大每个群体会增强个体可替代性，同时保留需求差异。随着库存增加，只需让最小群体的增长速度快于库存，使得 $k/\min_g n_g \to 0$。

仅有大量库存，并不能为固定数量的价格提供一致性保证。以下示例还说明，个体可替代性必须结合库存来考量。

注释 1（相对于库存的竞争）：设有 k 单位和 k 位买家，其确定性价值为 $v_i = 1/i$。他们的分布是正则的，最优收入为 $H_k := \sum_{i=1}^{k} 1/i$，其增长阶为 $\log k$。移除买家 i 会造成 $1/i \le 1$的损失，因此对于 $\varepsilon_k = 1/H_k \to 0$，该市场是 ε_k-大的。在任何正的标价 p下，至多有 $\min\{k, \lfloor 1/p \rfloor\}$ 位买家接受，因此收入至多为

$$p \min\{k, \lfloor 1/p \rfloor\} \le 1.$$

因此，一个 L 级机制的收入至多为 L，而在固定 L 时，其占最优收入的份额趋于零。这里不存在库存风险：每位买方都能得到服务，且估值均为已知。损失源于短价格表必须覆盖的价值层级数量不断增加。尽管 $\varepsilon_k \to 0$，乘积 $k\varepsilon_k$ 仍发散。因此，仅有较小的个体移除损失，并不足以保证在买家数量和库存任意共同增长时仍满足保证。

5 有限市场界限的证明

为了证明命题 2，我们需要构造一个辅助市场，使其无限制收益几乎与最优机制收益相当，并且能够以很小的损失向原始买家提供粗粒度价格。这两个性质使我们能够应用第 3 节中的库存比较。我们先陈述归约并汇总界限，然后构造辅助市场并实施其价格。

5.1 约化与收益界

固定整数 k， $L \geq 1, \varepsilon \geq 0$、市场 $F \in \mathcal{F}_k(\varepsilon)$，以及 $0 < s < 1/2$。简记 $R^* := R^*(F)$ 和 $\mathrm{LP}_L := \mathrm{LP}_L(F)$。参数 s 控制下文构造的竞争性阈值的可靠性； $\delta := s/(1-s)$ 则界定收益基准中由此产生的相对收益缺口。

命题 4（约化至辅助市场）： 存在一个辅助实例 $I =I$（F、 s），其容量为 $K \leq k$，满足：

（*i*）容量足以在个体价值处收取所有预算，如 （1）中所述，且不受限的辅助收入 B ：$=\mathrm{LP}_\infty^X$（I） 满足

$$R^* \leq B + \delta R^*.$$

（*ii*）对于 I 的任一至多使用 L 个价格、收入为 b 且库存需求为 N 的可行定价方案，都存在一个针对 F 的确定性 L 层机制，其预期收入至少为

$$c_k \left(b - \sqrt{\frac{\varepsilon R^*}{s} bN} \right).$$

第（i）部分将不受限的辅助收入 B 与最优机制收益 R^*进行比较。命题 1 中的辅助保证随后界定了仅使用 L 个价格的代价，而第（ii）部分则将这些价格转移回原始买家。记 V_L ： $= \mathrm{LP}_L^X$（I），并令$N \leq K \leq k$ 为一个最优方案，可得

$$\begin{aligned} R^* &\leq B + \delta R^* && \text{(revenue benchmark)}, \\ B &\leq C_L^\star V_L && \text{(coarse prices)}, \\ \mathrm{LP}_L &\geq c_k \left(V_L - \sqrt{\frac{k\varepsilon R^*}{s} V_L} \right) && \text{(implementation)}. \end{aligned} \tag{2}$$

只有中间的比较会损失收入，因为价格表较短。第一次和第三次比较控制着约化误差：较小的 s 会使基准更接近最优收入，但会削弱实施界。平衡这些误差即可得到有限市场保证。

命题 *2* 的证明。 任取 $0 < s < 1/2$ 满足 $s/(1-s) + \sqrt{C_L^\star k\varepsilon/s} < 1$。 (2) 中的前两个比较给出

$$V_L \geq \frac{B}{C_L^\star} \geq \frac{1-\delta}{C_L^\star} R^*.$$

关于 s 的条件使实现下界为正，且在此范围内随 V_L 增大。将显示的 V_L 下界代入第三个比较可得

$$\begin{aligned}\mathrm{LP}_L &\geq c_k V_L \left(1 - \sqrt{\frac{k\varepsilon R^*}{sV_L}}\right) \\ &\geq \frac{c_k}{C_L^\star} R^* \left(1 - \delta - \sqrt{\frac{C_L^\star k\varepsilon}{s}(1-\delta)}\right) \\ &\geq \frac{c_k}{C_L^\star} R^* \left(1 - \delta - \sqrt{\frac{C_L^\star k\varepsilon}{s}}\right).\end{aligned}$$

Thus

$$\frac{R^*(F)}{\mathrm{LP}_L(F)} \leq \frac{C_L^\star}{c_k} \frac{1}{1 - s/(1-s) - \sqrt{C_L^\star k\varepsilon/s}}.$$

对于 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0(k)$，选择 $s = (k\varepsilon)^{1/3}$。附录 B.4 验证关于 s 的条件，并将最后一个表达式上界为 $C_L^\star/c_k + 8(2+\sqrt{2})(k\varepsilon)^{1/3}$。对于 $\varepsilon = 0$，在所示界中取 $s \downarrow 0$。

□

5.2 构造辅助基准

我们构造命题 4 中的辅助实例，并证明第 (i) 部分。竞争性阈值为事前分配提供库存费用，并对该分配未用尽容量时所放弃的收入加以界定。

令 U_i 相互独立且服从 (0, 1) 上的均匀分布，记作 $U = (U_1, \ldots, U_n)$，并用 $v_i = v_i(U_i)$ 表示估值。对于正规买家，边际收入为 $\varphi_i(q) := R_i'(q)$，几乎处处有定义且单调不增。记 $Y_i := \max\{\varphi_i(U_i), 0\}$ 为买家 i 的非负边际收入，并记 $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$。根据 Myerson（1981）的虚拟盈余表示，最优收入等于 Y 中最大的 k 个坐标之和的期望，必要时以零补齐。附录 B.1 给出了分位数约定，以及原子点处的表示。

库存截断点处的边际收入为 Z，即 Y 中第 k 大的坐标，并再次用零补齐。选择竞争性阈值

$$a := \sup\{z \geq 0 : \mathbb{P}_U(Z \geq z) \geq 1 - s\}.$$

竞争性的边际收入通常会达到阈值 a：$\mathbb{P}_U(Z \geq a) \geq 1 - s$，而 $\mathbb{P}_U(Z \leq a) \geq s$（引理 B.1）。同一阈值控制第 5.3 节中的实施损失。

选择 e ex事前服务概率 $x = (x_1, \ldots, x_n)$，以最大化扣除库存成本后的收入

按每单位 a 计价：

$$\max_{x\in[0,1]^n,\,\sum_{i=1}^n x_i\le k}\sum_{i=1}^n (R_i(x_i)-ax_i).$$

在所有最大化点中，选择总数量最大的一个；若仍有并列，则以确定性方式打破并列。凹性和连续性保证了其存在。期望分配总量为

$$K:=\sum_{i=1}^n x_i.$$

买方 i 选定的事前收入为 $r_i := R_i(x_i)$。对于 $x_i>0$，她的参考价格 $w_i := r_i/x_i = v_i(x_i)$ 就是每单位期望分配量的收入。分配是在共同库存成本 a 下确定的，因此参考价格不一定是她的垄断价格。凹性和最优性意味着，对于几乎所有 $0<q<x_i$，$\varphi_i(q)\ge a$：当边际收入低于库存机会成本时，分配便会停止。

该分配满足 $w_i\ge a$，并且只要 $x_i>0$，$D_i(a)\ge x_i$。其未使用容量的机会成本很小：

$$a(k-K)\le \frac{s}{1-s}R^*.$$

当 $a>0$时，至少以 $1-s$ 的概率存在 k 个买家，其边际收入达到该阈值，从而保证 $K\ge k(1-s)$。当 $a=0$时，未使用容量没有机会成本。引理 B.2 证明了这些性质。在所有最大化点中选择总数量最大的一个，也会纳入加价高于 a为零的有用收入机会。

对于每个满足 $r_i>0$ 的买家，创建一个辅助买家，其预算 $\beta_i=r_i=R_i(x_i)$为她所选的事前收入，其单位价值为她的参考价格 w_i。为辅助卖方设置容量 K，即期望分配量总和；该数值可以是分数，且不超过原始库存 k。将所得市场记为 $I=I(F,\ s)$。

这些估值和预算都是原始分布的确定性函数。它们不会向原始买家增加预算约束。满足 $r_i=0$ 的买家将被省略；如果不再有正预算，辅助实例为空，其收入为零。

在其参考价格下，每个辅助买家都会花费其预算并使用 $\beta_i/w_i=x_i$ 单位，从而与原始事前服务概率相匹配。因此，收取所有辅助预算所需的容量不超过 K：

$$\sum_{i:r_i>0}\frac{\beta_i}{w_i}=\sum_{i:r_i>0}x_i\le K.$$

不受限制的辅助收入 B 是这些选定的事前收入之和：

$$B:=\sum_{i=1}^n r_i=\mathrm{LP}_\infty^X(I).$$

现在，(i) 部分中的收入比较可由事前松弛得出。

命题 *4(i)* 的证明。 对于任意可行的激励相容机制，将其分位数 $q \in (0,1)$ 处的中间分配定义为

$$g_i(q) := \mathbb{E}_{v_{-i}\sim F_{-i}}[X_i(v_i(q), v_{-i})], \qquad y_i := \int_0^1 g_i(q)\,dq.$$

