arXiv:2611.29957v1 [math.SP] 23 Nov 2026

四维和五维固支板的瑞利猜想 *

戴国伟† 孙颖欣‡ 张勇§

摘要

1877年，瑞利勋爵猜想，对于给定面积的固支板，圆盘的基频最小。我们通过在四维和五维中建立同一域上的第一固支板特征值与第一狄利克雷特征值平方之间的尖锐比较，证明了这一高维猜想。证明采用了由球特征函数构造的非线性变换。一个局部恒等式保留了海森矩阵的所有项。精确的系数不等式以及对无穷余项的界保证了正性，而弱形式则处理了符号变化和临界集。我们刻画了体积不等式中的等式情形，并指出了六维中该变换所面临的障碍。

关键词。 瑞利猜想；固支板；谱比较；形状优化；海森矩阵校准

2020年数学主题分类。主要分类：35P15；次要分类：35J35、49Q10、49R05

1 引言

1877年，瑞利勋爵 [19] 猜想，在面积给定的均匀固支板中，圆形薄板具有最低的基频。其高维表述是：在体积约束下，球是否能使固支

*本研究得到国家自然科学基金（编号：12371110和12301133）资助。

†大连理工大学数学科学学院，中国大连116024。电子邮箱：daiguowei@dlut.edu.cn。

‡大连理工大学数学科学学院，中国大连116024。电子邮箱：sunyingxin2023@mail.dlut.edu.cn。§江苏大学数学科学学院，中国镇江212013。电子邮箱：zhangyong@ujs.edu.cn。

双调和算子的第一特征值达到最小。我们通过将其与同一开集上的第一狄利克雷特征值进行精确比较，在四维和五维中证明了这一不等式。

对于开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 且 $0 < |\Omega| < +\infty$，定义

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{v \neq 0,\ v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x}{\int_\Omega v^2 \, \mathrm{d}x},$$

$$\Gamma_1(\Omega) = \inf_{u \neq 0,\ u \in H_0^2(\Omega)} \frac{\int_\Omega (\Delta u)^2 \, \mathrm{d}x}{\int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x}.$$

这里，$|\Omega|$ 是勒贝格测度，∇ 是欧几里得梯度，Δ 是拉普拉斯算子。索 Sobole夫空间 $H^k(\Omega)$ 由平方可积函数组成，这些函数直到 k 阶的弱导数均为平方可积函数；$H_0^k(\Omega)$ 是 $C_c^\infty(\Omega)$ 在该空间中的闭包。后者表示在 Ω 中具有紧支集的光滑函数。所有空间均为实数空间。在光滑有界区域上，薄板问题为

$$\Delta^2 u = \Gamma u \quad \text{in } \Omega, \qquad u = \partial_{\mathbf{n}} u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

其中 $\mathbf{n}$ 是外单位法向量，且 $\partial_{\mathbf{n}} u = \nabla u \cdot \mathbf{n}$。边界条件同时固定位移和法向斜率。对于材料参数和厚度固定的均匀各向同性薄板，每个振动频率的平方都与相应特征值 Γ [12] 成正比。因此，Γ_1 的下界仅凭几何数据即可给出基频的下界。与通过将单个试探位移代入瑞利商得到的上界不同，这样的下界必须控制每一个容许位移。在更高维度中，同一变分问题属于四阶椭圆算子和谱形状优化理论 [12, 13]。记 $B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \rho\}$、$\omega_n = |B_1|$ 和 $B_\Omega = B_{(|\Omega|/\omega_n)^{1/n}}$。猜想不等式为 $\Gamma_1(\Omega) \geq \Gamma_1(B_\Omega)$。

类似的膜问题在 20 世纪 20 年代由 Faber 和 Krahn 解决；参见 [13, 第 3]章。他们的不等式可由对称递减重排推出：该重排将超水平集替换为测度相同的同心球，并降低狄利克雷能量。然而，对于固支薄板，同样的论证会遇到两项障碍。重排通常不会降低拉普拉斯算子平方能量，而且第一固支特征函数未必定号。第二项困难源于固支双调和算子 [12] 不存在普遍的正性原理。取绝对值也无法消除这一困难：在正则节点超曲面处，$|u|$ 的一阶法向导数会发生跳跃，因此该函数未必属于 H^2。

Szeg˝o 在 1950 [21] 中证明了一个定号结果。Talenti 关于泊松方程的比较定理 [22] 为重新排列二阶数据提供了一种方法，而他于 1981 年关于固支薄板的工作 [23] 给出了一个普适但并非尖锐的下界。其常数在平面中约为 0.98，并随着维数增加而趋近于 $1/2$ 。Nadirashvili 的

平面证明于 1992 年宣布，并发表于 1995 [18], ，将更多约束纳入了这一方法。Ashbaugh 和 Benguria [1] 随后在二维和三维中给出了贝塞尔函数证明。这些工作通过将问题化为两个球上的耦合径向函数，克服了基态变号这一障碍。Ashbaugh、Benguria 和 Laugesen 的综述 [2] 解释了这一约化过程及其与另一个不同的屈曲问题之间的关系。

四维中的障碍可以用定量方式表述。令 J_ν 和 I_ν 分别表示第一类贝塞尔函数和第一类修正贝塞尔函数，其中 $\nu = n/2 - 1$。令 $q = j_{\nu,\,1}$为 J_ν的第一个正零点，并令 R 为

$$J_\nu(r)\, I_{\nu+1}(r) + J_{\nu+1}(r)\, I_\nu(r).$$

球公式为 $\lambda_1(B_1) = q^2$ 以及 $\Gamma_1(B_1) = R^4$ [1, 12]。将两个半径归一化为$a^n + b^n = 1$, 其中 $0 \le a \le b$。对于 $a,\ b > 0$，松弛商为

$$k^4(a) = \min_{(v,w)\neq(0,0)} \frac{\int_{B_a} (\Delta v)^2\,\mathrm{d}x + \int_{B_b} (\Delta w)^2\,\mathrm{d}x}{\int_{B_a} v^2\,\mathrm{d}x + \int_{B_b} w^2\,\mathrm{d}x},$$

其中 $v,\ w$ 分别是 $H^2(B_a) \cap H_0^1(B_a)$ 和 $H^2(B_b) \cap H_0^1(B_b)$ 上的径向函数，并满足单一通量约束 $a^{n-1}v'(a) = b^{n-1}w'(b)$。与每个球上的固支函数不同，它们的边界斜率不必分别为零。四次方根参数的极限值如下： [4, 第 5 节，第 390] 页

$$k(0) = R, \qquad k\left(2^{-1/n}\right) = 2^{1/n} q.$$

对于 $n = 2,\ 3$，Ashbaugh 和 Benguria 证明，最小值在第一个球缩小至半径 0 时取得。相比之下，Ashbaugh 和 Laugesen [4, 第 5] 节证明，对于$n \ge 4$，最小值在两个等半径球处取得，并且

$$2^{1/n} q < R, \qquad \Gamma_1(\Omega) \ge c_n \Gamma_1(B_\Omega), \qquad c_n = 2^{4/n}\left(\frac{q}{R}\right)^4 < 1.$$

因此 $c_4 \simeq 0.953797$ 和 $c_5 \simeq 0.921845$，而 $c_n \to 1$ 则如 $n \to +\infty$。这是由双球松弛得到的最优界。

松弛类包含满足边界约束和通量约束的径向对，但它们不一定来自同一个固支函数。其最小值为 $c_n R^4 < R^4$。因此，松弛问题无法给出猜想常数。证明必须使用固支函数所满足的附加约束，或者寻找不同的比较方法。

图 1 展示了辅助问题的极小构型。四维处的变化涉及这一松弛类，其约束允许出现固支边界条件所排除的边界斜率。

后续的若干进展阐明了这一困难的适用范围。Chasman 和 Lang- ford [8] 将 Talenti–Ashbaugh–Benguria 方法推广到双赫米特算子

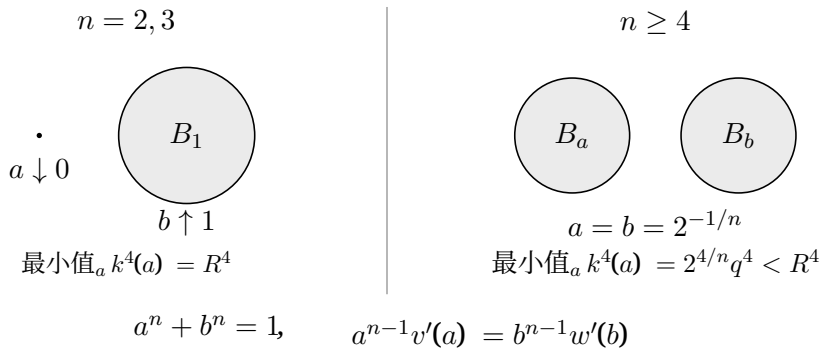


图1：双球松弛：在二维和三维中，退化的一对球使辅助商达到最小值，而在 $n \geq 4$ [1, 4] 中，相等的一对球使其达到最小值。圆圈是球的示意图；左侧的点表示一个正在消失的球。右侧的严格间隙是这种松弛方法的局限性，并非对瑞利猜想的反例。

在高斯空间中，其中用于比较的集合是半空间。他们证明了一个依赖于体积的因子界，并报告了数值证据，表明该因子至少为 0.91；这是针对高斯问题的结果。Leylekian 根据最优特征函数 [16], 临界值的信息，以及带有额外均值或边界假设 [15]的降阶原理，得出了有条件的球最优性。Freitas 和 Leylekian 将定号定理推广至承受非负张力的板 [11,定理 A]。对于一个相关的泛函，Ashbaugh、Bucur、Laugesen 和 Leylekian [3] 证明了适用于所有维度的四阶圣维南不等式，该不等式在恒定横向载荷下使平均挠度最大化。最近，Bucur 和 Laugesen [7] 通过配对泊松比较，给出了更简洁的平面证明，并得到了非线性推广。这些工作尚未确立无约束欧几里得 L^2 板不等式 $n \geq 4$ 。

我们的主要结果如下。令 $\alpha = q^2/R^2$。

定理 1.1. 设 $n \in \{4, 5\}$ 且开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 满足 $0 < |\Omega| < +\infty$。则

$$\Gamma_1(\Omega) \geq \frac{R^4}{q^4} \lambda_1(\Omega)^2 \geq R^4 \left(\frac{\omega_n}{|\Omega|} \right)^{4/n} = \Gamma_1(B_\Omega). \tag{1.1}$$

第一个常数在每个球上都能取到。最终体积比较中的等式意味着存在一个球 B，使得 $|B| = |\Omega|$ 且 $|\Omega \triangle B| = 0$，其中 $\triangle$ 表示对称差。若 Ω 具有局部利普希茨边界，则等式成立当且仅当它是球。

定理 1.1的证明（包括等式情形的陈述）见第 4.2 节。第一个不等式比较同一开集上的两个谱；随后由 Faber–Krahn 得出体积不等式。该证明适用于变分测试类，无需假设形状优化器存在或具有正则性。命题 4.3 通过夹持索nρ列夫空间描述粗糙开集上的等式情形；仅仅几乎处处与一个球一致并不足够。

该证明针对每个 $u \in C_c^\infty(\Omega)$ 构造 $F_u \not\equiv 0$, $F_u \in H_0^1(\Omega)$，当 $u \neq 0$ 时，使得

$$\int_\Omega \left(|\nabla F_u|^2 - \alpha F_u^2 \right) \mathrm{d}x \leq \int_\Omega \left((\Delta u)^2 - u^2 \right) \mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

为选取映射，令 U 和 ϕ 为B_R上的正的径向板与膜剖面，并按 $U''(R) = 1$和 $\phi'(R) = -1$归一化。比值 $s = U/(-U')$是半径的严格单调函数。定义 $f(s) = \phi/(-U')$，得到

$$F_u = |\nabla u| \, f\left(\frac{|u|}{|\nabla u|} \right) \quad \text{where } |\nabla u| > 0.$$

该构造的示意图见图2。其连续延拓为

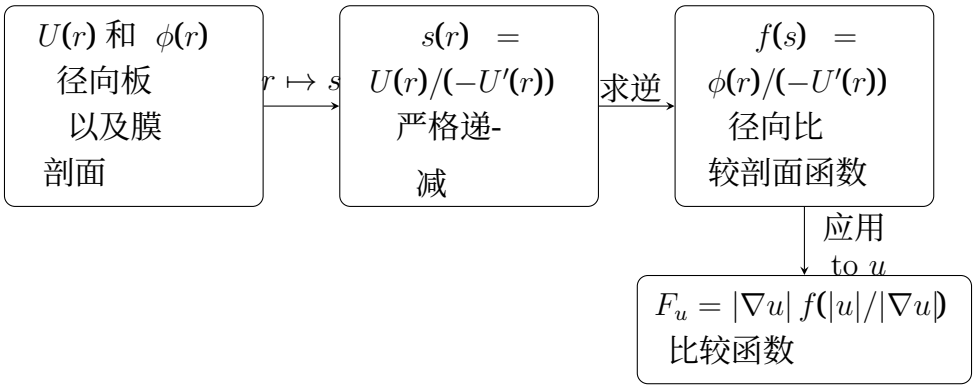


图2：从径向球剖面到一般试探函数的比较函数。

在临界点处指定。对于 $u = U$，此定义给出 $F_U = \phi$。所谓校准，是指选择这样的比较映射和散度修正，使其能量缺陷非负，并且在参考剖面上取零。

仅有径向等式并不能推出一般函数的不等式。局部恒等式使用了一个涉及 (Δu) $I_n - D^2 u$ 的散度修正，其中 I_n 是单位矩阵， $D^2 u$ 是海森矩阵。它将能量缺陷写成关于法向迹和切向迹的二次型，并包含混合分量及无迹切向分量。这些项是控制参考剖面的任意非径向扰动所必需的。剩余的二乘二矩阵条件通过其舒尔补归结为三个整分子的正性：对于满足 $e > 0$ 的对称矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} a & d/2 \\ d/2 & e \end{smallmatrix} \right)$，正定性等价于 $a - d^2/(4e) > 0$。我们约去在径向区间端点处消失的因子。随后，三十九个有理系数不等式以及对完整余项的界，共同证明了整个区间上的正性。

第二步将局部比较延拓至节点集和临界集。利普希茨延拓控制临界集，包括其测度为正的情形。Kato 不等式给出节点测度，而加权项非负。系数不等式与这些弱延拓共同推出 (1.2)，对每个 $u \in C_c^\infty(\Omega)$，

其中包括变号函数。缩放和狄利克雷变分原理继而给出 (1.1) 中的第一个不等式；法贝尔-克拉恩定理给出第二个。

对维数限制在四维和五维，源于这一构造中的符号。在四维和五维中，局部恒等式的系数不等式成立。在六维中，中心系数 $\alpha\left[\phi(0)/U(0)\right]^2-1$ 为负。因此，在一个大球上取常值的光滑函数会使比较缺陷中的体积贡献为负，而过渡壳层只贡献低阶项。由此可知，对于这一特定映射，无论散度修正如何，式（1.2）在六维中均不成立。这个障碍针对的是该变换；这一论证并不能判定六维及更高维中的瑞利不等式。

本文即将完成之际，另一项独立证明定理 1.1的工作发表了，见 [20]。尽管两篇论文采用了相似的一系列思路，但技术实现各不相同。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍球剖面函数，并推导局部海森恒等式。第3节确立系数不等式。第 4节证明定理 1.1：第4.1 节给出弱延拓，第 4.2节将其与系数不等式结合，得到积分比较、谱不等式以及所述等号情形。本节最后进一步刻画任意开集上的等号情形。第 5 节讨论六维障碍。附录 A 专门介绍有限有理数认证：第一小节界定谱参数，下一小节给出剖面系数区间，之后的小节推导分子系数、认证其下界，并估计有限系数块的乘积。附录 B 讨论无穷部分：构造完整剖面级数的正主控函数，证明二次分子的尾项界，进而证明三个行列式因子尾项界。

2 球剖面函数与局部比较

我们利用参考球构造比较映射，并确定其最佳常数。海森恒等式中的系数来自径向板和膜的剖面函数。

2.1 参考剖面函数与径向坐标

在球上使用标准的分离变量法，可得以下正的径向第一剖面函数，其中径向变量为 $r=|x|$ [1, 12]。它们在 $r=0$ 处的值按极限理解。我们使用 $U''(R)=1$ 和 $\phi'(R)=-1$:

$$U(r)=\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^{\nu}\left(\frac{I_\nu(r)}{I_\nu(R)}-\frac{J_\nu(r)}{J_\nu(R)}\right),\quad \phi(r)=\frac{R}{q}\left(\frac{R}{r}\right)^{\nu}\frac{J_\nu(qr/R)}{J_{\nu+1}(q)}.$$

为检验归一化，分别将 $2U$ 的公式中括号内的两项（包括公因子 $(R/r)^{\nu}$）记为 F_I 和 F_J。径向贝塞尔方程给出 $\Delta F_I = F_I$ 和 $\Delta F_J = -F_J$。因此

$$\Delta U = \frac{F_I + F_J}{2}, \qquad \Delta^2 U = U.$$

在 $r = R$ 处，F_I 和 F_J 均等于 1。$r^{-\nu} I_\nu(r)$ 和 $r^{-\nu} J_\nu(r)$ 的微分公式，连同定义 R 的方程，给出

$$F_I'(R) = \frac{I_{\nu+1}(R)}{I_\nu(R)} = -\frac{J_{\nu+1}(R)}{J_\nu(R)} = F_J'(R).$$

因此，$U(R) = U'(R) = 0$，而 $\Delta U(R) = U''(R) = 1$。同样，方程 $J_\nu(q) = 0$以及相同的微分公式给出 $\phi(R) = 0$、$\phi'(R) = -1$ 和 $-\Delta\phi = \alpha\phi$。特别地，

$$\eta = (\Delta U)'(R) = \frac{I_{\nu+1}(R)}{I_\nu(R)} > 0.$$

此处及下文中，撇号表示对 r 求微分，除非另有变量指定。我们用 $O\left(t^k\right)$ 表示其绝对值被某个常数乘以 $|t|^k$ 所界定的量，其中极限如所述。令 $m = n - 1$，$T = R^2$，$Q = q^2$，$Z = R\eta$以及 $K = T/16$。下文所用的 R、q、T和 Q的有理数包围列于附录 A.1中。它们的端点符号已在该处通过标准化的贝塞尔级数计算及其显式余项界得到认证。

令 $p = -U' > 0$ 和

$$s = U/p, \qquad A = -p'/p, \qquad C = -1/r, \qquad V = (\Delta U)'/p,$$
$$f = \phi/p, \qquad w = \phi'/p, \qquad z = f_s, \qquad g = f - sz.$$

右侧所有量最初都依赖于 $r \in (0, R)$。下标 s 表示变换到坐标 s 后进行微分。映射 $r \mapsto s(r)$ 是从 $(0, R)$ 到 $(0, +\infty)$ 的严格递减双射，其中 $s(0+) = +\infty$ 且 $s(R-) = 0$。对于严格单调性，p 是一个正的常数乘以

$$r^{-\nu} J_{\nu+1}(r)\left(1 - |c|\frac{I_{\nu+1}(r)}{J_{\nu+1}(r)}\right), \qquad c = J_\nu(R)/I_\nu(R) \in (-1, 0).$$

这里 c 是一个固定标量，而对于下文使用的阶数 μ，$j_{\mu,k}$ 表示 J_μ 的第 k 个正零点。J_μ 的典范乘积及其正零点的阶数单调性都是标准结果，见 [9, 第 10.21 节，尤其是 (10.21.15)]。回想一下，当一个正函数的对数为凹函数时，该函数称为对数凹。贝塞尔交叉乘积的第一个正零点 R 满足$R < j_{\nu+1,1}$；Ashbaugh–Laugesen [4]，记载了这一比较，其依据是 Lorch 单调性定理 [17]。$J_{\nu+1}$ 的典范乘积及其零点的排列见 [9, 第 10.21] 节。这些事实表明，$r^{-\nu} J_{\nu+1}(r)$ 严格对数凹：其对数等于一个常数加上 $\log r + \sum_{k\geq 1} \log\left(1 - r^2/j_{\nu+1,k}^2\right)$。

对于每个正零点 $j = j_{\nu+1,k}$，相应对数因子的导数满足

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\log\left(1 - r^2/j^2\right) = -\frac{2\left(j^2 + r^2\right)}{\left(j^2 - r^2\right)^2} < 0.$$

商 $I_{\nu+1}/J_{\nu+1}$ 具有乘积表示

$$\frac{I_{\nu+1}(r)}{J_{\nu+1}(r)} = \prod_{k\geq 1}\frac{1 + r^2/j_{\nu+1,k}^2}{1 - r^2/j_{\nu+1,k}^2}.$$

对于 $0 < r < R$，每个因子均为正、递增且凸；乘积保留这些性质，局部一致极限也是如此。 R 处的根关系使$1 - |c|\, I_{\nu+1}/J_{\nu+1}$ 在 R处为零。因此，此因子在 $(0,\ R)$ 上为正且凹。正凹函数的对数是凹函数，因为 $(\log h)'' = h''/h - (h'/h)^2 \leq 0$。将其与第一个因子的严格凹对数相加，可知 $\log p$ 严格凹。由于 $U(r) = \int_r^R p(t)\,\mathrm{d}t$，我们有 $s' = -1 - Up'/p^2$。若 $p' \geq 0$，则此值为负。若 $p' < 0$，严格对数凹性给出

$$U(r) < p(r)\int_r^{+\infty}\exp\left((t - r)\,p'(r)/p(r)\right)\mathrm{d}t = -\frac{p(r)^2}{p'(r)},$$

事实上，由凹性可知，对于 $r < t < R$，$\log\ p(t)$ 不超过其在 r 处的切线；将所得指数积分的积分区间扩展到无穷远，即得所示的严格界。乘以 $-p'(r)\ /p(r)^2 > 0$，得到 $-Up'/p^2 < 1$，从而再次有 $s' < 0$。在中心处，偶剖面级数给出 $U(r) = U(0) + O(r^2)$ 和 $p(r) = -U''(0)\ r + O(r^3)$，其中$U(0) > 0$ 且 $U''(0) < 0$。在边界处，由泰勒公式和归一化可得

$$U(r) = \frac{1}{2}(R - r)^2 + O\left((R - r)^3\right), \qquad p(r) = R - r + O\left((R - r)^2\right).$$