这里， y_i 是买方 i 的事前服务概率，且 $\sum_{i=1}^n y_i \le k$。机制内部随机性已在 X_i 和 P_i中取了期望。边际收入表示以及 φ_i 的单调性给出

$$\mathbb{E}_{v\sim F}[P_i(v)] \le \int_0^1 \varphi_i(q) g_i(q)\,dq \le \int_0^{y_i} \varphi_i(q)\,dq = R_i(y_i).$$

加上非负松弛项 $a(k - \sum_{i=1}^n y_i)$，并利用 x 的最优性，

$$R^* \le ak + \sum_{i=1}^n (r_i - a x_i) = B + a(k-K) \le B + \frac{s}{1-s} R^*. \qquad \square$$

接下 来，我们将该辅助市场中的可行价格方案转移给原始买家。

5.3 实施选定价格

为证明命题4的 (ii) 部分，任取一个最多使用 L 个价格、收入为 b 且库存需求为 $N \le K$ 的可行定价方案。其价格至少为 a，即辅助价值的下界。辅助库存需求 r_i/p 未必能限制原始买家的接受概率 $D_i(p)$，如例2 所示。我们先对指定价格导致的预期收入缺口进行界定，再考虑库存约束下的不确定购买。

个体可替代性限制了每位买家在竞争性阈值之上的收入，从而控制了降低其价格时损失的预期付款。

服务买家 i的机会成本以边际收入衡量，为 T_i，即其他买家中第 k大的非负虚拟价值，不足部分以零补齐。记作 $U_{-i} =(U_j)_{j\neq i}$。关键恒等式将移除买家 i的移除损失表示为 $\Delta_i(F) = \mathbb{E}_U[(Y_i - T_i)_+]$：只有其超过现有替代选项的边际收入才会计入该损失（引理B.3）。下面的引理对其扣除库存费用 aq后的收入作出界定。

引理 2（局部化与收入上限）： 每位买方都满足

$$\max_{q\in[0,1]} \{R_i(q) - aq\} = \mathbb{E}_{U_i}[(Y_i - a)_+] \le \frac{\varepsilon}{s} R^*.$$

证明。 引理 B.1 给出 $\mathbb{P}_{U_{-i}}(T_i \le a) \ge s$。独立性与大市场假设意味着

$$\varepsilon R^* \ge \Delta_i(F) \ge \mathbb{P}_{U_{-i}}(T_i \le a)\mathbb{E}_{U_i}[(Y_i - a)_+] \ge s\mathbb{E}_{U_i}[(Y_i - a)_+].$$

对于等式， $R_i(q) - aq = \int_0^q (\varphi_i(t) - a)\, dt$。被积函数单调不增，因此将其正部纳入后，累积积分达到最大值。该正部的积分为$\mathbb{E}_{U_i}[(Y_i - a)_+]$，因为 $a \ge 0$。

□

对于满足 $r_i > 0$的买方，将其正收入缺口定义为 $d_i(p) := (r_i - pD_i(p))_+$。

引理3（个体收入缺口）：对于每个满足 $r_i > 0$ 的买方，以及每个满足 $p \ge a$的 $0 < p \le w_i$,

$$d_i(p) \le \min\left\{\frac{\varepsilon}{s}R^*, \frac{r_i^2}{p}\right\}.$$

对于第一个界， $p \le w_i$ 意味着 $D_i(p) \ge x_i$，因此，价格不低于 a 即可确保预期收入至少为 ax_i。只有超出的部分 $r_i - ax_i$可能造成损失，其上界由引理2给出。第二个界由买方收入曲线的凹性推出，并将损失限制在其所选事前收入乘以辅助库存需求 r_i/p。附录B.2证明了这两个界。

为汇总这些区块，将方案中的非空区块按 ℓ 编号，并令 $\lambda_{i\ell}$ 表示买方 i的预算中分配给价格为 $p_\ell > 0$的区块 ℓ的份额。这些预算份额将成为她获得各个价格的概率。下面的求和遍历满足$r_i > 0$ 的买方及这些非空区块；当未分配预算份额时，令 $\lambda_{i\ell} = 0$ 。对于每位买方， $\sum_\ell \lambda_{i\ell} \le 1$；每当 $\lambda_{i\ell} > 0$时， $a \le p_\ell \le w_i$。将选定支出及其库存需求相加可得

$$b = \sum_{i,\ell} \lambda_{i\ell} r_i, \qquad N = \sum_{i,\ell} \lambda_{i\ell} \frac{r_i}{p_\ell}.$$

利用最小值$\{A, B\} \le \sqrt{AB}$ 以及柯西–施瓦茨不等式，可得总缺口

$$\mathcal{E} := \sum_{i,\ell} \lambda_{i\ell} d_i(p_\ell) \le \sqrt{\frac{\varepsilon R^*}{s}} \sum_{i,\ell} \lambda_{i\ell} \sqrt{r_i \frac{r_i}{p_\ell}} \le \sqrt{\frac{\varepsilon R^*}{s} bN}. \tag{3}$$

两个界都很重要。使用少量辅助库存的收入机会，其相对损失有限。使用更多库存的收入机会，其绝对损失较小，并且它们的库存需求总量由 K界定。

以概率 $\lambda_{i\ell}$向买方 i 报出价格 p_ℓ ，以剩余概率不报价；对各买方独立进行，并且在观察到估值之前进行。每位买方至多收到一个报价。实际需求可能超过 N。作为比较，通过以下方式构造假设付款：

在应用库存约束之前，独立地舍弃部分接受。条件是向买方 i 报出价格 p，正支付概率为 $\min\{D_i(p)\ r_i/p\}$ ，期望支付为$\min\{pD_i(p)\ r_i\}$。因此，该比较的总预期需求至多为 $N \le k$ ，总期望支付为 $b - \mathcal{E}$。附录B.3 给出了构造方法。

只要库存尚有剩余，实际报价就会按价格递减顺序服务所有接受报价的买方。它们的潜在付款不低于相互独立的比较支付，因此引理 B.4 中的相关性差距界保证预期收入至少为 $c_k(b - \mathcal{E})$。代入（3）即可得到命题 4第（ii）部分中的界。每个彩票结果使用的单位不超过该方案的 L 价格，因此存在某个固定分配，其收益至少达到彩票平均值。在估值抽取之前固定该分配，即可得到所需的确定性 L级机制。

6 市场：逼近紧界

我们通过构造能够再现辅助库存权衡的私有价值市场来证明命题 3。固定辅助容量 $K > 0$、基准价值 $a > 0$以及有限个溢价类型 $t = 1$、.....、T，其预算为 $r_t > 0$，单位价值为 $w_t > a$。按个体价值汇集这些预算需要 $Q := \sum_t r_t/w_t \le K$ 个单位。再添加一笔基准预算$a(K - Q)$ ，其价值为 a；按该价值收费时，这笔预算会用尽剩余容量。由此得到的辅助配置 u具有无限制收益

$$B := \sum_{t=1}^{T} r_t + a(K - Q)$$

和 L价格收入 $V_L(u, K)$。引理 A.3 表明，这类配置可以任意接近 $C_L^\star$。

对于库存 k，为每种溢价类型创建 m 个独立买家，其需求经过截断后具有相同的收入—需求关系 $D_{t,m}(p) = c_t/p$ 在 $[c_t, w_t]$ 上。这里， $c_t := kr_t/(Km)$ 表示在该区间内的每个价格下，每位买家在考虑库存约束前的期望支付。选择足够大的 m ，使得对于每种类型， $c_t < a$ 都成立，并添加 $k + 1$ 个价值为 a 的确定性买家。在任意报价 $a \le p \le w_t$ 下，考虑库存约束前，某种类型的总预期支出和需求为

$$mpD_{t,m}(p) = \frac{k}{K} r_t, \qquad mD_{t,m}(p) = \frac{k}{K}\frac{r_t}{p}.$$

降低合格价格会保持期望支出不变，并增加期望库存使用量，这与辅助市场中的情况完全相同。基准买家为溢价报价后剩余的库存提供销售机会。

将每种类型的支出分散到更多买家身上，会使每位溢价买家都变得可替代。移除一位基准买家不会带来任何变化，因为 k 还有其他买家。在每个固定

库存水平下，由此产生的市场$F_{k,\ m}$规模为 ε_m-大，且为 $\varepsilon_m = \max_t r_t/(Kam) \to 0$。这种扩张使总需求变得不确定。随后增加库存，会使这些波动带来的收入效应相对于总收入而言变得很小。

个性化价格 w_t，再加上基准销售，几乎可以获得不受限制的辅助收入。反之，任意价格 L 分配方案都可以转换为一个可行辅助方案，其收入至少等于该分配方案的归一化预期收入。记$w_{\max}$ ： $=$ 最大值$_t\, w_t$，附录 C.1 中的命题 C 证明了

$$\mathrm{LP}_\infty(F_{k,m}) \geq \frac{k}{K}B - w_{\max}\sqrt{k}, \qquad \mathrm{LP}_L(F_{k,m}) \leq \frac{k}{K}V_L(u,K).$$

上界涵盖选定价格的每一种分配方案，包括实际需求超过库存的分配方案。下界可通过个性化标价实现，因此所得损失衡量了两种基准下对价格差异化的限制。

命题 *3* 的证明。 固定 $L \geq 1$ 和 $\eta > 0$。引理 A.3 提供了一个具有有限正值的、形式如前述的概况，其中

$$\frac{B}{V_L(u,K)} > C_L^\star - \frac{\eta}{2}.$$

固定该概况，并选择一个整数 $k_0 \geq 1$ 使得

$$\frac{Kw_{\max}}{V_L(u,K)\sqrt{k_0}} \leq \frac{\eta}{2}.$$

对于每个 $k \geq k_0$ 和 $\varepsilon > 0$，选择足够大的 m ，使得对于所有溢价类型和$\varepsilon_m \leq \varepsilon$都有 $c_t < a$ 。命题 C.1 给出了一个市场 $F_{k,\ m} \in \mathcal{F}_k(\varepsilon)$，满足

$$\frac{\mathrm{LP}_\infty(F_{k,m})}{\mathrm{LP}_L(F_{k,m})} \geq \frac{B}{V_L(u,K)} - \frac{Kw_{\max}}{V_L(u,K)\sqrt{k}} > C_L^\star - \eta. \qquad \square$$

7 讨论

额外价格所带来的收入价值，源于降低买家汇聚的库存成本。在辅助市场中，短价格表通过将这一成本与排除部分需求而放弃的支出进行权衡，实现二者的平衡。随着买家在每个固定库存下变得个体可替代，随后库存增加，同样的权衡决定了原始市场中陡峭的收入比率。这两个收入基准给出了相同的极限成本，从而 isolating 价格差异化所受到的限制。

对价格数量设限，仍可通过买方分配以及对服务优先级的控制来进行定向。即使价格表较为简短，分配方案也可以利用详细的客户信息

。理想的价格数量仍取决于需求和实施成本。仅凭收入保证无法确定其对消费者剩余或服务获取的影响。

定向预订报价展示了如何实施这些选择。对于容量固定的活动，卖方可利用经验证的客户信息设定少数几档价格，并在统一时段内收集购票请求。时段结束时，请求即具有约束力；稀缺单位分配给指定价格最高且接受报价的买家，只有获得服务的买家才需付款。这使卖方获得的收入与按价格递减顺序进行顺序报价时相同。只要卖方能够延后分配，买家可以在不同时间到达。票务请求系统说明了在分配库存前收集承诺的可行性。[3]

或者，卖方可以先向较高价格的客户群体开放报价，再将剩余容量释放给较低价格的客户群体。这两种实施方式都要求分配方案可执行：买家不能改用其他客户的价格，也不能拒绝报价后再获得后续折扣。粗粒度定价本身并不必然意味着这种服务优先级：Sephora 的最大折扣档享有优先购买权。在由外部决定到达顺序的情况下，类似保证能否适用于即时销售，仍有待研究。

有限市场界也没有说明相对于库存而言，竞争需要达到多大规模。增长速度快于库存的复制客户群体提供了一个充分条件，而备注 1中的调和价值示例则说明，单个移除损失较小本身并不足够。这里并未声称立方根速率或其系数是最优的。对于 $C_L^\star$，精确常数仍然未知；当前界限相差$1/[(2L-2)(2L-1)]$。在固定库存下，要确定 $C_L^\star/c_k$ 是否为紧界，需要构造一个同时体现粗粒度价格的库存成本与不确定销售的例子。

A 辅助定价与精确常数

本附录补全命题 1 的证明。我们先论证第 3.3 节引入的价格方案，随后通过短价格表无法捕捉的库存节省量，刻画最优比率。评估这一损失即可得出常数和下界示例。同一构造还给出了第 6 节使用的有限正剖面。

[3]Ticketmaster 在统一窗口期间收集请求，随后为成功的请求进行履行并收费。请求可以在窗口期间取消，但之后不能取消。请参阅 如何为我的活动申请门票？（访问日期：2026 年 10 月 31 日）。这记录的是延迟分配，而不是按指定价格进行的分配。

A.1 不受限制的定价与规范计划

对于固定分配价格，令 $A = \{i : 0 < p_i \le w_i\}$ 表示拥有可接受报价的买家。降价服务可达到

$$\max\left\{\sum_{i\in A} y_i : 0 \le y_i \le \beta_i, \quad \sum_{i\in A}\frac{y_i}{p_i} \le K\right\},$$

其中， y_i 是从买方 i处收取的付款。该规划首先按最高价格收取支出，逐一完全用尽每个预算，直到最多只有最后一个预算被部分收取。特别地，在价格固定时，收入随每个预算增加而不减。

引理 A.1（不受限制的辅助定价）： 不受限制的辅助收入为

$$\mathrm{LP}^{X}_{\infty}(I) = \max\left\{\sum_{i=1}^{n} w_i q_i : \sum_{i=1}^{n} q_i \le K, \quad 0 \le q_i \le \frac{\beta_i}{w_i}\right\}.$$

最优策略向每位买方收取其价值，并按价值递减顺序服务买方，直到库存耗尽前完全收取各项预算，最多部分收取一个预算。若 （1）成立，则该收入为 $B = \sum_{i=1}^{n}\beta_i$。

证明。 如果某策略以可接受价格从买方 y_i 处收取付款 i ，则至少使用y_i/w_i 单位，并且至多收取 β_i。 因此 $q_i = y_i/w_i$ 对于所显示的规划是可行的，其目标函数等于该策略的收入。反过来，该规划将每个单位分配给剩余价值最高者，直到相应的上界 β_i/w_i 达到。按此顺序向买方收取其价值即可实现该分配。在（1）下，每个上界都可以达到。

□

引理的证明 *1*。 取一个可行方案。对于每个选定了预算份额的买方，指定与该份额相交的最高区块价格；对于其他买方，不指定报价。每个指定价格都不高于买方的价值。将她选定的全部支出转移到该价格，不会增加库存需求。因此，这些选定付款在指定价格下形成一个可行分配，所用单位不超过 $N \le K$ ，总收入为 b。实际期望数量使用全部预算，且至少与这些选定数量一样多。按照指定价格从高到低的顺序为买方供货，在满足其期望数量及库存 K的条件下可使收入最大。因此，所得收入至少为 b。特别地，方案中拆分预算并不意味着必须向该买方提供多个报价。

反过来，考虑任意收入为 b 且使用不超过 K 单位库存的辅助策略。对于每一位向其收取了正付款的买方，将该笔付款调整到策略价格表中不高于其价值的最高价格。这样做不会增加库存需求。在这些最高合格价格下，按价值顺序排列的每预算美元库存量单调不减

。因此，按该顺序收取最前面的 b 美元，所需库存不会超过原先支付额对应的库存。最高合格价格在此前缀中至多有 L 个连续区块保持不变。将每个非空区块的价格提高到该区块最后一个预算美元对应的价值；区块内的每位买方仍会接受该价格，且库存需求不会增加。这是一个收入为 b的可行方案，因此 $b \le V_L(u,\ K)$。这两个不等式证明了该结论。

□

A.2 一般剖面与锐比率

我们将定义 3 推广至取有限值、非负、非递减且左连续的剖面u 在 $(0, B]$上，并设定 $u(0) = u(0^+)$。相同的边界、收入和库存需求公式定义一个方案。重复的边界会产生空区块，其贡献为零，无需进行价格评估。允许将单位成本设为零，作为一种极限手段。对于 $B = 0$，令$u(0) = 0$且 $V_L = 0$。若剖面满足 $B,\ K > 0$则称其为 可容许的，如果 $\int_0^B u(R)\, dR \le K$。

注 A.1（达到性）：弱分割 $0 \le R_1 \le \cdots \le R_L \le B$构成一个紧单纯形。由于 u 非负、非递减且左连续，其库存需求 $N = \sum_{\ell=1}^{L} u(R_\ell)(R_\ell - R_{\ell-1})$（其中 $R_0 = 0$）是下半连续的。因此，可行集 $\{N \le K\}$ 是闭集，且最大的端点 V_L 可以达到。空区块不会造成问题，因为其贡献为零。

为衡量短价格表所实现的库存节省量，令 $\theta:\ (0,\ 1] \to [0, 1]$ 单调不增且左连续，并通过其右极限将其延拓至零。将 $1 - \theta(y)$ 解释为单位美元库存：$\theta(y)$ 是相对于共同单位成本为 1 时的节省量。个体价值处的总节省量为 A。设有 $j \ge 1$ 个价格区块，随后是一个单位成本为 1 的最终区块，则最大的节省量为 $S_j(\theta)$：

$$A := \int_0^1 \theta(y)\, dy, \qquad S_j(\theta) := \max_{0=y_0 \le \cdots \le y_j \le 1} \sum_{\ell=1}^{j} \theta(y_\ell)(y_\ell - y_{\ell-1}).$$

对于 $j = 0$，令 $S_0(\theta) := 0$。由于其目标函数在紧单纯形上是上半连续的，最大值可以达到。这些区块未捕获的节省量，或省略后缀中的节省量，计入 $A - S_j(\theta)$。此类损失的最大值为

$$E_j := \sup_{\theta} \{A - S_j(\theta)\}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