因此， $s(r)$ 在中心处趋于无穷大，而在边界附近等于 $(R - r)/2 + O\left((R - r)^2\right)$。连续性和严格单调性现在保证了所述双射，并证明了对 s 进行微分的合理性。

2.2 完整海森矩阵恒等式

对于 $P = |\nabla u| > 0$，映射 $F = Pf(u/P)$ 由球上的等式确定。为了控制一般函数的能量，我们引入积分后会消失的散度项。对于向量场 $J = (J^1,\ \ldots\ldots,\ J^n)$，其散度为 $\mathrm{div}\ J = \sum_{i=1}^n \partial_i J^i$。下面的系数经过选择，使得 U 的径向海森矩阵是所得二次型的一个零点。

接下来定义两个修正系数 G 和 b:

$$V_0 = w^2 - mCfw + \alpha f^2, \qquad \Psi = A' + s^2 + (1 + msC)\,V,$$
$$G = \frac{V_0 - \Psi}{mC^2}, \qquad b = -(A + sV) - mGC - fw.$$

另定义 $a=1-g^2$、 $d=2G-sG_s$和 $e=[1+(m-1)G]/m$。这里的字母 d表示一个标量系数；积分中的微分记作 d。下文所用的微分关系都可以从这两个径向方程中读出。事实上，

$$U''=Ap,\qquad \Delta U=(A+mC)\,p,\qquad p'=-Ap,\qquad (\Delta U)'=Vp.$$

对第二个恒等式求导并除以 p，得到 $V=A'+mC'-A(A+mC)$。方程 $\Delta(\Delta U)=U$ 给出 $V'-AV-mCV=s$。同样地，对 $\phi=pf$和 $\phi'=pw$ 求导并使用 $\Delta\phi=-\alpha\phi$，得到下面关于 f' 和 w' 的两个方程。因此

$$s'=sA-1,\quad C'=C^2,\quad A'=A^2+mAC-mC^2+V,\quad V'=(A+mC)\,V+s,$$
$$f'=w+Af,\quad w'=(A+mC)\,w-\alpha f,\quad w=-z-Ag.$$

最后一个恒等式可通过写出 $f'=zs'=z(sA-1)=w+Af$并使用 $g=f-sz$得到。为清晰起见，合并各项之前修正数据的导数为

$$\begin{aligned}V_0'&=2ww'-mC'fw-mCf'w-mCfw'+2\alpha ff',\\ \Psi'&=A''+2ss'+m\,(s'C+sC')\,V+(1+msC)\,V',\\ A''&=2AA'+mA'C+mAC'-2mCC'+V'.\end{aligned}$$

将右侧的导数替换为前面的方程，并在第一行中合并 w^2、 fw、 f^2的系数，得到

$$V_0'=(2A+mC)\,V_0-mC^2fw,\qquad \Psi'-(2A+mC)\,\Psi=mC^2\,(A-2C+sV).$$

对 G求导时，其分母也会产生贡献： $G'=(V_0'-\Psi')/(mC^2)-2CG$。对 b的定义求导得到

$$b'=-A'-s'V-sV'-mCG'-mC'G-f'w-fw'.$$

将这两个公式代换后得到

$$G'=(2A+(m-2)\,C)\,G-fw-(A-2C+sV),\quad b'+mCG'=-2f'w-2s'V.$$

这些关系 式给出完成二次表达式所需的三个恒等式 ：

$$\begin{aligned}2b-sb_s-2zg&=-2aA-mCd,\\ b+G_s&=-dA-2meC,\\ -s^2-z^2+\alpha f^2+b_s&=aA^2+mdAC+m^2eC^2.\end{aligned}$$

此处除以 s' 是合法的，因为 $s'<0$。特别地，前述关于 $b'+mCG'$ 的恒等式变为

$$b_s=-2zw-2V-mCG_s.$$

对于第一个 配方恒等式，使用这个表达式，然后 $w+z=-Ag$ 得到 n

$$\begin{aligned}2b-sb_s-2zg&=-2A-mC\left(2G-sG_s\right)-2g\left(w+z\right)\\&=-2A-mCd+2Ag^2=-2aA-mCd.\end{aligned}$$

对于第二个， $s'G_s=G'$ 给出

$$b+G_s+dA+2meC=b-G'+2AG+2C+2\left(m-1\right)CG=0,$$

其中，最后一个等式是 G' 的显示公式。最后， $-z^2-2zw=w^2-(w+z)^2=w^2-A^2g^2$。利用这个等式和第二个配方恒等式，第三个等式两边之差为

$$\begin{aligned}&-s^2-z^2+\alpha f^2+b_s-\left(aA^2+mdAC+m^2eC^2\right)\\&=w^2+\alpha f^2-s^2-A^2-2V+mCb+m^2eC^2\\&=V_0-\left[A^2+mAC-mC^2+s^2+\left(2+msC\right)V\right]-mC^2G\\&=V_0-\Psi-mC^2G=0.\end{aligned}$$

因此，配方过程使用了径向方程以及 G， b 的定义，而没有对测试函数施加任何微分方程。

下面的恒等式刻画了海森矩阵各分量偏离球剖面函数的程度；其符号将在下一节中确定。

命题 2.1。 对于一个正的光滑函数 u，在满足 $P=|\nabla u|>0$ 的点处，令

$$F=Pf\left(u/P\right),\quad J_1=Pb\left(u/P\right)\nabla u,\quad J_2=G\left(u/P\right)\left[\left(\Delta u\right)I_n-D^2u\right]\nabla u.$$

以下所有标量系数均在 $s=u/P$ 处取值。在第一个向量为 $\nabla u/P$ 的正交归一标架中，记

$$D^2u=\begin{pmatrix}X & \zeta^{\mathsf{T}}\\ \zeta & T_0+\tau I_m/m\end{pmatrix},\qquad \operatorname{tr}T_0=0.$$

因此， X 是法向分量， $\zeta\in\mathbb{R}^m$ 是混合向量，而 τ 是切向块的迹（对角元素之和）。对于矩阵， $|\cdot|$ 表示其各元素平方和的平方根。于是

$$\begin{aligned}&\left|D^2u\right|^2-u^2-\left|\nabla F\right|^2+\alpha F^2+\operatorname{div}\left(J_1+J_2\right)\\&=a\left(X-AP\right)^2+d\left(X-AP\right)\left(\tau-mCP\right)+e\left(\tau-mCP\right)^2\\&\quad+\left(2-g^2-d\right)\left|\zeta\right|^2+\left(1-G\right)\left|T_0\right|^2.\end{aligned}\tag{2.1}$$

证明。 令 $u_{ij}=\partial_i\partial_j u$。矩阵场 $N=(\Delta u)\,I_n-D^2u$ 有时称为海森矩阵的第一牛顿张量，其散度为零，因为 $\sum_i\partial_iN_{ij}=\partial_j\Delta u-\sum_i\partial_iu_{ij}=0$。切向块的正交分解给出

$$\left|D^2u\right|^2=X^2+2\left|\zeta\right|^2+\left|T_0\right|^2+\tau^2/m,\qquad \Delta u=X+\tau.$$

由于在所选标架下 $\partial_i P = P^{-1}\sum_j u_j u_{ji}$, $\nabla P = (X, \zeta)$。链式法则给出

$$\nabla (u/P) = \frac{\nabla u - s\nabla P}{P}, \qquad \nabla F = z\nabla u + g\nabla P,$$

因此

$$|\nabla F|^2 = (zP + gX)^2 + g^2 |\zeta|^2 .$$

对于 J_1，其标量因子的导数为 $\nabla (Pb) = b_s \nabla u + (b - sb_s) \nabla P$。对于 J_2，N的散度为零意味着 $\operatorname{div}(N\nabla u) = \operatorname{tr}(ND^2 u)$，且 $N\nabla u = P(\tau, -\zeta)$。这些恒等式给出

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} J_1 &= bP(X + \tau) + (b - sb_s) PX + b_s P^2, \\
\operatorname{div} J_2 &= G\left(2X\tau + (1 - 1/m)\tau^2 - 2|\zeta|^2 - |T_0|^2\right) \\
&\quad + G_s\left(P\tau - sX\tau + s|\zeta|^2\right).
\end{aligned}$$

这里，第二个恒等式用到了

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\left(ND^2 u\right) &= (\Delta u)^2 - \left|D^2 u\right|^2, \\
\nabla (u/P) &= (1 - sX/P, -s\zeta/P).
\end{aligned}$$

(2.1)的左边在配方之前因此为

$$\begin{aligned}
&aX^2 + dX\tau + e\tau^2 + \left(2 - g^2 - d\right)|\zeta|^2 + (1 - G)|T_0|^2 \\
&\quad + (2b - sb_s - 2zg) PX + (b + G_s) P\tau + \left(-s^2 - z^2 + \alpha f^2 + b_s\right) P^2.
\end{aligned}$$

三个配方恒等式将最后一行化为

$$-(2aA + mCd) PX - (dA + 2meC) P\tau + \left(aA^2 + mdAC + m^2 eC^2\right) P^2.$$

将右边的前三项展开，2.1)，恰好得到这个多项式。其余两个海森矩阵项的系数已与所述系数一致，由此证明了该恒等式。

□

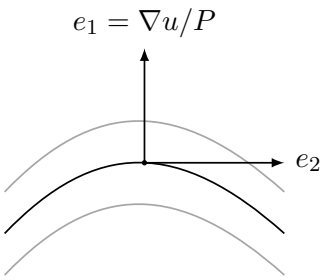
等号情形说明了这一补全的几何意义。对于 $u = U$，法向和切向海森矩阵分量分别为 $X = U'' = AP$和 $\tau = mU'/r = mCP$，而 $\zeta = 0$和 $T_0 = 0$。因此，（2.1）右侧的每一项都为零。对于一般函数，混合向量和无迹切向块刻画了偏离这种径向结构的程度；参见图3。仅控制 X 和 τ 将无法处理这些偏离。

还需要在整个 $0 < r < R$ 中证明，

$$G < 0, \qquad e > 0, \qquad ae - d^2/4 > 0. \tag{2.2}$$

由于 $ae = (ae - d^2/4) + d^2/4 > 0$ 和 $e > 0$，这些条件也给出了 $a > 0$。事实上，对于实数 ξ，θ，精确配方

$$a\xi^2 + d\xi\theta + e\theta^2 = e\left(\theta + \frac{d}{2e}\xi\right)^2 + \frac{ae - d^2/4}{e}\xi^2$$



u的水平集
法向与切向

$$D^2u = \begin{pmatrix} X & \zeta^{\mathsf{T}} \\ \zeta & T_0 + \dfrac{\tau}{m} I_m \end{pmatrix}$$
$$\operatorname{tr} T_0 = 0, \qquad m = n-1$$

球剖面： $X = AP$， $\tau = mCP$
$\zeta = 0$， $T_0 = 0$

图 3：正则点处的海森矩阵分解，展示于二维截面中。向量 e_2 表示一个切向方向。混合项 ζ 和无迹切向块 T_0 包含在局部恒等式中，因此其符号不仅控制径向测试函数，也控制非径向测试函数。

表明矩阵 $\begin{pmatrix} a & d/2 \\ d/2 & e \end{pmatrix}$ 是正定的：它的二次型对每个非零向量都为正。将此公式应用于 $\xi = X - AP$和 $\theta = \tau - mCP$。它们也控制其他 Hessian 项： $G < 0$ 推出 $e < 1$； $d < 2\sqrt{ae} < 2\sqrt{a}$ 进而得到 $2 - g^2 - d = 1 + a - d > (1 - \sqrt{a})^2 \geq 0$，以及 $1 - G > 0$。因此，命题2.1 右侧非负。

3 比较的正性

下一步将（2.2）中的表面上具有奇异性的系数替换为具有绝对收敛幂级数的分子。这里，整函数是指在整个复平面上全纯的复值函数。因此，它关于 $y = 0$ 具有泰勒级数，且收敛半径为无穷大。我们将利用分子的这一性质：除去 y 中的可去幂因子后，其泰勒级数在每个有界区间上仍然绝对收敛，特别是在 $0 \leq y \leq 1$上。

3.1 整分子与系数递推关系

令 $y = 1 - r^2/T$、 $x = 1 - y$、 $u(y) = 8U(r)/T$，以及 $v(y) = 2\phi(r)/R$。在本节和附录中， u， v 仅表示这些辅助剖面，而非变分试探函数。下标 x 表示 $-\partial_y$。因此， $x = r^2/T$ 从中心处的零值递增至边界处的 1，而 y 则朝相反方向递增。偶贝塞尔级数表明， u 和 v 是关于 y 的整函数。它们的边界条件分别使其在 $y = 0$ 处具有二重零点和单零点。定义可去商

$$h = u/y^2, \; k = v/y, \; H = 2h - yh_x.$$

特别地， $u_x = -yH$，因为 $\partial_x y = -1$。用于消去分母的其余分子为

$$D = 2x\left\{y\left(h_x H - hH_x\right) - hH\right\} - yhH, \quad N_g = y\left(kh_x - hk_x\right) - kh,$$

$$\begin{aligned} B &= u_x^2 - (2n+6)\, x u_x u_{xx} + 4x^2 u_{xx}^2 - 8x^2 u_x u_{xxx} \\ &\quad - m(n+2)\, u u_{xx} - 2mxuu_{xxx}, \\ N_G &= 4xTv_x^2 + 2mTvv_x + QTv^2 - K\left(T^2u^2 + 4B\right), \\ L &= N_G/y^3, \qquad N_a = \left(KD^2 - TxN_g^2\right)/y^2, \\ N_d &= LD - xh\left\{y\left(L_x H - 2LH_x\right) - LH\right\}, \\ N_e &= 4mKH^2 + (m-1)\, yL, \qquad N_{\det} = 4H^2 N_a N_e - N_d^2. \end{aligned}$$

辅助剖面振幅与物理振幅不同。相应地，设定 $\widehat{f} = \sqrt{K} f$, $\widehat{g} = \sqrt{K} g$, $\widehat{G} = KG$, $\widehat{a} = Ka$, $\widehat{\overline{d}} = Kd$ 和 $\widehat{\overline{e}} = Ke$。特别是$\widehat{a} = K - \widehat{g}^2$。我们声称，将归一化系数的定义直接代入，可得以下恒等式:

$$\widehat{G} = \frac{yL}{4mH^2}, \quad \widehat{a} = \frac{y^2 N_a}{D^2}, \quad \widehat{d} = \frac{yN_d}{2mH^2 D}, \quad \widehat{e} = \frac{N_e}{4m^2H^2},$$

$$\widehat{a}\widehat{e} - \widehat{d}^2/4 = \frac{y^2 N_{\det}}{16m^2H^4D^2}.$$

现在我们根据定义验证这些公式。之所以列出这一验证，是因为分子中的消去至关重要；这些恒等式并非未经解释地由代入得出。关系式 $u_x = -yH$ 和归一化条件 $U = Tu/8$ 给出

$$p = -\frac{T}{8}\frac{2r}{T}u_x = \frac{ryH}{4}.$$

因此，对 $0 < x < 1$，有 $H > 0$。下面推导的 s_x 公式，结合 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}r = 2r/T > 0$ 和 $s' < 0$，便可在同一区间得到 $D < 0$。只需证明$-L$, N_e, $N_{\det} > 0$。事实上，

$$\widehat{a} - \frac{\widehat{d}^2}{4\widehat{e}} = \frac{y^2 N_{\det}}{4H^2D^2N_e}. \tag{3.1}$$

因此， $N_e > 0$ 和 $N_{\det} > 0$ 意味着 $\widehat{a} > 0$，从而得到 $a > 0$。等价地， $4H^2N_aN_e = N_{\det} + N_d^2 > 0$。物理行列式等于所示辅助行列式除以 $K^2 > 0$。对于重构公式，$s = Ryh/(2\sqrt{xH})$给出

$$s_x = \frac{RD}{4x^{3/2}H^2}, \qquad \widehat{g} = \frac{R\sqrt{x}N_g}{D}, \qquad \widehat{G}_x = \frac{y\left(L_x H - 2LH_x\right) - LH}{4mH^3}.$$

$\widehat{\ }$为看出 $\widehat{g}$ 中的消去，写成 $f = Rk/(2\sqrt{xH})$。微分得

$$\widehat{f}_x = \frac{R}{4x^{3/2}H^2}\left[2x\left(k_x H - kH_x\right) - kH\right].$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$利用 $\widehat{g} = f - sf_x/s_x$，其分子可化简为

$$kD - yh\left[2x\left(k_xH - kH_x\right) - kH\right] = 2xHN_g.$$

这就证明了 $\widehat{g}$ 的显示公式，进而也证明了 $\widehat{a} = K - \widehat{g}^2$ 的显示公式。此外，$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $G_s = G_x/s_x$，因此

$$s\widehat{G}_s = \frac{xyh}{2mH^2D}\left[y\left(L_xH - 2LH_x\right) - LH\right].$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$从该表达式中减去 $2G$，即可证明 d 的公式。剩余的系数为

$$\widehat{e} = \frac{K + (m-1)\,\widehat{G}}{m}.$$

将这三个分数通分后，即得行列式公式。要用变量 y 表示 Ψ，令 $\widetilde{p} = -\partial_r u$，此处将 u 视为复合剖面函数 $u(1 - r^2/T)$。从 U 到 u 的常数缩放不改变 s、A、V，因此

$$\widetilde{p}^2\Psi = u_{rr}^2 + \widetilde{p}\,u_{rrr} + u^2 + \left(\widetilde{p} - mu/r\right)(\Delta u)'.$$

Use

$$u_r = \frac{2r}{T}u_x, \qquad u_{rr} = \frac{2}{T}\left(u_x + 2xu_{xx}\right),$$
$$u_{rrr} = \frac{4r}{T^2}\left(3u_{xx} + 2xu_{xxx}\right), \qquad (\Delta u)' = \frac{4r}{T^2}\left(\left(n+2\right)u_{xx} + 2xu_{xxx}\right).$$

$\widehat{\ }$代换后得到上文的多项式 B。对于 $V_0 = KV_0$，类似的计算给出

$$4u_x^2r^2\Psi = T^2u^2 + 4B, \quad 4u_x^2r^2\widehat{V}_0 = 4xTv_x^2 + 2mTvv_x + QTv^2.$$

将第一个等式乘以 K，再从第二个等式中减去。结果为

$$N_G = 4u_x^2r^2K\left(V_0 - \Psi\right) = 4mu_x^2\widehat{G} = 4my^2H^2\widehat{G},$$

其中第二个等式用到了 $C^2 = 1/r^2$。这就证明了 $\widehat{G} = yL/(4mH^2)$，包括其归一化因子。

对于幂级数 $A(y)$，将 $[A]_j$ 记作 y^j 的系数。令 $u_j = [u]_j$、$v_j = [v]_j$，并写作 $\gamma = n/2$。此变量下的剖面方程为

$$\mathcal{L}^2u = \frac{T^2}{16}u, \qquad \mathcal{L}v = -\frac{Q}{4}v, \qquad \mathcal{L} = (1-y)\,\partial_y^2 - \gamma\partial_y.$$

例如，y^j 在 $\mathcal{L}u$ 中的系数为 $(j+1)$ $(j+2)$ $u_{j+2} -$ $(j+1)$ $(j+\gamma)$ u_{j+1}。再次应用相同的系数公式，得到

$$\begin{aligned}\left[\mathcal{L}^2u\right]_j = {} & (j+1)(j+2)(j+3)(j+4)\,u_{j+4} \\ & - 2(j+1)(j+2)(j+3)(j+\gamma+1)\,u_{j+3} \\ & + (j+1)(j+2)(j+\gamma)(j+\gamma+1)\,u_{j+2}.\end{aligned}$$

令此表达式等于 $T^2u_j/16$ ，再除以 u_{j+4} 的正系数，对于 $j \geq 0$，得到

$$u_{j+4} = \frac{2(j+\gamma+1)}{j+4}u_{j+3} - \frac{(j+\gamma)(j+\gamma+1)}{(j+3)(j+4)}u_{j+2} + \frac{T^2u_j}{16(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)},$$

$$v_{j+2} = \frac{j+\gamma}{j+2}v_{j+1} - \frac{Qv_j}{4(j+1)(j+2)},$$

边界数据给出 $u_0 = u_1 = v_0 = 0$和 $u_2 = v_1 = 1$。对于下一个板系数，在 R处对 $\Delta U = U'' + mU'/r$求导:

$$U'''(R) = \eta - m/R = (Z-m)/R.$$

另一方面， $U = Tu/8$ 和边界级数给出 $u_{xx}|_{y=0} = 2$ 和 $u_{xxx}|_{y=0} = -6u_3$。上文所示的径向链式法则接着给出 $U'''(R) = (3-6u_3)/R$。令这些表达式相等，得到 $u_3 = (n+2-Z)/6$。这两个递推式现在确定了所有后续系数。特别是

$$u_4 = \frac{(n+2)(n+4-2Z)}{48}, \quad v_2 = n/4, \quad v_3 = \frac{n(n+2)-Q}{24}.$$

这些给出 $B = 16 + 8my + 2nmy^2 + O(y^3)$ 和 $4xv_x^2 + 2mvv_x + Qv^2 = 4 + 2my + (nm/2)y^2 + O(y^3)$。由于 $u^2 = O(y^4)$ 和 $K = T/16$，这两个展开式给出

$$\begin{aligned} N_G &= T\left[4 + 2my + \frac{nm}{2}y^2\right] - \frac{T}{16}\left[64 + 32my + 8nmy^2\right] + O\left(y^3\right) \\ &= O\left(y^3\right). \end{aligned}$$

因此，其次数为 0、1 和 2 的系数恰好都为零。对于另一处除法，令$h_1 = [h]_1 = u_3$。对 D, N_g直接进行微分，得到 $D_0 = -4$、$(N_g)_0 = -1$、 $D_1 = 2 - 8h_1$ 和 $(N_g)_1 = -2h_1$。因此

$$\begin{aligned} KD^2 &= T\left[1 + (4h_1 - 1)y\right] + O\left(y^2\right), \\ TxN_g^2 &= T\left[1 + (4h_1 - 1)y\right] + O\left(y^2\right). \end{aligned}$$