其中，上确界取自刚才指定的轮廓，A 是同一轮廓的面积。特别地，$E_0 = 1$。

命题 A.1（精确辅助比率的刻画）：精确辅助常数满足

$$C_L^\star = 1 + E_{L-1} = 1 + \sup_\theta \{A - S_{L-1}(\theta)\}. \tag{4}$$

对于 $L \geq 3$,

$$1 + \frac{1}{2L-1} \leq C_L^\star \leq 1 + \frac{1}{2(L-1)}.$$

下端点不必精确。特别地,

$$C_3^\star \geq 1 + \frac{277}{1350} > 1 + \frac{1}{5}.$$

证明 (4)。对于任意有限辅助实例，将每个预算限制为不受限制的辅助定价下收取的付款。这会保留无限制收益，并且只会降低L-价格收益，同时使所有剩余预算在个体价值下均可负担。根据引理 A.1 和 1，因此，为了得到上界，只需对一个可容许剖面比较 B 与 $V_L(u, K)$。

下面的比较适用于每个这样的剖面。令 $j := L-1$ 且 $b := B/(1+E_j)$。若 $u(b) = 0$，则一个区块可获得收入 b，且库存需求为零。否则，将此前缀上的单位成本归一化为

$$\theta(z) := 1 - \frac{u(bz)}{u(b)}, \qquad 0 < z \leq 1.$$

选择一个达到 $S_j(\theta)$ 的前缀，将其端点乘以 b，并附加端点 b。这至多使用 L 个区块，库存需求为

$$\begin{aligned} N &= b\,u(b)\big(1 - S_j(\theta)\big) \\ &= \int_0^b u(R)\,dR + b\,u(b)\big(A - S_j(\theta)\big) \\ &\leq \int_0^b u(R)\,dR + (B-b)u(b) \leq \int_0^B u(R)\,dR \leq K. \end{aligned}$$

因此，$V_L(u,\ K) \geq B/(1 + E_{L-1})$，从而证明 $C_L^\star \leq 1 + E_{L-1}$。

对于反向不等式，固定 θ 并写作 $S := S_{L-1}(\theta)$。零损失 $A - S$ 只贡献平凡比率一。若 $A - S > 0$，则 $S < 1$。令支出的第一个美元对应个体单位成本 $1 - \theta(R)$，然后再追加 $A - S$ 个单位成本为一的美元。将容量设为在个体价值下所需的库存：

$$B := 1 + A - S, \qquad K := 1 - S, \qquad u(R) := \begin{cases} 1 - \theta(R), & 0 < R \leq 1, \\ 1, & 1 < R \leq B. \end{cases} \tag{5}$$

达到 S的前缀后接端点一，至多使用 L 个区块并至多需要$1 - S = K$ 个单位，因此 $V_L \geq 1$。反之，以 $b > 1$ 结尾的方案有一个单位成本为一的最终区块。将其他所有结束于一以上的区块合并到该区块中。此前的端点至多有 $L-1$ 个，且位于 $[0,1]$中。若它们在 θ 下的节省量为 σ，则库存需求为 $b - \sigma \geq b - S > K$。因此 $V_L = 1$ 且 $B/V_L = 1 + A - S$。

要通过有限个辅助买家实现这一收入比，选择 $\delta \in (0, 1/2)$ 中的数值和整数 $m \geq 1$，并令

$$\widetilde{\theta}(y) := \delta + (1 - 2\delta)\frac{\lfloor m\theta(y) \rfloor}{m}, \qquad \widetilde{A} := \int_0^1 \widetilde{\theta}(y)\, dy.$$

这是一个非递增、左连续的有限步剖面，其估值属于 $[\delta, 1-\delta]$，且与 θ 的一致距离至多为 $\delta + 1/m$。每个前缀的长度至多为一，因此其积分和 S_{L-1} 的变化均至多为 $\delta + 1/m$。于是

$$\left|(\widetilde{A} - S_{L-1}(\widetilde{\theta})) - (A - S)\right| \leq 2(\delta + 1/m).$$

~将（5）应用于 θ。对于足够精细的近似，其末尾区间具有正长度。其初始单位成本严格介于零和一之间，因此同样的论证给出 $V_L = 1$。每个常值区间定义一个买家，其预算等于该区间的长度，价值等于其单位成本的倒数。由此得到的有限辅助收入比率趋近于 $1 + A - S$。取上确界即可证明（4）。下界和三价格改进将在下文建立。

□

命题 A.2（最优收入比的剖面表示）：辅助常数满足

$$C_L^\star = \sup_{\substack{(B,K,u) \\ \text{admissible}}} \frac{B}{V_L(u, K)}.$$

证明。 前述证明中的上界比较表明，每个可容许剖面的比率都不超过 $1 + E_{L-1} = C_L^\star$。在那里构造的有限正剖面均为可容许剖面，且其值趋近于该上界。这证明了此表示。对于形式为（5）的每个正损失剖面，同样的构造可得有限正剖面，使得 $V_L = 1$，且其收入比率收敛于该剖面的比率。

□

A.3 常数的求值

引理 A.2（前缀近似）：对于每个 $j \geq 1$,

$$A - S_j(\theta) \leq \frac{1}{2j}.$$

对于一个区块，确切的最坏情况损失为

$$E_1 = \frac{1}{e}.$$

证明。 用有限正博雷尔测度 μ 表示 θ 的下降，并令其定义在 $[0,1]$ 上，满足$\theta(y) = \mu([y,1])$，其中 $y \in [0,1]$。对于端点 $0 = y_0 \le y_1 \le \cdots \le y_j \le 1$，记作 $P = \{y_1, \ldots, y_j\}$。对于 $\tau \in [0,1]$，令 $\mathrm{pre}_P(\tau)$ 表示不大于 τ的最后一个端点；若不存在，则为零。根据托内利定理，

$$A - \sum_{\ell=1}^{j} \theta(y_\ell)(y_\ell - y_{\ell-1}) = \int_{[0,1]} (\tau - \mathrm{pre}_P(\tau))\, \mu(d\tau).$$

因此，每次下降幅度造成的损失等于其大小乘以到前一个端点的距离，其中也包括未选后缀中的损失。

令 $\Delta := 1/j$，并使用端点 $\xi, \xi + \Delta, \ldots, \xi + (j-1)\Delta$，其中 ξ在$[0,\Delta]$上服从均匀分布。轮廓和测度均固定。对于 $\tau \in [0,\Delta)$，期望回退距离为$\tau - \tau^2/(2\Delta) \le \Delta/2$。对于 $\tau \in [\Delta, 1]$，则为 $\Delta/2$。由于 $\mu([0,1]) \le 1$，期望损失至多为 $1/(2j)$。因此，存在某个固定偏移量使该上界得以实现。

对于更精确的单区块值，令 $r := S_1(\theta) = \max_{0 \le y \le 1} y\theta(y)$。若 $r = 0$，损失为零。否则 $\theta(y) \le \min\{1, r/y\}$，因此

$$A \le r + \int_r^1 \frac{r}{y}\, dy = r + r \log \frac{1}{r}.$$

因此 $A - S_1(\theta) \le r\log(1/r) \le 1/e$。等号在以下情况下成立：

$$\theta(y) = \min\left\{1, \frac{1}{ey}\right\}, \qquad 0 < y \le 1. \tag{6}$$

□

单一价格。由于 $E_0 = 1$，方程（4）给出 $C_1^\star = 2$。具体而言，取 $u = 0$ 在 $0, 1]$ 上，并取 $u = 1$ 在 $1, 2]$, 上，其中 $K = 1$。无限制收益为二，而任何单区块方案的收益至多为一。

两种价格。由于 $E_1 = 1/e$，方程（4）给出 $C_2^\star = 1 + 1/e$。配置（6）具有 $A = 2/e$和 $S_1 = 1/e$。其嵌入（5）具有 $B = 1 + 1/e$， $K = 1 - 1/e$，以及 $V_2 = 1$。上述有限正近似表明，这两个例子都是有限辅助市场的极限。

A.4 覆盖常数的下界

线性轮廓示例。对于 $L \ge 3$，考虑第3.3节中使用的轮廓。取$\theta(y) = 1 - y$并令 $j := L - 1$。一个以端点 j开头的 b区块前缀，宽度为 $h_\ell := y_\ell - y_{\ell-1}$

有节省量

$$\sum_{\ell=1}^{j}(1-y_\ell)h_\ell = b - \frac{1}{2}\left(b^2 + \sum_{\ell=1}^{j} h_\ell^2\right) \le b - \frac{j+1}{2j}b^2 \le \frac{j}{2(j+1)}.$$

等宽块 $h_\ell = 1/(j+1)$ 同时达到两个不等式。因此 $A = 1/2$ 以及 $S_{L-1} = (L-1)/(2L)$。构造（5）给出

$$u(R) = \min\{R, 1\}, \qquad B = 1 + \frac{1}{2L}, \qquad K = \frac{1}{2} + \frac{1}{2L}, \qquad V_L = 1.$$

命题 A.2 为正文中使用的有限正近似提供了依据。

一般下界。令 $j := L - 1 \ge 1$，$\alpha := 1/(2j+1)$，并且

$$\theta(y) := 1 - (y - \alpha)_+.$$

对于一个 j-区块前缀 $0 = y_0 \le y_1 \le \cdots \le y_j = b \le 1$，令 $h_\ell := y_\ell - y_{\ell-1}$，其中 $\ell = 1, \ldots, j$。其下阶梯面积 $\sigma := \sum_{\ell=1}^{j} \theta(y_\ell)h_\ell$ 满足

$$\begin{aligned}\sigma &\le (1+\alpha)b - \sum_{\ell=1}^{j} y_\ell h_\ell \\ &= (1+\alpha)b - \frac{1}{2}\left(b^2 + \sum_{\ell=1}^{j} h_\ell^2\right) \\ &\le (1+\alpha)b - \frac{j+1}{2j}b^2.\end{aligned}$$

该身份通过对 $y_\ell^2 - y_{\ell-1}^2$ 进行裂项求和即可得到，最后一个不等式是柯西–施瓦茨不等式。该二次式在 $b = 2j\alpha = 1 - \alpha$ 处取得最大值。宽度为 2α 的等宽块达到每个不等式中的等号，从而得到

$$S_j(\theta) = \frac{j}{2(j+1)}(1+\alpha)^2, \qquad A = 1 - \frac{(1-\alpha)^2}{2}, \qquad A - S_j(\theta) = \frac{1}{2L-1}.$$

结合引理 A.2，即可证明命题 $L \ge 3$ 中的界限A.1。

三价格改进。对于 $L=3$，取

$$\theta(y)=\begin{cases}1, & 0\le y\le \frac{1}{5},\\ \dfrac{11-10y}{9}, & \frac{1}{5}\le y\le \frac{4}{5},\\ \dfrac{13-10y}{15}, & \frac{4}{5}\le y\le 1.\end{cases}$$

其积分为 $A=49/75$。对于两个端点 $0\le s\le t\le 1$，节省量为

$$F(s,t):=\theta(s)s+\theta(t)(t-s)=t\theta(t)+s\big(\theta(s)-\theta(t)\big).$$

如果 $t\le 1/5$，则 $F(s,\ t)=t\le 1/5$。对于固定的 t，目标函数在 $4/5$以上随 s 递减，因为其在该处的导数为 $(13-20s)/15-\theta(t)<0$。因此，我们可以将范围限制为 $s\le 4/5$。在此区间内，$\theta(s)\le(11-10s)/9$。对 s 配方，得到对于 $t\ge 1/5$,

$$\begin{aligned}F(s,t)&\le t\theta(t)+\frac{(11-9\theta(t))^2}{360}\\ &=\begin{cases}\dfrac{22t-15t^2}{18}, & \frac{1}{5}\le t\le \frac{4}{5},\\ \dfrac{256+8760t-5100t^2}{9000}, & \frac{4}{5}\le t\le 1.\end{cases}\end{aligned}$$

这两个二次函数的最大值统计量分别为 $121/270$和 $683/1530$，前者较大。界 $121/270$ 在 $(s,\ t)=(11/30,\ 11/15)$处达到。因此 $S_2=121/270$ 并且

$$A-S_2(\theta)=\frac{49}{75}-\frac{121}{270}=\frac{277}{1350}>\frac{1}{5},$$

证明命题 A.1 中的三价格改进。

A.5 市场下界的有限剖面

引理 A.3（有限正剖面足够）： 对于每个 $L\ge 1$ 和 $\eta>0$，都存在一个有限步剖面，使得 $u(R)\in(0,\ 1)$ 在$(0,1]$, 上成立，随后是一个非空的单位成本为 *1* 的区间，使得

$$\int_0^B u(R)\,dR=K>0,\qquad V_L(u,K)=1,\qquad \frac{B}{V_L(u,K)}>C_L^\star-\eta.$$

因此，将定义 $C_L^\star$ 的上确界限制在这些剖面上，不会改变其值。

证明。 上述计算给出 $E_{L-1}>0$ 对每个有限的 L。选择 θ 损失为正的$\sim A-S_{L-1}(\theta)$ 充分接近 E_{L-1}。令 θ 为命题A.1证明中的有限步近似。应用（5）可得初始单位成本严格介于零和一之间，存在一个~非空的单位成本为一的末尾区间，总库存需求为 $K=1-S_{L-1}(\theta)>0$,

且 $V_L = 1$。将近似取得足够精细，即可使收入比超过$C_L^\star - \eta$。

□

B 实施辅助价格

本附录补充验证第 5 节中省略的内容。我们首先确立用于构造基准的阈值和分配性质，然后验证实施中使用的移除损失和个体短缺论证。支付耦合和相关性差距界完成该归约。最后，我们给出有限市场常数，并举例区分辅助库存需求与实际需求。

B.1 边际收入与事前分配

令 U_i 相互独立且服从 $(0, 1)$ 上的均匀分布，其中 $i = 1, \ldots\ldots, n$，并记 $U = (U_1, \ldots\ldots, U_n)$。将买方 i 的价值表示为 $v_i = v_i(U_i)$，其分布为 F_i，即使在原子点处也如此。涉及虚拟价值的期望均取自这些分位数。有限均值假设给出 $R_i(0^+) = 0$。[4]

对于在区间支撑集上具有正密度的分布 F_i f_i，正则性等价于虚拟价值 $v - \frac{1-F_i(v)}{f_i(v)}$ 的单调性。对于正则 F_i，分位数空间中的边际收入，即虚拟价值，为 $\varphi_i(q) := R_i'(q)$，对几乎处处的 q 有定义且为非增函数；我们在 $[0, 1)$ 上取右导数版本，并令 $\varphi_i(1) := \varphi_i(1^-)$，从而 $R_i(q) = \int_0^q \varphi_i(u)\, du$。记

$$Y_i := \max\{\varphi_i(U_i), 0\}, \qquad Y = (Y_1, \ldots, Y_n).$$

正部 反映了卖方排除边际收入为负的买方的能力。

对于一个非负向量 y，令 $S_k(y)$ 表示其最大的 k 个分量之和；如果向量的坐标少于 k 个，则用零补齐。相互独立的正则买方的标准虚拟剩余表示给出

$$R^*(F) = \mathbb{E}_U[S_k(Y)],$$

且移除任意买方后，该恒等式仍然成立（Myerson，1981；Hartline，2021）。

令 Z 为 Y 中第 k 大的坐标，同样用零补齐。对于 $0 < s < 1/2$,

[4]对于事件 A，$\mathbf{1}\{A\}$ 当 A 发生时取值为一，否则取值为零。如果 esssup $v_i = \infty$，那么 $v_i(q) \uparrow \infty$，当 $q \downarrow 0$ 时，并且 $R_i(q) \le \mathbb{E}_{v_i \sim F_i}[v_i \mathbf{1}\{v_i \ge v_i(q)\}] \to 0$，由控制收敛定理可得；如果 esssup $v_i = M < \infty$，那么 $R_i(q) \le qM \to 0$。

使用第5.2节中的竞争性阈值:

$$a := \sup\{z \geq 0 : \mathbb{P}_U(Z \geq z) \geq 1 - s\}.$$

引理 B.1（阈值概率）：该阈值满足

$$\mathbb{P}_U(Z \geq a) \geq 1 - s, \qquad \mathbb{P}_U(Z \leq a) \geq s, \qquad ak(1 - s) \leq R^*.$$

证明。由于 $Z \geq 0$，定义集合非空。由于 $\mathbb{E}_U[S_k(Y)] = R^*$且 $S_k(Y) \geq kz$ 在 $\{Z \geq z\}$上有界，因此该集合有界。令阈值递增趋于 a，得到 $\mathbb{P}_U(Z \geq a) \geq 1 - s$。任何满足 $t > 0$ 的 $a + t$ 都位于上确界之上，因此 $\mathbb{P}_U(Z < a + t) > s$。令 $t \downarrow 0$，得到$\mathbb{P}_U(Z \leq a) \geq s$。最后， $S_k(Y) \geq ka$ 在 $\{Z \geq a\}$ 上给出最后一个不等式。这些弱不等式也涵盖了位于 a处的原子点。 □

令 x、 K和 w_i 分别为第5.2节中选定的事前分配、其总数量和参考价格。

引理 B.2（事前分配与未使用容量）：每个满足 $x_i > 0$ 的买方都满足$w_i \geq a$，且 $D_i(a) \geq x_i$。此外，

$$K = \min\left\{k, \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{U_i}(\varphi_i(U_i) \geq a)\right\}, \qquad a(k - K) \leq \frac{s}{1 - s} R^*.$$

若 $a > 0$，则 $K \geq k\,(1 - s)$。

证明。若 $R_i(x_i) - ax_i < 0$，令 $x_i = 0$ 将提高目标函数。因此 $w_i \geq a$，根据弱尾分位数约定，有 $D_i(a) \geq D_i(w_i) \geq x_i$。

令 t_i 为 $R_i(q) - aq$ 在 $[0, 1]$上的最右侧最大化点。凹性给出

$$t_i = \mathbb{P}_{U_i}(\varphi_i(U_i) \geq a).$$

任何优化解都不可能有 $x_i > t_i$，因为将该坐标减小至 t_i 会提高其目标函数。若 $K < k$ 且存在某个 $x_i < t_i$，则小幅增加 x_i 要么提高目标函数，要么在增加总数量的同时保持目标函数不变。这两种情况都与 x的选择相矛盾。因此，对于所有 i，要么$K = k$，要么 $x_i = t_i$，从而证明了 K的公式。