因此，常数项和一次项的系数也相互抵消。在 L 中除以 y^3 ，以及在 N_a 中除以y^2 ，会消去整函数的零点；这不会在 $y = 0$处引入奇点。因此，上文定义的所有分子都是整函数，并且它们的级数在整个 $0 \leq y \leq 1$上绝对收敛。

由两个方程 $\Delta U = W$ 和$\Delta W = U$可直接得到一种等价的实现方式。令 $W(y) = \Delta U(r)$，并写成 $W_j = [W]_j$。那么

$$\mathcal{L}u = 2W, \qquad \mathcal{L}W = \frac{T^2}{32}u, \qquad W_0 = 1, \quad W_1 = -Z/2,$$

$$u_{j+2} = \frac{j+\gamma}{j+2}u_{j+1} + \frac{2W_j}{(j+1)(j+2)},$$

$$W_{j+2} = \frac{j+\gamma}{j+2}W_{j+1} + \frac{T^2u_j}{32(j+1)(j+2)}.$$

消去 W 后，得到四阶标量递推关系。

3.2 有限系数与完全级数正性

下表汇总了正性论证中使用的有限系数界，便于查阅。表中数值均由附录 A.4中的有理数包围向下取整得到：关于 $-L$ 和 N_e 的界来自其中的第一个系数表，而次数从零到五的行列式项来自直接卷积表。对于次数从六到二十的情况，下界 $1/20$ 由命题 A.1给出。因此，该表汇集的是先前已验证的估计，并非独立进行的数值计算。对于 $A \in \{-L, N_e, N_{\det}\}$ 所需的公共下界为

j	$-L$	N_e	$N_{\det}$
0	12	63	3500
1	21	62	22000
2	12	37	62000
3	5	20	109000
4	1	8	145000
5	1/3	2	155000
6	1/20	7/10	1/20
7	1/100	3/20	1/20
8	1/1000	1/50	1/20

对于 $9 \le j \le 20$ 我们只需要 $[N_{\det}]_j > 1/20$。对于 $-L$ 和 N_e，正文表格中的条目是附录 A.4中第一个表格向下取整后的版本。对于 $N_{\det}$，次数零至五由直接卷积公式得到

$$[N_{\det}]_j = \sum_{i=0}^{j} (c_i e_{j-i} - z_i z_{j-i}),$$

其认证值列于该附录的下一个表格中；次数六至二十由命题 A.1涵盖。所有这些计算所用的剖面区间和系数公式分别见附录A.2 和附录A.3。

例如，在 $j = 20$四维中，所选取的正卷积项为$c_{15}^{-} e_{4,\,5}^{-} = 0.138 \cdot 2.8$其中两个下界是附录A.4系数表中的条目。被减平方项利用所列出的 $\mathcal{Q}_{20} = 0.24477811 < 0.245$条目可界定为 d_i^{+} ，而省略的高指标贡献可界定为$\delta_4 U_4 = 10^{-5} \cdot 6000 = 0.06$。因此

$$[N_{\det}]_{20} > 0.138 \cdot 2.8 - 0.245 - 0.06 = 0.0814 > \frac{1}{20}.$$

完整的代换 $\mathcal{Q}_{20}$ 记录于附录A.4中。

对于尾部估计，记

$$\mathcal{C} = 4H^2 N_a, \qquad \mathcal{E} = N_e, \qquad \mathcal{Z} = N_d, \qquad N_{\det} = \mathcal{C}\mathcal{E} - \mathcal{Z}^2.$$

这些符号表示关于 y 的整函数；特别是， $\mathcal{C}$ 与径向系数 $C=-1/r$ 不同。对于系数绝对可和的级数 $A=\sum_{j\geq 0}A_j y^j$ ，定义

$$A^{\#}(y)=\sum_{j\geq 0}|A_j|\,y^j,\qquad \|A\|_{\mathcal{A}}=\sum_{j\geq 0}|A_j|\,,\qquad \mathcal{T}_k A^{\#}=\sum_{j\geq k}|A_j|\,.$$

这里 $\|A\|_{\mathcal{A}}$ 是系数和范数。绝对收敛允许对非负双重和进行重排，因此由卷积公式可得

$$\|AB\|_{\mathcal{A}}\leq\sum_{j\geq 0}\sum_{i=0}^{j}|A_i|\,|B_{j-i}|=\left(\sum_{i\geq 0}|A_i|\right)\left(\sum_{k\geq 0}|B_k|\right)=\|A\|_{\mathcal{A}}\,\|B\|_{\mathcal{A}}\,.$$

命题 B.1 在附录 B.2 中给出了两个二次余项界，而附录 B.2 中的命题 B.3 给出了三个高阶界：

$$\mathcal{T}_9 L^{\#}<13/4,\qquad \mathcal{T}_9 N_e^{\#}<61,$$
$$\mathcal{T}_{21}\mathcal{C}^{\#}<7/4,\qquad \mathcal{T}_{21}\mathcal{E}^{\#}<10^{-9},\qquad \mathcal{T}_{21}\mathcal{Z}^{\#}<1/100.$$

令 $\mathcal{C}_0$、$\mathcal{E}_0$、$\mathcal{Z}_0$ 分别表示在 $\mathcal{C}$、$\mathcal{E}$、$\mathcal{Z}$中保留次数从零到二十的系数后得到的多项式。附录 A.4 的两个维数表中的上界列 c_i^+ 、 e_i^+ 、 d_i^+ 给出了有限系数和。五维列支配四维列。它们的和为

$$\sum_{i=0}^{20}c_i^+=21318.20648<22000,$$
$$\sum_{i=0}^{20}e_i^+=305.9385,$$
$$\sum_{i=0}^{20}d_i^+=1675.432427.$$

对于 $\mathcal{C}_0$，只会出现这些次数不超过二十的系数，因此

$$\|\mathcal{C}_0\|_{\mathcal{A}}\leq\sum_{i=0}^{20}c_i^+<22000.$$

对于完整级数 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{Z}$，我们还必须包括次数至少为二十一的系数。这些系数由附录 B.2中的命题 B.3给出界。因此，

$$\|\mathcal{E}\|_{\mathcal{A}}<305.9385+10^{-9}<310,$$
$$\|\mathcal{Z}\|_{\mathcal{A}}<1675.432427+\frac{1}{100}<1690.$$

这给出了下文使用的三个范数界，其中每个有限和都来自附录 A.4 ，每个无限余项则来自附录 B.3。尽管 $\mathcal{C}_0$、 $\mathcal{E}_0$、 $\mathcal{Z}_0$的次数都不超过二十，但它们的乘积次数可能达到四十。因此，它们中次数

为二十一至四十的项必须纳入行列式尾项。下文的界是附录 A.5中证明的有限块估计；其逐行表格记录了所有次数之和至少为二十一的有序次数对所产生的贡献：

$$\sum_{\substack{0\le i,j\le 20\\ i+j\ge 21}} |[\mathcal{C}]_i| \left|[\mathcal{E}]_j\right| + \sum_{\substack{0\le i,j\le 20\\ i+j\ge 21}} |[\mathcal{Z}]_i| \left|[\mathcal{Z}]_j\right| < 100.$$

令 $R_C = \mathcal{C} - \mathcal{C}_0$，并类似地定义 R_E， R_Z。这些恒等式

$$\mathcal{C}\mathcal{E} - \mathcal{C}_0\mathcal{E}_0 = R_C\mathcal{E} + \mathcal{C}_0 R_E, \qquad \mathcal{Z}^2 - \mathcal{Z}_0^2 = R_Z\left(\mathcal{Z} + \mathcal{Z}_0\right)$$

以及次可乘性推出

$$\begin{aligned}\left\|N_{\det} - \left(\mathcal{C}_0\mathcal{E}_0 - \mathcal{Z}_0^2\right)\right\|_{\mathcal{A}} &\le \|R_C\|_{\mathcal{A}}\|\mathcal{E}\|_{\mathcal{A}} + \|\mathcal{C}_0\|_{\mathcal{A}}\|R_E\|_{\mathcal{A}} + 2\|\mathcal{Z}\|_{\mathcal{A}}\|R_Z\|_{\mathcal{A}} \\ &< \frac{7}{4}\cdot 310 + 22000\cdot 10^{-9} + \frac{2\cdot 1690}{100} = 576.300022 < 577.\end{aligned}$$

这里估计的差从二十一次项开始，因为 R_C、 R_E、 R_Z都如此。根据前述有限卷积估计，多项式 $\mathcal{C}_0\mathcal{E}_0 - \mathcal{Z}_0^2$的尾项贡献小于 100。因此，由三角不等式可得完整行列式尾项界

$$\mathcal{T}_{21}\left(N_{\det}^{\#}\right) < 100 + 577 = 677.$$

有限系数界表明，$-L$、 N_e的系数直到八次项，以及 $N_{\det}$的系数直到二十次项，均为正，其常数项分别大于 12、63、3500。对于任意 $0 \le y \le 1$，剩余系数对级数值造成的减幅不超过其绝对值。更明确地说，若 $A_j > 0$ 对于$0 \le j < k$，则对于 $0 \le y \le 1$

$$A(y) = A_0 + \sum_{j=1}^{k-1} A_j y^j + \sum_{j\ge k} A_j y^j \ge A_0 - \sum_{j\ge k} |A_j|.$$

将此应用于 $k = 9$ 和 $-L$， N_e 并将 $k = 21$ 应用于 $N_{\det}$。前两个界见命题B.1；行列式界结合了命题B.2 与附录A.5中的有限块贡献。三个全级数尾项界给出

$$-L(y) > 12 - \frac{13}{4} > 8, \qquad N_e(y) > 63 - 61 = 2, \qquad N_{\det}(y) > 3500 - 677 > 2500.$$

特别是，这些界在 $y = 1$ 处也成立。重构公式和精确的 Schur 恒等式（3.1）在整个 2.2）中确立了 $0 < r < R$。

同样的正性也控制梯度消失处的点。下一个引理确定了这些点处的极限缺陷，这在对局部恒等式积分时将会用到。

引理 3.1。 对于 $n = 4$， 5 令 $c_\infty = \phi(0)/U(0)$ 以及 $\chi = \alpha c_\infty^2 - 1$。将 $U_c = u(1) = 8U(0)/T$和 $V_c = v(1) = 2\phi(0)/R$ 记作归一化中心振幅。则 $\chi > 0$。

证明。显式参考剖面给出

$$a_0 = -\frac{U''(0)}{U(0)} = \frac{1+c}{n(1-c)} > 0.$$

要计算这些极限，使用偶中心展开

$$\begin{aligned} U(r) &= U(0)\left(1 - \frac{a_0 r^2}{2} + O\left(r^4\right)\right), \\ p(r) &= a_0 U(0)\, r + O\left(r^3\right), \\ \phi(r) &= \phi(0)\left(1 - \frac{\alpha r^2}{2n} + O\left(r^4\right)\right). \end{aligned}$$

最后一行的系数由 $\Delta\phi(0) = n\phi''(0) = -\alpha\phi(0)$ 得出。同理，对于$W = \Delta U$，方程 $\Delta W = U$给出 $W'(r) = U(0)\, r/n + O(r^3)$。将这些展开式除以 p，得到

$$\begin{gathered} s = \frac{1}{a_0 r} + O(r), \quad A = -\frac{1}{r} + O(r), \quad V = \frac{1}{n a_0} + O\left(r^2\right), \\ f = \frac{c_\infty}{a_0 r} + O(r), \qquad w = -\frac{\alpha c_\infty}{n a_0} + O\left(r^2\right). \end{gathered}$$

对于 V_0，项 w^2 有界，而另外两项的首项之和为

$$-mCfw + \alpha f^2 = \frac{\alpha c_\infty^2}{a_0^2 r^2}\left(1 - \frac{m}{n}\right) + O(1).$$

对于 Ψ，首项分别为 $A' = r^{-2} + O(1)$、$s^2 = a_0^{-2} r^{-2} + O(1)$ 和 $msCV = -m/(n a_0^2 r^2) + O(1)$；剩余项 V有界。由于 $n = m + 1$，可得

$$V_0 = \frac{\alpha c_\infty^2}{n a_0^2 r^2} + O(1), \qquad \Psi = \frac{1 + 1/(n a_0^2)}{r^2} + O(1).$$

因此，$G_\infty = \lim_{r \downarrow 0} G(r)$ 存在，并且

$$\chi = \frac{16 Q V_c^2}{T^2 U_c^2} - 1 = n a_0^2 (1 + m G_\infty), \qquad G_\infty = \frac{\chi/(n a_0^2) - 1}{m}. \tag{3.2}$$

同一收敛级数给出 $f = c_\infty s + O(s^{-1})$，因此 $z = c_\infty + O(s^{-2})$ 且 $g = f - sz = O(s^{-1})$。此外，$G = G_\infty + O(r^2)$ 和 $s' = -1/(a_0 r^2) + O(1)$ 蕴含 $sG_s = sG'/s' = O(r^2)$。因此，$a \to 1$、$d \to 2G_\infty$，极限系数矩阵为

$$\mathsf{M}_\infty = \begin{pmatrix} 1 & G_\infty \\ G_\infty & (1 + (m-1) G_\infty)/m \end{pmatrix}.$$

重构在 $y = 1$ 处仍然非奇异。事实上，$h(1) = u(1) = U_c > 0$。恒等式 $p = ryH/4$ 以及 p 的中心展开给出 $H(1) = 4 a_0 U(0) = T a_0 U_c/2 > 0$。在 $x = 0$ 处，D 的定义简化为 $D(1) = -U_c H(1) \neq 0$。严格分子

$y = 1$ 处的界以及精确的 Schur 恒等式因此使 M_∞ 正定。将其作用于非零向量 $(1, m)$ 得到

$$a_0^2 \begin{pmatrix} 1 & m \end{pmatrix} \mathsf{M}_\infty \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = a_0^2 \left[1 + 2mG_\infty + m\left(1 + (m-1)\, G_\infty\right)\right]$$
$$= n a_0^2 \left(1 + mG_\infty\right) = \chi > 0.$$

□

定理 4.1的证明

我们首先建立积分局部恒等式所需的弱延拓。第4.2 节随后证明积分比较、两个谱不等式以及定理中的等式情形。

我们回到实试验函数 $u \in C_c^\infty(\Omega)$。逐点恒等式已在 u 和 ∇u 非零的所有位置得到证明。为了对其积分，我们必须处理节点集$\{u = 0\}$ 和临界集 $\{\nabla u = 0\}$。后者可能具有正的勒贝格测度。索伯列夫链式法则以及弱梯度在每个水平集上几乎处处为零这一事实，将以其标准形式 [6,第 9]章加以使用。

4.1 弱延拓与例外集

在 $r = 0$ 和 $r = R$ 附近的展开决定了比较映射和两个散度场的延拓。奇系数 b 的跳跃被明确分离出来，因为它会产生节点测度。

引理 4.1. 将 f, G 作偶延拓，将 b 作奇延拓到实数 s 轴上。记 $b(s) = \eta \operatorname{sign}(s) + b_{\mathrm{reg}}(s)$。这里，$\operatorname{sign}(s)$ 依次在 $s > 0$、$s < 0$ 或 $s = 0$ 时等于 1、-1 或 0，且 $b_{\mathrm{reg}}(0) = 0$。对于满足 $\xi \neq 0$ 的 $(t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$，这些映射

$$\Phi(t, \xi) = |\xi|\, f\left(|t| / |\xi|\right), \quad \mathcal{B}(t, \xi) = |\xi|\, b_{\mathrm{reg}}\left(t / |\xi|\right), \quad \mathcal{V}(t, \xi) = G\left(|t| / |\xi|\right) \xi$$

存在全局 *Lipschitz* 延拓。在 $\xi = 0$ 处，它们的取值依次为 $c_\infty |t|$、$B_\infty t$ 和 0。这里 $c_\infty = \phi(0) / U(0) > 0$，且 $B_\infty = \lim_{s \to +\infty} b(s)/s$ 有限。

证明。记 $\delta = R - r$。由于 $U'''(R) = \eta - m/R$ 且 $\phi''(R) = m/R$，边界展开为

$$U(r) = \tfrac{1}{2}\delta^2 - \tfrac{1}{6}(\eta - m/R)\,\delta^3 + O\left(\delta^4\right),$$
$$p(r) = \delta - \tfrac{1}{2}(\eta - m/R)\,\delta^2 + O\left(\delta^3\right),$$
$$\phi(r) = \delta + \tfrac{m}{2R}\delta^2 + O\left(\delta^3\right).$$

将第一和第三个级数分别除以第二个级数，得到

$$s = \frac{\delta}{2} + \frac{\eta - m/R}{12}\delta^2 + O\left(\delta^3\right), \qquad f = 1 + \frac{\eta}{2}\delta + O\left(\delta^2\right) = 1 + \eta s + O\left(s^2\right).$$

在 b 的表达式中，表面上奇异的项相互抵消：

$$A+sV=\frac{1}{\delta}+\frac{m}{2R}+O\left(\delta\right),\qquad fw=-\frac{1}{\delta}-\eta-\frac{m}{2R}+O\left(\delta\right).$$

G 的分子约去后，再结合 b 的定义，得到

$$G=-\frac{2\left(Z-2\right)}{3R}s+O\left(s^{2}\right),\qquad b=\eta+O\left(s\right).$$

在中心处，记作 $U_0=U\left(0\right)>0$ 和 $a_0=-U''\left(0\right)/U_0>0$，如引理 3.1所示。偶剖面级数给出

$$U=U_0+O\left(r^2\right),\quad p=a_0U_0r+O\left(r^3\right),\quad \phi=\phi\left(0\right)+O\left(r^2\right),\quad s=\frac{1}{a_0r}+O\left(r\right).$$

因此，$r=1/\left(a_0s\right)+O\left(s^{-3}\right)$，且 $f/s=\phi/U=c_\infty+O\left(s^{-2}\right)$。为清楚起见，我们将这些展开中的变量代换过程详述如下。关系式

$$s=\frac{1}{a_0r}+O(r)$$

首先给出

$$r=\frac{1}{a_0s}+O(s^{-3}),\qquad r^2=\frac{1}{a_0^2s^2}+O(s^{-4}).$$

由于 $f/s=\phi/U=c_\infty+O(r^2)$，因此

$$f=c_\infty s+O(s^{-1}).$$

已得到的 G 的中心展开为 $G(r)=G_\infty+O(r^2)$。代入 $r^2=O(s^{-2})$ 得到

$$G(s)=G_\infty+O(s^{-2}).$$

我们还可以直接计算 b 中线性项的系数。引理3.1中的中心展开给出

$$A=-\frac{1}{r}+O(r),\quad C=-\frac{1}{r},\quad V=\frac{1}{na_0}+O(r^2),\quad f=\frac{c_\infty}{a_0r}+O(r),\quad w=-\frac{\alpha c_\infty}{na_0}+O(r^2),$$

其中 $G=G_\infty+O(r^2)$ 和 $s=(a_0r)^{-1}+O(r)$。代入 $b=-(A+sV)-mGC-fw$ 可得

$$\begin{aligned}b&=\frac{1}{r}-\frac{1}{na_0^2r}+\frac{mG_\infty}{r}+\frac{\alpha c_\infty^2}{na_0^2r}+O(r)\\&=\frac{1+mG_\infty}{r}+\frac{\alpha c_\infty^2-1}{na_0^2r}+O(r).\end{aligned}$$

由于 $\chi=\alpha c_\infty^2-1=na_0^2(1+mG_\infty)$ 根据 (3.2), 这就变成

$$b=\frac{2(1+mG_\infty)}{r}+O(r)=2a_0(1+mG_\infty)s+O(s^{-1}).$$

因此，令

$$B_\infty = 2a_0(1+mG_\infty) = a_0(1+mG_\infty) + \frac{\alpha c_\infty^2 - 1}{na_0},$$

我们有

$$f = c_\infty s + O(s^{-1}), \qquad G = G_\infty + O(s^{-2}), \qquad b = B_\infty s + O(s^{-1}) \quad \text{as } s \to +\infty.$$

特别地，$B_\infty = \lim_{s\to+\infty} b(s)/s$。

这些展开式在进行下文所需阶数的逐项求导后仍然成立。变量变换关于边界距离是解析的，并且当 $1/s$趋近于 r 0或 R时也是解析的。因此，求导后的估计可由相应的收敛级数推出。特别地，减去奇跳跃后得到

$$b_{\mathrm{reg}}(s) = B_\infty s - \eta \operatorname{sign}(s) + O\left(|s|^{-1}\right) \quad \text{as } |s| \to +\infty.$$

例如，在无穷远处，f 中的线性项在 $f - sf_s = O(s^{-1})$中相消，而$b_{\mathrm{reg}} - sb'_{\mathrm{reg}} = -\eta$ sign (s) $+ O\left(|s|^{-1}\right)$。此外，$G_s = O(s^{-3})$且 $sG_s = O(s^{-2})$。在零附近，前述泰勒级数给出从两侧看均有界的导数。在其余每个紧区间上，系数都是光滑的，因为 $s' \neq 0$。因此，对于 $s \neq 0$，所有 f_s，$f - sf_s$，b'_{reg}，$b_{\mathrm{reg}} - sb'_{\mathrm{reg}}$ 以及 G，G_s，sG_s 均有界。

现在我们检查这些映射本身的导数。在 $\rho = |\xi| > 0$ 和 $\sigma = |t|/\rho$ 的情况下，对于满足 $t \neq 0$ 的点，

$$\partial_t \Phi = \operatorname{sign}(t) f_s(\sigma), \qquad \nabla_\xi \Phi = (f(\sigma) - \sigma f_s(\sigma)) \frac{\xi}{\rho},$$

$$\partial_t \mathcal{V} = \operatorname{sign}(t) G_s(\sigma) \frac{\xi}{\rho}, \qquad D_\xi \mathcal{V} = G(\sigma) I_n - \sigma G_s(\sigma) \frac{(\xi_i \xi_j)_{i,j=1}^n}{\rho^2}.$$

这里 D_ξ 表示关于 ξ 的雅可比矩阵，而所显示的矩阵的元素为 $\xi_i \xi_j$。对于带符号变量 $s = t/\rho$，其余导数为

$$\partial_t \mathcal{B} = b'_{\mathrm{reg}}(s), \qquad \nabla_\xi \mathcal{B} = \left(b_{\mathrm{reg}}(s) - sb'_{\mathrm{reg}}(s)\right) \frac{\xi}{\rho}.$$