当 $a > 0$ 时，事件 $\{Z \geq a\}$ 要求至少有 k 个真实买方满足 $\varphi_i(U_i) \geq a$。其期望数量至少为 $k(1 - s)$，因此公式给出 $K \geq k(1 - s)$。结合 $ak(1 - s) \leq R^*$，可得 $a(k - K) \leq aks \leq sR^*/(1 - s)$。当 $a = 0$ 时，同一界可直接得到。在这种情况下，零填充无法给出 K 的下界。 □

B.2 移除损失与个体收入缺口

对于每个 i，令 T_i 为其他买方中非负虚拟价值从大到小排列后的第 k 个，并以零填充。记 $U_{-i} = (U_j)_{j \neq i}$。因此，$T_i$ 与 Y_i 相互独立，而 $T_i \leq Z$ 意味着

$$\mathbb{P}_{U_{-i}}(T_i \leq a) \geq \mathbb{P}_U(Z \leq a) \geq s.$$

这是引理 2 证明中使用的概率。

引理B.3（关键恒等式）：对于每个买方 i，$\Delta_i(F) = \mathbb{E}_U[(Y_i - T_i)_+]$。[5]

证明。将一个坐标 y_i 代入其他非负虚拟价值后，它们的前k 项和增加了$(y_i - T_i)_+$。对市场中有买方 i和没有该买方的情况分别取期望，并使用虚拟剩余等式。

□

引理 3 的证明。由于 $p \leq w_i$，我们有 $D_i(p) \geq x_i$。因此 $pD_i(p) \geq ax_i$，而引理 2给出 $d_i(p) \leq r_i - ax_i \leq \varepsilon R^*/s$。

对于第二个界，凹性使收入曲线位于从(x_i, r_i)到(1,0)的弦线上方。令

$$t := \frac{r_i}{r_i + (1 - x_i)p}.$$

如果 $x_i = 1$，则 $D_i(p) = 1 = t$。否则，$p \leq r_i/x_i$ 给出 $x_i \leq t < 1$，并且利用凹性和$R_i(1) \geq 0$ 可得

$$R_i(t) \geq \frac{1 - t}{1 - x_i} r_i = pt.$$

因此，弱尾分位数约定给出 $D_i(p) \geq t$，包括在原子点处。由于$r_i/p - x_i \geq 0$,

$$d_i(p) \leq r_i - pt = r_i \frac{r_i/p - x_i}{1 + r_i/p - x_i} \leq \frac{r_i^2}{p}.$$

□

B.3 价格分配与库存风险

使用第 $\lambda_{i\ell}$ 节中的预算份额 b、计划收入 $N \leq K$、库存需求 $\mathcal{E}$ 和总缺口 5.3。以下所有关于 (i, ℓ) 的求和均仅限于满足 $\lambda_{i\ell} > 0$的配对，因此 $r_i > 0$ 和 $0 < p_\ell \leq w_i$ 满足 $p_\ell \geq a$。

实际分配和比较支付。对每位买家，以 $\lambda_{i\ell}$ 的概率分配价格 p_ℓ，以剩余概率不提供报价。为每位原始买家抽取一次分类抽签。

[5]对于实数 z，z_+：$\max\{z, 0\}$。

各买家之间相互独立，且与估值独立。按分配价格顺序从高到低接触买家，并在完成 k 笔销售后停止。

将买方 i 的潜在付款定义为：若结果 ℓ 被分配且 $v_i \geq p_\ell$，则为 $W_i = p_\ell$；否则为 $W_i = 0$，包括未分配任何报价的情况。为使其在给定指定价格下的期望付款不超过 r_i，以如下概率保留该潜在付款用于比较：

$$\tau_{i\ell} := \min\left\{1, \frac{r_i}{p_\ell D_i(p_\ell)}\right\}.$$

分母为正，因为在选定的部分上，$D_i(p_\ell) \geq x_i > 0$。对每位买方，使用独立于估值和分配方案的独立均匀抽样。这会产生 $\widetilde{}$ $\widetilde{}$ 个相互独立的假设付款 W_i，并满足 $0 \leq W_i \leq W_i$。期望是对估值、$\widetilde{}$价格分配以及对 W 而言这些额外抽样取的。根据构造，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{\widetilde{W}}(\widetilde{W}_i > 0) &= \sum_{i,\ell} \lambda_{i\ell} \min\{D_i(p_\ell), r_i/p_\ell\} \leq N \leq k, \\ \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{\widetilde{W}}[\widetilde{W}_i] &= \sum_{i,\ell} \lambda_{i\ell} \min\{p_\ell D_i(p_\ell), r_i\} = b - \mathcal{E}. \end{aligned} \tag{7}$$

库存约束下的收入。

引理 B.4（相关性差距）：设 $W = (W_1, \ldots, W_n)$ 具有独立的非负坐标，且 $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_W(W_i > 0) \leq k$。那么

$$\mathbb{E}_W[S_k(W)] \geq c_k \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_W[W_i], \qquad c_k = 1 - \frac{k^k}{e^k k!}.$$

证明。首先考虑一组均值为 $\mu \leq k$ 的独立伯努利变量之和 X。我们证明 $\mathbb{E}[\min\{k, X\}] \geq c_k \mu$。令 $f(c) := \min\{k, c\}$。对于非负整数 c, j，

$$f(c + j) \leq f(c) + j\big(f(c + 1) - f(c)\big).$$

在其他加数的总和为 c的条件下，该不等式表明，将均值为 p 的伯努利变量替换为均值为 p 的独立泊松变量，不会增加截断计数的期望值。替换所有加数后可得

$$\mathbb{E}[\min\{k, X\}] \geq g_k(\mu), \qquad g_k(t) := \mathbb{E}[\min\{k, P_t\}], \quad P_t \sim \mathrm{Poi}(t).$$

对泊松级数求导可得

$$g_k'(t) = \mathbb{P}(P_t < k), \qquad g_k''(t) = -e^{-t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \leq 0.$$

因此， g_k 是凹函数，且 $g_k(0) = 0$，所以 $g_k(\mu) \geq (\mu/k) g_k(k)$。泊松递推 $j\mathbb{P}(P_k = j) = k\mathbb{P}(P_k = j-1)$给出

$$g_k(k) = k\big(1 - \mathbb{P}(P_k = k)\big) = kc_k,$$

证明标量比较。

现在使用恒等式

$$S_k(w) = \int_0^\infty \min\left\{k, \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{w_i > u\}\right\} du$$

对于确定的非负向量 w。在每个阈值 $u \geq 0$ 处，计数 $X_u := \sum_i \mathbf{1}\{W_i > u\}$ 是若干相互独立的伯努利变量之和，其均值至多为 $\sum_i \mathbb{P}(W_i > 0) \leq k$。根据托内利定理和标量比较，可得

$$\mathbb{E}_W[S_k(W)] \geq c_k \int_0^\infty \mathbb{E}[X_u]\, du = c_k \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_W[W_i].$$

□

命题 *4*（*ii*）的证明。 原始买家之间的比较支付相互独立。方程（7）和（3）以及引理 B.4 推出

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_W[S_k(W)] &\geq \mathbb{E}_{\widetilde{W}}[S_k(\widetilde{W})] \\
&\geq c_k(b - \mathcal{E}) \\
&\geq c_k\left(b - \sqrt{\frac{\varepsilon R^*}{s} bN}\right).
\end{aligned}$$

递减价格销售在每种实现下均可收取 $S_k(W)$。每种分配方案使用的价格都不超过该方案的 L 价格，因此存在某个固定分配，使其在估值上的预期收入至少等于彩票平均值。在估值抽取之前固定该分配，即可得到所需的确定性机制。

□

B.4 有限市场界中的常数

我们验证第 s 5.1 节中命题 2 的证明中所使用的 选择。对于 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0(k)$，令 $s = (k\varepsilon)^{1/3}$，以及 $\delta = s/(1-s)$。则 $s < 1/2$，$C_L^\star \leq 2$，并且

$$\delta + \sqrt{\frac{C_L^\star k\varepsilon}{s}} \leq \left(2 + \sqrt{2}\right) s \leq \frac{1}{2}.$$

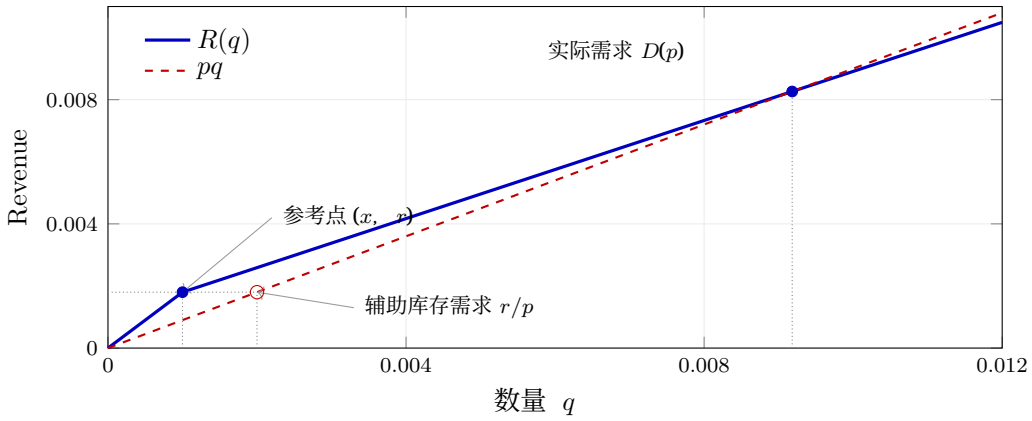


图2：对于例子 2中的买方，参考点 $(x,\ r)$ 决定了辅助预算。在价格 p下，价格射线 pq 上的空心圆对应的收入为 r，库存需求为r/p。实际需求是该射线与 $R(q)$的较远交点，此处收入超过r。因此，辅助库存需求未必能限定实际接受概率。