所显示的每个导数都一致有界。$r = 0$ 和 $r = R$ 附近的级数给出了在 $t \neq 0$ 固定时 $\rho \downarrow 0$ 的所述极限。在 $(t,\ \xi) = (0,\ 0)$ 处，连续性由下式推出

$$|\Phi(t,\xi)| + |\mathcal{B}(t,\xi)| \leq C_0(|t| + |\xi|), \qquad |\mathcal{V}(t,\xi)| \leq C_0 |\xi|,$$

对于一个与 t 无关的常数 C_0，ξ。现在沿线段积分导数界，即可证明 Lipschitz估计。除非某条线段包含于 $t = 0$ 或$\xi = 0$ 中，否则这些集合中的每一个与该线段至多相交于 1 个点；在这些点处分割线段，并通过连续性取极限值。包含于 $\xi = 0$ 中的线段可直接利用给定的三个极限值处理。在 $t = 0$ 上，这些映射分别化为 $|\xi|$、0 和 0，因此包含于该超平面内的线段同样可以直接处理。

□

我们使用索伯列夫函数的以下标准性质。如果 $v \in W^{1,\,1\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ 且$c \in \mathbb{R}$，那么

$$\nabla v = 0 \quad \text{for almost every } x \in \{v = c\}.$$

该断言按分量理解，并且对每个固定的水平 c 都成立。将其应用于 $v = \partial_i u$ 和 $c = 0$ 可得

$$\partial_j \partial_i u = 0 \quad \text{for almost every } x \in \{\nabla u = 0\}, \qquad 1 \le i, j \le n.$$

这是标准的 Sobolev水平集性质；参见 Brezis [6, 第 9] 章，或参见 Ziemer [24,第 2] 章。我们将严格使用这一形式，而不是对水平集作任何正则性假设。

令 $P = |\nabla u|$ 和 $F = \Phi(u, \nabla u)$，并定义

$$J_{1,\mathrm{reg}} = \mathcal{B}(u, \nabla u)\, \nabla u, \qquad J_2 = \left[(\Delta u)\, I_n - D^2 u\right] \mathcal{V}(u, \nabla u).$$

特别地， F 是利普希茨的。令 L_Φ 为 Φ 关于 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 上欧几里得范数的一个利普希茨常数。令

$$\mathcal{U}(x) = \big(u(x), \partial_1 u(x), \ldots, \partial_n u(x)\big).$$

在几乎处处的点，索伯列夫链式法则和利普希茨映射导数的算子范数界给出

$$|DF(x)| = |D(\Phi \circ \mathcal{U})(x)| \le L_\Phi\, |D\mathcal{U}(x)|.$$

展开 $D\mathcal{U}$ 的各个条目可得

$$|D\mathcal{U}(x)|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\partial_i u(x)|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} |\partial_i \partial_j u(x)|^2 = |\nabla u(x)|^2 + |D^2 u(x)|^2.$$

因此，

$$|\nabla F|^2 \le L_\Phi^2 \big(|\nabla u|^2 + |D^2 u|^2\big) \quad \text{almost everywhere in } \Omega.$$

此估计仅用于获得所需的 H^1 和可积性界；更精确的逐点海森恒等式则用于谱比较。向量场 $J_{1,\mathrm{reg}}$ 和 J_2 均为紧支撑，并且根据引理 $W^{1,\infty}$4.1，借助链式法则，它们属于 ，即一阶弱导数有界的有界函数空间。剩余部分 J_1 是$\eta P \nabla\, |u|$。

We u使用以下 Kato 不等式的分布形式：对于 $u \in W^{2,1\,\mathrm{loc}}(\Omega$),

$$\Delta |u| \ge \operatorname{sign}(u)\, \Delta u \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega), \qquad \operatorname{sign}(0) = 0.$$

等价地，分布 $\Delta|u| - \operatorname{sign}(u)\Delta u$ 是非负的，因此是一个 Radon 测度。对于这里考虑的光滑函数，这就是经典的 Kato 不等式；参见 Kato [14]。下面的加权乘积法则确定了它对散度修正的贡献。

引理 4.2。 存在一个有限非负 *Radon* 测度 μ ，使得

$$\Delta |u| = \operatorname{sign}(u)\, \Delta u + \mu,$$

并且弱乘积法则给出

$$\operatorname{div}(P \nabla |u|) = \operatorname{sign}(u)\, (\nabla P \cdot \nabla u + P \Delta u)\, \mathrm{d}x + P\mu. \tag{4.1}$$

在正则节点超曲面上，最后一个测度为 $2P^2\, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}$，其中 $\mathcal{H}^{n-1}$ 表示光滑超曲面上的曲面测度。正则节点是满足 $u = 0$和 $P > 0$的点。

证明。 Kato 分布不等式 [14] 给出 $\mu = \Delta |u| - \operatorname{sign}(u)\, \Delta u \geq 0$。正分布是 Radon 测度，也就是说，是在紧集上有限的正则 Borel 测度。在开集 $\{u > 0\}$ 或 $\{u < 0\}$上，通常的链式法则给出等式，且无需μ。因此 μ 的支集包含于节点集。它在 u的紧支集之外也为零。取 $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$，使其在该支集的某个邻域内等于 1。用 ψ 对分布恒等式进行检验，得到

$$\mu(\Omega) = -\int_\Omega \operatorname{sign}(u)\, \Delta u\, \mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\Delta u|\, \mathrm{d}x < +\infty,$$

因为 $\langle \Delta |u|, \psi \rangle = \int_\Omega |u|\, \Delta \psi\, \mathrm{d}x = 0$。这里所需的额外步骤是乘以 P。函数 P 是利普希茨函数：它是光滑向量场 ∇u的范数，并且$|\nabla P| \leq |D^2 u|$ 几乎处处成立。将其延拓为零并进行磨光，选取光滑紧支撑函数 P_j ，使其一致收敛到 P ，且在固定紧集上满足 $\nabla P_j \to \nabla P$ 于 L^1 ，同时梯度一致有界。对每个 j，分布意义下的乘积法则为

$$\operatorname{div}(P_j \nabla |u|) = \nabla P_j \cdot \nabla |u|\, \mathrm{d}x + P_j \operatorname{sign}(u)\, \Delta u\, \mathrm{d}x + P_j \mu.$$

该恒等式在极限下仍成立：测度项由一致收敛而收敛，梯度项则由 L^1 收敛性和 $\nabla |u|$ 的有界性而收敛。利用 $\nabla |u| =$ 符号（ u ）几乎处处成立，可得（ 4.1 ）。在正则节点处，隐函数定理表明 $\{u = 0\}$ 是一个光滑超曲面。将其单位法向量定向为从 $\{u < 0\}$ 指向 $\{u > 0\}$，使其在界面上为 $\nabla u / P$ 。 $|u|$ 的法向导数的两侧迹分别为 $-P$ 和 P。因此，对两侧分别分部积分可得该处的 $\mu = 2P\, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}$ ，再乘以 P，便得到所述的 $2P^2$ 密度。特别地， $P\mu$ 相对于勒贝格测度是奇异的：在 $P > 0$处，它由光滑节点超曲面承载；在 $P = 0$ 处，其权重为零。正则节点集的一个可数子覆盖足以得出这一结论。

□

4.2 积分比较、缩放与等式

前述弱形式使得局部恒等式可以在节点集和临界集上积分。缩放进而得到谱比较，而 Faber–Krahn 不等式给出体积不等式及其刚性。

定理 *1.1* 的证明。 设 $u \neq 0$， $u \in C_c^\infty(\Omega)$ 为实数，并使用上述比较函数F 和散度场。

步骤 1：积分比较。在 $\{u = 0\} \cup \{P = 0\}$ 之外，对 u 或 $-u$ 应用 (2.1)。对于$u < 0$, 与 $-u$ 关联的映射仍为 $F = Pf(|u|/P)$。其第一个修正场为$-Pb(-u/P)\ \nabla u = Pb(u/P)\ \nabla u$，这是由 b 的奇延拓得到的。其第二个修正场为J_2，因为海森矩阵和梯度都改变了符号。因此，在两个符号区域上，第一个场都分解为 $J_1 = J_{1,\mathrm{reg}} + \eta P \nabla |u|$，并且同一个非负局部恒等式均适用。集合 $\{u = 0, P > 0\}$ 局部为光滑超曲面，且其勒贝格测度为零。在可能具有正测度的集合 $Z_0 = \{P = 0\}$ 上，对每个分量 $\partial_i u$ 应用 Sobolev水平集性质，可得在 Z_0 上几乎处处有 $\partial_j \partial_i u = 0$ ，对任意 i, j 均成立。因此，在 Z_0 上几乎处处有 $D^2 u = 0$ 和 $\Delta u = 0$。函数 $F - c_\infty |u|$ 为利普希茨函数，并根据 Φ 的定义在 Z_0 上消失。其弱梯度在该处几乎处处为零。由于在该处 $\nabla |u| = \operatorname{sign}(u)\ \nabla u = 0$，因此在 Z_0 上几乎处处有 $\nabla F = 0$。正则场在 Z_0 上为零，因此其弱导数在该处也几乎处处为零。(4.1) 中的普通密度在该处同样为零，而乘以 P 会消去任何支集位于 Z_0 上的测度。因此，该集合上的能量密度化简为

$$-u^2 + \alpha \left(c_\infty |u|\right)^2 = \chi u^2 \geq 0 \quad \text{almost everywhere on } Z_0,$$

根据引理3.1 和（3.2）。

因此，在分布意义下，

$$\left(\left|D^2 u\right|^2 - u^2 - |\nabla F|^2 + \alpha F^2\right) \mathrm{d}x + \operatorname{div}\left(J_{1,\mathrm{reg}} + J_2 + \eta P \nabla |u|\right) = Q_u \, \mathrm{d}x + \eta P \mu,$$

其中，明确地，

$$\begin{aligned} Q_u = {} & \left|D^2 u\right|^2 - u^2 - |\nabla F|^2 + \alpha F^2 + \operatorname{div}\left(J_{1,\mathrm{reg}} + J_2\right) \\ & + \eta \operatorname{sign}(u) \left(\nabla P \cdot \nabla u + P \Delta u\right). \end{aligned}$$

此公式中的散度是利普希茨场几乎处处存在的弱导数。因此， Q_u 在紧支集上有界；逐点恒等式证明了它在例外集之外的符号，而前面的论证证明了它在临界集上的符号。因此， $Q_u \geq 0$ 几乎处处成立。此定义还保证了可积性，无须分别估计 $P = 0$附近的每个完全平方。由于 $\eta > 0$，引理4.2 表明测度项 $\eta P \mu$ 非负。

与一个在紧支集附近恒等于 1 的截断函数配对。所有散度项的积分均为零：对于每个紧支撑场 J, $\langle \operatorname{div} J,\ \psi\rangle = -\int J\cdot\nabla\psi\,\mathrm{d}x = 0$。对于每一对 $i,\ j$，先对 x_i 再对 x_j 分部积分，得到

$$\int_\Omega u_{ij}^2\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u_j u_{iij}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u_{jj}u_{ii}\,\mathrm{d}x.$$

将这些等式相加可得

$$\int_\Omega \left|D^2u\right|^2\mathrm{d}x = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u_{ii}u_{jj}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega (\Delta u)^2\,\mathrm{d}x.$$

特别地，积分分布恒等式为

$$\int_\Omega \left((\Delta u)^2 - u^2 - |\nabla F|^2 + \alpha F^2\right)\mathrm{d}x = \int_\Omega Q_u\,\mathrm{d}x + \eta\int_\Omega P\,\mathrm{d}\mu \geq 0,$$

这就是（1.2）。Lipschitz复合函数 F 是紧支撑的 H^1，因此通过内部磨光属于 $H_0^1(\Omega)$：其支集与 $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$之间的距离为正，所以足够小半径的磨光子仍留在Ω内，并在 H^1 中收敛。它不为零。在任意满足 $u\neq 0$的点，要么 $P>0$，此时 $F = Pf(|u|/P) > 0$；要么 $P=0$，此时 $F = c_\infty|u| > 0$。由连续性可得$\int_\Omega F^2\,\mathrm{d}x > 0$。

步骤 *2*：谱不等式。积分比较具有固定的参考频率。通过伸缩，可使试探函数达到该频率。设$E = \int_\Omega(\Delta u)^2\,\mathrm{d}x$，$M = \int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x$，且 $t = (E/M)^{1/4}$。这里 $M>0$ 且 $E>0$：若 $E=0$，则$\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u\Delta u\,\mathrm{d}x = 0$，这与 $u\neq 0$ 及紧支集矛盾。在 $t\Omega$上取 $u_t(x) = u(x/t)$。令$y = x/t$，导数因子和体积因子为

$$\nabla u_t(x) = t^{-1}\nabla u(y),\qquad \Delta u_t(x) = t^{-2}\Delta u(y),\qquad \mathrm{d}x = t^n\,\mathrm{d}y.$$

因此

$$E(u_t) = t^{n-4}E = t^nM = M(u_t).$$

将 (1.2) 应用于 u_t并记 $F_t = \Phi(u_t,\nabla u_t)$ 为其比较函数。右侧为零，而 $F_t\not\equiv 0$，$F_t\in H_0^1(t\Omega)$，根据步骤 1 可知。因此，变分定义给出

$$\lambda_1(t\Omega) \leq \frac{\int_{t\Omega}|\nabla F_t|^2\,\mathrm{d}x}{\int_{t\Omega}F_t^2\,\mathrm{d}x} \leq \alpha.$$

对于狄利克雷测试函数，同一代换会使其能量乘以 t^{n-2}，其平方 L^2 范数乘以 t^n。伸缩在两个狄利克雷测试空间之间构成双射，因此

$$\lambda_1(t\Omega) = t^{-2}\lambda_1(\Omega),\qquad \lambda_1(\Omega)\leq \alpha t^2 = \alpha\sqrt{E/M}.$$

对最后一个不等式两边平方，得到 $E/M\geq\lambda_1(\Omega)^2/\alpha^2$。对于非零的 $u\in H_0^2(\Omega)$，选取 $u_j\in C_c^\infty(\Omega)$收敛于 u in H^2。于是 $\int u_j^2\,\mathrm{d}x\to\int u^2\mathrm{d}x > 0$ and $\int(\Delta u_j)^2\mathrm{d}x\to$

$\int (\Delta u)^2 \mathrm{d}x$，因此商不等式可取极限。取下确界并利用$\alpha^{-2} = R^4/q^4$ 即可证明（1.1）中的第一个不等式。Faber–Krahn 定理 [13, 第3] 章给出 $\lambda_1(\Omega) \geq q^2 (\omega_n/|\Omega|)^{2/n}$，并证明第二个不等式，因为

$$\frac{R^4}{q^4}\left[q^2\left(\frac{\omega_n}{|\Omega|}\right)^{2/n}\right]^2 = R^4\left(\frac{\omega_n}{|\Omega|}\right)^{4/n}.$$

其有限体积开集表述可由H_0^1上的通常重排论证推出。最后，球体谱公式表明，第一个常数在每个球上都能取到。

步骤 *3*：体积比较中的等式。假设 $\Gamma_1(\Omega) = \Gamma_1(B_\Omega)$。那么 (1.1) 中间的两个不等式都必须取等号。特别是 $\lambda_1(\Omega)^2 = q^4 (\omega_n/|\Omega|)^{4/n}$，因此 Faber–Krahn 不等式取等号。其定量形式 [5] 意味着

$$\inf_{y\in\mathbb{R}^n} |\Omega \triangle (y + B_\Omega)| = 0.$$

由此得到一个真正的球，而不只是一个逼近球的序列。事实上，若一列球心对应的对称差趋于零，那么这列球心必有界：否则，球心会有一个子列趋于无穷远，而这些球与有限体积集合 Ω 的交集的测度将趋于零。这与对称差趋于零相矛盾。取球心的一个收敛子列。球平移在测度意义下的连续性由此给出一个球 B，使得 $|B| = |\Omega|$ 且 $|\Omega \triangle B| = 0$。由 Ω 的开性可知 $\Omega \subset B$：Ω 中位于 B 之外的点有一个邻域，其在 B 之外的部分具有正测度；$\Omega \cap \partial B$ 中的点也有这样的邻域。这两种情况都与$|\Omega \setminus B| = 0$矛盾。

如果 Ω 具有局部利普希茨边界，则 $B \setminus \Omega$ 的每一点都属于 $\partial\Omega$，这是因为$|B \setminus \Omega| = 0$。这样的点处的外锥在 B 内会具有正测度，矛盾。因此 $\Omega = B$。反之，球体谱公式表明，对于每个球，体积比较中的等式都成立。

□

4.3 任意开集上的等式

对于任意开集，定理 1.1中的几乎处处识别可以根据夹持索nף列夫空间作出更精确的刻画。

命题 4.3。设 $n = 4、5$，且令 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为满足 $0 < |\Omega| < +\infty$ 的开集。等式$\Gamma_1(\Omega) = \Gamma_1(B_\Omega)$ 成立，当且仅当存在一个球 B，使得

$$\Omega \subset B, \qquad |\Omega| = |B|, \qquad H_0^2(\Omega) = H_0^2(B),$$

其中这些空间通过零延拓进行对应。

证明。 定理证明中的等式论证1.1给出了一个球 B 使得 $\Omega \subset B$且 $|\Omega| = |B|$。

根据光滑测试函数类的定义， $H_0^2(\Omega) \subset H_0^2(B)$显然成立。为了证明 Ω 上的下确界能够取到，取一个 L^2 范数为 1 的极小化序列，并将其零延拓视为 $H_0^2(B)$中的函数。 $H_0^2(B)$上的标准范数等价性表明，它们的 H^2 范数受其拉普拉斯能量控制。因此，紧嵌入到 $L^2(B)$保证存在一个子列，在 H^2 中弱收敛且在 L^2中强收敛；参见 [6,第9]章。 $H_0^2(\Omega)$的零延拓像是 $H_0^2(B)$中的闭线性子空间，因此是弱闭的。其极限仍属于该子空间，且其 L^2 范数为 1。拉普拉斯能量的弱下半连续性表明，该极限在 Ω 上达到下确界。

由于两个第一特征值相等，同一个零延拓也使球上的商达到最小值。球的第一特征值是简单的，其剖面函数 U_B 在 B [12]中光滑且严格为正。因此， $U_B \in H_0^2(\Omega)$。

选择在 $H^2(B)$ 中收敛于 U_B 的 $u_j \in C_c^\infty(\Omega)$。对于任意 $v \in C_c^\infty(B)$，乘子 $h = v/U_B$ 在 B 中是具有紧支集的光滑函数：在包含 v 支集的某个紧邻域上，正的光滑函数 U_B 具有正的下界。用 h 做乘法在 $H^2(B)$ 上是连续的。明确地，对于 $w \in H^2(B)$,

$$\partial_i (hw) = h\partial_i w + (\partial_i h)\, w,$$
$$\partial_{ij} (hw) = h\partial_{ij} w + (\partial_i h)\, \partial_j w + (\partial_j h)\, \partial_i w + (\partial_{ij} h)\, w.$$

h 的二阶以内有界导数因此给出 $\|hw\|_{H^2(B)} \leq C_h \|w\|_{H^2(B)}$ ，其中有限常数 C_h 仅取决于 h。将此有界性应用于 $w = u_j - U_B$，得到

$$\frac{v}{U_B} u_j \in C_c^\infty(\Omega), \qquad \frac{v}{U_B} u_j \longrightarrow v \quad \text{in } H^2(B).$$

因此，每个 $v \in C_c^\infty(B)$ 都属于 $H_0^2(\Omega)$。取 H^2 闭包可得反向包含关系 $H_0^2(B) \subset H_0^2(\Omega)$。反过来，这些空间的等式意味着两个变分下确界相同，因此 $|\Omega| = |B|$ 在体积比较中给出等式。 □

命题4.3 中对索伯列夫空间的条件意味着，被移除的集合对夹持变分空间不可见。对于紧洞 $K \subset B$，这等价于其夹持 H^2容量为零 [10,命题 21]。容量为零意味着存在紧支撑于 B、且在 K附近等于 1 的光滑截断函数，其H^2 范数趋于零。这比洞的勒贝格测度为零要求更强。例如，当 $n \geq 4$ [10, 命题 23], ，因此$B \setminus \{x_0\}$ 与 B 具有相同的第一特征值（当 $x_0 \in B$ 且 $n = 4$时），5。另一方面，在 B内部严格地移除一个闭球面超曲面。它的体积为零，但所得 H_0^2 空间中的函数在该处的值迹为零（即限制到光滑超曲面上的索伯列夫迹），而 $U_B > 0$；参见第 [6, 章 9]中的迹定理。因此两个空间不同，体积不等式为严格不等式。

仅有式（1.1）中第一个比较取等，并不具有同样的刚性。若 Ω 是两个彼此分离、半径为 ρ 的球的不交并，则

$$\lambda_1(\Omega) = q^2/\rho^2, \qquad \Gamma_1(\Omega) = R^4/\rho^4.$$

事实上，定义在并集上的任意测试函数，其商都是它在两个分量上的非零限制函数的商的加权平均，权重由各自的平方L^2 范数给出。因此，下确界就是较小的分量特征值；取支集位于任一球上的测试函数即可得到反向不等式。这适用于两个变分问题。第一个比较是等式，而

$$\Gamma_1(B_\Omega) = \frac{R^4}{\left(2^{1/n}\rho\right)^4} = 2^{-4/n}\Gamma_1(\Omega) < \Gamma_1(\Omega),$$

因为 $|\Omega| = 2\omega_n\rho^n$。

5 维数依赖性与六维障碍

定理 1.1 的证明依赖于参考系数的特定符号。中心系数在六维中符号相反。这也直接构成了对同一局部映射的积分比较（1.2）的障碍。

使用相同的 q、 R、 α 和归一化剖面函数的定义，有理数包围给出 $\chi = \alpha c_\infty^2 - 1$的以下界：

n	下界 χ	上界 χ
4	0.10964	0.10965
5	0.03538	0.03539
6	−0.021442	−0.021441

四维和五维的区间可通过将附录 A.1中的参数盒代入中心振幅恒等式（3.2）以及引理 a_0、 U_c、 V_c 中的公式3.1得到。因此，附录提供有理数参数输入，而中心振幅公式则来自正文中的引理。所得区间与引理 3.1一致。在六维中，极限矩阵行列式位于 $-.032220$ 和 $-.032219$之间。定义 $a_0 = -U''(0)/U(0)$ 和 $\det_\infty = \lim_{s\to+\infty}(ae - d^2/4)$。中心展开给出

$$a_0 = \frac{1+c}{n(1-c)}, \qquad G_\infty = \frac{\chi/(na_0^2) - 1}{n-1}.$$

（3.2）中使用的中心展开可由本文所考察各个维度下的径向方程推出；其推导并不依赖系数正性。特别是， $g = O(s^{-1})$ 以及 $G_s = O(s^{-3})$ 是 $s \to +\infty$。因此 $a \to 1$， $d \to 2G_\infty$，且

$e \to [1 + \ (n-2)\ G_\infty] \,/\, (n-1)$ 。因此，行列式为

$$\det_\infty = \frac{1 + (n-2)\, G_\infty - (n-1)\, G_\infty^2}{n-1} = \frac{(1 - G_\infty)\,(1 + (n-1)\, G_\infty)}{n-1}.$$

由于 $a_0 > 0$，两个负号由以下关系相连

$$1 + (n-1)\, G_\infty = \frac{\chi}{n a_0^2} < 0, \qquad G_\infty < -\frac{1}{n-1}.$$

最后一个不等式给出 $1 - G_\infty > 0$，因此 $\chi < 0$ 迫使 $\det_\infty < 0$。两个符号都表示同一个中心缺陷。两个符号的界都可由归一化贝塞尔级数计算至第 40 项，并使用以下有理数界得到

$$5.905678235420522879 67 < R < 5.905678235420522879 69,$$
$$5.135622301840682556 30 < q < 5.135622301840682556 31.$$

这里 $r^2/4 < 9$， $\nu = 2$，且 $j = 40$ 之后的绝对尾项有界于 $100\ 99\ 2941\ 4143!! < 10^{-55}$；相邻项比值至多为 $9/(42 \cdot 44) \ < 1/100$。这里的数值不等式是在乘以 $99 \cdot 41!43! \cdot 10^{55}$后对整数进行的精确比较。更明确地说，设 B_μ， M_μ 为附录 A.1中定义的归一化级数；此处采用该附录中的项递推关系和向外舍入区间求值，并取 $r^2/4 < 9$ 及截断指标 40。上文列出的 R， q 的有理数界是本计算单独使用的六维输入；它们不是附录 A.1中四维和五维参数表的条目。在六维中，中心值为

$$U(0) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{M_2(R)} - \frac{1}{B_2(R)}\right], \qquad \phi(0) = \frac{6R}{q^2 B_3(q)}.$$

因此，需要估计的量为

$$\chi + 1 = \frac{144}{q^2 B_3(q)^2 \left[1/M_2(R) - 1/B_2(R)\right]^2}.$$

对于每个归一化级数，将根区间代入其多项式，在 $r^2/4$ 中计算至 40 次项，并将所得区间向两侧各扩展 10^{-55} 。上述分母均远离零： $M_2(R) > 0$、 $B_2(R) < 0$ 以及 $B_3(q) > 0$。因此，区间除法给出 χ 的所述包络。将 $c = B_2(R)/M_2(R)$ 代入 a_0 ，再代入 G_∞ ，通过相同的有理运算即可得到行列式包络。附录 A.1 中的首根隔离论证在此适用：首个零点的下界以及 Sturm 比较间隙估计将所显示的括号置于相应的第二个零点之前，而端点符号和叉积导数则确定了首个正叉积零点。在当前六维情形中，具体检验为$j_{2,1} \geq \sqrt{12}$、 $j_{3,1} \geq 4$，且相邻零点之间的间隙大于 π 。所显示的括号位于相应的第二个零点之前；相同的四十项和给出 $B_3(R) > 3/100 > 0$。因此$q < R < j_{3,1}$，并且

—

叉积导数确定所显示的 R 是其第一个正零点。特别地，$\chi_6 < -1/50$ 和 det $_\infty < -3/100$。负行列式使这一特定的配方法不可能为正。负中心系数带来了更强的结论：无论选择何种散度修正，积分比较本身对该映射都不成立。

关于 Φ 在引理 4.1 中 Lipschitz性质的证明$r = 0$ 和 $r = R$ 以及 $s' < 0$处的展开式。因此这些性质在六维中同样成立，所以 Φ 无论（2.2）中的系数符号如何，仍然是全局Lipschitz的。

取一个固定的光滑函数 θ ： 在 $(-\infty, 0]$ 上等于 1，并在$[1, +\infty$上等于 0)。令 u_L $(x) = \theta(|x| - L)$，其中 $L > 1$。这是光滑的，在 B_L上等于 1，并且属于 $C_c^\infty(B_{L+2})$，因为其支集包含于 B_{L+1}中。在 B_L 上，其比较函数为 $F_{u_L} = c_\infty$；因此，(1.2) 右侧减去左侧的密度为 χ。为估计过渡壳层 $B_{L+1} \setminus B_L$，写作 $r = |x|$ 和 $e_r = x/r$。对径向截断函数求导可得

$$\begin{aligned}
\nabla u_L &= \theta'(r - L)\, e_r, \\
D^2 u_L &= \theta''(r - L)\, e_r \otimes e_r + \frac{\theta'(r - L)}{r}\left(I_6 - e_r \otimes e_r\right), \\
\Delta u_L &= \theta''(r - L) + \frac{5}{r}\theta'(r - L).
\end{aligned}$$

这里 $e_r \otimes e_r$ 是元素为 $(e_r)_i\,(e_r)_j$ 的矩阵。令 $M_{\theta,\,1} = \sup_{\mathbb{R}} |\theta'|$ 和 $M_{\theta,\,2} = \sup_{\mathbb{R}} |\theta''|$。由于 $r \geq L > 1$,

$$|\nabla u_L| \leq M_{\theta,1}, \qquad \left|D^2 u_L\right|^2 \leq M_{\theta,2}^2 + 5M_{\theta,1}^2, \qquad |\Delta u_L| \leq M_{\theta,2} + 5M_{\theta,1}.$$

令 L_Φ 为 Φ 关于 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^6$上欧几里得范数的一个利普希茨常数。由于 $\Phi(0,\ 0) = 0$, 复合规则给出，在壳层上几乎处处有

$$|F_{u_L}|^2 \leq L_\Phi^2\left(1 + M_{\theta,1}^2\right), \qquad |\nabla F_{u_L}|^2 \leq L_\Phi^2\left(|\nabla u_L|^2 + \left|D^2 u_L\right|^2\right) \leq L_\Phi^2\left(M_{\theta,2}^2 + 6M_{\theta,1}^2\right).$$

因此，壳层上缺陷密度的绝对值至多为

$$C_\theta = (M_{\theta,2} + 5M_{\theta,1})^2 + 1 + L_\Phi^2\left(M_{\theta,2}^2 + 6M_{\theta,1}^2\right) + \alpha L_\Phi^2\left(1 + M_{\theta,1}^2\right),$$

且与 L无关。其积分的绝对值由 $C_\theta \omega_6\left((L+1)^6 - L^6\right)$ 控制。定义比较缺陷

$$\mathcal{D}_L = \int_{\mathbb{R}^6}\left((\Delta u_L)^2 - u_L^2 - |\nabla F_{u_L}|^2 + \alpha F_{u_L}^2\right) \mathrm{d}x.$$

内部贡献恰好为 $\chi\omega_6 L^6$，而壳层估计给出

$$\left|\frac{\mathcal{D}_L}{\omega_6 L^6} - \chi\right| \leq C_\theta\left((1 + 1/L)^6 - 1\right) \longrightarrow 0.$$

对于 $L \geq 1$，二项式公式给出

$$(1+1/L)^6 - 1 = \sum_{j=1}^{6} \binom{6}{j} L^{-j} \leq \frac{63}{L}.$$

例如， $L > 126C_\theta/|\chi|$ 使最后一个误差小于 $|\chi|/2$，因此 $\mathcal{D}_L < \chi\omega_6 L^6/2 < 0$。因此，对于这个映射，即使在光滑球上的光滑非负测试函数中，1.2在六维中也不成立。

图4 区分了这两项贡献：负的内部项的阶为 L^6，而壳层宽度固定，其贡献仅为 L^5。

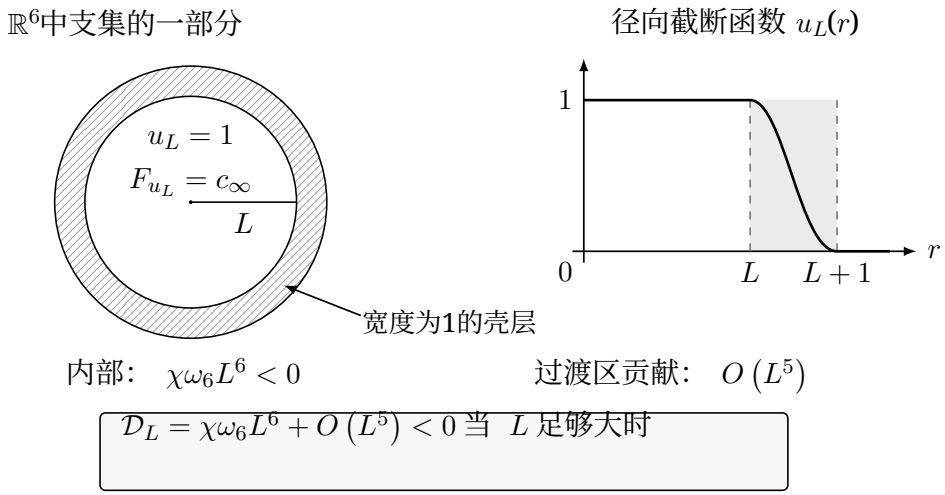


图4：示意性展示的六维障碍。阴影环带和阴影区间描绘了同一个单位宽度过渡区域。截断函数在 B_L 上光滑且为常数。随着 L 增大，负的内部贡献超过壳层贡献。因此，该映射的积分比较在六维中失效。

对于维度 n 中的同一个映射族，记 $\chi_n = \alpha_n \left[\phi_n(0)/U_n(0)\right]^2 - 1$，其中下标表示参考数据。平台论证表明，对于普适积分比较，必须满足 $\chi_n \geq 0$ 。四维和五维中的证明还使用了完整海森恒等式的系数不等式（2.2）。上述计算排除了该映射在六维中的情形。对于 $n \geq 7$ 以及其他比较映射，其符号在此处无法确定。

有理数系数证书

本附录说明第 3 节所用的精确算术。内容包括参数包络、向外舍入的剖面递推，以及有限系数和。表格列出了辅助系数和每个整数除法余数，随后给出完整的有限卷积和。小节 A.1 认证谱参数；小节 A.2 给出剖面系数区间；小节 A.3 推导

有限分子系数；小节 A.4 认证其正性；小节 A.5则核算总次数至少为二十一的有限块乘积。

A.1 谱数据的参数包围

对于 $n = 4,\ 5$，下表给出了 $R,\ q,\ T,\ Q,\ Z$ 的包围范围。包围范围或界限中的每个有限小数都是有理数。

n	参数	有理区间
4	R	$(4.610899879049055, 4.610899879049056)$
4	q	$(3.831705970207512, 3.831705970207513)$
4	T	$[21.260397694614, 21.260397694615]$
4	Q	$[14.681970642123, 14.681970642124]$
4	Z	$[3.218890982800, 3.218890982801]$
5	R	$(5.267657530336814, 5.267657530336815)$
5	q	$(4.493409457909064, 4.493409457909065)$
5	T	$[27.748215856914, 27.748215856915]$
5	Q	$[20.190728556426, 20.190728556427]$
5	Z	$[3.501551477382, 3.501551477383]$

平方运算在正数上保持大小顺序。因此，对正端点平方并向外舍入，可得 $Q = q^2$ 和 $T = R^2$区间。下面计算 Z 时，分母为正，因此其下界取分子下界和分母上界，其上界则取相反的端点。要验证这些包络，使用归一化整函数

$$B_\mu(t) = \sum_{j\ge 0} \frac{(-1)^j\,(t^2/4)^j}{j!\,(\mu+1)_j}, \qquad M_\mu(t) = \sum_{j\ge 0} \frac{(t^2/4)^j}{j!\,(\mu+1)_j}.$$

这里，$(a)_0 = 1$ 和$(a)_j = a\,(a+1)\,\cdots(a+j-1)$，其中 $j \ge 1$ 是上升阶乘。这些级数分别等于 $2^\mu\Gamma(\mu+1)\,t^{-\mu}J_\mu(t)$和 $2^\mu\Gamma(\mu+1)\ t^{-\mu}I_\mu(t)$，其中 Γ 是欧拉伽马函数 [9, 第10.2节和第10.25]节。对于 $\mu \ge 1$ 和 $t^2/4 < 7$，在 $j = 24$ 之后的绝对尾项至多为

$$\frac{100}{99}\frac{7^{25}}{25!26!} < 3\cdot 10^{-31}.$$

事实上，第一个被省略的项至多为 $7^{25}/(25!26!)$，而之后每一项与前一项的比值至多为 $7/(26\cdot 27) < 1/100$。更明确地说，对于有理自变量 t，可以从 $a_0 = 1$ 开始，通过以下方式生成各个正被加项，而无需使用幂或阶乘：

$$a_{j+1} = \frac{t^2 a_j}{4\,(j+1)\,(\mu+j+1)}.$$

因此，将和 $\sum_{j=0}^{24}(-1)^j\,a_j$和 $\sum_{j=0}^{24} a_j$ 的两端分别扩大 $3\cdot 10^{-31}$ 后，就能包围$B_\mu(t)$ 和 $M_\mu(t)$。对于根区间，相同的递推式使用区间乘法；对于

端点符号，则使用单一有理端点。在叉积中，先将包围区间相乘，再将两个乘积相加，因此所述误差界应用于每个因子，而不是整体乘积。在给定的左右根端点处， B_ν 和归一化叉积 $B_\nu M_{\nu+1}+B_{\nu+1}M_\nu$ 的符号分别为$>10^{-18}$ 和 $<-10^{-18}$。相同的有限和给出 $B_{\nu+1}(R)>0$、$-B_\nu(R)>1/20$、$B_{\nu+1}(q)>1/10$ 以及

$$Z=\frac{T}{n}\frac{M_{\nu+1}(R)}{M_\nu(R)}$$

在所述区间内。

根的判定依据是贝塞尔零点的标准单根性和交错性 [9,第 10 节。21] 以及前文已引用的球体谱公式。可以直接如下验证其孤立性。在第一个零点之前，径向方程给出 $B_\nu(t)\geq 1-t^2/(2n)$，因此该零点至少为 $\sqrt{2n}$。对 $\sqrt{t}J_\nu(t)$ 应用斯图姆比较定理，可得本文所用阶数的相邻零点之间的间隔大于 π。这些包围区间均低于 $\sqrt{2n+3}$，因此位于第二个零点之前。对阶数 $\nu+1$作相同论证，并利用已验证的符号 $B_{\nu+1}(R)>0$，可得 $q<R<j_{\nu+1,\,1}$。最后，若 $\mathcal{C}=J_\nu I_{\nu+1}+J_{\nu+1}I_\nu$，则由贝塞尔递推关系可得 $(t\mathcal{C})'=2tJ_\nu I_\nu$。因此， $t\mathcal{C}$ 在 $(q,\ j_{\nu+1,\,1})$ 上严格递减，且其端点符号不同。这确定了叉积的第一个正零点。

A.2 向外舍入的剖面函数系数区间

接下来，我们为泰勒系数 u_j,v_j,W_j 构造区间。它们的递推关系见第 3 节。根据附录 u_j,v_j 开头的贝塞尔乘积，可独立得出 B 中 $\mathsf{P}=10^{12}$ 和 $\mathsf{D}=10^{16}$ 的非负性。对于区间$I=[a,b]$，将其向外舍入定义为

$$\mathcal{R}(I)=\left[\frac{\lfloor \mathsf{D}a\rfloor}{\mathsf{D}},\frac{\lceil \mathsf{D}b\rceil}{\mathsf{D}}\right].$$

下取整和上取整分别是小于实数的最大整数和大于实数的最小整数。区间加法、减法和乘法定义为

$$[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d],\qquad -[a,b]=[-b,-a],$$
$$[a,b]\,[c,d]=[\min(ac,ad,bc,bd),\max(ac,ad,bc,bd)].$$

除以一个正有理数，等同于将两个端点都乘以它的倒数。令$\mathbf{T}$,$\mathbf{Q}$,$\mathbf{Z}$表示上述参数区间。对于涉及 T^2的递推式，使用

n	P 下确界 S	P 上确界 S
4	452004510133148	452004510133191
5	769963483241893	769963483241950

对$\mathbf{T}$ 的端点平方即可证明 $T^2 \in \mathbf{S}$。从精确区间$\mathbf{U}_0 =\mathbf{U}_1 = \mathbf{V}_0 = [0,0]$、$\mathbf{V}_1 = \mathbf{W}_0 = [1,1]$以及$\mathbf{W}_1 = -\mathbf{Z}/2$开始。对于 $0 \le j \le 15$，使用

$$\mathbf{U}_{j+2} = \mathcal{R}\left(\frac{2j+n}{2\,(j+2)}\mathbf{U}_{j+1} + \frac{2\mathbf{W}_j}{(j+1)\,(j+2)}\right) \cap [0,+\infty)\,,$$
$$\mathbf{V}_{j+2} = \mathcal{R}\left(\frac{2j+n}{2\,(j+2)}\mathbf{V}_{j+1} - \frac{\mathbf{Q}\mathbf{V}_j}{4\,(j+1)\,(j+2)}\right) \cap [0,+\infty)\,,$$
$$\mathbf{W}_{j+2} = \mathcal{R}\left(\frac{2j+n}{2\,(j+2)}\mathbf{W}_{j+1} + \frac{\mathbf{S}\mathbf{U}_j}{32\,(j+1)\,(j+2)}\right).$$

每次更新都只使用已经构造好的区间。为看清减法项中端点的选取，记 $\mathbf{Q} = [Q_-, Q_+]$ 和 $\mathbf{V}_j = [v_-, v_+]$。两个区间均非负，因此

$$-\mathbf{Q}\mathbf{V}_j = [-Q_+ v_+, -Q_- v_-]\,.$$

这解释了为何 v 的下端递推式使用两个因子的上端点。W 区间可能包含负数，但在其递推式的第一项中，它们只与正标量相乘。第二项中的乘积 $\mathbf{S}\mathbf{U}_j$ 含有非负因子。因此，每一步运算都能包住相应的精确递推值；向外舍入只会扩大这个包围范围。与 $[0,+\infty)$ 取交集是合理的，因为剖面系数的非负性已通过独立方法确立。从精确初值出发，归纳法可证明在此后的每个指标处均有 $u_j \in \mathbf{U}_j$、$v_j \in \mathbf{V}_j$ 和 $W_j \in \mathbf{W}_j$。下面给出同一递推式的整数形式，其中每个舍入步骤都一目了然。在表格中记

$$\begin{aligned} U_j^- &= \max\left(0, a_j^u\right), \quad & U_j^+ &= b_j^u, \\ V_j^- &= \max\left(0, a_j^v\right), \quad & V_j^+ &= b_j^v, \\ W_j^- &= a_j^W, & W_j^+ &= b_j^W. \end{aligned}$$

因此，需要验证的断言为

$$\frac{U_j^-}{\mathsf{D}} \le u_j \le \frac{U_j^+}{\mathsf{D}}, \qquad \frac{V_j^-}{\mathsf{D}} \le v_j \le \frac{V_j^+}{\mathsf{D}}, \qquad \frac{W_j^-}{\mathsf{D}} \le W_j \le \frac{W_j^+}{\mathsf{D}}.$$

u，v 列中的下端点在进行所示整数除法后，替换为其正部。W区间不作截取。因此，$\mathbf{U}_j = \left[U_j^-/\mathbf{D}\ U_j^+/\mathbf{D}\right]$、$\mathbf{V}_j = \left[V_j^-/\mathbf{D}\ V_j^+/\mathbf{D}\right]$，以及$\mathbf{W}_j = \left[W_j^-/\mathbf{D}\ W_j^+/\mathbf{D}\right]$。记 $T \in [t_-/\mathbf{P}\ t_+/\mathbf{P}]$、$Q \in [q_-/\mathbf{P}\ q_+/\mathbf{P}]$,和 $S = T^2 \in [s_-/\mathbf{P}\ s_+/\mathbf{P}]$。整数 $t_\pm$ 和 $q_\pm$ 分别由参数表中 T 行和 Q行的端点乘以 $\mathbf{P}$ 得到。以下整数给出略微扩大的 S 盒，并验证其向外舍入：

n	s_-	s_+	t^2 $-\mathbf{P}s_-$	$\mathbf{P}s_+ - t_+^2$
4	452004510133148	452004510133191	286004608996	193200001775
5	769963483241893	769963483241950	551321603396	952246682775

两个余数列都位于 $[0,\mathrm{P})$中。以下整数恒等式验证了之后的每一次舍入。对于 $0 \le j \le 15$，令

$$\mathfrak{a}_j = (2j+n)\,(j+1)\,, \qquad \mathfrak{b}_j = 2\,(j+1)\,(j+2)\,.$$

表格中的余数列确切表示

$$\begin{aligned}
r_{u,-} &= \mathfrak{a}_j U^-_{j+1} + 4W^-_j - \mathfrak{b}_j a^u_{j+2},\\
r_{u,+} &= \mathfrak{b}_j b^u_{j+2} - \mathfrak{a}_j U^+_{j+1} - 4W^+_j,\\
r_{W,-} &= 16\mathrm{P}\mathfrak{a}_j W^-_{j+1} + s_- U^-_j - 16\mathrm{P}\mathfrak{b}_j a^W_{j+2},\\
r_{W,+} &= 16\mathrm{P}\mathfrak{b}_j b^W_{j+2} - 16\mathrm{P}\mathfrak{a}_j W^+_{j+1} - s_+ U^+_j,\\
r_{v,-} &= 2\mathrm{P}\mathfrak{a}_j V^-_{j+1} - q_+ V^+_j - 2\mathrm{P}\mathfrak{b}_j a^v_{j+2},\\
r_{v,+} &= 2\mathrm{P}\mathfrak{b}_j b^v_{j+2} - 2\mathrm{P}\mathfrak{a}_j V^+_{j+1} + q_- V^-_j.
\end{aligned}$$