因此，该证明中的分母为正。利用 $1/(1-t) \le 1+2t$ 对于 $0 \le t \le 1/2$ 和$C_L^\star/c_k \le 4$ 可得

$$\frac{C_L^\star}{c_k}\frac{1}{1-\delta-\sqrt{C_L^\star k\varepsilon/s}} \le \frac{C_L^\star}{c_k} + 8(2+\sqrt{2})(k\varepsilon)^{1/3}.$$

B.5 辅助库存需求与实际需求

下面的例子说明了为什么实施证明比较的是支付，而不是将辅助库存需求等同于实际需求。

例2（辅助库存需求与实际需求）：考虑一个具有收入曲线 $R(q) = \min\{1.8q,\ 0.79q + 0.00101\}$ 和阈值 $a = 0.8$ 的买方。$R(q) - aq$ 的最大化点为 $x = 0.001$，收入为 $r = 0.0018$，参考价格为 $w = 1.8$。她的最大超额收入为 0.001，因此上界在 $\varepsilon R^*/s = 0.001$ 下成立。在价格 $p = 0.9$ 下，

$$\frac{r}{p} = 0.002, \qquad D(p) = \frac{0.00101}{0.9 - 0.79} \approx 0.00918.$$

实际需求超过辅助库存需求的四倍，尽管$pD(p) > r$。图 2 展示了这一差异。这是一个单独的收入曲线示例，并非完整的市场。

C 市场：接近尖锐界

本附录证明第 6节中使用的收入比较。

固定溢价类型数量为 $T \geq 1$ 、基准价格为 $a > 0$，且容量为 $K > 0$。类型 $t \in \{1$、.....、$T\}$ 的预算为 $r_t > 0$，参考价格为 $w_t > a$，且类型按 w_t递减排序。溢价支出总额为 Π，按个体价值收取这些支出需要 Q 单位。以基准价格填满剩余容量，可得到无限制收益 B:

$$\Pi := \sum_{t=1}^{T} r_t, \qquad Q := \sum_{t=1}^{T} \frac{r_t}{w_t} \leq K, \qquad B := \Pi + a(K - Q).$$

将单位成本曲线 u 定义在 $(0,\ B]$ 上，使其在预算 r_t的区间内等于 $1/w_t$，随后在长度为 a 的基准支出区间（$K - Q$）内等于 $1/a$。这是一个辅助市场，其中预算为 r_t 的买方估值为 w_t，并有一个最终预算为 a（$K - Q$）、估值为 a的买方；当预算为零时省略该买方。其无限制收益为 B，其 L价格收益为 V_L（$u,\ K$）。这些是固定的辅助数据，不必源自事前构造。

命题 C.1（从辅助市场到大型市场）： 对于每个整数库存 $k \geq 1$以及所有充分大的整数 m，存在一个市场 $F_{k,\ m}$，其估值相互独立且均值有限，并且该市场是 ε_m大型的，满足

$$\varepsilon_m := \frac{\max_{1 \leq t \leq T} r_t}{Kam}.$$

记 $w_{\max}$ ： =最大值$_{1 \leq t \leq T}\, w_t$，则其收入满足

$$\frac{K}{k}\mathrm{LP}_\infty(F_{k,m}) \geq B - \frac{K w_{\max}}{\sqrt{k}},$$
$$\frac{K}{k}\mathrm{LP}_L(F_{k,m}) \leq V_L(u, K) \qquad \textit{for every } L \geq 1.$$

C.1 构造买家

对于每个 溢价类型 t，创建 m 个具有独立估值和需求曲线的买家

$$D_{t,m}(p) = \begin{cases} 1, & 0 \leq p < c_t, \\ c_t/p, & c_t \leq p \leq w_t, \\ 0, & p > w_t, \end{cases} \qquad c_t := \frac{k r_t}{Km}.$$

选择足够大的 m，使得每个 $c_t < a$，并添加 $k + 1$ 个价值为 a 的确定性买家。每个溢价分布都有有界支撑 $[c_t, w_t]$，且其凹收入曲线

$$R_{t,m}(q) = \min\{w_t q, c_t\}, \qquad q \in [0, 1].$$

因此它是正则的，且均值有限且为正。其非负虚拟价值以概率 c_t/w_t 为 w_t ，否则为零。将所得市场记为 $F_{k,\ m}$ ，并将其收入简记为 R^*、LP_∞和LP_L。

移除一名溢价买家，最优收入至多减少 c_t，这是由关键恒等式得出的。移除任何一名基准买家都不会改变结果，因为至少还有 k 名价值为 a 的其他买家。因此， $R^* \geq ak$，市场是一个 ε_m-大市场，且 ε_m 如命题 C.1所述。

C.2 比较不受限价格与粗粒度价格

按递减顺序向每种类型提供其参考价格 w_t，然后以 a 售出任何剩余库存。令 X 为价值等于其类型特定最高原子点 w_t 的 Tm 名溢价买家的数量。其均值为 $(k/K)Q \leq k$，方差至多为 k。将每笔溢价购买都按高于 a 的加价计值，再加上基准 ak ，得到理想的预期收入 $(k/K)B$。实施库存上限使该收入至多减少 $w_{\max}(X-k)_+$，因此

$$\begin{aligned} R^* \geq \mathrm{LP}_\infty &\geq \frac{k}{K}B - w_{\max}\mathbb{E}_X[(X-k)_+] \\ &\geq \frac{k}{K}B - w_{\max}\sqrt{k}. \end{aligned}$$

最后一步用到了 $\mathbb{E}_X[X] \leq k$ 和柯西–施瓦茨不等式。

为界定每一种 L-价格机制，固定任意一个分配方案，并将其高于 a 的不同有限价格列为 $p_1 > \cdots > p_J > a$，其中 $0 \leq J \leq L$。对于 $t = 1, \ldots, T$和 $j = 1, \ldots, J$，令z_{tj} 为在对估值及由此产生的库存截断取平均后，从类型为t 的买家以 p_j购买时收取的期望付款的 K/k 倍。由于每位买家至多获得一个价格，且$pD_{t,m}$对于每个有限的 $p \geq 0$都有 $(p) \leq c_t$ ，

$$\sum_{j=1}^{J} z_{tj} \leq r_t, \qquad z_{tj} = 0 \text{ if } p_j > w_t.$$

以辅助单位计，溢价收入总额为 $z := \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{J} z_{tj}$ ，预期库存使用量为 N_0 : $= \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{J} z_{tj}/p_j$；当 $J = 0$ 时，两项总和均为零。因此 $N_0 \leq K$。按不高于 a 的价格收取的付款至多为 $(k/K)a(K - N_0)$。

将引理证明中的重排方法 1 应用于这些已收取的付款：将每种类型的支出移至其最高合格价格，选取前 z 个预算美元，并将每个区块提高至其最终参考价格，即可得到一个溢价前缀，其收入为 z，库存~要求为 $N \leq N_0$，且区块数至多为 J 。

如果分配方案中没有使用不高于 a的价格，则此前缀至多包含 L 个区块，并包含其全部收入，因此收入至多为 $(k/K)V_L(u,\ K)$。如果使用了不高于 a 的价格，则该~前缀至多包含 $L-1$ 个区块。将剩余容量 $K - N$按 a 估值，并附加

收入端点

$$b := z + a(K - \widetilde{N}).$$

由于每个剩余溢价美元的成本至多为 $1/a$ 单位，因此 $\int_z^{\Pi} u(R)\,dR \le (\Pi - z)/a$。因此，该端点属于完整配置：

$$b \le z + a\left(K - \int_0^z u(R)\,dR\right) \le \Pi + a(K - Q) = B.$$

新增区块的成本至多为 $(b - z)/a = K - N$，因为 $u \le 1/a$。因此，这是一个至多包含 L 个区块的可行方案，并且

$$z + a(K - N_0) \le b \le V_L(u, K).$$

两种情况都给出 $\mathrm{LP}_L \le (k/K)V_L(u, K)$，从而证明命题 C.1。

D 准正则分布

如果 准正则 分布满足 $R(q)/(1-q)$ 在 $[0,1)$上非递减，则称其为准正则分布。等价地，在更大的分位数处，其收入曲线始终位于从任意点 $(q, R(q))$ 到 $(1,0)$ 的直线之上。凹性蕴含这一条件，而该条件也允许边际收入上升。这扩大了允许的需求分布范围：相互独立且分布可能不同的正则抽样的每个次序统计量都是准正则的（Feng andJin，2025，定理 3）。因此，在满足独立性和有限均值假设的前提下，该模型允许由最大值统计量或其他次序统计量生成的估值。