每一行中列出的整数都满足这些恒等式以及

$$0 \le r_{u,\pm} < \mathfrak{b}_j, \quad 0 \le r_{W,\pm} < 16\mathrm{P}\mathfrak{b}_j, \quad 0 \le r_{v,\pm} < 2\mathrm{P}\mathfrak{b}_j.$$

这些不等式证明，未经处理的下整数和上整数分别是相应递推界的向外下取整和向外上取整。从 $u_0 = u_1 = v_0 = 0$、$v_1 = W_0 = 1$和 $W_1 = -Z/2$出发，通过归纳法即可证明所有列出的系数包络。例如，在四维中， u_3 行有 $j = 1$、 $\mathfrak{a}_1 = 12$、 $\mathfrak{b}_1 = 12$，以及

$$12 \cdot 10^{16} - 4 \cdot 16094454914005000 - 12 \cdot 4635181695331666 = 8,$$

$$12 \cdot 4635181695333334 - 12 \cdot 10^{16} + 4 \cdot 16094454914000000 = 8.$$

作为比较，该维度下的膜递推给出 $v_2 = 1$ 和 $v_3 = 1 - Q/24$。将$\mathbf{Q}$ 的两个端点代入，得到

$$\frac{3882512232448333}{10^{16}} < v_3 < \frac{3882512232448750}{10^{16}}.$$

第二个列出的端点是区间计算所得的精确上界；实际系数满足严格不等式，是因为 Q 严格包含于其参数盒中。 v_3 行列出了相同的向外舍入区间。在未经处理的下整数为负数的指标处，例如四维的 u_{14} 行，经过验证的下界为零，而我们采用正的上界。其余各行的整数含义相同。

下面的系数公式中只需要用到不超过 25 的索引。对于每个$j \ge 18$ ，使用公共区间即可

$$0 \le u_j, v_j \le 10^{-16}.$$

事实上，附录B 中的级数界给出 $u_j,\ v_j \le 20\,7^j/\,[j!\ \ (j+1)\ !\ ]$当 $j \ge 12$时。要检验指标 18 处的界，请比较以下整数：

$$20\,7^{18}\,10^{16} = 3256827195820898000000000000000000,$$

$$18!19! = 7788173922881483796601896960000000.$$

第二个整数大于第一个整数，这证明了指标 18 处的断言。连续主比 $7/\left[(j+1)\,(j+2)\right]$ 小于 1。这些正区间也涵盖了高次系数；它们并未将这些系数设为零。

维度 4。

k	a_k^u	b_k^u	a_k^v	b_k^v
0	0	0	0	0
1	0	0	10000000000000000	10000000000000000
2	10000000000000000	10000000000000000	10000000000000000	10000000000000000
3	4635181695331666	4635181695333334	3882512232448333	3882512232448750
4	1952772542997499	1952772543000001	823768348672499	823768348673125
5	343327051596999	343327051600001	111231715991250	111231715992002
6	55093442977825	55093442981236	10443860065168	10443860066004
7	5099424289763	5099424293538	723022037384	723022038287
8	441038127104	441038131197	38484328100	38484329059
9	25218593774	25218598143	1625340809	1625341815
10	1373541325	1373545935	55824727	55825773
11	53368820	53373640	1590134	1591214
12	2000437	2005442	37799	38910
13	51921	57090	359	1497
14	−3062	2253	−426	735
15	−1630	754	−27	729
16	−133	739	−12	729
17	−91	754	−10	729

维度 4：辅助系数和余项。

k	a_k^W	b_k^W	$r_{W,\,-}(k-2)$	$r_{W,\,+}(k-2)$
0	10000000000000000	10000000000000000	−−	−−
1	−16094454914005000	−16094454914000000	−−	−−
2	−16094454914005000	−16094454914000000	0	0
3	−16094454914005000	−16094454914000000	0	0
4	−4323504129287605	−4323504129281484	320000000000000	144000000000000
5	−1049874392449287	−1049874392441675	630183680664568	353480517911206
6	−130434812554448	−130434812545569	785275520996852	650220776866809
7	−14969503199865	−14969503189965	8731527222852	534665834266809
8	−1073027360167	−1073027349404	1495736361443100	843861526195924
9	−72609487748	−72609476243	2024976463363924	1006722539380242
10	−3390313237	−3390301089	4583587643392	1761991797740373
11	−151984225	−151971515	2823726063820552	607484764735687
12	−5003432	−4990227	4122260030341100	3016889193371415
13	−171111	−157469	908484151645360	1933774711514760
14	−15856	−1825	1426237224185676	1827189473174578

维度 4：辅助系数和余项。

k	a_k^W	b_k^W	$r_{W,\,-}(k-2)$	$r_{W,\,+}(k-2)$
15	−12364	2016	2286170623177308	6582516496125810
16	−12364	2149	0	3073838669920677
17	−12364	2189	0	7348599359573986

维度 4：剖面除法余数。

j	$r_{u,-}$	$r_{u,+}$	$r_{v,-}$	$r_{v,+}$
0	0	0	0	0
1	8	8	8000000000000	0
2	8	8	32000000000000	0
3	0	0	61213578855000	13892430930959
4	20	36	51820368282500	13497661075377
5	60	68	63996411707752	39929949423750
6	16	84	94051097247504	165377585871664
7	60	84	69611296998412	207846191126232
8	152	176	93922457318684	226029212556300
9	108	72	108753462384940	81182446297507
10	164	84	519740121338148	490918531175421
11	92	236	402766663301464	588705041614482
12	84	240	204522314955160	227808301607277
13	156	296	701089948740372	230827460522157
14	416	100	728751578038860	0
15	48	96	176843401891604	0

维度 5。

k	a_k^u	b_k^u	a_k^v	b_k^v
0	0	0	0	0
1	0	0	10000000000000000	10000000000000000
2	10000000000000000	10000000000000000	12500000000000000	12500000000000000
3	5830747537695000	5830747537696667	6170529768155416	6170529768155834
4	2912141524299583	2912141524302501	1683843760938645	1683843760939376
5	650141057804437	650141057808377	294884492055173	294884492056161
6	126150673500376	126150673505291	36141263821769	36141263822978
7	14923347716842	14923347722737	3282706864956	3282706866372
8	1579374879579	1579374886444	230204403230	230204404844
9	115965738067	115965745878	12853803169	12853804972
10	7791260145	7791268873	585397075	585399060
11	390147973	390157589	22170380	22172539
12	18178552	18189026	708476	710802
13	656402	667706	18289	20775

维度 5。

k	a_k^u	b_k^u	a_k^v	b_k^v
14	17557	29664	−772	1868
15	−4810	8074	−500	1491
16	−773	7903	−40	1538
17	−152	8312	−28	1584

维度 5：辅助系数和余项。

k	a_k^W	b_k^W	$r_{W,\,-}(k-2)$	$r_{W,\,+}(k-2)$
0	10000000000000000	10000000000000000	−−	−−
1	−17507757386915000	−17507757386910000	−−	−−
2	−21884696733643750	−21884696733637500	0	0
3	−25532146189251042	−25532146189243750	64000000000000	0
4	−8672532086816459	−8672532086806770	112000000000000	320000000000000
5	−2524999851704773	−2524999851691589	589820656635000	232443130419350
6	−399747097947814	−399747097931017	231864988030619	782624026883050
7	−55841478853556	−55841478833274	320269559679241	293566172184850
8	−5128774417138	−5128774393472	943634634451768	39256841842550
9	−426539319788	−426539292836	1553429956061906	357205512782850
10	−25622888686	−25622858550	2160141403003047	782521772874200
11	−1421263281	−1421230065	3424307639240831	2224314710817900
12	−60268144	−60231952	3943936325254485	422337837177650
13	−2409930	−2370861	4334844022632889	4816278884341450
14	−92699	−50849	2434213880478936	3160261607159300
15	−20580	23961	1314326945048986	4138458450533300
16	−19463	27684	488875277915401	1803233110795200
17	−20036	29213	4864000000000000	4626836304495700

维度 5：剖面函数除法余项。

j	$r_{u,-}$	$r_{u,+}$	$r_{v,-}$	$r_{v,+}$
0	0	0	0	0
1	0	4	16000000000000	16000000000000
2	8	15	4000000000000	12000000000000
3	4	36	46787201754882	54958493503216
4	9	35	112326057830448	84407606482770
5	20	74	11263458503253	13412235691698
6	94	93	44046787820394	37221123637594
7	136	40	11867649227156	2778008007256
8	11	86	182967193867612	294966711655980
9	138	134	193096244844956	263007314113994
10	103	89	154352477241380	445050752853950

维度 5：剖面除法余项。

j	$r_{u,-}$	$r_{u,+}$	$r_{v,-}$	$r_{v,+}$
11	300	108	395644208641847	28572815861880
12	230	342	311760634575546	200604742466776
13	218	348	537614240229075	284234568475114
14	244	206	683719056594364	390000000000000
15	368	204	359623722367343	832000000000000

上述区间递推和整数余数恒等式验证了剖面系数 u_j、v_j、W_j 的所示包络。这些正是下文有限系数公式所使用的输入。对于这些公式中所需的每个后续剖面指标，我们使用

$$0 \le u_j, v_j \le 10^{-16}.$$

有限指标界由向外舍入递推通过归纳法得到。对于 $j \ge 18$ 的共同界，依据附录 B.1 中证明的正项级数估计。

A.3 有限系数公式与其无理数输入

剖面区间现在为分子系数给出了有限下界。我们先写出它们的系数公式，然后通过保留选定的正项，得到行列式下界。设

$$\mathcal{C} = 4H^2 N_a, \qquad \mathcal{E} = N_e, \qquad \mathcal{Z} = N_d, \qquad c_j = [\mathcal{C}]_j, \quad e_j = [\mathcal{E}]_j, \quad z_j = [\mathcal{Z}]_j .$$

花体符号用于将这些级数与径向系数区分开来。它们的定义关系为

$$N_{\mathrm{det}} = \mathcal{C}\mathcal{E} - \mathcal{Z}^2. \tag{A.1}$$

以下所有序列在负指标处均为零。对于两个序列，记

$$(a * b)_j = \sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i}.$$

对于非负整数 r，s，定义

$$\mathcal{F}_{r,s}\,(a)_j = \sum_{i=0}^{j} \frac{(i+r)!}{i!} \frac{(j-i+s)!}{(j-i)!} a_{i+r} a_{j-i+s}, \qquad j \ge 0.$$

这里 $a(y) = \sum_{i\ge 0} a_i y^i$ 表示系数序列为 a 的级数。逐项求导得到

$$\partial_y^r a = \sum_{i\ge 0} \frac{(i+r)!}{i!} a_{i+r} y^i,$$

将两个求导级数相乘可知，$\mathcal{F}_{r,\ s}(a)_j$ 是 $\left(\partial_y^r a\right)\left(\partial_y^s a\right)$ 中 y^j 的系数。例如，

$$\mathcal{F}_{1,2}\left(u\right)_j = \sum_{i=0}^{j} \left(i+1\right)\left(j-i+1\right)\left(j-i+2\right) u_{i+1} u_{j-i+2}.$$

负指标的约定使得当因子 y或 y^2 将所需次数移至零以下时，同样的公式仍然适用。令

$$h_j = u_{j+2}, \qquad k_j = v_{j+1}, \qquad H_j = \left(j+2\right) h_j.$$

H_j的公式直接由 $H = 2h + yh_y$得到。写作 $\rho_j = [D]_j$和 $\omega_j = [N_g]_j$。于是

$$\begin{aligned}
\rho_j = & \sum_{a+b=j} \left[\left(a-b\right)^2 - j - 4\right] h_a h_b \\
& + \sum_{a+b=j-1} \left[\frac{j+3}{2} - \left(a-b\right)^2\right] h_a h_b, \\
\omega_j = & \sum_{a+b=j} \left(a-b-1\right) k_a h_b.
\end{aligned}$$

对于第一个恒等式，$H_b = (b+2)\, h_b$给出

$$[hH]_j = \sum_{a+b=j} \left(b+2\right) h_a h_b = \frac{j+4}{2} \sum_{a+b=j} h_a h_b.$$

由于 $\partial_x = -\partial_y$，相应的求导乘积满足

$$\begin{aligned}
\left[y\left(h_x H - h H_x\right)\right]_j &= \sum_{a+b=j} \left(b-a\right)\left(b+2\right) h_a h_b \\
&= \frac{1}{2} \sum_{a+b=j} \left(a-b\right)^2 h_a h_b.
\end{aligned}$$

每种情况下的第二个等式，将被加项与互换 a, b后得到的被加项取平均。在 D中乘以 2（$1-y$）会减去两倍的前一系数，而剩余项 $-yhH$ 则以其 hH 权重再次减去该系数。因此，次数 j 和 $j-1$ 处的权重恰好就是 ρ_j所显示的权重。对于N_g，对 $h_b y^b$ 进行微分会产生 $-b$，对 $k_a y^a$ 进行微分会产生 $-a$，而未求导项会产生 -1。因此，$y(kh_x - hk_x) - kh$ 在 ω_j的公式中具有权重 $a-b-1$。

下列表达式为 $\beta_j = [B]_j$:

$$\begin{aligned}
\beta_j = & \mathcal{F}_{1,1}\left(u\right)_j + \left(2n+6\right)\left[\mathcal{F}_{1,2}\left(u\right)_j - \mathcal{F}_{1,2}\left(u\right)_{j-1}\right] \\
& + 4\left[\mathcal{F}_{2,2}\left(u\right)_j - 2\mathcal{F}_{2,2}\left(u\right)_{j-1} + \mathcal{F}_{2,2}\left(u\right)_{j-2}\right] \\
& - 8\left[\mathcal{F}_{1,3}\left(u\right)_j - 2\mathcal{F}_{1,3}\left(u\right)_{j-1} + \mathcal{F}_{1,3}\left(u\right)_{j-2}\right] \\
& - m\left(n+2\right)\mathcal{F}_{0,2}\left(u\right)_j + 2m\left[\mathcal{F}_{0,3}\left(u\right)_j - \mathcal{F}_{0,3}\left(u\right)_{j-1}\right].
\end{aligned}$$

符号可以逐项从 $u_x = -u_y$、$u_{xx} = u_{yy}$ 和 $u_{xxx} = -u_{yyy}$ 中读出。例如，$-(2n+6)\, xu_x u_{xx}$ 变为 $(2n+6)\,(1-y)\, u_y u_{yy}$，而 $-8x^2 u_x u_{xxx}$ 变为$-8(1-y)^2\, u_y u_{yyy}$。对于任意级数 A,

$$[(1-y)\,A]_j = A_j - A_{j-1}, \qquad \left[(1-y)^2\,A\right]_j = A_j - 2A_{j-1} + A_{j-2}.$$

这两个恒等式给出了 β_j 中的每个移位差分。写作 $\ell_j = [L]_j$，精确因子$N_G = y^3 L$ 给出 $\ell_j = [N_G]_{j+3}$。因此,

$$\begin{aligned}\ell_j = T\{\, 4\left[\mathcal{F}_{1,1}\,(v)_{j+3} - \mathcal{F}_{1,1}\,(v)_{j+2}\right] - 2m\mathcal{F}_{0,1}\,(v)_{j+3} \\ + Q\mathcal{F}_{0,0}\,(v)_{j+3} - \frac{T^2}{16}\mathcal{F}_{0,0}\,(u)_{j+3} - \frac{1}{4}\beta_{j+3}\Big\}.\end{aligned}$$

最后定义

$$\begin{aligned}p_j &= (\rho * \rho)_j - 16\,(\omega * \omega)_j + 16\,(\omega * \omega)_{j-1}\,, \\ J_j &= \sum_{a+b=j} (-a + 2b - 1)\,\ell_a H_b.\end{aligned}$$

这三个系数族为

$$\begin{aligned}c_j &= \frac{T}{4}\sum_{i=0}^{j} (H * H)_i\, p_{j-i+2}, \\ e_j &= \frac{mT}{4}\,(H * H)_j + (m-1)\,\ell_{j-1}, \\ z_j &= (\ell * \rho)_j - (h * J)_j + (h * J)_{j-1}\,.\end{aligned} \tag{A.2}$$

这些公式可通过展开定义分子得到。例如，p_j 是 $D^2 - 16\,(1-y)\, N_g^2$ 的系数，而定义 J_j 的表达式是 $y(L_x H - 2LH_x) - LH$ 的系数：对 $\ell_a y^a$ 关于 x 求导会产生 $-a$，而对第二项中的 $H_b y^b$ 求导会产生 $2b$。最后一项产生 -1。由于 $K = T/16$，N_a 中的精确因子给出

$$[N_a]_j = \frac{T}{16} p_{j+2}.$$

乘以 $4H^2$ 得到 c_j 的公式。恒等式 $N_e = (mT/4)\, H^2 + (m-1)\, yL$ 给出 e_j。最后，$N_d = LD - (1-y)\, hJ$ 给出了 z_j 中的三个卷积项。因此，(A.2) 中的指标移位和符号可直接通过乘法以及除以已证明的端点因子得到。

对于 $j \le 20$，c_j的公式 e_j 至多涉及 u_{24}，v_{23}，而 z_j 至多涉及 u_{25}，v_{24}。在 $\mathcal{F}$ 中，表面上多出的指标对应的因子均为零，因为 $u_0 = u_1 = v_0 = 0$。因此，显示到指标 **17** 的输入区间，以及 $[0, 10^{-16}]$，对于每一个后续所需的系数，都提供了 (A.2) 的全部输入。

以下表格中的所有数均为有理数。各列表示

$$c_i^- < c_i < c_i^+, \qquad |e_i| < e_i^+, \qquad |z_i| < d_i^+.$$

输入舍入之后的所有运算均为精确区间运算。在 ℓ_j 的公式中，通过将 $\mathbf{T}$ 与自身相乘来计算 T^2；$\mathbf{S}$ 仅用于构造轮廓输入。下界和上界可通过将输入区间代入有限和，并应用区间加法和乘法得到。

A.4 行列式系数的正下界

对于低阶系数，将代换代入这些和式即可得到以下严格有理数界。仅在区间计算之后，才将各项向下取整。

	$n=4$		$n=5$	
j	$[-L]_j$	$[N_e]_j$	$[-L]_j$	$[N_e]_j$
0	12.957053	63.781193	27.776916	110.992863
1	21.466191	62.777118	56.474191	110.820660
2	12.715447	37.720177	42.745647	44.771785
3	5.294963	20.156767	22.312929	20.922841
4	1.567725	8.859678	8.321330	10.670057
5	0.367442	2.834257	2.439149	4.557487
6	0.067182	0.739224	0.562468	1.662088
7	0.010245	0.152611	0.107647	0.487614
8	0.001293	0.026355	0.017143	0.117154

对于 $0 \le j \le 5$ 直接卷积 $[N_{\mathrm{det}}]_j = \sum_{i=0}^{j} (c_i e_{j-i} - z_i z_{j-i})$，得到

j	$n=4$	$n=5$
0	3551.919	5440.203
1	22896.369	50823.663
2	62224.434	170414.718
3	109706.562	349811.383
4	145118.069	517714.754
5	155600.390	600348.054

常数项为

$$[-L]_0 = \frac{mT\,(Z-2)}{6}, \qquad [N_e]_0 = mT,$$

$$[N_{\mathrm{det}}]_0 = \frac{mT^2}{9}\left[(12-m)\,Z^2 + 16mZ - 16m - 12Q\right].$$

对于前两个恒等式，$H_0 = 2$ 给出 $[N_e]_0 = (mT/4)\ H_0^2 = mT$，而 N_G 中 y^3 的系数给出 $\ell_0 = -mT\,(Z-2)\,/6$。这些结果可用于简要检验归一化以及 L 的符号。例如，四维参数区间意味着 $[-L]_0 > 3 \cdot 21.26 \cdot 1.218/6 > 12$。在非零次数下，同样的计算使用卷积

而不是在零点处求值；例如，

$$e_1 = \frac{mT}{2} H_0 H_1 + (m-1)\,\ell_0 = 3mT u_3 + (m-1)\,\ell_0 .$$

右侧每个因子都已有区间包络。求下界时，先将两项相加（包括 ℓ_0 带来的负贡献），再取所得结果的下端点。前面两个表格证明了第 3 节所需的前二十四个不等式。对于更高阶的行列式系数和低块余项，以下包络将因子 $\mathcal{C}$、$\mathcal{E}$、$\mathcal{Z}$ 分别处理。

四维。

i	c_i^-	c_i^+	e_i^+	d_i^+
0	66.2	66.3	64	26
1	337	338	63	54.1
2	726	727	38	93.8
3	1023	1024	21	98.2
4	1085	1086	9	71.9
5	928	929	3	38.7
6	667	668	0.75	16
7	413	414	0.16	5.26
8	223	224	0.027	1.41
9	106	107	0.004	0.305
10	45.4	45.5	0.0005	0.0507
11	17.3	17.4	0.00005	0.00517
12	5.96	5.97	0.00001	0.000376
13	1.86	1.87	0.00001	0.000405
14	0.53	0.531	0.00001	0.00022
15	0.138	0.139	0.00001	0.000183
16	0.0332	0.0333	0.00001	0.000211
17	0.00738	0.00739	0.00001	0.000263
18	0.00151	0.00153	0.00001	0.000327
19	0.000288	0.000293	0.00001	0.000403
20	0.00005	0.000054	0.00001	0.000492

五维。

i	c_i^-	c_i^+	e_i^+	d_i^+
0	76.8	76.9	111	55.6
1	527	528	111	146
2	1462	1463	45	293
3	2610	2611	21	377
4	3469	3470	11	347
5	3698	3699	4.6	240

五维。

i	c_i^-	c_i^+	e_i^+	d_i^+
6	3299	3300	1.7	130
7	2528	2529	0.49	57.1
8	1691	1692	0.12	21
9	1000	1001	0.023	6.53
10	527	528	0.004	1.73
11	249	250	0.0006	0.383
12	106	107	0.0001	0.0691
13	41.6	41.7	0.0001	0.00944
14	14.7	14.8	0.0001	0.000975
15	4.81	4.82	0.0001	0.000962
16	1.44	1.45	0.0001	0.00109
17	0.401	0.402	0.0001	0.00134
18	0.103	0.104	0.0001	0.00169
19	0.0248	0.0249	0.0001	0.00214
20	0.00554	0.00558	0.0001	0.00269

$\mathcal{E}$ 的前九个系数的下界为

$n\backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
4	63	62	37	20	8	2.8	.7	.15	.02
5	110	110	44	20	10	4.5	1.6	.48	.11

将这些界记为 e_n^- 、$_j$。它们可直接由上述系数和推出，使用的仍是相同的有理区间输入。对于此处所需的其余指标，同样的有限和给出

$$e_j > -\delta_n \quad (9 \le j \le 20)\,, \qquad \delta_4 = 10^{-5}, \quad \delta_5 = 10^{-4}.$$

c_i^+ 列的和为

$$\sum_{i=0}^{20} c_i^+ = 5654.752567 < 6000 \quad (n=4)\,, \qquad \sum_{i=0}^{20} c_i^+ = 21318.20648 < 22000 \quad (n=5)\,.$$

令 $U_4 = 6000$ 和 $U_5 = 22000$。

对于一个满足条件的指标 j（介于 6 和 20 之间），选取一个指标集合 I_j，其中的指标 i 满足 $0 \le j - i \le 8$，如下所述。由于所用的每个 c_i 都是正数，(A.1)推出

$$[N_{\det}]_j > \sum_{i \in I_j} c_i^- e_{n,j-i}^- - \mathcal{Q}_j - \delta_n U_n, \tag{A.3}$$

其中

$$\mathcal{Q}_j = \begin{cases} \left(d_{j/2}^+\right)^2, & j \text{ even}, \\ 0, & j \text{ odd} \end{cases} + 2 \sum_{i=0}^{\lfloor (j-1)/2 \rfloor} d_i^+ d_{j-i}^+.$$

事实上，未选取的项中，其 $\mathcal{E}$ 指标至多为八的项均为非负项，可以将其舍去。所有指标较大的项 $\mathcal{E}$ 合计大于 $-\delta_n \sum c_i > -\delta_n U_n$。将对称指标配对，可将 $[\mathcal{Z}^2]_j$ 上界估计为 $\mathcal{Q}_j$。因此，（A.3）是一个充分的下界，只使用了正卷积中的一小部分。更明确地说，根据 $j-i \le 8$ 和 $j-i \ge 9$将$\sum_{i=0}^{j} c_i e_{j-i}$ 分开。在第一部分中，所有被加项均为正；将选定因子替换为c_i^- 、e_n^- 、$_{j-i}$ 会使总和减小。在第二部分中，$e_{j-i} > -\delta_n$ 和 $0 < c_i < c_i^+$ 推出 $c_i e_{j-i} > -\delta_n c_i^+$ 。该论证不要求那些高指标的 e_{j-i} 具有任意确定的符号。同样，$z_i z_{j-i} \le |z_i|\,|z_{j-i}|$ 将被减平方项从上方界定。如果 j 为偶数，则其中心乘积出现一次；其他每一对均出现两次，这解释了 $\mathcal{Q}_j$的两部分。

在接下来的两张表格中， A_j 是（A.3）中的选定正项和， B_j 是 $\mathcal{Q}_j$的严格上界。每一行至多需要检查十一个乘积来验证 $\mathcal{Q}_j < B_j$。

四维。

j	I_j	A_j	B_j
6	$\{5\}$	57536	28200
7	$\{6\}$	41354	23400
8	$\{7\}$	25606	16500
9	$\{7\}$	15281	9870
10	$\{8\}$	8251	5140
11	$\{8\}$	4460	2340
12	$\{9\}$	2120	936
13	$\{9\}$	848	333
14	$\{10\}$	363.2	105
15	$\{11\}$	138.4	29.5
16	$\{12\}$	47.68	7.43
17	$\{12\}$	16.688	1.77
18	$\{13\}$	5.208	0.487
19	$\{14\}$	1.484	0.253
20	$\{15\}$	0.3864	0.245

五维。

j	I_j	A_j	B_j
6	$\{5,6\}$	769670	431000
7	$\{6,7\}$	640970	447000
8	$\{7,8\}$	464090	397000
9	$\{7,8,9\}$	407242	305000
10	$\{8,9,10\}$	242374	206000
11	$\{8,9,10\}$	135790	123000
12	$\{9,10,11\}$	70578	65000
13	$\{10,11,12\}$	33156	31100

五维。

j	I_j	A_j	B_j
14	$\{10,11,12\}$	14914	13400
15	$\{10,11,12\}$	6981.5	5260
16	$\{11,12\}$	2180.5	1880
17	$\{12,13\}$	893	613
18	$\{13,14\}$	334.2	185
19	$\{13\}$	66.56	52.5
20	$\{14\}$	23.52	16.4

每一行都满足 $A_j - B_j - \delta_n U_n > 1/20$。最小的四维行可以完整地按如下方式检验：

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{20} &= 0.0507^2 + 2\,(26\cdot 0.000492 + 54.1\cdot 0.000403 + 93.8\cdot 0.000327 + 98.2\cdot 0.000263\\ &\quad +71.9\cdot 0.000211 + 38.7\cdot 0.000183 + 16\cdot 0.000220 + 5.26\cdot 0.000405\\ &\quad +1.41\cdot 0.000376 + 0.305\cdot 0.00517)\\ &= 0.24477811 < 0.245.\end{aligned}$$

所选索引为 15，因此

$$[N_{\mathrm{det}}]_{20} > 0.138\cdot 2.8 - 0.245 - 0.06 = 0.0814 > \frac{1}{20}.$$

对于五维，相应的检验为

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{20} &= 1.73^2 + 2\,(55.6\cdot 0.00269 + 146\cdot 0.00214 + 293\cdot 0.00169 + 377\cdot 0.00134\\ &\quad +347\cdot 0.00109 + 240\cdot 0.000962 + 130\cdot 0.000975 + 57.1\cdot 0.00944\\ &\quad +21\cdot 0.0691 + 6.53\cdot 0.383)\\ &= 16.371556 < 16.4,\end{aligned}$$

and

$$[N_{\mathrm{det}}]_{20} > 14.7\cdot 1.6 - 16.4 - 2.2 = 4.92 > \frac{1}{20}.$$

其余各行给出了共同的界

命题 A.1。 对于 $n = 4,5$，行列式系数满足

$$[N_{\mathrm{det}}]_j > \frac{1}{20}, \qquad 6 \le j \le 20. \tag{A.4}$$

证明。 固定 $n \in \{4,5\}$ 和 $6 \le j \le 20$。稀疏卷积不等式（A.3）给出

$$[N_{\mathrm{det}}]_j > A_j - \mathcal{Q}_j - \delta_n U_n,$$

其中， A_j 是维度表中列出的选定正和， B_j是 $\mathcal{Q}_j$的显式严格上界。因此，只需检查每一行中的 $A_j - B_j - \delta_n U_n$ >1/20。误差项为

$$\delta_4 U_4 = 10^{-5}\cdot 6000 = 0.06, \qquad \delta_5 U_5 = 10^{-4}\cdot 22000 = 2.2.$$

代换两个表格中的数值后，即可得到每一行所需的不等式。四维中最小的裕量出现在 $j=20$处。在该行中， $I_{20}=\{15\}$，因此

$$A_{20}=c^{-}_{15}e^{-}_{4,5}=0.138\cdot 2.8.$$

前面的d_i^{+} 表给出

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{20}&=0.0507^2+2\big(26\cdot 0.000492+54.1\cdot 0.000403+93.8\cdot 0.000327\\&\quad+98.2\cdot 0.000263+71.9\cdot 0.000211+38.7\cdot 0.000183+16\cdot 0.000220\\&\quad+5.26\cdot 0.000405+1.41\cdot 0.000376+0.305\cdot 0.00517\big)\\&=0.24477811<0.245.\end{aligned}$$

因此，

$$[N_{\mathrm{det}}]_{20}>0.138\cdot 2.8-0.245-0.06=0.0814>\frac{1}{20}.$$

在五维情形下，最后一行有 $I_{20}=\{14\}$ ，并给出

$$[N_{\mathrm{det}}]_{20}>14.7\cdot 1.6-16.4-2.2=4.92>\frac{1}{20}.$$

从 A_j、 B_j的表列值以及相应的常数 $\delta_n U_n$可以直接看出，其他各行的裕量更大。这就证明了对所有 $6\le j\le 20$，断言都成立。 □

在 $0\le y\le 1$ 上求值该级数时，只需要这些系数为正；命题保证了这一性质。

A.5 有限系数块的高次乘积 s

为界定由这些有限块构成的行列式尾项部分，令$\mathcal{C}_0$， $\mathcal{E}_0$， $\mathcal{Z}_0$ 表示次数不超过二十的多项式。五维上列逐项支配四维列。因此，所显示的有理数输入给出

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{21}\left[\left(\mathcal{C}_0\mathcal{E}_0-\mathcal{Z}_0^{2}\right)^{\#}\right]&\le\sum_{i=1}^{20}c_i^{+}\sum_{k=21-i}^{20}e_k^{+}+\sum_{i=1}^{20}d_i^{+}\sum_{k=21-i}^{20}d_k^{+}\\&=92.983482190329<100.\end{aligned}$$

这是一个有理数乘积的有限和。例如，第一行是 $528\cdot 0.0001+146\cdot 0.00269=0.44554$。下限 $21-i$ 涵盖了次数至少为二十一的所有乘积，尽管每个因子的次数至多为二十。实际上，这些次数对应的系数总和，是所有满足 $0\le i,\ k\le 20$且 $i+k\ge 21$的有序对（i， k）上的系数和。索引 $i=0$ 没有贡献；固定 $1\le i\le 20$ 后，恰好剩下$21-i\le k\le 20$。逐行求和时不需要乘以二，因为这两个有序对已经分别包含在各自的行中。例如，第二行是

$$1463\,(0.0001+0.0001)=0.2926,\qquad 293\,(0.00214+0.00269)=1.41519.$$

下面的每个数值都是相应行乘积的上界。因此，每一行都可以通过后缀和与一次乘法来检验。

i	$c_i^+ \sum_{k=21-i}^{20} e_k^+$	$d_i^+ \sum_{k=21-i}^{20} d_k^+$
1	0.052800	0.392740
2	0.292600	1.415190
3	0.783300	2.458040
4	1.388000	2.727420
5	1.849500	2.148000
6	1.980000	1.288560
7	1.770300	0.621648
8	1.353600	0.426867
9	0.900900	0.583959
10	0.792000	0.817299
11	1.375000	0.843530
12	3.049500	0.603411
13	6.192450	0.280675
14	9.449800	0.084662
15	11.271570	0.208593
16	10.060825	0.497948
17	7.211277	1.077136
18	4.049604	1.995607
19	2.090069	3.154002
20	1.087757	4.357350
sum	67.000852	25.982637

两列取整后的上界之和为 $67.000852 + 25.982637 = 92.983489 < 100$，与上面的精确和一致。这涵盖了总次数至少为二十一的有限块的所有乘积。附录 B给出了各因子的无穷余项的上界。

B 完整级数余项估计

现在，我们对完整泰勒级数进行控制，包括有限块以上的所有系数。本附录中的界针对实际的参考剖面。所有辅助主控函数的系数均为非负数，并且都以有理函数的形式明确给出。因此，它们的尾项可由正项之和控制，而无需依赖大数之间的相消。小节B.1 构造剖面主控函数，小节B.2 给出 $-L$ 和 N_e的尾项界，而小节B.3则给出进入N_{det}的三个因子的尾项界。

B.1 边界系数与正剖面函数主项

为得到这些界，我们从剖面的边界系数入手。令$U_c = u(1)$、$V_c = v(1)$和$c = B_\nu(R)/M_\nu(R) \in (-1,0)$。第2节的剖面公式给出

$$U_c = -\frac{4(1-c)}{TB_\nu(R)}, \qquad V_c = \frac{2n}{QB_{\nu+1}(q)}.$$

为提取边界系数，将剖面函数写成如下形式

$$v(y) = V_c B_\nu\left(q\sqrt{1-y}\right),$$
$$u(y) = \frac{U_c}{1-c}\left[B_\nu\left(R\sqrt{1-y}\right) - cM_\nu\left(R\sqrt{1-y}\right)\right].$$

在定义整函数级数中展开$(1-y)^k$，可得，对于$a>0$，

$$\left[B_\nu\left(a\sqrt{1-y}\right)\right]_j = \frac{(a^2/4)^j}{j!(\nu+1)_j}B_{\nu+j}(a),$$
$$\left[M_\nu\left(a\sqrt{1-y}\right)\right]_j = \frac{(-1)^j(a^2/4)^j}{j!(\nu+1)_j}M_{\nu+j}(a).$$

例如，在第一个系数和中令$k=j+\ell$，并使用$\binom{j+\ell}{j}/(j+\ell)! = 1/(j!\,\ell!)$以及$(\nu+1)_{j+\ell} = (\nu+1)_j(\nu+j+1)_\ell$。余下的和恰好是$B_{\nu+j}(a)$。紧集上的绝对收敛保证了可以收集这些系数。因此，边界处的泰勒系数为

$$v_j = \frac{V_c(Q/4)^j B_{\nu+j}(q)}{j!(\nu+1)_j},$$
$$u_j = \frac{U_c(T/4)^j\left[B_{\nu+j}(R) - (-1)^j cM_{\nu+j}(R)\right]}{(1-c)\,j!(\nu+1)_j}.$$

这些系数均为非负。对于v_j、$j\ge 1$，这是由贝塞尔零点随其阶数增加而增加这一事实得到的。对于偶数$j\ge 2$，关于u_j的断言由$c<0$和$R<j_{\nu+j,1}$推出。对于奇数$j\ge 3$，典范乘积表明，当μ增加且$R<j_{\mu,1}$时，$I_\mu(R)/J_\mu(R)$递减；在$\mu=\nu+1$处，该商等于$-1/c$。因此，u_j中的括号为正。强制系数u_0，u_1，v_0均为零。典范乘积和阶数单调性的这些应用是标准结论，见[9, 第10节21]。

我们使用振幅界

$$U_c < 2, \qquad V_c < \frac{10}{3}.$$

这里有一个指令有理数验证。对于$\gamma>0$，定义有限交错多项式

$$\beta_N(\gamma,z) = \sum_{j=0}^{N}\frac{(-1)^j z^j}{j!(\gamma)_j}.$$

只要省略项的绝对值递减，偶数部分和与奇数部分和分别是对应贝塞尔级数的上界和下界。验证这一条件的比值为 $z/\left[(j+1)(\gamma+j)\right]$。此外， B_ν在 $(0,\ R)$ 上递减，因为

$$B'_\nu(t) = -\frac{t}{n}B_{\nu+1}(t) < 0 \quad \text{for } 0 < t \le R.$$

参数包围给出 $T > 21$ 当 $n = 4$ 时，以及 $T > 277/10$ 当 $n = 5$ 时。因此

$$\begin{aligned} n = 4: \quad & B_\nu(R) < \beta_8(2, 21/4) = -\frac{2955988871}{26843545600} < -\frac{11}{100}, \\ n = 5: \quad & B_\nu(R) < \beta_8(5/2, 277/40) \\ & = -\frac{16714385790512438931839}{22526870446080000000000} < -\frac{37}{500}. \end{aligned}$$

仅取前四项， M_ν的正级数给出

$$M_\nu(R) > \frac{7093}{1024} > 6 \quad (n=4), \qquad M_\nu(R) > \frac{119689993}{15120000} > 6 \quad (n=5).$$

由于

$$U_c = \frac{4}{T(-B_\nu(R))} + \frac{4}{TM_\nu(R)},$$

我们得到

$$\begin{aligned} n = 4: \quad & U_c < \frac{400}{231} + \frac{2}{63} < \frac{7}{4} + \frac{1}{30} = \frac{107}{60} < 2, \\ n = 5: \quad & U_c < \frac{20000}{10249} + \frac{20}{831} < \frac{49}{25} + \frac{1}{40} = \frac{397}{200} < 2. \end{aligned}$$

对于膜振幅，参数盒在四维下给出 $14 < Q < 15$ ，在五维下给出 $20 < Q < 41/2$ 。奇数项部分和给出

$$\begin{aligned} n = 4: \quad & B_{\nu+1}(q) > \beta_3(3, 15/4) = \frac{97}{512} > \frac{3}{16}, \\ n = 5: \quad & B_{\nu+1}(q) > \beta_5(7/2, 41/8) = \frac{2567617699}{16605388800} > \frac{3}{20}. \end{aligned}$$

此处所用有限多项式的单调性无需借助进一步的贝塞尔估计即可验证。事实上，

$$\partial_z \beta_N(\gamma, z) = -\frac{1}{\gamma}\beta_{N-1}(\gamma+1, z).$$

对于 $\gamma > 1$，二次多项式 $\beta_2(\gamma,\ z)$ 在实数轴上严格为正：其首项系数为正，且判别式为 $(1-\gamma)/\left[\gamma^2(\gamma+1)\right] < 0$。这证明了 $\beta_3(3,\ z)$ 所需的单调性。对于第二个多项式，$\beta_3(9/2,\ z)$ 是递减的，并且

$$\beta_3(9/2, 41/8) = \frac{124675}{494208} > 0.$$

因此， $\beta_4(9/2,\ z) > 0$ 在所需区间上成立，这证明了 $\beta_5(7/2,\ z)$ 在该区间上递减。我们得出

$$V_c < \frac{64}{21} < \frac{10}{3} \quad (n=4), \qquad V_c < \frac{10}{3} \quad (n=5).$$

对于幂级数， $A \preccurlyeq B$ 表示 A 的每个系数均非负，且不大于 B中对应的系数。绝对系数级数 $A^{\#}$ 及其范数定义于第 3节。系数序在加法、乘法、对 y微分以及删除任意多个初始系数的操作下保持不变。对于乘法，这可由每个有限卷积中的三角不等式得出；微分会将次数为 j 的系数乘以非负整数 j。特别地，

$$(AB)^{\#} \preccurlyeq A^{\#}B^{\#}, \qquad \|AB\|_{\mathcal{A}} \le \|A\|_{\mathcal{A}} \|B\|_{\mathcal{A}}.$$

定义有理多项式

$$\begin{aligned} P_u(y) &= y^2 + \frac{3}{5}y^3 + \frac{3}{10}y^4 + \frac{7}{100}y^5 + \frac{13}{1000}y^6 + \frac{3}{2000}y^7 \\ &\quad + \frac{1}{6000}y^8 + \frac{3}{250000}y^9 + \frac{1}{1250000}y^{10} + \frac{1}{25000000}y^{11}, \\ P_v(y) &= y + \frac{5}{4}y^2 + \frac{5}{8}y^3 + \frac{17}{100}y^4 + \frac{3}{100}y^5 + \frac{37}{10000}y^6 \\ &\quad + \frac{1}{3000}y^7 + \frac{1}{40000}y^8 + \frac{13}{10^7}y^9 + \frac{6}{10^8}y^{10} + \frac{23}{10^{10}}y^{11}. \end{aligned}$$

有限证书中的有理轮廓包围意味着 $u_j \le [P_u]_j$ 和 $v_j \le [P_v]_j$ 对于$0 \le j \le 11$。令

$$\mathfrak{a} = \frac{10\,7^{12}}{3\,12!\,13!}, \qquad \vartheta = \frac{1}{25}, \qquad U_+ = P_u + \frac{\mathfrak{a}y^{12}}{1-\vartheta y}, \qquad V_+ = P_v + \frac{\mathfrak{a}y^{12}}{1-\vartheta y}.$$

记号 $\mathfrak{a}$ 不同于海森矩阵系数 $a = 1 - g^2$，而且 ϑ 不同于边界常数 η。

我们断言，对于完整级数，有 $u \preccurlyeq U_+$ 和 $v \preccurlyeq V_+$。对于 $j \ge 12$，正的修正贝塞尔级数给出

$$M_{\nu+j}(R) \le \exp\left(\frac{7}{j+2}\right) \le \sqrt{\mathrm{e}} < \frac{5}{3}.$$

最后一个初等界例如可通过将指数级数求和至三次，并用几何级数界定其尾项来得到：

$$\mathrm{e} < \frac{8}{3} + \frac{5}{96} = \frac{87}{32} < \frac{11}{4} < \frac{25}{9}.$$

对于第一个不等式，$(\nu+j+1)_k$ 中的每个因子都至少为 $j+2$，因此 $M_{\nu+j}(R)$的第 k 个正被加项至多为 $[7/(j+2)]^k/k!$。求和即可证明指数界。此外，逐项取绝对值得到 $|B_{\nu+j}(R)| \le M_{\nu+j}(R)$。由于 u_j 中的括号非负，因此它满足

$$0 \le B_{\nu+j}(R) - (-1)^j c M_{\nu+j}(R) \le (1-c) M_{\nu+j}(R).$$

最后，$(\nu+1)_j \ge (j+1)!$ 因为 $\nu \ge 1$。系数公式和 $U_c < 2$ 因此推出

$$u_j < \frac{10\,7^j}{3\,j!\,(j+1)!}, \qquad j \ge 12.$$

对于 v_j， $B_{\nu+j}(q)$ 的级数是交错的，且绝对值项递减，因此其值位于 $(0,1]$。由 $V_c<10/3$ 可得到相同的界。最后，

$$\frac{7^{j+1}/\left[(j+1)!\,(j+2)!\right]}{7^{j}/\left[j!\,(j+1)!\right]}=\frac{7}{(j+1)\,(j+2)}\le\frac{7}{13\cdot 14}<\vartheta\quad(j\ge 12)\,.$$

对于这个估计，令 $b_j=10\,7^j/\left[3j!\,(j+1)!\right]$。第一个尾部系数为 $b_{12}=\mathfrak{a}$，由比值界归纳可得，对于每个 $k\ge 0$，都有 $b_{12+k}\le\mathfrak{a}\vartheta^k$。这些恰好是 $\mathfrak{a}y^{12}/(1-\vartheta y)$ 的系数。将此尾项估计与前十二个系数的比较结合起来，即可证明所有系数都满足所声称的有理主控函数界。

对于系数非负的级数 F，记

$$\mathcal{T}_kF=\sum_{j\ge k}[F]_j=F\,(1)-\sum_{j<k}[F]_j\,,\qquad S_kF=\sum_{j\ge 0}[F]_{j+k}\,y^j.$$