对于将正则性替换为拟正则性、同时保留有限均值和正收入要求的类，记作 $\mathcal{F}_k^{\mathrm{qr}}(\varepsilon)$。

命题 D.1（拟正则扩展）： 命题 *2* 和定理 *1* 在将 $\mathcal{F}_k(\varepsilon)$替换为 $\mathcal{F}_k^{\mathrm{qr}}(\varepsilon)$后仍成立，且常数相同。

证明。固定 $F \in \mathrm{F}_k^{\mathrm{qr}}(\varepsilon)$ 和 $0 < s < 1/2$，并将 $R^* = R^*(F)$ 简记为此。令 $\bar{R}_i$为 R_i的最小凹主函数，其非增边际收入记为 $\bar{\varphi}_i$。弱尾部收入曲线上半连续，因此其最小凹主函数在接触点之间为仿射函数，且每个点都是至多两个接触点的混合，满足 R_i。有限均值意味着 $R_i(0) = 0$，并保证在零点连续：在 q 处的两点表示将其两个收入贡献分别限制在 $\sup_{t \le q} R_i(t)$ 和 $R_i(q)$ 之内；当 $q \downarrow 0$时，两者都趋于零。Myerson 的熨平恒等式给出 $R^* = \mathbb{E}[S_k(Y)]$，其中$Y_i = (\bar{\varphi}_i(U_i))^+$，在每个子市场中也成立（Myerson，1981）。

选择阈值 a 和事前分配 x，如第5.2节所示，使用 R_i 及其边际收入，并采用相同的数量平局裁决。令 $K = \sum_i x_i$和 $B = \sum_i R_i(x_i)$。

事前松弛是有效的，因为激励相容的事中分配是阈值报价的混合¯，而 R_i 的凹性将其平均收入限制在平均服务概率所对应的收入以内。因此，附录B 中的阈值、分配和关键论证给出

$$R^* \le B + a(k-K) \le B + \frac{s}{1-s}R^*, \qquad \max_{q\in[0,1]}\{\bar{R}_i(q) - aq\} \le \frac{\varepsilon}{s}R^*.$$

额外的一步是将所选的熨平收益表示为实际价格¯机会。令 t_i 为 $R_i(q) - aq$的最右侧最大化点。最优性给出 $x_i \le t_i$。如果 x_i 本身是一个接触点，就使用它；否则使用其仿射面的端点，该仿射面的斜率至少为¯ a ，且其端点位于 $[0, t_i]$中。对于 $R_i(q) - aq$，上升面会将最右侧最大化点置于其右端点处或超出右端点，而平面则由最大化点组成。省略一个零端点后，至多有两个正的接触分位数q_{ij} ，其收入为_r_{ij} ： $= R_i(q_{ij}) = R_i(q_{ij})$，以及权重 $\omega_{ij} \ge 0$ ，使得

$$x_i = \sum_j \omega_{ij} q_{ij}, \qquad \bar{R}_i(x_i) = \sum_j \omega_{ij} r_{ij}, \qquad \sum_j \omega_{ij} \le 1.$$

当 $x_i = 0$时，这些和为空。凹性表明，在每个所选接触点处都有 $r_{ij} \ge aq_{ij}$ 。每个正的加权收益$\omega_{ij} r_{ij}$ 都会在参考价格w_{ij} 下成为一个辅助预算：$= r_{ij}/q_{ij}$。省略零预算后，它们的总收入为 B ，且在这些价格下的库存需求至多为 K。

拟正则性在每个接触点处给出缺口界。对于 $0 < p \le w_{ij}$，令$t = r_{ij}/[r_{ij} +(1 - q_{ij})p]$。若 $q_{ij} < 1$，则 $q_{ij} \le t < 1$ ，定义条件给出$R_i(t) \ge (1 - t)r_{ij}/(1 - q_{ij}) = pt$，因此 $D_i(p) \ge t$。若 $q_{ij} = 1$，则由 $D_i(p) = 1 = t$ 可得相同结论。对于 $p \ge a$，根据附录 B.2 中的代数推导，该需求界与熨平收益上界给出

$$d_{ij}(p) := (r_{ij} - pD_i(p))_+ \le \min\left\{\frac{\varepsilon}{s}R^*, \frac{r_{ij}^2}{p}\right\}.$$

固定一个可行辅助方案。令 $\lambda_{ij\ell} r_{ij}$ 为从买方i 在价格区块 ℓ中的接触点 j 所选取的收入。因此 $\sum_\ell \lambda_{ij\ell} \le \omega_{ij}$。以下求和针对收入为正的已选部分。该方案的收入、库存需求和总缺口满足

$$b = \sum_{i,j,\ell} \lambda_{ij\ell} r_{ij}, \qquad N = \sum_{i,j,\ell} \lambda_{ij\ell} \frac{r_{ij}}{p_\ell} \le K,$$
$$\mathcal{E} := \sum_{i,j,\ell} \lambda_{ij\ell} d_{ij}(p_\ell) \le \sqrt{\frac{\varepsilon R^*}{s} bN},$$

其中最后一个不等式是在（3）中的加权柯西–施瓦茨不等式计算。

对于每个原始买家，抽取一次报价抽签，其结果（j，ℓ）以概率 $\lambda_{ij\ell}$ 分配价格为 p_ℓ。剩余概率表示不提供报价；由于$\sum_j、_\ell \lambda_{ij\ell} \le 1$，该概率非负。在买家之间以及与估值相互独立地抽取这些抽签。在结果为（j，ℓ）的条件下，使用独立抽样，以 $\min\{1, r_{ij}/[p_\ell D_i(p_\ell)]\}$ 的概率在假设比较中保留一笔已接受的付款。如附录 B.3 所示，比较支付受实际潜在付款的约束，其总预期需求至多为 N，总期望支付为 $b - \mathrm{E}$。它们在原始买家之间相互独立。因此，根据引理 B.4 以及一个达到至少彩票平均值的固定分配，可得到一个 L 级机制，其预期收入至少为

$$c_k \left(b - \sqrt{\frac{\varepsilon R^*}{s} bN} \right).$$

因此，命题4对扩展后的类别仍然成立，第5.1 节给出了相同的有限市场界。第6 节中的尖锐性市场是正则的，因而也是准正则的，所以第4.2 节中的极限论证同样给出了相同的尖锐比率。 □

参考文献

Alaei, S.（2014）。贝叶斯组合拍卖：将单买家机制扩展至多买家。《*SIAM* 计算杂志》，43(2)：930–972。

Alaei, S.、Hartline, J. D.、Niazadeh, R.、Pountourakis, E. 和 Yuan, Y.（2019）。最优拍卖与匿名定价。《博弈与经济行为》，118：494–510。

Bergemann, D.、Brooks, B. 和 Morris, S.（2015）。价格歧视的界限。《美国经济评论》，105(3)：921–957。

Bergemann, D.、Castro, F. 和 Weintraub, G.（2022）。三级价格歧视与统一定价之比较。《博弈与经济行为》，131：275–291。

Blumrosen, L. 和 Holenstein, T. (2008)。《标价与谈判：渐近分析》。载于第九届 *ACM* 电子商务会议论文集，第 49 页。会议摘要。

Bulow, J. 和 Roberts, J. (1989)。《最优拍卖的简单经济学》。《政治经济学杂志》，97(5):1060–1090。

Chawla, S., Hartline, J. D., Malec, D. L. 和 Sivan, B.（2010）。多参数机制设计与顺序标价。载于第*42*届*ACM*计算理论研讨会论文集，第311–320页。

Correa, J., Livanos, V., Pizarro, D. 和 Verdugo, V.（2025）。大型市场中的张贴定价与竞争。arXiv:2505.18061。DellaVigna, S. 和 Gentzkow, M.（2019）。美国零售连锁企业的统一定价。《经济学季刊》，134(4):2011–2084。Dughmi, S., Roughgarden, T. 和 Sundararajan, M.（2012）。收入次模性。《计算理论》，8:95–119。Feng, Y. 和 Jin, Y.（2025）。超越正则性：重新审视简单机制与最优机制。载于第*66*届*IEEE*计算机科学基础研讨会论文集，第303–342页。Hart, S. 和 Nisan, N.（2019）。销售多种相关商品：收入最大化与菜单规模复杂度。《经济理论杂志》，183:991–1029。Hartline, J. D.（2021）。机制设计与近似。书稿。Jin, Y., Jiang, S., Lu, P. 和 Zhang, H.（2022）。多单位机制之间的紧致收入差距。《*SIAM* 计算杂志》，51(5):1535–1579。Jin, Y., Lu, P., Qi, Q., Tang, Z. G. 和 Xiao, T.（2019）。匿名定价的紧致近似比。载于第*51*届*ACM SIGACT*计算理论年会论文集，第674–685页。Malueg, D. A. 和 Snyder, C. M.（2006）。界定价格歧视的相对盈利能力。《国际产业组织杂志》，24(5):995–1011。Myerson, R. B.（1981）。最优拍卖设计。《运筹学数学》，6(1):58–73。Swinkels, J. M.（2001）。大型私人价值拍卖的效率。《计量经济学》，69(1):37–68。Xie, H., Zhu, Y. 和 Shishkin, D.（2025）。关于数据驱动价格歧视的局限性。《理论经济学》，20(1):303–351。Yan, Q.（2011）。通过相关性差距实现机制设计。载于第*22*届*ACM–SIAM*离散算法研讨会论文集，第710–719页。