算子 S_k 会删去前 k 个系数。特别地，即使这些系数不为零，该算子也有定义。

B.2 二次分子的尾项

现在我们将剖面主控函数应用于二次多项式分子和高阶分子。在以下公式中，$U=U_+$、$V=V_+$、$X_+=1+y$ 以及撇号表示关于 y的微分。共同的参数界为

$$T<28,\quad Q<21,\quad K<\frac{7}{4},\quad n\le 5,\quad m\le 4.$$

它们表明，$N_G^{\#}$ 逐系数地受以下正有理函数控制：

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_+ &= 112X_+V'^2+224VV'+588V^2+1372U^2+7U'^2\\ &\quad+112X_+U'U''+28X_+^2U''^2+56X_+^2U'U'''\\ &\quad+196UU''+56X_+UU'''.\end{aligned}$$

此表达式中的每个乘子都来自对 N_G 中相应系数的绝对值界。例如，$4T<112$、$2mT<224$、$QT<588$ 和 $KT^2<1372$ 给出了它的前四项。乘以 B 的因子 $4K<7$ 给出了其余六项：$7\,(2n+6)\le 112$、$7\cdot 4=28$、$7\cdot 8=56$、$7m\,(n+2)\le 196$ 以及 $7\cdot 2m\le 56$。将每个 $x=1-y$ 替换为 $X_+=1+y$，即可界定其绝对系数，包括 x^2 的系数。如果整个分子 F 含有精确因子 y^k，那么 $\left(F/y^k\right)^{\#}=S_k\left(F^{\#}\right)$：除法只会将所有系数平移 k。将这一事实应用于 $N_G=y^3L$，得到 $L^{\#}\preccurlyeq S_3\mathcal{N}_+$。此外，置入

$$h_+=S_2U,\qquad H_+=2h_++yh'_+=U'/y.$$

这些函数中的所有系数均为非负数。下表按照 $\mathcal{N}_+$ 中十项显示的顺序，列出了它们的有理上界：

term	$\mathcal{T}_{11}$	$\mathcal{T}_{12}$
1	0.216	0.026
2	0.067	0.008
3	0.247	0.029
4	4.829	0.790
5	0.024	0.004
6	2.408	0.366
7	3.763	0.611
8	6.947	1.141
9	0.606	0.087
10	1.029	0.160
sum	20.136	3.222

所有数值都是严格上界。可通过以下正有理数运算进行验证。我们先给出两个较短的展开式，同时明确展示尾项算术。

写出 $P_u=\sum_{j=2}^{11}p_jy^j$ 和 $\delta=\mathfrak{a}/(1-\vartheta)$。按较小的指标对乘积分组，得到精确恒等式

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{12}\left(U^2\right)=2\,[&p_2\left(p_{10}+p_{11}\right)+p_3\left(p_9+p_{10}+p_{11}\right)\\&+p_4\left(p_8+p_9+p_{10}+p_{11}\right)+p_5\left(p_7+p_8+p_9+p_{10}+p_{11}\right)]\\&+\left(\sum_{j=6}^{11}p_j\right)^2+2\delta P_u\left(1\right)+\delta^2.\end{aligned}$$

为说明这种分组，写出 $U=P_u+R_u$，其中 $R_u=\mathfrak{a}y^{12}/(1-\vartheta y)$ 且 $R_u\left(1\right)=\delta$。$2P_uR_u+R_u^2$ 的每个系数的次数至少为十二，因此其总和为 $2\delta P_u(1)+\delta^2$。在 P_u^2中，较小的指标 $i\in\{2,3,4,5\}$必须与一个至少为 $12-i$的指标配对，并且这对指标有两种排列顺序。如果两个指标都至少为六，那么它们的所有乘积都属于尾项，并由其和的平方计数。这些情况涵盖了所有项。代入 P_u 中显示的有理系数并乘以 1372，得到最后一列中的第四个上界 。790。

对于第二个展开，令

$$b_j=(j+2)\,p_{j+2},\qquad P_H=\sum_{j=0}^{9}b_jy^j,\qquad \delta_H=\mathfrak{a}\left[\frac{12}{1-\vartheta}+\frac{\vartheta}{(1-\vartheta)^2}\right].$$

事实上，对 R_u 求导并除以 y，得到

$$H_+-P_H=\mathfrak{a}\left[\frac{12y^{10}}{1-\vartheta y}+\frac{\vartheta y^{11}}{(1-\vartheta y)^2}\right].$$

这个余项从十次项开始，其在 $y=1$ 处的值为 δ_H。因此，所有涉及它的乘积都属于从九次项开始的尾项。在 P_H^2 中，指标较小的一方

至多为四的乘积均成对计数，其余乘积的两个指标都至少为五。因此

$$\mathcal{T}_9\left(H_+^2\right) = 2\sum_{i=0}^{4} b_i \sum_{j=9-i}^{9} b_j + \left(\sum_{j=5}^{9} b_j\right)^2 + 2\delta_H P_H(1) + \delta_H^2 < \frac{3336}{10^6}.$$

因此，完整的二次尾项满足

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_9\left(L^{\#}\right) &\le \mathcal{T}_{12}\mathcal{N}_+ < \frac{13}{4},\\ \mathcal{T}_9\left(N_e^{\#}\right) &\le 28\mathcal{T}_9\left(H_+^2\right) + 3\mathcal{T}_{11}\mathcal{N}_+\\ &< 28\cdot .003336 + 3\cdot 20.136 = 60.501408 < 61.\end{aligned}$$

命题 B.1. 两个二次分子的完整级数余项满足

$$\mathcal{T}_9\left(L^{\#}\right) < \frac{13}{4}, \qquad \mathcal{T}_9\left(N_e^{\#}\right) < 61.$$

证明。 逐系数主控项 U_+，V_+ 在附录 B.1 中构造，蕴含 $L^{\#} \preccurlyeq S_3\mathcal{N}_+$ 且

$$\mathcal{T}_9(L^{\#}) \le \mathcal{T}_{12}(\mathcal{N}_+).$$

$\mathcal{N}_+$ 的十项表给出 $\mathcal{T}_{12}(\mathcal{N}_+) < 3.222 < 13/4$。对于第二个分子，命题前紧接着的恒等式和估计给出

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_9(N_e^{\#}) &\le 28\mathcal{T}_9(H_+^2) + 3\mathcal{T}_{11}(\mathcal{N}_+)\\ &< 28\cdot 0.003336 + 3\cdot 20.136\\ &= 60.501408 < 61.\end{aligned}$$

所断言的两个界均由此得出。 □

对于高阶尾项，将每个正有理函数表示为有限和

$$F = \sum_{j,p} c_{j,p}\frac{y^j}{(1-\vartheta y)^p}, \qquad c_{j,p} \ge 0,$$

其中 j，p 是非负整数。在进行加法和乘法时，我们收集具有相同序对（j，p）的项，但不合并不同的分母幂次。微分和删除系数规定为

$$\begin{aligned}\partial_y \frac{y^j}{(1-\vartheta y)^p} &= \frac{jy^{j-1}}{(1-\vartheta y)^p} + \frac{p\vartheta y^j}{(1-\vartheta y)^{p+1}},\\ S_1\frac{y^j}{(1-\vartheta y)^p} &= \frac{y^{j-1}}{(1-\vartheta y)^p} \quad (j\ge 1),\\ S_1\frac{1}{(1-\vartheta y)^p} &= \vartheta\sum_{r=1}^{p}\frac{1}{(1-\vartheta y)^r} \quad (p\ge 1), \qquad S_1(1) = 0.\end{aligned}$$

对于最后一个恒等式，令 $z=\vartheta y$ 并使用有限几何恒等式

$$(1-z)^{-p}-1=z\sum_{r=1}^{p}(1-z)^{-r}\,.$$

减去常数系数并除以 y，即可证明 S_1 的公式。因此，每种运算都保持非负性。

有限系数数组可以按如下方式明确计算。若 F 的各项为$c_{j,\,p}$，而 G 的各项为 $d_{j,\,p}$，则它们的乘积各项为

$$(c*d)_{j,p}=\sum_{a=0}^{j}\sum_{b=0}^{p}c_{a,b}d_{j-a,p-b}.$$

有限数组中未列出的项均为零。F' 在 $(j,\ p)$ 处的项为

$$(j+1)\,c_{j+1,p}+(p-1)\,\vartheta c_{j,p-1}\quad(p\geq 1)\,,$$

当 $p=0$ 时，它等于 $(j+1)\,c_{j+1,\,0}$。对于 S_1F，在 $j\geq 1$ 处的项为 $c_{j+1,\,p}$，而在 $j=0$ 处的项为

$$c_{1,0}\quad(p=0)\,,\qquad c_{1,p}+\vartheta\sum_{q\geq p}c_{0,q}\quad(p\geq 1)\,.$$

迭代得到 S_k。从 P_u，P_v 在分母幂次为零时的系数，以及在 $(12,\ 1)$ 处的单个项 $\mathfrak{a}$ 开始，通过这些有限的正有理运算即可得到所有后续数组。

每一项的尾项还有一个直接的几何界。若 $j\geq k$，则其系数和为 $c_{j,\,p}(1-\vartheta)^{-p}$。若 $j<k$ 且 $p=0$，则其尾项为零。否则，令$r=k-j\geq 1$。由二项式级数可知，第一个尾项为 $c_{j,\,p}\binom{p+r-1}{r}\vartheta^r$；此后每一项与前一项的比值均不大于 $\vartheta(p+r)\,/\,(r+1)$。因此

$$\mathcal{T}_k\left(\frac{c_{j,p}y^j}{(1-\vartheta y)^p}\right)\leq\frac{c_{j,p}\binom{p+r-1}{r}\vartheta^r}{1-\vartheta\,(p+r)\,/\,(r+1)}.$$

从索引 r开始的相邻二项级数项之比为

$$\vartheta\frac{p+r}{r+1}=\vartheta\left(1+\frac{p-1}{r+1}\right).$$

由于 $p\geq 1$，它关于 r 单调不增。在下列函数中，$p\leq 12$ 和 $r\geq 1$，因此该比值至多为 $13/50<1$。所以，几何估计中的每个分母都至少为 $37/50$。例如，输入项（$j,\ p$）$=(12,\ 1)$从二十一次开始的尾项等于

$$\frac{\mathfrak{a}\vartheta^9}{1-\vartheta},$$

而两个此类项的乘积含有 $j=24$，且其完整系数和$\mathfrak{a}^2/(1-\vartheta)^2$ 属于该尾项。这些例子说明了估计中的两种不同情况：$j<k$和 $j\geq k$。

B.3 完整行列式尾项

需要控制的实际中间分子为

$$\mathcal{C} = 4H^2 N_a, \qquad \mathcal{E} = N_e, \qquad \mathcal{Z} = N_d, \qquad N_{\det} = \mathcal{C}\mathcal{E} - \mathcal{Z}^2.$$

花体符号 $\mathcal{C}$ 与校准恒等式中的 $C = -1/r$ 不同。令$k_+ = S_1 V$，并定义正函数

$$\begin{aligned}
D_+ &= 2X_+ \left[y\left(h'_+ H_+ + h_+ H'_+\right) + h_+ H_+ \right] + y h_+ H_+, \\
N_{g,+} &= y\left(k_+ h'_+ + h_+ k'_+\right) + k_+ h_+, \\
\mathcal{A}_+ &= S_2 \left[\frac{7}{4} D_+^2 + 28 X_+ N_{g,+}^2 \right], \qquad \mathcal{L}_+ = S_3 \mathcal{N}_+, \\
\mathcal{C}_+ &= 4H_+^2 \mathcal{A}_+, \qquad \mathcal{E}_+ = 28 H_+^2 + 3y\mathcal{L}_+, \\
\mathcal{Z}_+ &= \mathcal{L}_+ D_+ + X_+ h_+ \left[y\left(\mathcal{L}'_+ H_+ + 2\mathcal{L}_+ H'_+\right) + \mathcal{L}_+ H_+ \right].
\end{aligned}$$

系数 卷积、微分以及前面已经证明的端点因子 impl y

$$\mathcal{C}^{\#} \preccurlyeq \mathcal{C}_+, \qquad \mathcal{E}^{\#} \preccurlyeq \mathcal{E}_+, \qquad \mathcal{Z}^{\#} \preccurlyeq \mathcal{Z}_+.$$

特别地，正主控函数中的删除项 S_2，S_3 并不意味着其低阶系数发生抵消：它们只是按照上文规定删除这些系数。例如，

$$\left(K D^2 - T x N_g^2\right)^{\#} \preccurlyeq \frac{7}{4} D_+^2 + 28 X_+ N_{g,+}^2.$$

左侧的分子在次数为零和 1 处的系数均为零。因此，将两个系数序列都向后移动两位，就得到 $N_a^{\#}$ 由 $\mathcal{A}_+$界定。删除三个系数时采用相同的论证，可得到 $L^{\#}$ 由 $\mathcal{L}_+$界定。随后对这两个界施加卷积和微分，即得到 $\mathcal{C}$，$\mathcal{E}$，$\mathcal{Z}$的所示正主控函数；这里并未假设实际分子中任何单个系数的符号。

对于 F 的正表示，定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_0(F) &= \sum_{j \geq 21} c_{j,0}, \\
\mathcal{B}_p(F) &= \sum_{j \geq 21} c_{j,p} \left(\frac{25}{24} \right)^p \\
&\quad + \sum_{j<21} \frac{c_{j,p} \binom{p+20-j}{21-j} 25^{j-21}}{1 - (p+21-j)/\left[25\,(22-j)\right]} \qquad (p \geq 1).
\end{aligned}$$

前述几何估计证明了 $\mathcal{T}_{21} F \leq \sum_p \mathcal{B}_p(F)$。只会出现以下有限范围：

F	$\max j$	$\max p$
$\mathcal{C}_+$	66	12
$\mathcal{E}_+$	24	6
$\mathcal{Z}_+$	46	10

在正运算中代换 P_u，P_v，$\mathfrak{a}$，ϑ，可得以下严格的有理数界：

	$\mathcal{C}_+$	$\mathcal{E}_+$	$\mathcal{Z}_+$
$\mathcal{B}_0$	$171/100$	0	$63/10000$
$\mathcal{B}_1$	$153/10000$	$4/10^{11}$	$17/10000$
$\mathcal{B}_2$	$21/100000$	$15/10^{11}$	$8/100000$
$\mathcal{B}_3$	$11/10^{7}$	$3/10^{11}$	$25/10^{7}$
$\sum_{p\ge 4}\mathcal{B}_p$	$1/10^{10}$	$1/10^{12}$	$5/10^{8}$

零项是精确的。事实上，U，V 的零分母幂部分的次数为十一，因此 $\mathcal{N}_+$ 中对应部分的次数至多为二十二。应用 S_3 并乘以 y 后，其次数至多为二十。H_+^2 的多项式部分次数至多为十八。因此，$\mathcal{E}_+$ 的多项式部分不含次数为二十一或更高的系数。含有正的分母幂的项在这些运算后仍含有这样的幂，因此不会影响这一结论。其他各项则通过对每个固定的 p，将有限数组中的各项按 $\mathcal{B}_p$ 中的几何权重求和得到。它们的列和明确为

$$\sum_{p}\mathcal{B}_p\left(\mathcal{C}_+\right) < 1.7255111001 < \frac{7}{4},$$
$$\sum_{p}\mathcal{B}_p\left(\mathcal{E}_+\right) < \frac{221}{10^{12}} < 10^{-9},$$
$$\sum_{p}\mathcal{B}_p\left(\mathcal{Z}_+\right) < .00808255 < \frac{1}{100}.$$

将这些估计与逐系数支配相结合，可得

$$\mathcal{T}_{21}\left(\mathcal{C}^{\#}\right) < \frac{7}{4}, \qquad \mathcal{T}_{21}\left(\mathcal{E}^{\#}\right) < 10^{-9}, \qquad \mathcal{T}_{21}\left(\mathcal{Z}^{\#}\right) < \frac{1}{100}.$$

命题 B.2。 $N_{\det} = \mathcal{C}\mathcal{E} - \mathcal{Z}^2$ 中三个因子的全级数尾项满足

$$\mathcal{T}_{21}\left(\mathcal{C}^{\#}\right) < \frac{7}{4}, \qquad \mathcal{T}_{21}\left(\mathcal{E}^{\#}\right) < 10^{-9}, \qquad \mathcal{T}_{21}\left(\mathcal{Z}^{\#}\right) < \frac{1}{100}.$$

证明。逐系数主控项

$$\mathcal{C}^{\#} \preccurlyeq \mathcal{C}_+, \qquad \mathcal{E}^{\#} \preccurlyeq \mathcal{E}_+, \qquad \mathcal{Z}^{\#} \preccurlyeq \mathcal{Z}_+$$

已在上文建立。对于每个正有理函数 $F = \sum_{j,\ p} c_{j,\ p} y^j/(1-\vartheta y)^p$，本小节证明的几何估计给出

$$\mathcal{T}_{21}(F) \le \sum_{p} \mathcal{B}_p(F).$$

$\mathcal{C}_+$、$\mathcal{E}_+$、$\mathcal{Z}_+$ 的有限有理数组已列于上表。将各列分别求和得到：

$$\begin{aligned} \sum_{p} \mathcal{B}_p(\mathcal{C}_+) &< 1.7255111001 < \frac{7}{4}, \\ \sum_{p} \mathcal{B}_p(\mathcal{E}_+) &< \frac{221}{10^{12}} < 10^{-9}, \\ \sum_{p} \mathcal{B}_p(\mathcal{Z}_+) &< 0.00808255 < \frac{1}{100}. \end{aligned}$$

将这三个估计与逐系数主控项结合起来，即可证明所有所断言的尾项界。几何估计既包含初始次数已至少为二十一的项，也包含初始次数较低、但其分母展开对尾项有贡献的项。

□

AI 使用披露。 作者承认使用 ChatGPT（GPT-6 Astra Pro）进行数学讨论、编辑协助及部分技术任务。具体而言，AI 工具协助完成了第 3 节中篇幅较长的系数展开和代数计算，包括其中使用的多项式除法、系数卷积和行列式界。AI 工具还协助完成了附录 A 中汇集的有理数证书，以及附录 B中的完整级数余项估计。图 1、 2、 3和 4 中的示意图在 AI 的协助下绘制完成。作者已核查 AI 协助完成的论证和计算，并对论文内容承担全部责任。

数据可用性。 证明中使用的所有量均在本文中给出。

利益冲突。 作者声明不存在任何利益冲突。

参考文献

[1] M. S. Ashbaugh 和 R. D. Benguria，关于固支板的瑞利猜想及其在三维中的推广，*Duke* 数学杂志 78 (1995年)，第 1 期，1–17。

[2] M. S. Ashbaugh、R. D. Benguria 和 R. S. Laugesen，固支薄板和屈曲问题的第一特征值不等式，载于 *General Inequalities 7*，《国际数值数学丛书》，第 123 卷，Birkh¨auser，巴塞尔，1997 年，第 95–110 页。

[3] M. S. Ashbaugh, D. Bucur, R. S. Laugesen, and R. Leylekian, Fourth order Saint-维南不等式：固支板的柔度与平均挠度最大化，《数学物理通讯》406 (2025)，论文编号 256。[4] M. S. Ashbaugh 和 R. S. Laugesen，固支板的基频与屈曲载荷，《比萨高等师范学院科学类年刊》(4) 23 (1996)，第 2 期，383–402。[5] L. Brasco、G. De Philippis 和 B. Velichkov，尖锐定量形式的法贝尔–克拉恩不等式，Duke 数学杂志 164 (2015)，第 9 期，1777–1831。[6] H. Brezis，《泛函分析、索伯列夫空间与偏微分方程》，Universitext，施普林格，纽约，2011。[7] D. Bucur 和 R. S. Laugesen，振动板的瑞利猜想：更简洁的平面证明与非线性推广，预印本，2026。arXiv:2610.29840。[8] L. M. Chasman 和 J. J. Langford，高斯空间中的固支板，《纯粹与应用数学年刊》(4) 195 (2016)，1977–2005。[9] F. W. J. Olver、A. B. Olde Daalhuis、D. W. Lozier、B. I. Schneider、R. F. Boisvert、C. W. Clark、B. R. Miller、B. V. Saunders、H. S. Cohl 和 M. A. McClain（编），《美国国家标准与技术研究院数学函数数字图书馆》，第 5 章和第 10 章：伽马函数与贝塞尔函数，版本 1.2.8，2026年9月15日。[10] V. Felli 和 G. Romani，带小孔区域中的多重调和算子受扰特征值，《变分法与偏微分方程》62 (2023)，第 4 期，论文编号 128。[11] P. Freitas 和 R. Leylekian，张力作用下固支板的极值问题，《纯粹与应用数学杂志》208 (2026)，论文编号 103867。[12] F. Gazzola、H.-C. Grunau 和 G. Sweers，《多重调和边值问题：有界区域中的保正性与非线性高阶椭圆方程》，数学讲义，第 1991 卷，施普林格，柏林，2010。[13] A. Henrot，《椭圆算子特征值的极值问题》，数学前沿，Birkhäuser，巴塞尔，2006。[14] T. Kato，具有奇异势的薛定谔算子，《以色列数学杂志》13 (1972)，135–148。[15] R. Leylekian，导出固支板瑞利猜想的充分条件，《纯粹与应用数学年刊》(4) 203 (2024)，第 6 期，2529–2547。[16] R. Leylekian，关于固支板瑞利猜想中球的最优性，《数学分析与应用档案》248 (2024)，论文编号 28。

[17] L. Lorch，贝塞尔函数交叉乘积零点的单调性，《分析方法与应用》1 (1994)，75–80。[18] N. S. Nadirashvili，关于固支板主频率的瑞利猜想，《数学分析与应用档案》129 (1995)，第 1 期，1–10。[19] J. W. Strutt（瑞利勋爵），《声学理论》，第 I 卷，麦克米伦，伦敦，1877；第 2 版，1894，第 382 页。[20]D. Suragan，四维和五维中的瑞利猜想，预印本，2026。arXiv:2611.11250。[21] G. Szegő，关于膜与板，《美国国家科学院院刊》36 (1950)，第 3 期，210–216。[22] G. Talenti，椭圆方程与重排，《比萨高等师范学院科学类年刊》(4) 3 (1976)，第 4 期，697–718。[23] G. Talenti，关于固支板的第一特征值，《纯粹与应用数学年刊》(4) 129 (1981)，265–280。[24] W. P. Ziemer，《弱可微函数：索伯列夫空间与有界变差函数》，《数学研究生教材》第 120 卷，施普林格，纽约，1989。